La ecuación de Monge-Ampère

Trabajo de iniciación a la investigación

Sosa, Nicolás

Director: Dr. Federico Tournier

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata

1/12/2017

0. Agradecimientos

Primero que nada, quiero agradecer a toda mi familia que me apoyó en el transcurso, no sólo de escribir esto, sino en toda la vida. A mis dos hermanitos que me miran y protegen desde el cielo.

También, agradezco a todos los amigos que se unieron a mi, al caminar todos los obstaculos.

Y, finalmente, agradezco a Bill Finger y a Bob Kane.

Índice

1. Introducción

Como su nombre lo indica, el siguiente trabajo habla de la ecuación diferencial de Monge-Ampère, la cual es:
dada f, queremos encontrar una función suave u que resuelva

$$\det D^2 u = f$$

donde D^2 es la matriz Hessiana.

Vamos a considerar dos problemas:

I) Dada una función $f \in C(\Omega)$, cumpliendo que $\lambda \leq f \leq \Lambda$ y, dada $g \in C(\partial\Omega)$, resolvemos el problema

$$\begin{array}{ll} \det D^2 u(x) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{array}$$

Y a este problema lo resolvemos en forma generalizada usando el subdiferencial

$$|\nabla u(E)| = \int_E f(x)dx, \quad \forall E \subset \Omega$$

cumpliendo que $u \in C(\overline{\Omega}), u = g$ en $\partial\Omega$, donde $\nabla u(x)$ es en sentido generalizado.

II) Dada una función $f \in C(\Omega)$, cumpliendo que $\lambda \leq f \leq \Lambda$ y, dados dos conjuntos Ω y Ω^* y resolvemos el problema

- $\det D^2 u(x) = f(x)$
- $\nabla u(\Omega) = \Omega^*$

De estos dos problemas, vemos la existencia de soluciones generalizadas.

Además, vemos la regularidad:

I) Las soluciones generalizadas al problema 1 son, en principio, sólo continuas. Si asumimos que

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

logramos demostrar que $u \in C^1(\Omega)$

II) En el segundo problema, también demostramos que la solución $u \in C^1(\Omega)$.

En el segundo capítulo damos un pequeño vistazo a algunos resultados que utilizaremos más adelante, tales como propiedades de las funciones convexas e incluso la definición de subdiferencial de una función.

En el siguiente capítulo, nos adentramos más de lleno en el subdiferencial de una función. Al principio, vemos ciertas propiedades que posee, pasando por la transformada de Legendre, ciertas propiedades de soluciones generalizadas y terminamos con teoremas donde el subdiferencial es fundamental.

Ya en el cuarto capitulo, vemos el problema de Dirichlet de dos maneras distintas: El primer caso es el llamado "homogéneo", donde le pedimos que la medida del subdiferencial sea nulo; y el segundo caso, el "no homogéneo", lo resolvemos para el caso donde le pedimos una medida al subdiferencial.

Ya en el capitulo 5, aquí comenzamos a hablar de elipsoides de volumen mínimo, para conseguir la definición de normalización de un conjunto. Además, también vemos propiedades de comparabilidad entre el subdiferencial y la función, incluyendo un resultado muy interesante de doctor Luis Caffarelli.

Capitulo 6. Aquí, nos centramos a ver la regularidad de la solución del primer problema que nos planteamos, vajo la restricción de que la función solución u es cero en $\partial\Omega$.

En el siguiente capítulo, nos adentramos en el segundo problema que planteamos en este trabajo. Tras dar las hipotesis necesarias, también brindamos la solución y una variedad de ejemplos gráficos.

Capitulo 8. Lo que buscamos aquí es salir de la descomposición de sumas delta que utilizamos en el segundo problema y extender a todo el dominio. Además, extendemos toda la función para terminar como una función difenida en $\mathbb{R}^n$.

En el último capítulo, nos dedicamos a ver que la regularidad de la función que resuelve el segundo ploblema planteado.

2. Preliminares

En este capitulo, nos centraremos pura y exclusivamente en las primeras definiciones y propiedades que utilizaremos en todo el trabajo. Empezamos viendo la definición de convexidad, tanto en conjunto como en funciones, para luego ver las consecuencias de la convexidad en diferentes ámbitos, para luego desembocar en la definición de subdiferencial.

2.1. Primeras definiciones y observaciones

Definición 2.1. *El conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es* ***convexo*** *si para todo $x, y \in \Omega$, el segmento abierto que une a x con y se mantiene en Ω. Y decimos que Ω es* ***estrictamente convexo*** *si para todo $x, y \in \overline{\Omega}$, el segmento abierto que une a x con y se mantiene en Ω.*

Definición 2.2. *La suma vectorial*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

se llama ***combinación convexa*** *de $x_1, \ldots, x_n$ si los coeficientes λ_i son no negativos y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

Definición 2.3. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo y una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, decimos que u es convexa, si $\forall x, y \in \Omega$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que*

$$u((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)u(x) + \lambda u(y).$$

Definición 2.4. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto, llamamos* ***cápsula convexa*** *al conjunto de todas las convinaciones convexas de A.*

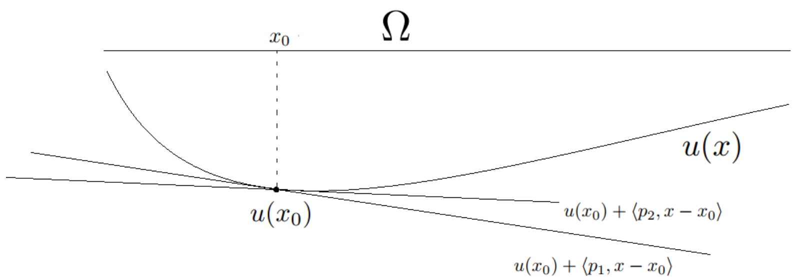
Definición 2.5. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una* ***función afín*** *si existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un vector $c \in \mathbb{R}^m$ tales que*

$$f(x) = Ax + c$$

Definición 2.6. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \Omega$, un* ***hiperplano soporte*** *de la función u en el punto $(x_0, u(x_0))$ es una función afín $l(x) = u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle$ de manera que $u(x) \geq l(x), \ \forall x \in \Omega$.*

Definición 2.7. *El* ***subdiferencial*** *de u en el punto $x_0 \in \Omega$ es $\partial u(x_0) = \{p : u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle, \ \forall x \in \Omega\}$. Dado $E \subset \Omega$, definimos el subdiferencial del conjunto E como*

$$\partial u(E) = \bigcup_{x \in E} \partial u(x).$$

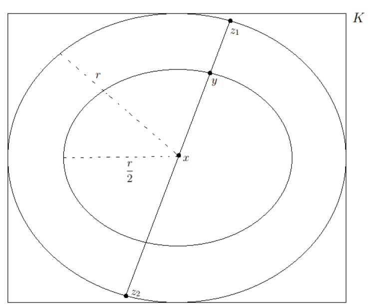


Teorema 2.1. *Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si u es convexa, entonces u es continua.*

Demostración. Consideremos K un "cubito" de $\mathbb{R}^n$ de manera que $K \subset \Omega$, y sea $B_r(x)$ tal que $B_r(x) \subset K$, y consideremos que $|u| \leq M$ en K. Sea $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ y sean $z_1, z_2 \in \partial B_r(x)$ de manera que

- $y = (1 - \lambda)x + \lambda z_1$
- $x = (1 - t)y + t z_2$

con $t, \lambda \in [0, 1]$.



Con esto, podemos conseguir

$$\begin{array}{ll} y = x - \lambda x + \lambda z_1 & x = y - ty + tz_2 \\ y - x = \lambda(z_1 - x) & x - y = t(z_2 - y) \\ |x - y| = |\lambda||z_1 - x| = |\lambda| r & |y - x| = |t||z_2 - y| \geq |t| r \end{array}$$

Por otro lado, debido a que u es convexa,

$$\begin{array}{ll} u(y) \geq (1 - \lambda)u(x) + \lambda u(z_1) & u(x) \geq (1 - t)u(y) + tu(z_2) \\ u(y) - u(x) \geq \lambda(u(z_1) - u(x)) & u(y) - u(x) \leq t(u(y) - u(z_2)) \end{array}$$

juntamos todo y tenemos

$$|u(y) - u(x)| \leq_{\star^1} 2M \max\{\lambda, t\} \leq_{\star^2} 2M \frac{|y - x|}{r}$$

donde $\star^1$ es porque u es acotada y $\star^2$ es debido a que para eso juntamos los módulos arribita.
Por lo tanto, conseguimos que u es lipschitz, y, por lo tanto, u es continua.

□

Observación 2.1. *Sea u una función convexa, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Luego, dado $K \subset \Omega$, resulta que u es acotada en K.*

Teorema 2.2. *Si $\partial u(x)$ tiene un sólo punto para cada $x \in \Omega$, entonces podemos afirmar que $u \in C^1(\Omega)$.*

Demostración. Para ver la demostración de esto, vamos a verlo de a pasos y la conclusión final será la validez del teorema.

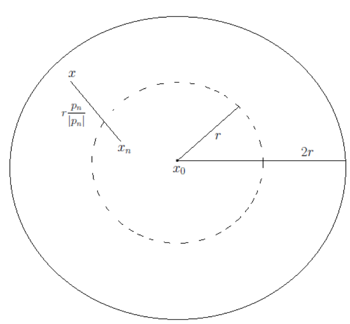
I) Dada la suceción $\{x_n\} \subset \Omega$ de manera que $x_n \to x_0 \in \Omega$ y, bajo las hipotesis del terema, podemos afirmar que

$$p_n := \partial u(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial u(x_0) := p_0.$$

Supongamos que no, que $p_n \not\to p_0$. Entonces, $\exists \epsilon > 0$ y, una subsucesión p_{n_k} tal que $|p_{n_k} - p_0| \geq \epsilon$.

Primero, tenemos que $\{p_n\}$ es una sucesión convergente y, por ende, acotada. En efecto, dado que Ω es abierto, consideremos $\overline{B_{2r}}(x_0) \subset \Omega$. Por ser u convexa, por la observación de arriba, tenemos que $|u| \leq M$ en $\overline{B_{2r}}(x_0)$. Y como $x_n \to x_0$, tenemos que $\exists n_0 : \ \forall n \geq n_0$,
$x_n \in B_r(x_0)$.

Ahora bien, tomemos $x \in \overline{B_{2r}}(x_0)$. De esta manera, ya elejido x, podemos escribir $x = x_n + r\dfrac{p_n}{|p_n|}$ donde $p_n \in \partial u(x_n)$.



Entonces, tenemos que

$$u(x) \geq u(x_n) + \langle p_n, x - x_0 \rangle$$

reemplazamos la expresión de x

$$u(x) \geq u(x_n) + \langle p_n, \cancel{x_n} + r\frac{p_n}{|p_n|} \cancel{- x_n} \rangle$$

$$u(x) - u(x_n) \geq \frac{r}{|p_n|} \langle p\_n, p_n \rangle$$

y tenemos, usando que $|u| \leq M$,

$$2M \geq u(x) - u(x_n) \geq \frac{r}{|p_n|} \langle p_n, p_n \rangle$$

me quedo con los términos de los extremos y

$$\frac{2M}{r} \geq \frac{|p_n|^{\cancel{2}}}{\cancel{|p_n|}}$$

y, podemos concluir que p_n es una sucesión acotada.
Usando esto, también tenemos que hay una subsucesión $\{p_{n_{k_j}}\}$ acotada. Supongamos que $p_{n_{k_j}} \to \tilde{p}$. Sin embargo, tenemos que

$$u(x) \geq u(x_{n_{k_j}}) + \langle p_{n_{k_j}}, x - x_{n_{k_j}} \rangle, \ \forall x \in \Omega, \ \forall p_{n_{k_j}}.$$

Tomamos límite y usamos la convergencia de la sucesión y llegamos a

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle \tilde{p}, x - x_0 \rangle, \ \forall x \in \Omega$$

y de esta forma, tenemos que $\tilde{p} \in \partial u(x_0)$. Pero, debido a que estamos bajo las hipotesis del teorema, tenemos que $\partial u(x_0)$ tiene un sólo punto, así que concluimos que $\tilde{p} = p_0$. Así, $p_{n_{k_j}} \to p_0$; pero $|p_{n_{k_j}} - p_0| \geq \epsilon \ \forall n_{k_j}$, y así llegamos a una contradicción debido a suponer que $p_n \not\to p_0$.
Conclusión, tenemos que $p_n \to p_0$.

II) Nuevamente, bajo las hipotesis del teorema, vamos a ver que

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{u(x) - u(x_0) - \langle p_0, x - x_0 \rangle}{x - x_0} \right| = 0.$$

Sea $x_n \to x_0$ y $p_n = \partial u(x_n)$. Tenemos

- $u(x_0) \geq u(x_n) + \langle p_n, x_0 - x_n \rangle$
- $u(x_n) \geq u(x_0) + \langle p_0, x_n - x_0 \rangle$

Si invertimos la desigualdad en la primera ecuación, conseguimos que

$$-u(x_0) \leq -u(x_n) - \langle p_n, x_0 - x_n \rangle.$$

Ahora, tomamos la segunda ecuación y pasamos todo de un mismo lado para que quede mayor que cero.

$$0 \leq u(x_n) - u(x_0) - \langle p_0, x_n - x_0 \rangle$$

y reemplazamos con la desigualdad invertida que conseguimos

$$0 \leq u(x_n) - u(x_0) - \langle p_0, x_n - x_0 \rangle \leq \cancel{u(x_n)} - \cancel{u(x_n)} - \langle p_n, x_0 - x_n \rangle - \langle p_0, x_n - x_0 \rangle =$$

$$\langle p_n, x_n - x_0 \rangle - \langle p_0, x_n - x_0 \rangle = \langle p_n - p_0, x_n - x_0 \rangle \leq_{\star^1} |p_n - p_0||x_n - x_0|$$

donde $\star^1$ es por el cos del ángulo entre los dos vectores. De esta manera, juntando todo tenemos que

$$0 \leq \left| \frac{u(x_n) - u(x_0) - \langle p_0, x_n - x_0 \rangle}{x_n - x_0} \right| \leq \frac{|p_n - p_0|\cancel{|x_n - x_0|}}{\cancel{|x_n - x_0|}} =$$

$$|p_n - p_0| \underset{n \longrightarrow \infty}{\rightarrow} 0.$$

Finalmente, concluimos que u es diferenciable.

III) Bajo las hipotesis del teorema, tenemos que

$$\nabla u(x) \text{ es continuo y } \nabla u(x_0) = p_0$$

Por la diferenciabilidad, tenemos la segunda afirmación. Ahora, para la primera, queremos ver continudad. Bueno, sea x_n una sucesión de manera que $x_n \to x$. Quiero ver que $p_n \to p$, donde $p = \nabla u(x)$. Pero, ya vimos que en el punto $I)$ que definitivamente converge bien todo, asi que podemos afirmar que $\nabla u(x)$ es continuo.

Con estas tres cosas, podemos afirmar el teorema. □

Hablemos un poco de las matrices Hessianas de las funciones convexas.

Teorema 2.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una abierto convexo y sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$. Entonces, u es una función convexa sí y solo sí*

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \geq 0, \;\; \forall x \in \Omega, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

es decir, la matriz Hessiana es semidefinida positiva $\forall x \in \Omega$.

Demostración.
- $\Rightarrow)$

Sea $x \in \Omega$ y tomemos $\xi \in \mathbb{R}^n$.Definamos

$$\phi(t) = u(x + t\xi), \text{ con } t \in [-\epsilon, \epsilon]$$

Calculemos las derivadas.

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x + t\xi)}{\partial x_i} \xi_i$$

$$\phi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x + t\xi)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j.$$

Ahora, como u es convexa, tenemos que ϕ es convexa, y así, $\phi'' \geq 0$ para todo t. En particular, para $t = 0$. Entonces

$$\phi(0)'' \geq 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \geq 0$$

y así conseguimos lo que buscabamos.

- $\Leftarrow$)

  Por un lado, gracias al teorema de Taylor, tenemos que, para $x_0 \in \Omega$

$$u(x) = u(x_0) + \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(\tilde{x})}{\partial x_j \partial x_j} (x_i - x_{0_i})(x_j - x_{0_j})$$

  con $\tilde{x} \in [x, x_0]$. Pero, por hipotesis, la sumatoria esa es ≥ 0, entonces conseguimos que

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle.$$

  Ahora, afirmamos que esa desigualdad impica que u es convexa.
  En efecto, para ver la definición clásica deconvexidad, tomemos $x \neq y$ y sea $t \in [0, 1]$. Llamemos $x_0 = tx + (1 - t)y$. Por lo que tenemos afirmado

  a) $u(x) \geq u(x_0) + \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle$
  b) $u(y) \geq u(x_0) + \langle \nabla u(x_0), y - x_0 \rangle$

  Multiplicamos la primera desigualdad por t y la segunda desigualdad por $(1 - t)$. Despues, sumamos a ambos lados y conseguimos la desigualdad de convexidad.

$\square$

Teorema 2.4. *Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétricas, definidas positivas. Entonces, tenemos que*

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$$

Demostración. Lo veremos por casos.

- Consideremos $A = Id, B = Diag(\lambda_i), \lambda_i > 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$\det(A + B) = \det(Id + Diag(\lambda_i)) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) \leq$$

$$1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A) + \det(B)$$

- Consideremos $A = Id, B$ bajo las hipotesis. Entonces

$$\det(A+B) = \det(Id+B) =_{\star^1} \det(Id+\varphi D\varphi^{-1}) =_{\star^2}$$
$$\det(\varphi(\varphi^{-1}\varphi + D)\varphi^{-1}) =_{\star^3} \det(\varphi)\det(Id+D)\det(\varphi^{-1})$$

  Para

  - $\star^1$ Teorema de diagonalizaión
  - $\star^2$ Factor común
  - $\star^3$ Producto de determinantes.

  Y caemos en el caso anterior.

- Consideremos A, B bajo las hipotesis. Entonces

$$\det(A+B) =_{\star^1} \det(A(Id+A^{-1}B)) =_{\star^2} \det(A)\det(Id+A^{-1}B)$$

  Para

  - $\star^1$ Factor común
  - $\star^2$ $A^{-1}B$ sigue estando dentro de las hipotesis.

  Y caemos en el caso anterior.

□

Definición 2.8. *La **delta de Kronecker** es una función de dos variables que vale 1 si son iguales y 0 si son diferentes.*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Observación 2.2. *Si tenemos un conjunto de dimensión estricamente menor que n, la medida de ese conjunto es nula.*

Observación 2.3. *El borde de un conjunto es de al menos una dimensión menos que el conjunto.*

Definición 2.9. *La **Medida de Dirac** es una medida δ_x en un conjunto $\mathcal{X}$ definida de manera que dado $x \in \mathcal{X}$ y cualquier conjunto $A \subset \mathcal{X}$ medible, tenemos*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

Definición 2.10. *Sea μ una medida de Borel sobre un conjunto E, de manera que $\mu(E) \leq \infty$. Decimos que a μ lo podemos descomponer en suma de masas delta si, existen $x_i \in E$, $i = 1, \dots, N$ tales que*

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}$$

con $a_i > 0$ y δ_{x_i} es la medida de Dirac.

3. Propiedades y resultados del subdiferencial

Ahora, nos dedicaremos un poco al estudio del conjunto subdiferencial.

El conjunto $\partial u(x_0)$ puede ser vacio. Sea $S = \{x \in \Omega : \partial u(x) \neq \emptyset\}$.
Si $u \in C^1(\Omega)$, convexa y $x \in S$, entonces $\partial u(x) = Du(x)$, el gradiente de u en x, lo que significa que cuando u es diferenciable, el subdiferencial es básicamente el gradiente. Si $u \in C^2(\Omega)$ y $x \in S$, entonces el Hessiano de u es definido no negativo, esto es $D^2u(x) \geq 0$. Esto se refiere a que si u es C^2, entonces S es el conjunto donde el gráfico de u es cóncavo hacia arriba.
Desde luego, por el teorema de Taylor, $u(x+h) = u(x)+Du(x)h+\dfrac{1}{2}\langle D^2u(\xi)h, h\rangle$, donde ξ se encuentra en el segmento entre x y $x + h$.
Como $u(x + h) \geq u(x) + Du(x)h$ para toda h lo suficientemente chica, queda demostrado.

Proposición 3.1. ***Monotonía***

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo y abierto, y sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función convexa. Dados $p \in \partial u(x)$ y $q \in \partial u(y)$, tenemos que

$$\langle p - q, x - y\rangle \geq 0.$$

Demostración. Como p y q son subdiferenciales, se cumple que, para todo $z \in \Omega$

$$u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x\rangle$$

$$u(z) \geq u(y) + \langle q, z - y\rangle.$$

Como esto vale para todo $z \in \Omega$, reemplazamos por y el z de la primera ecuación y por x en la segunda ecuación.

$$u(y) \geq u(x) + \langle p, y - x\rangle$$
$$u(x) \geq u(y) + \langle q, x - y\rangle.$$

Entonces, empezamos por la primera ecuación

$$u(y) \geq u(x) + \langle p, y - x\rangle \Rightarrow_{\star^1} u(y) \geq u(y) + \langle q, x - y\rangle + \langle p, y - x\rangle$$

donde $\star^1$ es reemplazando $u(x)$ por lo que es la segunda ecuación. Entonces, pasamos $u(y)$

$$0 \geq \langle q, x - y\rangle + \langle p, y - x\rangle$$
$$0 \geq -\langle q, y - x\rangle + \langle p, y - x\rangle$$
$$0 \geq \langle p, y - x\rangle - \langle q, y - x\rangle$$
$$0 \geq \langle p - q, y - x\rangle$$

Y así, pasando para el otro lado, tenemos que $\langle p - q, x - y\rangle \geq 0$

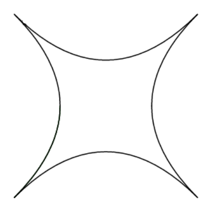
□

Lema 3.1. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $u \in C(\Omega)$ y $K \in \Omega$ es compacto, entonces $\partial u(K)$ es compacto.*

Demostración. Sea $p_k \subset \partial u(K)$ una sucesión. Decimos que p_k es acotada, pues ya lo vimos en una demostración del preámbulo, más especificamente, en el teorema 2.2.

Por lo tanto, existe una subsucesión convergente $p_{k_m} \to p_0$. Decimos que $p_0 \in \partial u(K)$. Probaremos que $p_0 \in \partial u(x_0)$, con x_0 el mismo x_0 de la parte de la demostración del teorema 2.2. Tenemos que
$u(x) \geq u(x_{k_m}) + \langle p_{k_m}, x - x_{k_m} \rangle, \ \forall x \in \Omega$ y, como u es continua, si tomamos $m \to \infty$ obtenemos que $u(x) \geq u(x_0) + \langle p_0, x - x_0 \rangle, \ \forall x \in \Omega$. Por lo tanto, $p_0 \in \partial u(x_0)$ y esto completa la demostración del lema. □

Observación 3.1. *Dado $x_0 \in \Omega$, el conjunto $\partial u(x_0)$ es convexo. Sin embargo, si $K \subset \Omega$, K convexo, entonces el conjunto $\partial u(K)$ puede no ser convexo.*
Por ejemplo, dada $u(x) = e^{|x|^2}$ y $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n\}$, el conjunto $\partial u(K)$ es un conjunto simétrico con forma de estrella alrededor del origen que no es convexo.



Lema 3.2. *Si u es una función convexa en Ω, $K \subset \Omega$ compacto, entonces u es uniformemente Lipschitz en K.*

Demostración. Como u es convexa, u tiene un hiperplano soporte en cualquier punto $x \in \Omega$. Sea $C = sup\{|p| : p \in \partial u(K)\}$. Por el lema anterior, $\partial u(K)$ es compacto, $C < \infty$. Si $x \in K$, entonces
$u(y) \geq u(x) + \langle p, y - x \rangle$, para $p \in \partial u(x)$ y para todo $y \in \Omega$. En particular, si $y \in K$, entonces $-\langle p, x - y \rangle \geq u(y) - u(x) \geq \langle p, y - x \rangle$, con lo cual,
$u(y) - u(x) \leq -|p||x - y|$. Si cambiamos los roles de x e y, conseguimos que $u(x) - u(y) \leq -|p||y - x|$, concluyendo lo que pedía el lema.

□

Definición 3.1. *La **transformada de Legendre** de una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es la función $u^\star : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u^\star(p) = \sup_{x \in \Omega} \{\langle x, p \rangle - u(x)\}$$

Observación 3.2. *Si Ω es acotado, entonces $u^\star$ esta bien definida. Además, $u^\star$ es convexa en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Veamos la convexidad de la transformada (lo de bien definida sale mirando). Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$, y sea $t \in (0,1)$. Entonces,

$$(1-t)u^\star(p) + tu^\star(q) = (1-t)\sup_{x\in\Omega}(xp - u(x)) + t\sup_{x\in\Omega}(xq - u(x)) =_{\star^1}$$

$$\sup_{x\in\Omega}((1-t)(xp-u(x))) + \sup_{x\in\Omega}(t(xq-u(x))) \geq_{\star^2} \sup_{x\in\Omega}(xp - txp - u(x) \cancel{+tu(x)} + xqt \cancel{-tu(x)}) =$$

$$\sup_{x\in\Omega}((1-t)xp + txq - u(x)) = \sup_{x\in\Omega}(x((1-t)p + tq)) - u(x)) = u^\star((1-t)p + tq)$$

Donde $\star^1$ es porque como el supremo se toma en x, en t no molesta, $\star^2$ es porque la suma de los supremos es mayor que el supremo de la suma y haciendo álgebra. ☐

Observación 3.3. *Dada u una función convexa, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, y consideramos $u^\star$ la transformada de Legendre de la función u,*
entonces se puede afirmar que si $p_0 \in \partial u(x_0)$, al transformar u tenemos que $x_0 \in \partial u^\star(p_0)$.

Demostración. Sea $p_0 \in \partial u(x_0)$. Quiero ver que $x_0 \in \partial u^\star(p_0)$, osea que
$u^\star(p) \geq u^\star(p_0) + \langle x_0, p - p_0\rangle$.

Bien, veamoslo de la siguiente manera:

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p_0, x - x_0\rangle \to u(x) \geq u(x_0) + \langle p_0, x\rangle - \langle p_0, x_0\rangle.$$

Hacemos despejes y tenemos que

$$\langle p_0, x\rangle - u(x) \leq \langle p_0, x_0\rangle - u(x_0)$$

y como todo esto ocurre para todo x, tenemos que

$$\sup\{\langle p_0, x\rangle - u(x)\} = \langle p_0, x_0\rangle - u(x_0)$$

concluyendo que $u^\star(p_0) = \langle p_0, x_0\rangle - u(x_0)$.

Ahora bien, entonces, tenemos que

$$u^\star(p) \geq \langle p, x_0\rangle - u(x_0)$$

$$u^\star(p) \geq \langle p, x_0\rangle - u(x_0) \pm \langle p_0, x_0\rangle$$

$$u^\star(p) \geq \langle p, x_0\rangle - \langle p_0, x_0\rangle + \underbrace{\langle p_0, x_0\rangle - u(x_0)}_{u^\star(p_0)}$$

con lo cual, nos quedamos con

$$u^\star(p_0) \geq \langle p - p_0, x_0\rangle + u^\star(p_0).$$

Concluimos así, tras hacer un pequeño despeje, que $x_0 \in \partial u^\star(p_0)$.

☐

Lema 3.3. *Si Ω es abierto y u es una función continua en Ω, entonces el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que pertenecen a la imagen del subdiferencial en más de un punto de Ω tiene medida de Lesbesgue cero. Esto es, el conjunto*

$$S = \{p \in \mathbb{R}^n : \exists\ x, y \in \Omega,\ x \neq y \text{ y } p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}$$

tiene medida cero.

Esto también significa que el conjunto de los hiperplanos soportes que tocan al gráfico de u en más de un punto tiene medida nula.

Demostración. Primero, veamos lo siguiente:

$$S \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \partial u^\star(p) \text{ tiene más de un punto}\}.$$

Sea $p \in S$. Entonces, por la observación anterior, tenemos que $x \in \partial u^\star(p)$ y $y \in \partial u^\star(p)$. Así, tenemos que p pertenece al conjunto que $\partial u^\star(p)$ tiene más de un punto. Así conseguimos lo que queríamos ver.

Como la transformada de Legendre cumple que es convexa y todas las mismas propiedades que la función que transformamos, usaremos el segundo conjunto sin la $\star$.

Sea $S_k := \{x \in S : diam(\partial u(x)) \geq \frac{1}{k}\}$ y tenemos que $S = \cup_{k=1}^{\infty} S_k$. Fijemos k y veamos que $|S_k| = 0$.
Cubramos a $\mathbb{R}^n$ con esferas B_j de radio $\frac{1}{8k}$ y llamemos

$$S_{k,j} = \{x \in S_k : \partial u(x) \cap B_j \neq \emptyset\}.$$

Primero, se cumple que $S_k = \cup_{j=1}^{\infty} S_{k,j}$. Fijemos k, j y demostremos que $|S_{k,j}| = 0$.

Para poder demostrar esto, veamos que si dado $x_0 \in S_{k,j}$, existe un cono Γ con vértice en x_0 de manera que $\Gamma \cap S_{k,j} = x_0$.

Sea $p_0 \in \partial u(x_0)$ tal que $p_0 \in B_j$. Llamemos Q al centro de B_j, osea que tendriamos que $B_j = B_{\frac{1}{8k}}(Q)$. Ahora tambien, como $diam(\partial u(x_0)) \geq \frac{1}{8k}$, existe $q_0 \in \partial u(x_0)$ de manera que $|p_0 - q_0| > \frac{1}{2k}$. Ahora

$$|q_0 - Q| > \underbrace{|q_0 - p_0|}_{> \frac{4}{8k}} - \underbrace{|Q - p_0|}_{> \frac{1}{8k}} = \frac{3}{8k}.$$

Sea $C_\delta(x_0) = \{x : \text{ ángulo } \langle x - x_0, q_0 - p_0\rangle < \delta\}$ (Esto es el cono Γ). Dado $x \in C_\delta(x_0)$, veamos que $x \notin S_{k,j}$.
Tomemos $p \in \partial u(x)$, entonces tenemos

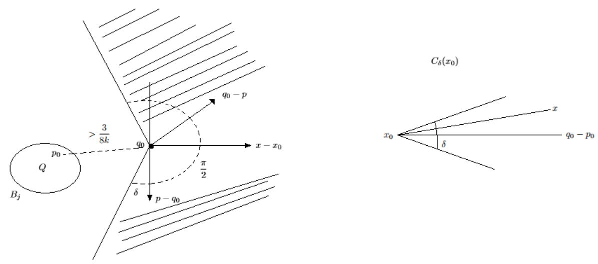
- $p \in \partial u(x)$
- $q_0 \in \partial u(x_0)$

Por la monotonía del subdiferencial, tenemos que $\langle p - q_0, x - x_0\rangle \geq 0$, con lo cual,

$$\text{ángulo } \langle p - q_0, x - x_0\rangle \leq \frac{\pi}{2}.$$

Con todo esto, decimos que

$$\text{ángulo } \langle p-q_0, q_0-p_0\rangle \leq \text{ ángulo } \langle p-q_0, x-x_0\rangle + \text{ ángulo } \langle x-x_0, q_0-p_0\rangle \leq \frac{\pi}{2}+\delta.$$



De esta manera, tenemos que $p \notin B_j$. Por lo tanto, dado $x \in \Gamma$, tenemos que $\partial u(x) \cap B_j = \emptyset$. Luego, $x \notin S_{k,j}$ y así, $\Gamma \cap S_{k,j} = x_0$, con lo que

I) $|S_{k,j}| = 0$.

II) $|S_k| = 0$.

III) $|S| = 0$.

y conseguimos lo que queríamos ver. □

Teorema 3.1. *Si Ω es un abierto y $u \in C(\Omega)$, entonces la clase*

$$\mathcal{S} = \{E \subset \Omega : \partial u(E) \text{ es medible Lesbesgue}\}$$

es una σ-álgebra de Borel. El conjunto de funciones $Mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$Mu(E) = |\partial u(E)|$$

es una medida, finita en compactos, que es llamada ***medida Monge-Ampère asociada a la función u***

Demostración. Por el lema 3.1, la clase $\mathcal{S}$ contiene todos los subconjuntos compactos de Ω. Además, si E_m es una sucesión de subconjuntos de Ω, entonces $\partial u(\cup_m E_m) = \cup_m \partial u(E_m)$. Luego, si $E_m \in \mathcal{S}$, $m = 1, 2, \ldots$, entonces $\cup_m E_m \in \mathcal{S}$. En particular, escribimos $\Omega = \cup_m K_m$ con K_m compacto y obtenemos que $\Omega \in \mathcal{S}$. Nos falta sólo ver que si $E \in \mathcal{S}$ entonces $\Omega \backslash E \in \mathcal{S}$. Usamos la siguiente fórmula que es válida para cualquier conjunto $E \subset \Omega$:

$$\partial u(\Omega \backslash E) = (\partial u(\Omega) \backslash \partial u(E)) \cup (\partial u(\Omega \backslash E) \cap \partial u(E))$$

Por el lema anterior, $|\partial u(\Omega \backslash E) \cap \partial u(E)| = 0$ para cualquier conjunto E. Entonces, en la ecuación anterior nos queda

$$|\partial u(\Omega \backslash E)| = |(\partial u(\Omega) \backslash \partial u(E))|$$

obteniendo así que $\Omega \backslash E \in \mathcal{S}$ siempre que $E \in \mathcal{S}$.

Veamos ahora que Mu es σ-aditiva. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos disjuntos en $\mathcal{S}$ y llamemos $\partial u(E_i) = H_i$. Queremos ver que

$$\left| \partial u(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|$$

Como $\partial u(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \cup_{i=1}^{\infty} H_i$, veremos que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|$$

Como $E_j \cap E_j = \emptyset$ con $i \neq j$, por el lema anterior conseguimos que $|H_i \cap H_j| = 0$ para $i \neq j$.
Escribamos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = H_i \cup (H_2 \backslash H_1) \cup (H_3 \backslash (H_2 \cup H_1)) \cup \ldots$$

donde los conjuntos de la derecha de la igualdad son disjuntos. Ahora

$$H_n = [H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \ldots \cup H_1)] \cup [H_n \backslash (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \ldots \cup H_1)].$$

Entonces, nuevamente por el lema anterior $|H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \ldots \cup H_1)| = 0$ y obtenemos

$$|H_n| = |H_n \backslash (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \ldots \cup H_1)|$$

En consecuencia, al ser disjuntos, tenemos que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|$$

y la prueba del teorema se completa. □

Observación 3.4. *Si $u \in C^2(\Omega)$ es una función convexa, entonces la medida de Monge-Ampère Mu asociada a u satisface que*

$$Mu(E) = \int_E \det D^2 u(x) dx,$$

para todo conjunto E boreliano.

Para ver esto, vamos a usar que

Teorema 3.2. ***Teorema de Sard***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función $C^1(\Omega)$. Si llamamos $S_0 = \{x \in \Omega : \det g'(x) = 0\}$, entonces $|g(S_0)| = 0$

Demostración. **Observación anterior**

Notemos primero que como u es una función convexa y $C^2(\Omega)$, entonces Du es inyectiva en el conjunto $A = \{x \in \Omega : D^2u(x) > 0\}$.
En efecto, sean $x_1, x_2 \in A$ con $Du(x_1) = Du(x_2)$. Por convexidad $u(z) \geq u(x_i) + \langle Du(x_i), z - x_i\rangle,\ \forall z \in \Omega,\ i = 1, 2.$
Así $u(x_1) - u(x_2) = \langle Du(x_1), x_1 - x_2\rangle = \langle Du(x_2), x_1 - x_2\rangle$. Por la fórmula de Taylor podemos escribir

$$u(x_1) = u(x_2) + \langle Du(x_2), x_1 - x_2\rangle +$$

$$\int_0^1 t\langle D^2u(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2), x_1 - x_2\rangle dt.$$

Por lo tanto, la integral es cero porque es el resto de taylor y el integrando debe desaparecer para $0 \leq t \leq 1$. Como $x_2 \in A$, tenemos que $x_2 + t(x_1 - x_2) \in A$ para t chiquito. Por lo tanto, $x_1 = x_2$ para que se anule el integrando. Si $u \in C^2(\Omega)$, entonces llamamos $g = Du \in C^1(\Omega)$. Tenemos que, dado $E \subset \Omega$ boreliano, $Mu(E) = |Du(E)|$ y

$$Du(E) = Du(E \cap S_0) \cup Du(E \backslash S_0).$$

Como E es boreliano, $E \cap S_0$ y $E \backslash S_0$ son borelianos. Así, usando el teorema de Sard y la formula de cambio de variables tenemos

$$Mu(E) = Mu(E \cap S_0) + Mu(E \backslash S_0) = |Du(E \cap S_0)| + |Du(E \backslash S_0)|$$

$$|g(E \cap S_0)| + |g(E \backslash S_0)| =_\star \int_{(E \backslash S_0)} \det(Dg) dx =$$

$$\int_{(E \backslash S_0)} \det D^2u(x) dx = \int_E \det D^2u(x) dx.$$

donde $\star$ es porque al hacer cambio de variable, aparece el querido jacobiano que es la derivada, y ya teniamos una. □

3.1. Soluciones generalizadas

Definición 3.2. *Sea Ω un subconjunto abierto, convexo de $\mathbb{R}^n$ y ν una medida de Borel definida en Ω. La función convexa $u \in C(\Omega)$ es una solución generalizada, o solución de Alexandrov, para la ecuación de Monge-Ampère*

$$\det D^2u = \nu$$

si la medida de Monge-Ampère Mu asociada a u definida por

$$Mu(E) = |\partial u(E)|, \quad E \subset \Omega$$

es igual a ν.

El siguiente lema nos señala que la noción de solución generalizada es cerrada bajo limites uniformes. Esto es, si u_k son soluciones generalizadas para $\det D^2 u_k = \nu$ en Ω y $u_k \to u$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, entonces u también es una solución generalizada para $\det D^2 u = \nu$ en Ω.

Lema 3.4. *Sean $u_k \in C(\Omega)$ funciones convexas tales que $u_k \to u$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.*

Entonces:

I) Si $K \subset \Omega$ es compacto, entonces

$$\limsup_{k\to\infty} \partial u_k(K) \subset \partial u(K)$$

y en consecuencia

$$\limsup_{k\to\infty} |\partial u_k(K)| \leq |\partial u(K)|$$

II) Si K es compacto y U es un abierto tal que $K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$, entonces

$$\partial u(K) \subset \liminf_{k\to\infty} \partial u_k(U)$$

donde la desigualdad se mantiene para casi todo punto del conjunto de la izquierda, y en consecuencia

$$|\partial u(K)| \leq \liminf_{k\to\infty} |\partial u_k(U)|$$

Demostración.

I) Si $p \in \limsup_{k\to\infty} \partial u_k(K)$, entonces para cada n, existe k_n y $x_{k_n} \in K$ tal que $p \in \partial u_{k_n}(x_{k_n})$. Como K es compacto, eligiendo una subsecesión x_j de x_{k_n}, podemos asumir que $x_j \to x_0 \in K$. Queremos ver que $p \in \partial u(x_0)$. Por otro lado, tenemos

$$u_j(x) \geq u_j(x_j) + \langle p, x - x_j \rangle, \quad \forall x \in \Omega$$

y haciendo $j \to \infty$, por la convergencia uniforme en compactos, conseguimos

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \Omega$$

lo que es $p \in \partial u(x_0)$. Utilizamos convergencia uniforme debido a que tomamos el lim para la sucesión u_j como para la sucesión x_j.

Ahora bien, ya tenemos lo del límite superior, entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \partial u_k(K) \right) \subset \partial u(K),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left| \bigcup_{k=n}^{\infty} \partial u_k(K) \right| \leq |\partial u(K)|$$

y así

$$\limsup_{n\to\infty} |\partial u_n(K)| \leq |\partial u(K)|.$$

II) Sea $\mathcal{S} = \{p : p \in \partial u(x_1) \cap \partial u(x_2),\ \text{para algún } x_1 \neq x_2,\ \text{ambos en } \Omega\}$. Por le lema 2.3, tenemos que $|\mathcal{S}| = 0$. Sea $K \subset \Omega$ un compacto y consideremos $\partial u(K) \backslash \mathcal{S}$. Si $p \in \partial u(K) \backslash \mathcal{S}$, entonces existe un único $x_0 \in K$ tal que $p \in \partial u(x_0)$ y $p \notin \partial u(x_1),\ \forall x_1 \in \Omega,\ x_1 \neq x_0$. Sea U un abierto que cumpla que $K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$.

Si $x_1 \in \Omega$ y $x_1 \neq x_0$, entonces podemos afirmar que $u(x_1) > u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle$. De lo contrario, tendriamos que $u(x_1) = u(x_0) + \langle p, x_1 - x_0 \rangle$ y como $p \in \partial u(x_0)$ tenemos

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle = u(x_1) + \langle p, x - x_1 \rangle,\ \forall x \in \Omega$$

donde en la igualdad, agregamos $\pm \langle p, x_1 \rangle$ y conseguimos $u(x_1)$ y despejamos cosas, consiguiendo que $p \in \partial u(x_1)$, lo cual es imposible porque quitamos $\mathcal{S}$ de $\partial u(K)$.

Por lo tanto,

$$u(x) > u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \overline{U},\ x \neq x_0$$

y como $\overline{U}$ es compacto y $u_k \to u$ uniformemente en $\overline{U}$, tenemos que

$$u_k \geq u_k(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle + \epsilon$$

para todo $k \geq k_0$ y todo $x \in \overline{U}$ y algún $\epsilon < 0$. Ahora, sea

$$\delta_k = \min_{x \in \overline{U}} \{u_k(x) - u_k(x_0) - \langle p, x - x_0 \rangle - \epsilon\}$$

al ser $\overline{U}$ compacto, este mínimo se alcanza en algún x_k. Decimos que p es la inclinación del hiperplano soporte a u_k en el punto $(x_k, u(x_k))$. En efecto,

$$\delta_k = u_k(x_k) - u(x_0) - \langle p, x_k - x_0 \rangle - \epsilon$$

y ya que $u_k(x) \geq u_k(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle + \epsilon + \delta_k$, para todo $x \in \overline{U}$. Esto sale de sumar tanto el minimo como la ecuación de convergencia uniforme en $\overline{U}$. Hacemos álgebra y tenemos que

$$u_k(x) \geq u_k(x_k) + \langle p, x - x_k \rangle, \quad \forall x \in \overline{U}$$

Como u_k es convexa en Ω y U es abierto, la desigualdad de arriba se mantiene para todo $x \in \Omega$, esto es, $p \in \partial u_k(x_k),\ \forall k \geq k_0$. Esto implica que $p \in \liminf_{k \to \infty} \partial u_k(\overline{U})$.

Para poder ver la consecuencia, vemos que

$$\partial u(U) \subset \liminf_{k \to \infty} \partial u_k(U)$$

y, luego, como $K \subset U$, sale.

Por un lado, tenemos que

$$\partial u(U) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \partial u_k(U) \right) \cup \mathcal{S}.$$

Sea $p \in \partial u(U)$. Si $p \in \mathcal{S}$, ya está, así que tiene gracia que veamos la otra. Definamos $E_n = \cap_{k=n}^{\infty} \partial u_k(U)$. Observemos que $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$. Entonces

$$\left| \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right| = \lim_{n\to\infty} |E_n|$$

y en consecuencia,

$$|\partial u(U)| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \bigcap_{k=n}^{\infty} \partial u_k(U) \right|.$$

Ahora bien,

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} \partial u_k(U) \subset \{\partial u_k(U) : k \geq n\}$$

y así,

$$\left| \bigcap_{k=n}^{\infty} \partial u_k(U) \right| \leq |\partial u_k(U)|, \ \forall k \geq n$$

y de esta manera,

$$|\partial u_k(U)| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \{|\partial u_k(U)| : \ k \geq n\} = \liminf_{n\to\infty} |\partial u_k(U)|$$

y llegamos a lo que queríamos concluir.

□

Lema 3.5. *Si u_k son funciones convexas en Ω tales que $u_k \to u$ uniformemente en compactos de Ω, entonces la medida Monge-Ampère Mu_k asociada a u_k tiende débilmente a Mu, esto es*

$$\int_\Omega f(x) dMu_k(x) \to \int_\Omega f(x) dMu(x)$$

para toda función $f \in C(\Omega)$ de soporte compacto.

3.2. Principios del máximo

Lema 3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado, y sean $u, v \in C(\overline{\Omega})$. Si $u = v$ en $\partial\Omega$ y $v \geq u$ en Ω, entonces*

$$\partial v(\Omega) \subset \partial u(\Omega).$$

Demostración. Sea $p \in \partial v(\Omega)$. Quiero ver que $p \in \partial u(\Omega)$.
Como $p \in \partial v(\Omega)$, existe $x_0 \in \Omega$, tal que

$$v(x) \geq v(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \Omega.$$

Sea

$$a = \sup_{x\in\Omega}\{v(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle - u(x)\}$$

a viene a jugar de la mayor distancian entre u y el punto donde tomo el hiperplano con p. Como $v(x_0) \geq u(x_0)$, $a \geq 0$. Decimos que $v(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle - a$ es un hiperplano soporte de la función u en algún punto de Ω.
En efecto, como Ω es acotado, existe $y \in \overline{\Omega}$ tal que el máximo se alcanza. Es decir, que $a = v(x_0) + \langle p, y - x_0\rangle - u(y)$. Así,

$$u(x) \geq v(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle - a = u(y) + \langle p, x - y\rangle \quad \forall x \in \Omega$$

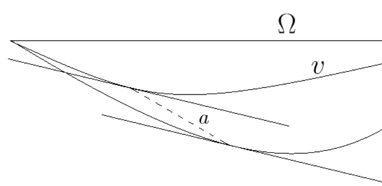
por que en el x donde está evaluado u, no se alcanzó el máximo.
Por otro lado, también tenemos que

$$v(y) \geq v(x_0) + \langle p, y - x_0\rangle = u(y) + a$$

por ser el hiperplano de v en x_0. Así, si $a > 0$, entonces $y \notin \partial\Omega$ y así queda demostrado lo que decíamos. Si $a = 0$, entonces

$$u(x) \geq v(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$$

porque $u(x) \geq v(x)$. Y así $u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$ es el hiperplano soporte a u en x_0.



□

3.3. Principio del máximo de Alexandrov

Teorema 3.3. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un onjunto convexo, acotado y abierto, con diámetro Δ; y $u \in C(\overline{\Omega})$ es una función convexa con $u = 0$ en $\partial\Omega$, entonces*

$$|u(x_0)|^n \leq C_n \Delta^{n-1} dist(x_0, \partial\Omega)|\partial u(\Omega)|$$

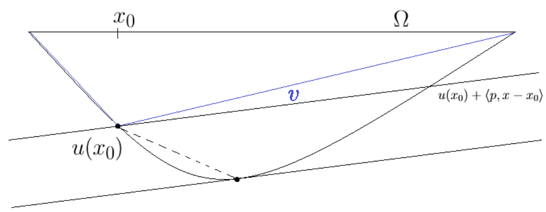
para todo $x_0 \in \Omega$, donde C_n es una constante que solo depende de la dimensión n.

Demostración. Dado $x_0 \in \Omega$, definamos

$$\Gamma_{x_0} = \{p : u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle \leq 0,\ \forall x \in \overline{\Omega}\}$$

Tenemos que $\Gamma_{x_0} \subset \partial u(\Omega)$. La demostración es, tomamos el plano $u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$ y lo vamos corriendo por u hasta que queda un hiperplano soporte.

Ahora bien, sea v el cono que tiene a $u(x_0)$ como vértice y a Ω de base.



De esta manera, tenemos que

$$\begin{array}{ll} v(x) \geq u(x) & x \in \Omega \\ v(x) = u(x) & x \in \partial\Omega \end{array}$$

por el principio del máximo, tenemos que $\partial v(\Omega) \subset \partial u(\Omega)$, y en consecuencia,

$$Mv(\Omega) \leq Mu(\Omega).$$

Por un lado, tenemos que $\Gamma_{x_0} = \partial v(x_0)$. La segunda contención es trivial, y la primera es algo así:
Sea $p \in \Gamma_{x_0}$. Entonces, $u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle \leq 0$. Pero, en x_0, $u = v$, con lo cual $v(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle \leq 0$. Pero, por la linealidad de $v(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle \leq 0$ y a que v es un cono con vértice en $v(x_0)$, tenemos que $v(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle \leq v(x)$, $\forall x \in \Omega$. Luego, $p \in \partial v(x_0)$.

Muy bien, como $\Gamma_{x_0} = \partial v(x_0)$ y $\partial v(x_0)$ es convexo por ser el subdiferencial de un sólo punto, Γ_{x_0} es convexo.

Ahora, nos transladamos a $\mathbb{R}^n$. Veamos que $B_{\frac{|u(x_0)|}{\Delta}}(0) \subset \Gamma_{x_0}$.
Sea $|p| \leq \frac{|u(x_0)|}{\Delta}$. En efecto, tomamos

$$u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle = u(x_0) + |p||x - x_0| \cos(\theta) \leq_{\star^1} u(x_0) + |p||x - x_0| \leq$$

$$u(x_0) + |p|\Delta \leq u(x_0) + \frac{|u(x_0)|}{\Delta}\Delta = u(x_0) + |u(x_0)| =_{\star^2} 0$$

con $\star^1$ porque $\cos(\theta) \leq 1$ y $\star^2$ es que $u(x_0) \leq 0$.
Luego, $B_{\frac{|u(x_0)|}{\Delta}}(0) \subset \Gamma_{x_0}$.

Volvamos a Ω. Sea $\overline{x} \in \partial\Omega$ tal que, $|\overline{x} - x| = dist(x_0, \partial\Omega)$. Tomemos $p_0 = \dfrac{|u(x_0)|\overline{x} - x_0}{|\overline{x} - x_0||\overline{x} - x_0|} = \dfrac{|u(x_0)|\overline{x} - x_0}{|\overline{x} - x_0|^2}$.

Primero, tenemos que $|p_0| = \dfrac{|u(x_0)|}{|\overline{x} - x_0|}$. (Sale a ojo)

Segundo, $p_0 \in \Gamma_{x_0}$.(Esta no tanto)
Queremos ver que $u(x_0) + \langle p_0, x - x_0 \rangle \leq 0$.
Tomemos el hiperplano $u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle$ y reemplazemos que es p_0.

$$u(x_0) + \langle \frac{\overline{x} - x_0}{|\overline{x} - x_0|^2}, x - x_0 \rangle |u(x_0)|$$

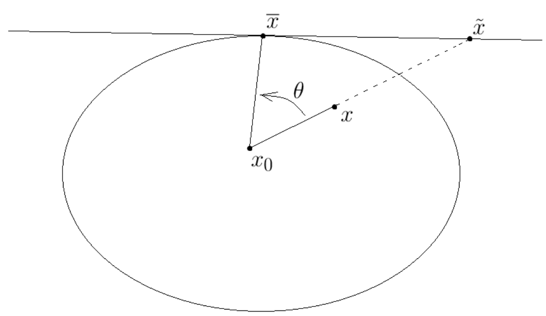
Miremos el producto interno.

$$\langle \frac{\overline{x} - x_0}{|\overline{x} - x_0|^2}, x - x_0 \rangle = \langle \frac{\overline{x} - x_0}{|\overline{x} - x_0|}, x - x_0 \rangle \frac{1}{|\overline{x} - x_0|} \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} =$$

$$\langle \cancelto{|1|}{\frac{\overline{x} - x_0}{|\overline{x} - x_0}}|, \cancelto{|1|}{\frac{x - x_0}{|x - x_0|}} \rangle \frac{|x - x_0|}{|\overline{x} - x_0|} = \frac{|x - x_0|}{|\overline{x} - x_0|} \cos(\theta)$$

Lo que vamos a ver ahora, es que $\cos(\theta) < 1$.

llamemos $\tilde{x}$ al punto que se consigue de hacer: primero, consideramos un hiperplano que pasa por $\overline{x}$ y se mantiene fuera del conjunto (esto se puede porque Ω es sonvexo). Ahora, extendemos el vector $x - x_0$ y, la intersección de esos dos, es el punto $\tilde{x}$.



Resulta que $\cos(\theta) = \frac{|\overline{x} - x_0|}{|\tilde{x} - x_0|}$. Entonces, reemplazamos ese $\cos(\theta)$ donde nos habiamos quedado y tenemos $\frac{|x - x_0|}{\cancel{|\overline{x} - x_0|}} \frac{\cancel{|\overline{x} - x_0|}}{|\tilde{x} - x_0|} = \frac{|x - x_0|}{|\tilde{x} - x_0|} \leq 1$.
Así, resulta que

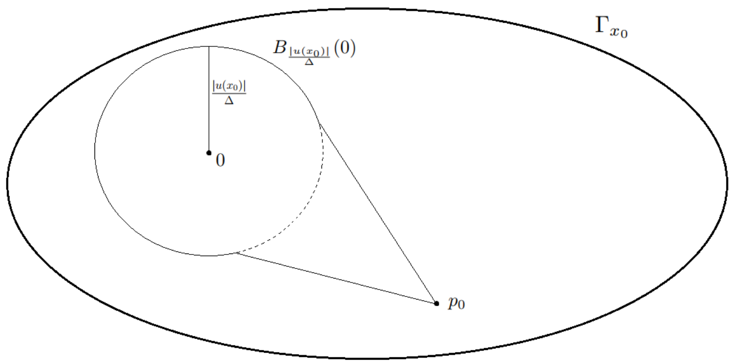
$$u(x_0) + \langle \frac{\overline{x} - x_0}{|\overline{x} - x_0|^2}, x - x_0 \rangle |u(x_0)| \leq u(x_0) + |u(x_0)|$$

y, como $u(x) < 0$ por ser convexa y 0 en el borde, tenemos que

$$u(x_0) + \langle p_0, x - x_0 \rangle \leq 0.$$

Ahora, nuevamente, volvemos a $\mathbb{R}^n$ donde están los subdiferenciales. Como habiamos visto, $|p_0| = \dfrac{|u(x_0)|}{|\overline{x} - x|}$. Y, en particular, $|p_0| \geq \dfrac{|u(x_0)|}{\Delta}$ y, en consecuencia, $p_0 \notin B_{\frac{|u(x_0)|}{\Delta}}(0)$.

Resumiendo, tenemos que $p_0 \in \Gamma_{x_0}$, pero no está en la bola de radio $\dfrac{|u(x_0)|}{\Delta}$ centrada en 0. Debido a la convexidad de Γ_{x_0}, la capsula convexa de la bola con p_0 queda dentro de Γ_{x_0}. Llamemos C a la capsula convexa esa.



Entonces, tenemos que

$$C \subset \Gamma_{x_0} = \partial v(x_0) \subset \partial u(\Omega)$$

Calculamos medidas y tenemos que

$$|C| \leq |\Gamma_{x_0}| = |\partial v(x_0)| \leq |\partial u(\Omega)|.$$

Me quedo con los extremos.
Por un lado,

$$|C| = C_n \left(\frac{|u(x_0)|}{\Delta} \right)^{n-1} \frac{|u(x_0)|}{|\overline{x} - x_0|}$$

donde C_n es una constante que depende solo de la dimensión. Entonces, si volvemos a los extremos,

$$C_n \left(\frac{|u(x_0)|}{\Delta} \right)^{n-1} \frac{|u(x_0)|}{|\overline{x} - x_0|} \leq Mu(\Omega).$$

Junto, paso el C_n y paso lo que tengo dividiendo y tenemos que

$$|u(x_0)|^n \leq Mu(\Omega)\Delta^{n-1}|\overline{x} - x|C_n$$

que es lo que queriamos ver. (Tengamos en cuenta que $|\overline{x} - x| = dist(x_0, \partial\Omega)$) $\square$

Esto que acabamos de ver, es una herramienta muy útil para todo lo que sigue. (De verdad. MUY.)

Teorema 3.4. ***Principio de comparación***

Sea $u, v \in C(\overline{\Omega})$ funciones convexas, de manera que

$$|\partial u(E)| \leq |\partial v(E)|, \quad \textit{para todo boreliano } E \subset \Omega.$$

Entonces,

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x) - v(x)\} = \min_{x \in \partial\Omega} \{u(x) - v(x)\}.$$

Demostración. Lo haremos por contradicción. Sea $a = \min_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x) - v(x)\}$ y $b = \min_{x \in \partial\Omega} \{u(x) - v(x)\}$, y asumamos que $a < b$. Entonces, existe $x_0 \in \Omega$ de manera que $a = u(x_0) - v(x_0)$. Elijamos $\delta > 0$ chiquito, tal que $\delta.(diam(\Omega)^2) < \frac{b-a}{2}$ y sea

$$w(x) = v(x) + \delta|x - x_0|^2 + \frac{b+a}{2}.$$

Consideremos $G = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) < w(x)\}$.
Observemos que $x_0 \in G$, pues

$$w(x_0) = v(x_0) + \delta\cancel{|x_0 - x_0|} + \frac{b+a}{2} = v(x_0) + \frac{b+a}{2} = v(x_0) + \frac{b + u(x_0) - v(x_0)}{2} =$$

$$\frac{b + u(x_0) + v(x_0)}{2} >_{\star^1} \frac{a + u(x_0) + v(x_0)}{2} =_{\star^2} u(x_0)$$

para $\star^1$ es porque eso estoy suponiendo y $\star^2$ es reemplazando lo que vale a.

Además, $G \cap \partial\Omega = \emptyset$. En efecto, supongamos que no, que $x \in G \cap \partial\Omega$. Resulta que, por ser el mínimo, tenemos que $u(x) - v(x) \geq b$. Así,

$$w(x) = v(x) + \delta|x - x_0|^2 + \frac{b+a}{2} \leq v(x) + \delta|x - x_0|^2 + \frac{u(x) - v(x)}{2} + \frac{a}{2} =$$

$$\frac{v(x)}{2} + \delta|x - x_0|^2 + \frac{u(x)}{2} + \frac{a}{2} \leq_{\star^1} \frac{u(x) - b}{2} + \delta|x - x_0|^2 + \frac{u(x)}{2} + \frac{a}{2} = u(x) + \delta|x - x_0|^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right) =$$

$$u(x) + \delta|x - x_0|^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right) \leq_{\star^2} u(x)$$

donde $\star^1$ es porque $u - v \geq b$, entonces $u - b \geq v$ y $\star^2$ es porque $\delta|x - x_0|^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right) < 0$.

Así, $w(x) < u(x),\ x \in \partial\Omega$, entonces $\partial G = \{x \in \Omega : u(x) = w(x)\}$.
Luego, por el principio del máximo, $\partial w(G) \subset \partial u(G)$. Tambien, $\partial w = \partial(v + \delta|x - x_0|^2)$ porque me saco de encima el número y tenemos la desigualdad

$$|\partial(v + \delta|x - x_0|^2)(G)| \geq_{\star^1} |\partial v(G)| + |\partial(\delta|x - x_0|^2)(G)|$$

donde $\star^1$ es por el teorema 2.4.
Así, si $v \in C^2$ la desigualdad sale porque tenemos que $|\partial(\cdot)|$ es $\int_G \det D^2$ y así.

En el caso de que v no es suave, podemos aproximar a v por una sucesión $v_k \in C^2$ de funciones convexas que convergen uniformemente en conjuntos compactos de Ω. Para hacer esto último, tomamos funciones suaves $\phi \geq 0$ con soporte en $B_1(0)$ y tales que $\int \phi = 1$. Con esto, hacemos $v_\epsilon = v \circ \phi_\epsilon$. Consecuentemente, usando estas funciones, por el lema 3.4 vale la desigualdad. Por lo tanto,

$$|\partial u(G)| \geq |\partial w(G)| \geq |\partial v(G)| + |\partial(\delta|x - x_0|^2)(G)| = |\partial v(G)| + (2\delta)^2|G|$$

lo que contradice con la hipotesis. □

Este teorema, si bien es medio engorroso, lo importante de él es el corolario que surge como consecuencia del mismo.

Corolario 3.1. *Bajo las mismas hipotesis y si tenemos*

$$\begin{cases} v \leq u & \text{en } \partial\Omega \\ Mv(E) \geq Mu(E) & \forall E \subset \Omega \end{cases}$$

Entonces, $v \leq u$ en Ω.

Demostración. Consideramos $v \leq u$ en $\partial\Omega$. Entonces, tenemos que $0 \leq u - v$ en $\partial\Omega$. Tomamos mínimo y conseguimos $0 \leq \min_{\partial\Omega}(u - v)$. Por el principio de comparación, tenemos que $0 \leq \min\limits_{\overline{\Omega}}(u - v)$. Entonces, $0 \leq u - v$ en Ω.
Luego, tenemos que $v \leq u$ en Ω.
□

Esto de aca arribita se usa para conseguir el siguiente corolario.

Corolario 3.2. *Si $u, v \in C(\overline{\Omega})$ son funciones convexas tales que*

$$\begin{cases} |\partial u(E)| = |\partial v(E)| & \forall E \subset \Omega \\ u = v & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

entonces, tenemos que $u = v$ en Ω.

Demostración.

- $u \leq v$ en Ω)

  Como $u = v$ en $\partial\Omega$, en particular tenemos que $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Y, además, como $Mu(E) = Mv(E)$, $\forall E \subset \Omega$, en particular tenemos que $Mu(E) \geq Mv(E)$. De esta forma, caemos en el corolario anterior, así que concluimos que $u \leq v$.

- $u \geq v$ en Ω)

  Como $u = v$ en $\partial\Omega$, en particular tenemos que $u \geq v$ en $\partial\Omega$. Y, además, como $Mu(E) = Mv(E)$, $\forall E \subset \Omega$, en particular tenemos que $Mu(E) \leq Mv(E)$. De esta forma, caemos en el corolario anterior, así que concluimos que $u \geq v$.

De esta manera, tenemos que $u = v$ en Ω. □

4. Dirichlet

El problema de Dirichlet consiste en encontrar una solución, en nuestro caso generalizada, en un dominio Ω acotado de $\mathbb{R}^n$ con una condición en el borde de ese conjunto. Además, vamos a pedir que la solución que encontremos respete cierta medida de Monge-Ampère, viendo en dos casos por separado: primero, que la medida de Monge Ampère sea nula, y despues, que la medida de Monge Ampère sea una suma de masas delta. Además, vemos una pequeña idea de como poder aproximar cualquier medida a una suma de masas delta.

4.1. El problema de Dirichlet Homogéneo

Teorema 4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y estrictamente convexo, y $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existe una única función $u \in C(\overline{\Omega})$ solución generalizada del problema*

$$\begin{aligned} \det D^2 u = 0 \quad & \textit{en } \Omega \\ u = g \quad & \textit{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{a(x) : a \text{ es una función afín y } a \leq g \text{ en } \partial\Omega\}$. Como g es continua, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $g \in \mathcal{F}$. Definimos

$$u(x) = \sup\{a(x) : a \in \mathcal{F}\}.$$

Como u es el supremo de funciones convexas, tenemos que u es convexa y $u(x) \leq g(x),\ x \in \partial\Omega$.
El primer paso es ver que $g = u$ en $\partial\Omega$. Sea $\xi \in \partial\Omega$.

- $u(\xi) \leq g(\xi)$

  Es obvio, pues u es el supremo de funciones menores que g, con lo que resulta que $u(\xi) \leq g(\xi)$.

- $u(\xi) \geq g(\xi)$

  Por ser g continua en $\partial\Omega$, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|g(x) - g(\xi)| < \epsilon$ para $|x - \xi| < \delta,\ x \in \partial\Omega$. Sea $P(x) = 0$ la ecuación del hiperplano soporte para Ω en el punto ξ, y asumamos que
  $\Omega \subset \{x : P(x) \geq 0\}$. Como Ω es estrictamente convexo, $\exists\ \eta > 0$ tal que $S = \{x \in \overline{\Omega} : P(x) \leq \eta\} \subset B_\delta(\xi)$. Sea

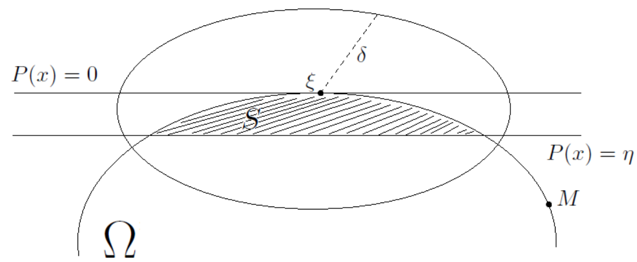
  $$M = \text{mín}\{g(x) : x \in \partial\Omega,\ P(x) \geq \eta\}$$

  y consideremos

  $$a(x) = g(\xi) - \epsilon - AP(x)$$

  donde A es una constante satisfaciendo

  $$A \geq \text{máx}\left\{\frac{g(\xi) - \epsilon - M}{\eta}, 0\right\}.$$



Tenemos que $a(\xi) = g(\xi) - \epsilon - AP(\xi) = g(\xi) - \epsilon$, pues $P(\xi) = 0$.
Si $x \in \partial\Omega$, podemos afirmar que $g(x) \geq a(x)$. En efecto

a) Si $x \in \partial\Omega \cap S$, entonces tenemos que $g(\xi) - \epsilon \leq g(x) \leq g(\xi) + \epsilon$ porque $x \in B_\delta(\xi)$ y recordemos que g es continua en el borde de Ω. Entonces, tenemos al fin y al cabo que

$$g(x) \geq g(\xi) - \epsilon \pm AP(x) \geq_\star g(\xi) - \epsilon - AP(x) = a(x)$$

donde $\star$ es porque $A \geq 0$ y $P(x) \geq 0$. Con lo cual, conseguimos que $g(x) \geq a(x)$.

b) Si $x \in \partial\Omega \cap S^c$, entonces $P(x) > \eta$ y por la definición de M, obtenemos

$$g(x) \geq M = a(x) + M - g(\xi) + \epsilon + AP(x) \geq_{\star^1}$$
$$a(x) + M - g(\xi) + \epsilon + A\eta \geq^2_\star a(x)$$

donde $\star^1$ es porque $P(x) \geq \eta$ y $\star^2$ es porque $M - g(\xi) + \epsilon + A\eta > 0$. (Como A es el máximo entre $\frac{g(\xi)-\epsilon-M}{\eta}$ y 0, haciendo álgebra conseguimos que $M + \epsilon + A\eta \geq g(\xi)$).
Consiguiendo así, que $g(x) \geq a(x)$.

Por lo tanto, $a \in \mathcal{F}$. Con lo cual, en particular tenemos que u, al ser el supremo, $u(\xi) \geq a(\xi) = g(\xi) - \epsilon,\ \forall \epsilon > 0$.
Por lo tanto, conseguimos que $u(\xi) \geq g(\xi)$.

El segundo paso es ver que u es continua en $\overline{\Omega}$. Como u es convexa en Ω, por el teorema 2.1, tenemos que u es continua en Ω.
Sea $\xi \in \partial\Omega$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ una sucesión tal que $x_n \to \xi$. Veremos que $u(x_n) \to u(\xi)$.
Consideremos nuevamente a a como $a(x) = g(\xi) - \epsilon - AP(x)$. Entonces, tenemos que $u(x) \geq a(x)$ y, en particular, $u(x_n) \geq a(x_n)$, y así,

$$\liminf u(x_n) \geq \liminf a(x_n) = \liminf g(\xi) - \epsilon - AP(x_n) =_\star g(\xi) - \epsilon,\ \forall \epsilon > 0$$

donde $\star$ es porque $P(x_n)$ es continua y $x_n \to \xi$.
Luego, $\liminf u(x_n) \geq g(\xi)$.

Veamos ahora que $\limsup u(x_n) \leq g(\xi)$. Para poder ver esto, tomemos la función $b(x) = g(\xi) + \epsilon + AP(x)$. La diferencia con $a(x)$ es que este plano se encuentra por arriba de la función, mientras que $a(x)$ está por abajo. De esta manera, tenemos que $u(x) \leq b(x)$ en Ω, y en particular $u(x_n) \leq b(x_n)$. Con lo cual,

$$\limsup u(x_n) \leq \limsup b(x_n) = g(\xi) + \epsilon + AP(x_n) = g(\xi) + \epsilon \ \forall \epsilon > 0.$$

Y así, tenemos que $\limsup u(x_n) \leq g(\xi)$. Por lo tanto, tenemos que $u \in C(\overline{\Omega})$.

El paso tres es probar que

$$\partial u(\Omega) \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \exists\ x, y \in \Omega,\ x \neq y \text{ y } p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}.$$

y así, tiene medida nula.
Si $p \in \partial u(\Omega), \exists\ x_0 \in \Omega$ tal que $u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle =_{\star} a(x),\ \forall x \in \Omega$ donde $\star$ es una función afín. Como $u = g$ en $\partial\Omega,\ g(x) \geq a(x),\ \forall x \in \partial\Omega$.
Luego, $\exists\ \xi \in \partial\Omega$ tal que $g(\xi) = a(\xi)$; pues si no es cierto esto, existiría $\epsilon > 0$ de manera que $g(x) \geq a(x) + \epsilon,\ \forall x \in \partial\Omega$, y luego, $u(x) \geq a(x) + \epsilon,\ \forall x \in \overline{\Omega}$, en particular en $x_0,\ u(x_0) \geq a(x_0) + \epsilon = u(x_0) + \epsilon$ porque es el hiperplano en x_0. Luego, llegamos a una contradicción.

Como Ω es estrictamente convexo, el segmento I que une a x_0 con ξ está en Ω. Ahora bien, tenemos que $u(x_0) = a(x_0)$ y $u(\xi) = a(\xi)$. Si $z \in I$, entonces $z = tx_0 + (1-t)\xi$
con $t \in (0, 1)$ y, por la convexidad de u,

$$u(z) \leq tu(z) + (1-t)u(\xi) = ta(x_0) + (1-t)a(\xi) =_{\star^1} a(z)$$

donde $\star^1$ es porque a es una función afín, con lo que es lineal.

Pero, $u(x) \geq a(x),\ \forall x \in \Omega$, entonces a es un hiperplano soporte a u en cualquier punto del segmento I, entonces $p \in \partial u(z),\ \forall z \in I$.
Por lo tanto, $\partial u(\Omega) \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \exists\ x, y \in \Omega, x \neq y \text{ y } p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}$, con lo que conseguimos por el lema 3.3 que $\partial u(\Omega)$ tiene medida nula.

Paso cuatro, la bentita y querida unicidad.
Sea $v \in C(\overline{\Omega}),\ v$ convexa y $v = g$ en $\partial\Omega$. Sabemos que u tambien cumple con todo esto. Dado x_0, $\exists$ un hiperplano soporte $a(x)$ en el punto $(x_0, v(x_0))$, osea $v(x) \geq a(x),\ \forall x \in \overline{\Omega}$. Entonces, $g(x) = v(x) \geq a(x),\ \forall x \in \partial\Omega$, y así, $a \in \mathcal{F}$ y $u(x) \geq a(x)$ y, en particular, $u(x_0) \geq a(x_0) = v(x_0)$ por ser el hiperplano ahí. Por lo tanto, $u \geq v$ en $\overline{\Omega}$ y tenemos que u es una función convexa más grande e igual a g en $\partial\Omega$.
Veamos que $u \leq v$.

Supongamos que no, que que no pasa que $u \leq v$. Entonces, existe $x_0 \in \Omega$ de manera que $u(x_0) > v(x_0)$. Veremos que esto implica que $|\partial u(\Omega)| > 0$.
Sea $\epsilon = u(x_0) - v(x_0) > 0$ y sea $a(x) = u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$ un hiperplano soporte a $u(x)$ en x_0, esto es $u(x) \geq a(x),\ \forall x \in \Omega$. Consideremos los hiperplanos de la forma $u(x_0) + \langle q, x - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{2}$. Veremos que para q en una bolita alrededor de p, esta familia está debajo del gráfico de v. En efecto,

$$u(x_0) + \langle q, x - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{2} =_{\star^1} u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \langle q - p, x - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{2} \leq_{\star^2}$$

$$v(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + |q-p||x-x_0| - \frac{\epsilon}{2} \leq_{\star^3}$$
$$u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} =$$
$$u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle \leq_{\star^4} u(x)$$

donde

- $\star^1$ sumo y resto $\langle p, x - x_0\rangle$ y un poco de álgebra.
- $\star^2$ es por la definición de producto interno, la desigualdad me queda por el cos del ángulo comprendido.
- $\star^3$ para $|p-q| \leq \dfrac{\epsilon}{2M}$ donde $M = diam\Omega$ y $|x-x_0| \leq M$ por la misma razón.
- $\star^4$ por ser hiperplano.

Ahora, bajamos cada uno de estos hiperplanos hasta que sean hiperplanos soporte en algún punto de v.
Llamamos $a = \sup\limits_{x\in\Omega}\{u(x_0) + \langle q, x - x_0\rangle - \dfrac{\epsilon}{2} - v(x)\}$ y tenemos que $a > 0$, ya que en $x = x_0$ tenemos $u(x_0) - \frac{\epsilon}{2} - v(x_0) =_\star \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} > 0$ donde $\star$ es por lo de arriba, de como definí ϵ.
Entonces, $\exists\ x_1 \in \overline{\Omega}$ tal que $a = u(x_0) + \langle q, x_1 - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{2} - v(x_1)$ por ser Ω acotado, así $u(x_0) + \langle q, x - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{2} - a \leq v(x)$; osea $u(x_0) + \langle q, x - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{2}$ es un hiperplano soporte de v en x_1. Falta ver que $x_1 \in \Omega$. En efecto, en x_1 tenemos que $u(x_1) \geq u(x_0) + \langle q, x_1 - x_0\rangle - \frac{\epsilon}{2} =_\star v(x_1) + a > v(x_1)$ donde $\star$ es sumar y restar $v(x_1)$, y así $x_1 \notin \partial\Omega$. Y como consecuencia, tenemos que $B_{\frac{\epsilon}{2M}}(p) \subset \partial u(\Omega)$. Por lo tanto, $|\partial u(\Omega)| > 0$ con lo cual, termina la demostración.
□

4.2. Ejemplo 1

Veamos un ejemplo que se pueda ver y tocar con los dedos.
Tomemos Ω como un polígono convexo, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $g \in C(\partial\Omega)$, lineal.
Construyamos u demanera que

$$\begin{aligned} Mu &= 0 \quad en\ \Omega \\ u &= g \quad en\ \partial\Omega \end{aligned}$$

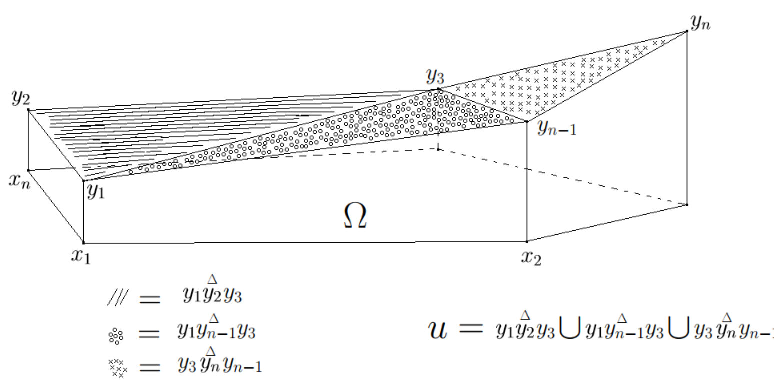
Como bien vimos, la solución u es tomar el supremo de las funciones afines, que no superen a g en el borde.
Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \partial\Omega$ los vértices del polígono y consideremos $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$.
Como $g(x_i) \in \mathbb{R}$, ordenemoslos de menor a mayor.
Llamemos $y_1 = \text{mín}\{g(x_i)\}$, $y_2 = \text{mín}\{g(x_i)\backslash y_1\}$ y así, y tenemos la sucesión ordenada $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

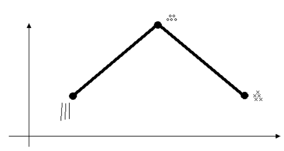
Par armar u, tomemos y_1, y_2 e y_3 y construyamos el tiangulo inclinado que une estos tres puntos.

El siguiente paso, es agarrar y_4 y construir el triangulo inclinado que tiene vértices en y_4 y los dos vértices cuya combinación convexa está dentro del interior de Ω.
De esta manera, seguimos haciendo lo mismo, hasta terminar construyendo los $n-2$ triangulos inclinados unidos que cubren todo Ω.

Tenemos que u es continua porque pegamos todos los triangulos bien.
Tenemos que u es convexa debido al ordenamientos de los y_i que elejimos.
Nos falta ver que $Mu = 0$. Sea $x_0 \in \Omega$. Pueden pasar 2 cosas.

En efecto, tomemos un triangulo inclinado de los que formamos. Debido a que es un plano, el subdiferencial de ese plano es sólo un punto. Así, al tener $n-2$ triangulos, el subdiferencial de estos triangulos son $n-2$ puntos. Ahora, tomemos 2 triangulos que estén pegados. Entonces, el subdiferencial de esa unión es el segmento que une los dos puntos que son los subdiferenciales de los triangulos.





Luego, $\partial u(\Omega)$ es una línea compuesta por segmentitos que no se cierran. Con lo cual, la medida de $\partial u(\Omega)$ es cero.

4.3. El problema de Dirichlet No Homogéneo

Sea Ω un conjunto acotado y convexo, μ una medida de Borel en Ω y $g \in C(\partial\Omega)$. Llamemos

$$\mathcal{F}(\mu, g) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ es convexa}, \ Mv \geq \mu \text{ en } \Omega, \ v = g \text{ en } \partial\Omega\}$$

con Mv la medida de Monge Ampère asociada a v.
Supongamos que $\mathcal{F}(\mu, g) \neq \emptyset$ y sea $v \in \mathcal{F}(\mu, g)$. Asumamos que Ω es estricamente convexo. Por el teorema de Dirichlet Homogéneo, sea $W \in C(\overline{\Omega})$ la

única solución convexa de $MW = 0$ en Ω y $W = g$ en $\partial\Omega$. Tenemos que $0 = MW \leq \mu \leq Mv$ en Ω y, por el principio de comparación, tenemos que $v \leq W$ en Ω. De esta manera,

Teorema 4.2. ***Teorema de Dirichlet No Homogéneo***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, acotado y estrictamente convexo, μ es una medida de Borel en Ω con $\mu(\Omega) < \infty$, y $g \in C(\partial\Omega)$.
Entonces, existe una única función $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que es una solución convexa al problema

$$Mu = \mu \quad \textit{en } \Omega$$
$$u = g \quad \textit{en } \partial\Omega$$

Demostración. Dado $E \subset \Omega$ boreliano, definamos

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_E(x_i).$$

I) Afirmamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$

Sea $w \in C(\overline{\Omega}), w$ convexa de manera que

$$Mw = 0 \quad \text{ en } \Omega$$
$$w = g - \sum_{i=1}^{N} b_i |x - x_i| \ \text{ en } \partial\Omega.$$

donde diremos después quien es b_i.

Como g es contin ua y $b_i|x - x_i|$ es continua para todo $i = 1, \ldots, N$, w es suma de funciones continuas.

Sea $v = w + \sum_{i=1}^{N} b_i|x - x_i|$. v es continua por la misma razón. Entonces, $v \in C(\overline{\Omega}),\ v = g$ en Ω, v es convexa por ser suma de convexas y

$$Mv \geq Mw + M\left(\sum_{i=1}^{N} b_i|x - x_i|\right) = Mw + \sum_{i=1}^{N} M\left(b_i|x - x_i|\right) =_{\star^1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} M\left(b_i|x - x_i|\right) = \sum_{i=1}^{N} b_i^N w_N \delta_{\chi_i} =_{\star^2} \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{\chi_i} = \mu$$

Donde

- $\star^1$ $Mw = 0$ porque así lo pedi.
- $\star^2$ w_N es el volumen de la bola unidad de dimensión n, entonces $b_i^N w_N = a_i, b_i = \left(\frac{a_i}{w_N}\right)^{\frac{1}{N}}$

Luego, tenemos que $v \in \mathcal{F}$ y, por lo tanto, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Ahora bien, sea $U(x) = sup\{v(x) : v \in \mathcal{F}\}$.

II) Afirmamos que $U \in \mathcal{F}$.

Sea $w \in C(\overline{\Omega})$ convexa, que resuelve

$$Mw = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$w = g \quad \text{en } \partial\Omega$$

Decimos que $U \leq w$ en Ω. En efecto, sea $v \in \mathcal{F}$. Entonces, tenemos

$$Mv \geq \mu \geq Mw = 0 \text{ en } \Omega$$

$$v = g = w \ \text{ en } \partial\Omega$$

Entonces, tenemos que $v \leq w, \ \forall v \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \Omega$. Esto sale porque que Mw se puede interpretar como que "no tiene pancita" y v si, por ser convexa.(O, más técnico, por el corolario 3.1) Luego, si tomamos supremos, conseguimos que $U(x) \leq w(x), \ \forall x \in \Omega$.

Ahora, si tomamos $v_0 \in \mathcal{F}$, entonces $v_0(x) \leq U(x) \leq w(x), \ \forall x \in \Omega$. Además, tanto v_0 como w pertenecen a $C(\overline{\Omega})$ y $v_0 = w = g$ en $\partial\Omega$. Luego, conseguimos que $U \in C(\overline{\Omega})$ y $U = g$ en $\partial\Omega$.

Por otro lado, para ver que $MU \geq \mu$, es suficiente ver que $MU(\{x_i\}) \geq a_i$ con los a_i de
$\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_E$.

Sin perdida de generalidad, veremos que $MU(\{x_1\}) \geq a_1$ y los demás salen igual.

Sea $v_n \in \mathcal{F}$ de manera que $v_n(x_1) \to U(x_1)$ cuando $n \to \infty$. Como $Mv_n \geq \mu$ entonces $Mv_n(x_1) \geq \mu(x_1) = a_1$ y ya que $v_n \in \mathcal{F}$, conseguimos que $U \geq v_n$ en Ω.

Ahora bien, <u>decimos que $\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \partial v_k(x_1) \subset \partial U(x_1)$</u>.

En efecto, si $p \in \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \partial v_k(x_1)$, entonces $\forall n, \exists\ k_n \geq n$ tal que $p \in \partial v_{n_k}$. Entonces,

$$U(x) \geq v_{k_n}(x) \geq_{\star^1} v_{k_n}(x_1) + \langle p, x - x_1 \rangle, \ \forall x \in \Omega$$

donde $\star^1$ es porque $p \in \partial v_{k_n}$. Ahora hacemos $n \to \infty$ y conseguimos $U(x) \geq U(x_1) + \langle p, x - x_1 \rangle$, con lo cual $p \in \partial U(x_1)$. Y así,

$$|\partial U(x_1)| \geq |\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \partial v_k(x_1)| = \lim_{n\to\infty} |\bigcup_{k=n}^{\infty} \partial v_k(x_1)| \geq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\partial v_k(x_1)| : k \geq n\} \geq Mv_k(x_1) \geq a_1$$

Y de esta forma, conseguimos que $MU \geq \mu$.

Con lo cual, queda demostrado que $U \in \mathcal{F}$.

III) Vamos a ver que $MU \leq \mu$.

Veamos primero esto. Dado un $E \subset \Omega$ boreliano, tenemos que

$$MU(E) = \sup\{MU(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$$

Si resulta que $E \cap \{x_1, \ldots, x_N\} = \emptyset$ con $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ los que cumplían que $\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}$ y como $K \subset E$ es compacto, entonces tenemos que existen $B_{\epsilon_j}(y_j)$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{M} B_{\epsilon_j}(y_j)$ y $B_{\epsilon_j}(y_j) \cap \{x_1, \ldots, x_N\} = \emptyset$. Luego, $MU(K) \leq \sum_{j=1}^{M} MU(B_{\epsilon_j}(y_j)) = 0$. Ahora bien, vamos a ver que $MU(B_{\epsilon_j}(y_j)) = 0,\ \forall j$.

Sea $x_0 \in \Omega$ de manera que $x_0 \neq x_i, i = 1, \ldots, N$. Tomemos r que cumpla

$$B_r(x_0) \cap \{x_i\} = \emptyset,\ \forall i.$$

Sea w una función que resuelve

$$\begin{aligned} Mw &= 0 \quad && \text{en } B_r(x_0) \\ w &= U && \text{en } \partial B_r(x_0) \end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que $MU \geq \mu \geq 0 = Mw$ y, además, $U = w$ en $\partial B_r(x_0)$, por el principio de comparación, $U \leq w$.

Definimos ahora

$$V(x) = \begin{cases} w(x) & x \in B_r(x_0) \\ U(x) & x \in \Omega \backslash B_r(x_0) \end{cases}$$

Resulta que $U \leq V$.

Veamos que $V \in \mathcal{F}$.
V es convexa por combinación de convexa.
$V = g$ en $\partial\Omega$, sale a ojo.
$MV \geq \mu$: En efecto, dado $E \subset \Omega$,

$$MV(E) = MV(E \cap B_r(x_0)) + MV(E \backslash B_r(x_0)) = Mw(E \cap B_r(x_0)) + MU(E \backslash B_r(x_0)) =$$

$$0 + MU(E \backslash B_r(x_0)) \geq 0 + \mu(E \backslash B_r(x_0)) \geq_{\star^1} \mu(E \cap B_r(x_0)) + \mu(E \backslash B_r(x_0)) = \mu(E)$$

donde $\star^1$ es porque μ es una medida, así que es mayor o igual que cero en un conjunto. Tomo el conjunto que me conviene.

Por lo tanto, V está en $\mathcal{F}$. Así, $V \leq U$. Con lo cual, $U = V$.

De esta forma, concluimos que, dado un punto x_0 y una bolita $B_r(x_0)$ de manera que esa bolita no tiene dentro a ningún x_i, $MU(B_r(x_0)) = 0$. De esta manera, $B_{\epsilon_j}(y_j)$ entran en estas condiciones.

Por lo tanto, $MU(E) = 0$ y así podemos afirmar que la medida MU está concentrada en los puntos $x_1, \ldots, x_N$, es decir, que $MU = \sum_{i=1}^{N} b_i \delta_{x_i}$, para ciertos b_i.

Ahora bien, con esta concentración y con el resultado que $MU \geq \mu$ donde $\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}$ podemos afirmar que $b_i \geq a_i,\ \forall i = 1, \ldots, N$.

Para demostrar lo que queremos ver, supongamos por contradicción, y por cimplicidad elijamos la primera, que $b_1 > a_1 > 0$.
Construiremos $v \in \mathcal{F}$ de manera que $v(x_1) > U(x_1)$ y esto no podrá ser porque U es supremo.

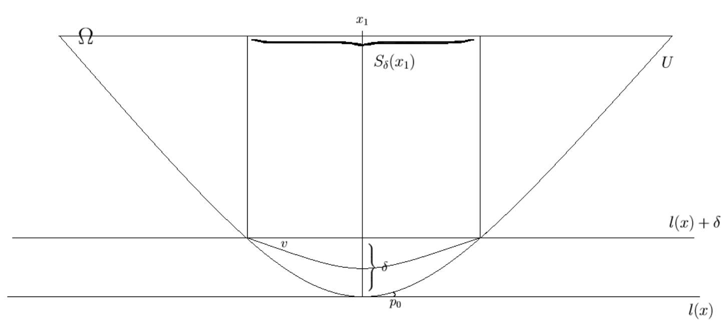
Como $|\partial U(x_1)| = b_1 > 0$ y $\partial U(x_1)$ es convexo, tenemos que tiene interior no vacio, así $\exists\ B_\epsilon(p_0) \subset \partial U(x_1)$, entonces $U(x) \geq U(x_1) + \langle p, x - x_1 \rangle$, $\forall p \in B_\epsilon(p_0), \forall x \in \Omega$ y sea $S_\delta(x_1) = \{x \in \Omega : U(x) < l(x) + \delta\}$. con $l(x) = U(x_1) + \langle p_0, x - x_1 \rangle$. Notemos que $S_\delta(x_1) \subset B_r(x_1)$ donde definiremos más adelante quien es r.
Esto vale pues sea $x \in S_\delta(x_1)$, entonces para $x \in \Omega$ vale que $\langle p, x - x_1 \rangle + U(x_1) \leq U(x) < l(x) + \delta$. Entonces, $\langle p, x - x_1 \rangle < \langle p_0, x - x_0 \rangle + \delta$ por la definición de $l(x)$ y así $\langle p - p_0, x - x_1 \rangle < \delta$.

Sea $x \in \Omega$ y $p = p_0 + \epsilon \frac{x - x_1}{|x - x_1|}$. Entonces,

$$\epsilon |x - x_1| < \delta \Rightarrow |x - x_1| < \frac{\delta}{\epsilon} := r$$

Por lo tanto, para δ chiquito, $\overline{S_\delta(x_1)} \cap \{x_1, \ldots, x_N\} = \emptyset$.
Ahora bien, para $\beta > 0$, definamos

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{U(x) - l(x)}{1 + \beta} - \dfrac{\delta}{1 + \beta} + l(x) + \delta & x \in S_\delta(x_1) \\ U(x) & x \in \Omega \backslash S_\delta(x_1) \end{cases}$$



Si $x \in \partial S_\delta(x_1)$, tenemos que $U(x) = l(x) + \delta$.

$$v(x_1) =_{\star^1} \cancelto{0}{\frac{U(x_1) - l(x_1)}{1 + \beta}} - \frac{\delta}{1 + \beta} + l(x_1) + \delta = l(x_1) + \delta \left(1 - \frac{1}{1 + \beta}\right) =$$

$$U(x_1) + \delta\left(1 - \frac{1}{1+\beta}\right) \geq_{\star^2} U(x_1)$$

porque

- $\star^1$ es porque $U(x_1) = l(x_1)$
- $\delta\left(1 - \dfrac{1}{1+\beta}\right) \geq 0$

Y además, si $x \in S_\delta(x_1)$, tenemos $v(x) \geq U(x)$ si y solo si

$$\frac{U(x) - l(x)}{1+\beta} - \frac{\delta}{1+\beta} + l(x) + \delta \geq U(x).$$

Haciendo álgebra, conseguimos que

$$l(x)\left(1 - \frac{1}{1+\beta}\right) + \delta\left(1 - \frac{1}{1+\beta}\right) \geq U(x)\left(1 - \frac{1}{1+\beta}\right)$$

si y solo si $l(x) + \delta \geq U(x)$ que esto ya si pasa.
Por lo tanto, v es convexa en Ω, $v \in C(\overline{\Omega})$, $v = g$ en $\partial\Omega$ y si $E \subset \Omega$

$$Mv(E) = Mv(E \cap S_\delta(x_1)) + Mv(E \backslash \overline{S_\delta(x_1)}) + Mv(\partial S_\delta(x_1)) =_{\star^1}$$

$$Mv(E \cap S_\delta(x_1)) + Mv(E \backslash \overline{S_\delta(x_1)}) \geq_{\star^2} M\left(\frac{U}{1+\beta}\right)(E \cap S_\delta(x_1)) + MU(E \backslash \overline{S_\delta(x_1)}) =$$

$$\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n MU(E \cap S_\delta(x_1)) + MU(E \backslash \overline{S_\delta(x_1)}) \geq_{\star^3} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n MU(E \cap S_\delta(x_1)) + \mu(E \backslash \overline{S_\delta(x_1)}) =_{\star^4}$$

$$\left(\frac{1}{1+\beta}\right) MU(x_1) + \mu(E \backslash \overline{S_\delta(x_1)}) \geq \frac{b_1}{(1+\beta)^n} + \sum_{i=2}^{N} a_i \chi_E(x_i) \geq_{\star^5} a_1 + \sum_{i=2}^{N} a_i \chi_E(x_i) \geq$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \chi_E(x_i) = \mu(E)$$

con $\star^1$ es porque la medida de un borde, al ser de una dimensión menor, es nula, $\star^2$ se consigue, al cambiar v por lo que es realmente, estoy en medida, saco las constantes y tomo el máximo, $\star^3$ es lo que ya habiamos demostrado antes, $\star^4$ es porque la medida está concentrada en esos puntos y $\star^5$ es, como $b_1 > a_1$, elegimos β tal que secumpla la desigualdad.

Conclusión, tenemos que $Mv(E) \geq \mu(E)$.
Por lo tanto, $v \in \mathcal{F}$, pero $v > U$, con lo que es absurdo.

Así queda demostrado que $b_i \leq a_i$, $\forall i$, con lo cual, lo traducimos a que $MU \leq \mu$.

La querida y bendita unicidad. Por suerte, esta es más facil. Supongamos que no es única. Que tenemos V tal que

$$\begin{cases} V \in C(\overline{\Omega}) \\ MV = \mu & \text{en } \Omega \\ V = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Luego, de esta manera, tenemos que

$$\begin{cases} V \in C(\overline{\Omega}), U \in C(\overline{\Omega}) \\ MU = \mu = MV & \text{en } \Omega \\ U = g = V & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con lo cual, caemos de lleno en las hipotesis del corolario 3.2. Por lo tanto, concluimos que $U = V$ en Ω, quedando así la unicidad.

De esta manera, queda demostrado el teorema.

$\square$

Ya vimos como se resuelve el caso donde tomamos una medida μ de manera que se puede descomponer en suma de masas delta. Lo que veremos a continuación, es que podemos descomponer de cierta manera cualquier medida y hacerla ver como una descomposición de sumas delta y, de esa manera, caemos en el caso de aca arriba.

4.4. Llegando a una descomposición de masas delta

Lo que nos interesa ver ahora es definitivamente que $Mu(E) = \int_E f(x)dx = \mu(E)$, con f de manera que $\lambda \leq f \leq \Lambda$ en Ω, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Muy bien, veámoslo de la siguiente manera: cubrimos a Ω con cubitos de la siguiente forma: Primero consideramos un cubo Q de arista R tal que $\Omega \subset Q$. Esa es la “generación” 1. Luego, dividimos al cubo en 3 partes iguales en cada coordenada, consiguiendo 3^n cubitos. Esa es la “generación” 2. Luego, a cada uno de esos cubos, lo dividimos nuevamente en tres partes iguales cada coordenada. Así, conseguimos 3^{2n} cubitos. Esa es la “generación” 3. Así continuamos haciendo esas particiones. De esta manera, en la generación N, tenemos $3^{n(N-1)}$ cubitos. Llamamos a esos cubitos Q_N^i donde N representa la “generación” y el i la enumeración que le ponemos en esa “generación”. Estos cubitos, cumplen con la siguientes propiedades:

- $\Omega \subset Q_N^i$ para $i = 1, \ldots 3^{n(N-1)}$ para toda generación N.
- $|Q_N^i| \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Sea

$$\mu_N = \sum_{i=1}^{3^{n(N-1)}} \underbrace{f(x_i)|Q_i|}_{a_i}\delta_{x_i}$$

donde x_i es el punto del centro de cada Q_i. Lo interesante de esto, es que en cada generación, agregamos mas puntos centrales de cubos, pero nos quedamos con los mismos. De esta manera, si tomamos $\lim_{N\to\infty}$, nos quedariamos con todo $\mathbb{R}^n$.

Ahora, a lo que nos compete. Consideremos $Mu_N = \mu_N$ y, a cada una, u_N de manera que $u_N = g$ en $\partial\Omega$

Por un lado, ya que $u_N = g$ en $\partial\Omega, \forall N$, tenemos que

$$|u_N(x)| \leq \max_{x\in\partial\Omega} |g(x)|,$$

afirmando que cada u_N está acotada por arriba.

Equicontinuidad de $u_N(x)$: Queremos ve que las funicones u_N son equicontinuas, para así poder usar Arzela-Ascoli. Es decir, queremos ver que dado $\epsilon > 0$ y $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\exists\delta > 0, \delta(x_0)$:

$$|u_N(x) - u_N(x_0)| \leq M,\ \forall x \in B_\delta(x_0) \subset \overline{\Omega},\ \forall N.$$

Recapitulemos lo que tenemos:

$$\begin{cases} u_N \in C(\overline{\Omega}) & \forall N \\ u_N = g & \text{en } \partial\Omega,\ \forall N \\ u_N \text{ es convexa} & \\ |\partial u_N(\Omega)| \leq C & \forall N,\ \text{donde C no depende de N} \end{cases}$$

I) $x_0 \in \partial\Omega)$

Sea $x_0 \in \partial\Omega$. Entonces, tenemos que $u_N(x_0) = g(x_0)$. Tomemos ahora $x \in \partial\Omega$. Entonces, tenemos que

$$g(x) > g(x_0) - \epsilon - A\langle x - x_0, \xi\rangle,\ \forall x \in \partial\Omega.$$

Esto significa, tomamos un plano de manera que pase por x_0 y cuando entre en "la zona" de Ω, pase por abajo. La matriz A no da la inclinación. Ahora, sea

$$w(x) = u_N(x) - (g(x_0) - \epsilon - A\langle x - x_0, \xi\rangle).$$

Tenemos que $w(x) > 0$ y, debido a que $u_N(x)$ es convexa y $g(x_0) - \epsilon - A\langle x - x_0, \xi\rangle$ es un plano, $w(x)$ es convexa.

Llamemos $\Omega_0 := \{x \in \Omega : w(x) = 0\}$. La inlinación que tomamos es a propósito para así $\Omega_0 \neq \emptyset$. Además, tenemo que $w(x) = 0$ con $x \in \partial\Omega_0$. Así, usando Alexandrov

$$|w(x)|^n \leq C_n dist(x, \partial\Omega_0)|\partial w(\Omega_0)|\Delta^{n-1} \to_{\star^1} |w(x)|^n \leq C_n dist(x, \partial\Omega_0) \to_{\star^2}$$

$$|w(x)|^n \leq C_n dist(x, \partial\Omega) \to_{\star^3} |w(x)| \leq C_n dist(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}$$

donde $\star^1$ meto todas las constantes salvo la distancia en C_n, $\star^2$ es debido a que $\Omega_0 \subset \Omega$ y $\star^3$ es pasar la potencia.

Con lo cual, tenemos que

$$w(x) \geq -C_n dist(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}.$$

Y así, tenemos que

$$u_N(x) - \underbrace{g(x_0)}_{u_N(x_0)} \geq -\epsilon - A\langle x - x_0, \xi\rangle - C_n dist(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}.$$

Pero, tenemos que

$$-\epsilon - A\langle x - x_0, \xi\rangle - C_n dist(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}} \leq -\epsilon - A\langle x - x_0, \xi\rangle$$

ya que el primero es “más negativo”, porque la distancia es positiva y C_n también es positiva siempre, ya que es la contante que le gana a un módulo. Luego, tomamos δ de manera que

- $A\langle x - x_0, \xi\rangle < \frac{\epsilon}{2}$
- y, en el plano, en lugar de ϵ, tomamos $\frac{\epsilon}{2}$.

Por otro lado, tomamos ahora el plano que, en “la zona” de Ω, se va “por arriba”.

$$g(x) < g(x_0) + \epsilon + A\langle x - x_0, \xi\rangle,\ \forall x \in \partial\Omega.$$

Entonces,

$$u_N(x) < g(x_0) + \epsilon + A\langle x - x_0, \xi\rangle \to u_N(x) - g(x_0) < \epsilon + A\langle x - x_0, \xi\rangle$$

Nuevamente, tomamos δ de manera que

- $A\langle x - x_0, \xi\rangle < \frac{\epsilon}{2}$
- y, en el plano, en lugar de ϵ, tomamos $\frac{\epsilon}{2}$.

Así, consluimos que u_N es equicontinua en $\partial\Omega$.

II) $x_0 \in \Omega^\circ$)

Sea $x_0 \in \Omega^\circ$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $B_{2\delta}(x_0) \subset \Omega^\circ$. Ahora, tomemos $\hat{p} \in \partial u_N(\hat{x})$ para $\hat{x} \in \partial B_\delta(x_0)$. Ahora bien, tenemos lo siguiente

$$u_N(x) \geq u_N(\hat{x}) + \langle \hat{x}, x - \hat{x}\rangle,\ \forall x \in \Omega^\circ,$$

en particular, para x_0, y, como $|u_N(x)| \leq M$ (consideramos M la cota de la función en la bolita de radio δ), entonces

$$2M \geq u_N(x_0) - u_N(\hat{x_0}) \geq \langle \hat{p}, x_0 - \hat{x}\rangle$$

tomamos los dos términos de los extremos y así

$$2M \geq \langle \hat{p}, x_0 - \hat{x}\rangle.$$

Ahora bien, escribimos $x_0 = \hat{x} + \frac{\hat{p}}{|\hat{p}|}\delta$ y reemplazamos en el producto interno

$$2M \geq \langle \hat{p}, \cancel{\hat{x}} + \frac{\hat{p}}{|\hat{p}|}\delta \cancel{-\hat{x}}\rangle$$

y así
$$\frac{2M}{\delta} \geq |\hat{p}|.$$
Perfecto, esta cota nos va a ayudar.
Tomemos $\overline{x} \in B_\delta(x_0)$ y, tomemos
$$\overline{p} \in \partial u_N(\overline{x}) \qquad p_0 \in \partial u_N(x_0).$$
De esta forma, tenemos que
$$u_N(x) \geq u_N(x_0) + \langle p_0, x - x_0 \rangle, \ \forall x \in \Omega$$
$$u_N(x) \geq u_N(\overline{x}) + \langle \overline{p}, x - \overline{x} \rangle, \ \forall x \in \Omega$$
y, en particular, intercambiamos los roles

- $$u_N(\overline{x}) \geq u_N(x_0) + \langle p_0, \overline{x} - x_0 \rangle$$
- $$u_N(x_0) \geq u_N(\overline{x}) + \langle \overline{p}, x_0 - \overline{x} \rangle.$$

Tomamos la primera de ellas. Pasamos para el lado izquierdo la función
$$u_N(\overline{x}) - u_N(x_0) \geq \langle p_0, \overline{x} - x_0 \rangle$$
y así, usando la definición de producto interno
$$u_N(\overline{x}) - u_N(x_0) \geq |p_0||\overline{x} - x_0| \cos(\theta) \geq |p_0||\overline{x} - x_0|(-1)$$
Nos quedamos con los extremos
$$u_N(\overline{x}) - u_N(x_0) \geq -|p_0||\overline{x} - x_0|$$
y usamos la cota que vimos arribita
$$u_N(\overline{x}) - u_N(x_0) \geq -|p_0||\overline{x} - x_0| \geq -\frac{2M}{\delta}|\overline{x} - x_0|$$
Ahora bien, tomamos la segunda de las desigualdades. Haciendo los mismos calculos
$$u_N(\overline{x}) - u_N(x_0) \leq |\overline{p}||\overline{x} - x_0| \leq \frac{2M}{\delta}|\overline{x} - x_0|.$$
Con lo cual, concluimos que
$$|u_N(\overline{x}) - u_N(x_0)| \leq \frac{2M}{\delta}|\overline{x} - x_0|$$
De esta forma, por como elegimos a $\overline{x}$, tenemos que
$$|u_N(\overline{x}) - u_N(x_0)| \leq \frac{2M}{\delta}|\overline{x} - x_0| \leq \frac{2M}{\cancel{\delta}}\cancel{\delta}$$

Por lo tanto, por el teorema de Arzela-Ascoli, tenemos que $\exists$ una subsucesión uniformemente convergente. Abusando de la notación, la llamaremos también u_N.

Continuidad de u: Es gratis, ya que tenemos que la sucesión de funciones u_N que converge uniformemente, son todas continuas.

Falta corroborar que $|\partial u(E)| = \mu(E)$, $\forall E \subset \Omega, E$ abierto. Usaremos de referencia el lema 3.4.

Dado un abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$|\partial u(\mathcal{O})| \leq_{\star^1} \liminf_{N\to\infty} |\partial u_N(\mathcal{O})| = \liminf_{N\to\infty} \mu_N(\mathcal{O}) =_{\star^2} \mu(\mathcal{O}).$$

De esta manera, tenemos que

$$|\partial u(\mathcal{O})| \leq \mu(\mathcal{O}).$$

Nos falta ver que

$$|\partial u(\mathcal{O})| \geq \mu(\mathcal{O}).$$

Para ello, veremos que, dado $\epsilon > 0$,

$$|\partial u(\mathcal{O})| \geq \int_{\mathcal{O}} f(x)dx - \epsilon.$$

Primero, veamos las siguientes observaciones auxiliares.

Observación 4.1. $\lim_{N\to\infty} |\partial u_N(\mathcal{O})| = \int_{\mathcal{O}} f(x)dx, \ \forall \mathcal{O} \subset \Omega$

Observación 4.2. *Dado* $\epsilon > 0$, $\exists \mathcal{U}$ *abierto, tal que* $\mathcal{U} \subset \overline{U} \subset \mathcal{O}$ *que cumple que*

$$\int_{\mathcal{U}} f(x)dx > \int_{\mathcal{O}} f(x) - \epsilon.$$

Estas observaciones, mirandolas fuertemente, son ciertas. A lo que nos compete.

Tomemos un abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces,

$$|\partial u(\mathcal{O})| \geq_{\star^1} |\partial u(\overline{\mathcal{U}})| \geq_{\star^2} \limsup_{N\to\infty} |\partial u_N(\overline{\mathcal{U}})| \geq_{\star^3}$$

$$\limsup_{N\to\infty} |\partial u_N(\mathcal{U})| =_{\star^4} \int_{\mathcal{U}} f(x)dx \geq_{\star^5} \int_{\mathcal{O}} f(x)dx - \epsilon$$

donde:

- $\star^1$ es usando la segunda observación en la construcción del conjunto $\overline{\mathcal{U}}$;
- $\star^2$ es por la convergencia;
- $\star^3$ es usando la segunda observación en la construcción del conjunto $\mathcal{U}$;

- $\star^4$ es usando la primera observación;
- $\star^5$ es usando la segunda observación.

Así, conseguimos que, dado $\epsilon > 0$,

$$|\partial u(\mathcal{O})| \geq \int_{\mathcal{O}} f(x)dx$$

para todo abierto, y, tendiendo ϵ a cero, se consigue que

$$|\partial u(\mathcal{O})| \geq \int_{\mathcal{O}} f(x)dx.$$

4.5. Ejemplo 2

Volmamos al caso del polígono para ver algo interesante con el asunto del valor de la medida del subdiferencial. Lo interesante, es que esto es un modo bastante constructivo de como crear una función de manera que obtengamos la medida del subdiferencial que queramos, manteniendo los vértices dados.

Teorema 4.3. *Sea G un polígono de $\mathbb{R}^n$ convexo y $g \in \partial G$, lineal en las caras de G (que es el borde de G). Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ y $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ entonces, $\exists$ u, tal que*

- *u es convexa.*
- *$u \in C(G)$.*
- *$u = g$ en ∂G.*
- *$|\partial u(x_k)| = \theta_k$ con $k = 1, 2, \ldots, n$.*

La siguiente demostración es sólo esquemática,ya que las cosas de rigor se realizarán más adelante.

Demostración. Sea l una función afín y sea

$$w(x) = \sup\{l(x) : l \leq g \text{ en } \partial G\}.$$

Por el teorema de Dirichlet homogeneo, tenemos que $|\partial w(E)| = 0$, para todo $E \subset G$, y $w = g$ en ∂G. Armemos el vector $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, elijiendo $a_k \leq w(x_k)$, $\forall k$.

Definimos

$$u_{\vec{a}}(x) = \sup\{l(x) : l \leq g \text{ en } \partial G, l(x_k) \leq a_k, k = 1, \ldots, n\}.$$

Sea

$$W = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^n : |\partial u_{\vec{a}}(x_k)| \leq \theta_k, k = 1, \ldots, n\}.$$

Tenemos que W está acotado por abajo. En efecto, supongamos que no. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\vec{a}_0$ tal que tiene una coordenada que no está acotada por abajo, la coordenada a_{k_0}. Pero entonces, consideremos el cono Γ con vértice en $u_{\vec{a}_0}(x_{k_0})$ y la base que sea g. Ahora bien, $u_{\vec{a}_0}$ es una función convexa, y, a ojo, nos damos cuenta que $\Gamma \geq u_{\vec{a}_0}$ en G, y en ∂G, vale menos o lo mismo. Por el principio del máximo, conseguimo que

$$\partial\Gamma(G) \subset \partial u_{\vec{a}_0}(G)$$

y entonces

$$|\partial\Gamma(G)| \leq |\partial u_{\vec{a}_0}(G)|.$$

Sin embargo,

$$|\partial\Gamma(G)| = |B_{\frac{a_{k_0}}{\Delta}}(x_{k_0})|$$

con Δ el diametro de G. De esta manera, al suponer que W no está acotado por abajo, podriamos "incrementar" el tamaño de a_{k_0} todo lo que queremos, pero, si resulta que

$$|a_{k_0}| > \max_{i=1,\ldots,n}\{\theta_i\}$$

se saldría de W, ya que no habriía forma que no se pase el valor de $|\partial u_{\vec{a}_0}| \leq \theta_{k_0}$. Ahora, definimos $\varphi : W \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(\vec{a}) = a_1 + \ldots + a_n.$$

Ahora bien, tomemos $\inf_{\vec{a}\in W}\varphi = \varphi(\overline{a})$ y tomemos la función $u_{\overline{a}}(x)$.

Resulta que $u_{\overline{a}} \in C(\overline{G})$, $u_{\overline{a}} = g$ en ∂G.

Ahora, si $u_{\overline{a}}$ cumple que $|\partial u_{\overline{a}}(x_k)| = \theta_k$, para todo k, lo logramos. Ahora, supongamos que $|\partial u_{\overline{a}}(x_{k_0})| < \theta_{k_0}$, entonces definimos

$$\tilde{a} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_{k_0}} - \delta, \ldots, \overline{s_n})$$

y así, conseguimos que $|\partial u_{\tilde{a}}(x_{k_0})| \leq \theta$ y las demas se mantienen igual. Elejimos el δ de manera que sea igual en esa coordenada y, por la continuidad de φ, tenemos que $\tilde{a} \in W$ $\square$

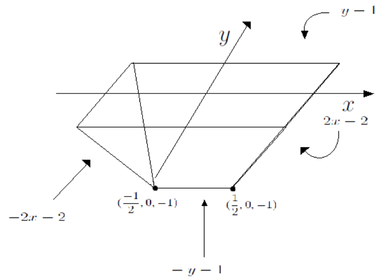
4.6. Ejemplo 3

Veamos en un ejemplo númerico como se usaría esta idea. El asunto de variar las alturas como modifica al subdiferencial.

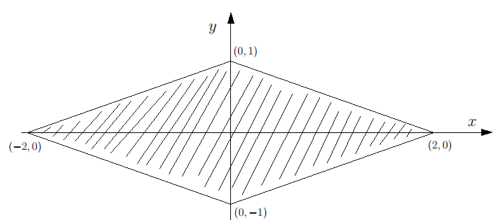
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} -2x-2 & (x,y) \in [-1, \frac{-1}{2}] \times [2x+1, -2x-1] \\ y-1 & (x,y) \in \left\{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0,1] \cup [-1, \frac{-1}{2}] \times [-2x-1, 1] \cup [\frac{1}{2}, 1] \times [2x-1, 1]\right\} \\ 2x-2 & (x,y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [-2x+1, 2x-1] \\ -y-1 & (x,y) \in \left\{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1,0] \cup [-1, \frac{-1}{2}] \times [-1, 2x+1] \cup [\frac{1}{2}, 1] \times [-1, -2x+1]\right\} \end{cases}$$

La función es pegar planos. La forma que tiene esto es como un conteiner y aplastamos en el eje x la base. Esta función f tiene dos vertices en los puntos $(\frac{-1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$, y la altura de cada vértice es -1.



En cada lado, es diferenciable, así que el subdiferencial es facil de sacar, es así:



$|\partial f(\Omega)| = 4$

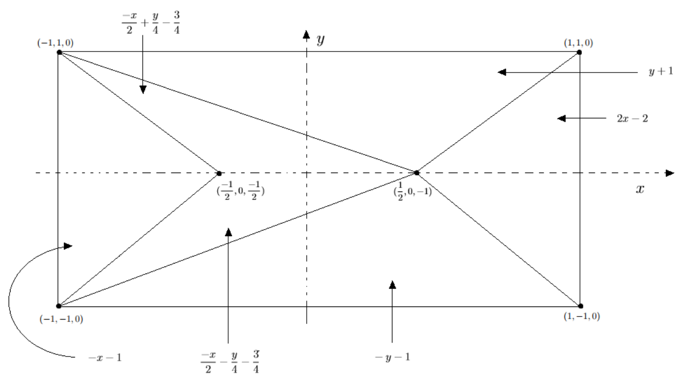
La medida del subdiferencial es el área de esto, que es 4.

Ahora, vamos a variar una altura en uno de los dos vértices, el vértice en el punto $(\frac{-1}{2}, 0)$. Subimos la áltura en ese vertice, lo subimos a $(\frac{-1}{2})$ y, ahora, aparecen nuevos planos, debido a la inclinación del nuevo vértice. La función resultante es

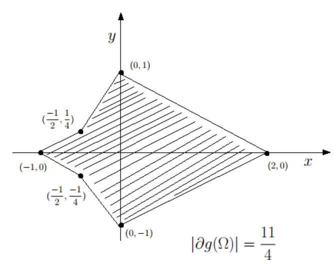
$$g(x,y) = \begin{cases} -x-1 & (x,y) \in [-1, \frac{-1}{2}] \times [2x+1, -2x-1] \\ 2x-2 & (x,y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [-2x+1, 2x-1] \\ y+1 & (x,y) \in [\frac{-3y}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y+1}{2}] \times [0,1] \\ -y-1 & (x,y) \in [\frac{3y}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1-y}{2}] \times [-1,0] \\ \dfrac{-x}{2} - \dfrac{y}{4} - \dfrac{3}{4} & (x,y) \in [\frac{y-1}{2}, \frac{3y}{2} + \frac{1}{2}] \times [-1,0] \\ \dfrac{-x}{2} + \dfrac{y}{4} - \dfrac{3}{4} & (x,y) \in [\frac{-y-1}{2}, \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}] \times [0,1] \end{cases}$$

la funcion, nuevamente, es pegar planos.

(Una representacion vista desde arriba como seria la función. Es complicado de dibujarla explicitamente)



Y así, el subdiferencial queda



Esto claramente muestra como moviendo las alturas, el gráfico y la medida del subdiferencial se modifican. Así, podemos mover las alturas para llegar a la medida que buscamos.

5. Normalización y Comparabilidad

La idea de normalizacion se refiere a la contracción de un conjunto, respetando cierto tipo de propiedades. Aquí primero damos una idea general de como se consigue esto, para luego poder usarlo tranquilamente. En cuanto a la comparabilidad, vemos cual es la relación directa que hay entre la función que resuelve el problema, con su subdiferencial en todo el dominio. Esto es util, ya Caffarelli, usando esto, logró mejorar la cota en el principio del máximo de Alexandrov.

5.1. Elipsoides de volumen mínimo

Definición 5.1. *Un elipsoide centrado en el punto x_0 es el conjunto de la forma*

$$E(A, x_0) = \{x : \langle A(x - x_0), (x - x_0)\rangle \leq 1\}$$

donde A es una matriz de $n \times n$ que es simétrica y definida positiva. El volumen de $E(A, x_0)$ es

$$|E(A, x_0)| = \frac{\omega_n}{\sqrt{\det A}}$$

considerando ω_n es el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$.

Lema 5.1. *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo.*

a) Asumamos que existe $x_0 \in \mathcal{S}$ tal que $\overline{B_R(x_0)} \subset \mathcal{S}$ y consideremos la clase $\mathcal{F}_0$ de todos los elipsoides con centro en x_0 que contienen al conjunto convexo $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{F}_0$ tiene un elipsoide de volumen mínimo.

b) Asumamos que $\mathcal{S}$ tiene interior no vacio y consideremos la clase $\mathcal{F}_1$de los elipsoides que contienen al conjunto convexo $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{F}_1$ tiene un elipsoide de volumen mínimo.

Demostración. a) Sea $E(A, x_0)$ un elipsoide conteniendo $\mathcal{S}$, $A = (a_{ij})$. Entonces, $\overline{B_R(x_0)} \subset \mathcal{S} \subset E(A, x_0)$ y

$$|a_{ij}| \leq \frac{1}{R^2}.$$

En efecto, si ξ es un vector unidad, entonces $x = x_0 + R\xi \in \overline{B_R(x_0)}$ y como $\overline{B_R(x_0)} \subset \mathcal{S}$ obtenemos que

$$\langle A\xi, \xi\rangle \leq \frac{1}{R^2}, \quad \forall|\xi| = 1,$$

y conseguimos la desigualdad. Ya que $\mathcal{S} \subset E$, tenemos que $|E(A, x_0)| \geq |\mathcal{S}| \geq \overline{B_R(x_0)} > 0$. Sea $K = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathcal{S} \subset E(A, x_0)\}$, y

$$\alpha = \inf_{A\in K} \frac{\omega_n}{\sqrt{\det A}}.$$

Tenemos que $\alpha > 0$ y existe una sucesión $A_m = (a_{ij}^m) \in K$ tal que $\frac{\omega_n}{\sqrt{\det A}} \to \alpha$. Como cada elemento está acotado, existe una subsecesión convergente $a_{ij}^{m_k} \to a_{ij}^0$ cuando $k \to \infty$. La matriz $A_0 = (a_{ij}^0)$ es simétrica porque cada una de las matrices anteriores es simétrica y, como cada una de las sucesiones $(a_{ij}^{m_k}) = a_{ji}^{m_k}$ tienen los mismos límites, y $A_0 \geq 0$ porque $A_m \geq 0$. Ya que $\alpha > 0$, despejando tenemos que $\det A_0 > 0$ y entonces A_0 es definida positiva.

Por lo tanto, el elipsoide buscado es $E(A_0, x_0)$.

b) Sea $E(A, x_1)$ un elipsoide conteniendo a $\mathcal{S}$, $A = (a_{ij})$. Ya que $\mathcal{S}$ tiene interior no vacio, existe $B_R(x_2) \subset \mathcal{S}$. Entonces, $B_R(x_2) \subset E(A, x_1)$. Como $E(A, x_1)$ es un elipsoide, $B_R(x_1) \subset E(A, x_1)$ y, como antes, tenemos que $|a_{ij}| \leq \frac{1}{R^2}$. Si $|x_1| \to \infty$, entonces $|E(A, x_1)| \to \infty$. Luego, es suficiente considerar que $|x_1| \leq M$, con M suficientemente grande.
Sea $K' = \{(A, x_1) : \mathcal{S} \subset E(A, x_1; |x_1| \leq M)\}$ y

$$\alpha = \inf_{A \in K'} |E(A, x_1)|.$$

Resulta que $\alpha > 0$ y, de esta manera, procedemos como en el caso anterior y obtenemos el elipsoide deseado.

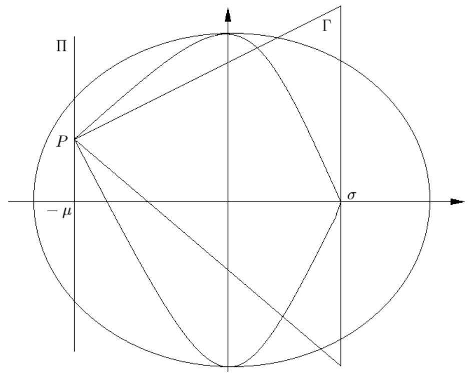
□

Teorema 5.1. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo con interior no vacio y E es el elipsoide de volumen mínimo conteniendo Ω centrado en el centro de masa de Ω, entonces*

$$\alpha_n E \subset \Omega \subset E,$$

donde $\alpha_n = n^{-3/2}$ y αE se refiere a la α-dilatación de E con respecto a su centro.

Demostración. Usamos una transformación afín para poder suponer que E es la bola unidad con centro en el origen, y así el centro de masa de Ω es 0. Rotando las coordenadas, podemos asumir que la distancia entre 0 y $\partial\Omega$, denotada $dist(0, \partial\Omega) = \sigma = x_0$, con $x_0 = \sigma e_1 \in \partial\Omega$, $\sigma > 0$ y e_1 el vector unidad en la dirección $x_1 > 0$. Como Ω es convexo, tenemos que el plano $x_1 = \sigma$ es un hiperplano soporte para Ω en el punto x_0. Si movemos el plano $x_1 = \sigma$ de forma paralela en la dirección de x_1 negativo, obtenemos un plano Π que es el hiperplano soporte a Ω en el punto $P \in \partial\Omega \cap \Pi$ y $\Pi = \{x_1 = -\mu\}$ para algún $\mu > 0$. Consideremos el corte $\mathcal{S} = \{x \in \Omega : x_1 = 0\}$, y sea Γ el cono con vertice en el punto P, pasando travez de $\mathcal{S}$ y contenido en la porcion de $-\mu \leq x_1 \leq \sigma$.



El centro de masa de Γ es

$$c(\Gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} x dx.$$

Dado $t, -\mu \leq t \leq \sigma$, sea $\mathcal{S}_t$ la porción de Γ pasando a través de $(t, 0, \ldots, 0)$ y perpendicular al eje x_1. La porción $\mathcal{S}_t$ se obtiene al dilatar $\mathcal{S}$ con respecto al punto P, esto es $\mathcal{S}_t = \frac{t+\mu}{\mu}\mathcal{S}$. Luego, por similitud, tenemos que el Area de $\mathcal{S}_t = \left(\frac{t+\mu}{\mu}\right)^{n-1} A(\mathcal{S})$ donde $A(\mathcal{S})$ es el área de $\mathcal{S}$. Así, si c_1 es la componente de x_1 de $c(\Gamma)$, integrando en las porciones tenemos

$$c_1 = \frac{1}{|\Gamma|} A(\mathcal{S}) \int_{-\mu}^{\sigma} t \left(\frac{t+\mu}{\mu}\right)^{n-1} dt.$$

Notemos que como Ω tiene centro de masa en el 0, $\Gamma \cap \Omega$ tiene centro de masa a la derecha de $\mathcal{S}$, pues $\Gamma \cap \Omega \subset \Gamma$ y el cono Γ tiene el centro de masa a la derecha de $\mathcal{S}$, esto es $c_1 > 0$

$$\int_{-\mu}^{\sigma} t \left(\frac{t+\mu}{\mu}\right)^{n-1} dt > 0.$$

Haciendo el siguiente cambio de variables, obtenemos

- $\dfrac{t+\mu}{\mu} = w$
- $dt = dw\mu$
- $t = w\mu - \mu$

y los límites de integración

- $t = -\mu \mapsto w = 0$
- $t = \sigma \mapsto w = \dfrac{\sigma+\mu}{\mu}$

Consiguiendo

$$\int_0^{\frac{\sigma+\mu}{\mu}} (w\mu - \mu)w^{n-1}\mu dw > 0.$$

Resolviendo:

$$\int_0^{\frac{\sigma+\mu}{\mu}} \mu^2 w^n - \mu^2 w^{n-1} dw = \int_0^{\frac{\sigma+\mu}{\mu}} \mu^2 w^n dw - \int_0^{\frac{\sigma+\mu}{\mu}} \mu^2 w^{n-1} dw =$$

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\sigma+\mu}{\mu}\right)^{n+1}\mu^2 - \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\sigma+\mu}{\mu}\right)^{n}\mu^2 > 0.$$

Y despejando de ahí, tenemos que se cumple

$$\frac{\sigma}{\mu} \geq \frac{1}{n}.$$

Ahora, consideremos

$$\mathcal{S}_B\{(x_1, x') : -\mu \leq x_1 \leq \sigma, |x'|^2 \leq 1 - x_1^2\},$$

y el elipsoide

$$E_0 = \{(x_1, x') : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{|x'|^2}{b^2} \leq 1\},$$

donde $\mu < a < 1 < b$. Decimos que si $\mu < \frac{1}{\sqrt{n}}$, entonces existen a, b tales que $\Omega \subset \mathcal{S}_B \subset E_0$ y $|E_0| < |B_1(0)|$. Lo cual, lleva a una contradicción con el hecho de que E es el elipsoide de volumen mínimo.

En efecto, asumamos que $\mu < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- $\Omega \subset \mathcal{S}_B$

  Sea $x \in \Omega$. Descompongamos a x discriminando la coordenada del eje x_1, escribiendo $x = (x_1, x')$. Por un lado, tenemos que $-\mu \leq x_1 \leq \sigma$ ya que en $x_1 = -\mu$ y en $x_1 = \sigma$ tenemos dos hiperplanos soporte de Ω. Solo falta ver que $|x'| \leq 1 + x_1^2$. Supongamos que no, que $|x'| > 1 + x_1^2$. Entonces, tenemos que $|x'|^2 + x_1^2 > 1$, con lo que conseguiriamos que $|x|^2 > 1$. Lo cual es absurdo, pues $\Omega \subset B_1(0)$.
  Por lo tanto, $\Omega \subset \mathcal{S}_B$.

- $\mathcal{S}_B \subset E_0$

  Como $\mu \geq \sigma$, (porque así tomé la distacia del origen al borde) tenemos que

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{|x'|^2}{b^2} \leq \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{1 - x_1^2}{b^2} =$$

$$\frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x_1^2 \leq \frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\mu^2 =$$

$$\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{1 - \mu^2}{b^2}$$

Tenemos que $\mathcal{S}_B \subset E_0$ si $\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{1-\mu^2}{b^2} \leq 1$ lo que, despejando, es equivalente a $b^2 \geq \frac{a^2(1-\mu^2)}{a^2-\mu^2}$.

Ademas, $|E_0| = ab^{n-1}|B_1(0)|$, y entonces $|E_0| < |B_1(0)|$ es equivalente a que $ab^{n-1} < 1$. Entonces, queremos elegir a, b tales que

$$\mu < a < 1 < b,$$

y, cuando elevo al cuadrado la segunda desigualdad de b, también queremos que

$$\frac{a^2(1-\mu^2)}{a^2-\mu^2} < b^2 < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Tenemos que $\frac{a^2(1-\mu^2)}{a^2-\mu^2} < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-1}}$ si y solo si $a^2 - \mu^2 - a^{\frac{2n}{n-1}}(1-\mu^2) > 0$. En efecto, primero vemos que $a^2 a^{\frac{2}{n-1}} = \sqrt[n-1]{a^{2n} a^2 a^{-2}} = a^{\frac{2n}{n-1}}$. Con este calculo auxiliar, conseguimos lo siguiente:

$$\frac{a^2(1-\mu^2)}{a^2-\mu^2} < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

si invertimos la igualdad y pasamos el a^2

$$\frac{a^2-\mu^2}{1-\mu^2} > a^{\frac{2n}{n-1}}$$

$$a^2 - \mu^2 > a^{\frac{2n}{n-1}}(1-\mu^2)$$

y paso todo para el lado izquierdo. Volviendo a lo anterior, consideremos la función, $f(t) = t - \mu^2 - t^{\frac{n}{n-1}}(1-\mu^2)$ (vemos a $t = a^2$). Tenemos que $f(1) = 0$ y $f'(1) = 1 - \frac{n}{n-1}(1-\mu^2)$. La suposición de que $\mu < \frac{1}{\sqrt{n}}$, es equivalente a que $f'(1) < 0$. Así, $f(t) > 0$ para $t < 1$, cercano a 1. Eligiendo $t = a^2 < 1$ obtenemos que $\frac{a^2(1-\mu^2)}{a^2-\mu^2} < \left(\frac{1}{a^2}\right)$ y así, elegimos $b^2 > 1$ de manera que se satisfaga

$$\frac{a^2(1-\mu^2)}{a^2-\mu^2} < b^2 < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}_B \subset E_0$.

Luego, llegamos a la contradicción que E es un elipsoide de volumen minimo. Con lo cual, tenemos que $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Luego, volviendo a la desigualdad $\frac{\sigma}{\mu} \geq \frac{1}{n}$, entonces

$$\frac{\sigma}{\mu} \geq \frac{1}{n} \mapsto \sigma \geq \frac{1}{n}\mu \geq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto, $\sigma \geq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, con lo que queda demostrado el teorema. $\square$

5.2. Normalización y comparabilidad

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \subset E$ un elipsoide. Sabemos que podemos hacer lo siguiente: tomamos E_{λ_n} de manera que $E_{\lambda_n} \subset \Omega \subset E$.

Tomemos T una transformación líneal que manda $x_0 \in \Omega$ en el punto 0 y que $T(E) = B_1(0)$.

$$E = \{x : \langle A(x - x_0), (x - x_0)\rangle < 1\} = \{x : \langle \Upsilon\Lambda\Upsilon^t(x - x_0), (x - x_0)\rangle < 1\}$$

$$\{x : \langle \Lambda^{\frac{1}{2}}\Upsilon^t(x - x_0), \Lambda^{\frac{1}{2}}\Upsilon^t(x - x_0)\rangle < 1\}.$$

Donde Υ y Υ^t son las matrices de la descomposición en diagonal.

Así, tenemos de forma explicita a T como $Tx = \Lambda^{\frac{1}{2}}\Upsilon^t(x - x_0)$. Luego, conseguimos que $\{x : \langle Tx, Tx\rangle < 1\}$ y tenemos que $|Tx| < 1$ con lo cual queda demostrado que T manda a la bola unidad.

Ahora bien, tenemos que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde tenemos que $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 1$. Cada λ es cuanto se "estira" en cada corrdenada. Así, lo escribimos de esta manera.

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2}.$$

Definición 5.2. *Dada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y una aplicación T como la de arriba de manera que $B_{\lambda_n}(0) \subset T(\Omega) \subset B_1(0)$. Decimos que $T(\Omega)$, el cual denotamos $\Omega^\star$ es Omega "normalizado".*

Ahora, dada $u : \Omega \to \mathbb{R}$ convexa con $\lambda|E| \leq Mu(E) \leq \Lambda|E|$, queremos $u^\star : \Omega^\star \to \mathbb{R}$ convexa que también se cumpla $\lambda|E^\star| \leq Mu^\star(E^\star) \leq \Lambda|E^\star|$, en ambos casos para todo $E \subset \Omega$ y para todo $E^\star \subset \Omega^\star$ respectivamente.
En pocas palabras, tenemos una u con su medida de Monge-Ampère dominada y queremos ver si la nueva $u^\star$ tambien puede estar dominada.

Muy bien, comencemos. Para u, sucede que $Mu(E) = |\partial u(E)|$, entonces

$$u^\star(y) = \beta u(T^{-1}y) = \beta u(\Upsilon\Lambda^{\frac{-1}{2}}y + x_0)$$

pues

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}\Upsilon^t(x - x_0) = y$$

$$\Upsilon^t(x - x_0) = \Lambda^{\frac{-1}{2}}y$$

$$x - x_0 = \Upsilon\Lambda^{\frac{-1}{2}}y$$

$$x = \Upsilon \Lambda^{\frac{-1}{2}} y + x_0$$

y por ser combinacion de cosas convexas, es convexa.
Ahora, vallamos por la dominación de la medida. Sea $\overline{x} = T^{-1}(\overline{y})$.
Dado $p \in \partial u(\overline{x})$, tenemos que

$$u(x) \geq u(\overline{x}) + \langle p, x - \overline{x} \rangle.$$

Multiplico por β y paso a $T^{-1}y = x$

$$\beta u(T^{-1}y) \geq \beta u(T^{-1}\overline{y}) + \beta \langle p, T^{-1}(y - \overline{y}) \rangle$$

$$u^\star(y) \geq u^\star(\overline{y}) + \beta \langle p, T^{-1}(y - \overline{y}) \rangle$$

$$u^\star(y) \geq u^\star(\overline{y}) + \beta \langle p, \Upsilon \Lambda^{\frac{-1}{2}} (y - \overline{y}) \rangle$$

$$u^\star(y) \geq u^\star(y) + \beta \langle \Lambda^{\frac{-1}{2}} \Upsilon^t p, y - \overline{y} \rangle$$

$$u^\star(y) \geq u^\star(\overline{y}) + \langle \beta \Lambda^{\frac{-1}{2}} \Upsilon^t p, y - \overline{y} \rangle.$$

De esta manera, si llamamos $q = \beta \Lambda^{\frac{-1}{2}} \Upsilon^t p$, tenemos que $q \in u^\star(\overline{y})$. Entonces, calculando la medida de $u^\star$, tenemos que

$$Mu^\star(E^\star) = |\partial u(E)| \beta^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}} \cancel{|\Upsilon^t|}^{\,1}.$$

Luego, para calcular la dominada de la media de Monge Ampère de $u^\star$, primero multiplicamos a cada término por $\dfrac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}}$ a $Mu(E)$, con $E \subset \Omega$.

$$\lambda |E| \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}} \leq Mu(E) \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}} \leq \Lambda |E| \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}}$$

Ahora bien, en los terminos extremales multiplicamos y dividimos por $|E^\star|$ y metemos dentro de u toda la porqueria para transformar y tenemos

$$\lambda |E^\star| \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}} |E| \leq Mu(E^\star) \leq \Lambda |E^\star| \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}} |E|.$$

Veamos ahora un poco esto.
$E^\star = T(E) = \Lambda^{\frac{1}{2}} \Upsilon^t (E - x_0)$, con lo cual, $|E^\star| = (\det \Lambda)^{\frac{1}{2}} |E|$. Entonces,
$|E^\star| = \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} |E|$. Concluimos así, que

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}} = \frac{|E|}{|E^\star|}.$$

Reemplazando antes, llegamos a que

$$\lambda |E^\star| \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \leq Mu^\star(E^\star) \leq \Lambda |E^\star| \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Así, conseguimos la dominación de la medida de Monge Ampére para $u^\star$ en $E^\star \subset \Omega^\star$.

Teorema 5.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo y sea $\alpha\Omega : \{\alpha x : x \in \Omega\}$ su normalización. Sea $u \in C(\overline{\Omega})$ convexa y $u = 0$ en $\partial\Omega$, y tal que la medida de Monge Ampère esté dominada, es decir, $\lambda|E| \leq \partial u(E) \leq \Lambda|E|$ para todo $E \subset \Omega$. Entonces, tenemos que*

$$C_1|\min_{x\in\Omega} u(x)|^n \leq Mu(\Omega) \leq C_2|\min_{x\in\Omega} u(x)|^n$$

donde C_1, C_2 son constantes que solo dependen de la dimensión, de α y de la dominación de la medida.

Demostración.

- $C_1|\min_{x\in\Omega} u(x)| \leq Mu(\Omega)$

  Por el principio de comparacioón de Alexandrov, tenemos que

  $$|u(x)|^n \leq C_n dist(x, \partial\Omega) Mu(\Omega) diam(\Omega)^{n-1}$$

  Como Ω está normalizado, el diámetro de Ω es menor o igual que 2, asi que lo metemos dentro de la constante C_n. Tambien, como vale $\forall x \in \Omega$ la desigualdad, tomamos mínimo y conseguimos que

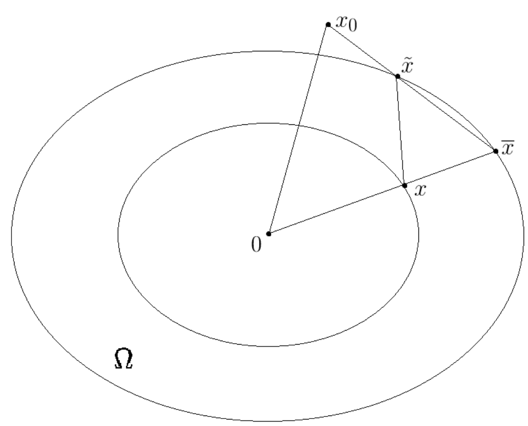
  $$|\min_{x\in\Omega} u(x)|^n \leq C_n dist(x, \partial\Omega) Mu(\Omega)$$

  y también, la distancia al borde la puedo acotar por el diámetro, lo meto en la constante, paso para el otro lado y tengo

  $$C_1|\min_{x\in\Omega} u(x)|^n \leq Mu(\Omega)$$

  que era lo que queriamos demostrar.

- $Mu(\Omega) \leq C_2|\min_{x\in\Omega} u(x)|^n$



  Sea $x \in \partial(\alpha\Omega)$. Consideremos $\overline{x}$ un punto en $\partial\Omega$. Vamos a trabajar con $|x - \overline{x}|$. Llamemos $\tilde{x}$ al punto en $\partial\Omega$ donde se consigue $dist(x, \partial\Omega)$. Ahora,

unamos $\overline{x}$ y $\tilde{x}$ con una línea y sea x_0 un punto de esa recta que está por fuera de Ω.
Ahora, armamos el triángulo con vértices en $0, \overline{x}, x_0$, el cual es un triangulo semejante al triángulo de vértices en $x, \overline{x}, \tilde{x}$. De esa manera, tenemos que

$$\frac{|\tilde{x}-x|}{|\overline{x}-x|} = \frac{x_0-0}{\overline{x}-0}$$

y despejamos

$$|\tilde{x}-x| = |x_0|\frac{\overline{x}-x}{\overline{x}} =_{\star^1}$$

$$|x_0||1-\frac{1}{\alpha}| =_{\star^2} \frac{x_0}{\alpha}(1-\alpha)$$

donde $\star^1$ es porque $x = \overline{x}\alpha$, entonces $1 = \frac{\overline{x}}{x}\alpha$. Así, $\frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{x}}{x}$. Y $\star^2$ es porque $\alpha < 1$.

Y como Ω está normalizado, sabemos que $B_{\beta_n}(0) \subset \Omega$,
tenemos que $|x_0| \geq \beta_n$. De esta forma, reemplazamos en la última desigualdad y tenemos que

$$\frac{|x_0|}{\alpha}(1-\alpha) \geq \frac{\beta_n}{\alpha}(1-\alpha).$$

Entonces, con esto, conseguimos que

$$dist(\alpha\Omega, \partial\Omega) \geq \frac{\beta_n}{\alpha}(1-\alpha).$$

Ahora, sea $x_0 \in \Omega$. Como Ω es un abierto, podemos elegir R tal que $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$. Así, escribimos a $x = x_0 + \frac{p}{|p|}\epsilon$ donde $x \in B_R(x_0)$(podemos porque $u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$ para todo $x \in \Omega$, y la bola esta está dentro de Ω), $p \in \partial u(\alpha\Omega)$, ϵ es $dist(x_0, x)$ y con x_0 tal que $p \in \partial u(x_0)$). Así, tenemos lo siguiente

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle \to u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x_0 + \frac{p}{|p|}\epsilon - x_0\rangle \to_{\star^1}$$

$$u(x) \geq u(x_0) + \frac{|p|^2}{|p|}\langle 1, \epsilon\rangle \to u(x) \geq u(x_0) + |p|\epsilon$$

entonces, usando que $u(x) \leq 0$, afirmamos que

$$0 \geq u(x_0) + |p|\epsilon$$

y de esta forma, tenemos que

$$|p| \leq \frac{|u(x_0)|}{\epsilon}$$

tomamos mínimo, y así tenemos que

$$|p| \leq \frac{|\min_{x\in\Omega} u(x)|}{\epsilon}$$

y como $\epsilon \leq R$, y $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, podemos decir que $dist(\alpha\Omega, \partial\Omega) \geq R$. Por lo tanto, conseguimos que

$$\partial u(\alpha\Omega) \subset B_{\frac{|min_{x\in\Omega} u(x)|}{dist(\alpha\Omega,\partial\Omega)}}(0).$$

Con esto y la dominación de la medida, tenemos que

$$\lambda|\alpha\Omega| \leq |\partial u(\alpha\Omega)| \leq_{\star^1} c_n |\min_{x\in\Omega}|^n \frac{1}{(1-\alpha)^n}$$

donde $\star^1$ es usando la cota de distancia entre $\alpha\Omega$ y $\partial\Omega$ y la n es por la dimensión (tomamos esta cota en todas las dimensiones). Y tambien, tenemos que $|\alpha\Omega| = \alpha^n|\Omega|$ una vez mas por la dimension.

Juntando todo, tenemos

$$|\partial u(\Omega)| \leq_{\star^1} \Lambda|\Omega| = \Lambda\frac{\lambda}{\lambda}|\frac{\alpha}{\alpha}\Omega| =$$

$$\frac{\Lambda}{\lambda\alpha^n}\lambda|\alpha\Omega| \leq \frac{\Lambda}{\lambda\alpha^n}\lambda|\partial u(\alpha\Omega)| \leq$$
$$C|\partial u(\alpha\Omega)| \leq_{\star^2} C_2|\min_{x\in\Omega} u(x)|^n$$

donde $\star^1$ es la dominación de la medida y $\star^2$ es donde juntamos todas las constantes que conseguimos y así conseguimos la C_2

De esta manera, conseguimos lo que queriamos demostrar juntando el primer término y el último de la desigualdad y conseguimos que

$$|\partial u(\Omega)| \leq C_2|\min_{x\in\Omega} u(x)|^n$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

Teorema 5.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo y sea $\alpha\Omega : \{\alpha x : x \in \Omega\}$ su normalización. Sea $u \in C(\overline{\Omega})$ convexa y $u = 0$ en $\partial\Omega$, y tal que la medida de Monge Ampère esté dominada, es decir, $\lambda|E| \leq \partial u(E) \leq \Lambda|E|$ para todo $E \subset \Omega$. Entonces, tenemos que*

$$C_1 Mu(\Omega) \leq |\min_{\Omega} u(x)|^n \leq C_2 Mu(\Omega)$$

donde C_1, C_2 son constantes que solo dependen de la dimensión, de α y de la dominación de la medida.

Demostración.

- $C_1 Mu(\Omega) \leq |\min_\Omega u(x)|^n$

  Ya lo tengo del teorema anterior. Por la segunda parte. Paso la constante de ahí y listo.

- $|\min_\Omega u(x)|^n \leq C_2 Mu(\Omega)$

  Por el principio del máximo de Alexandrov, tenemos que

  $$|u(x)|^n \leq C_n diam(\Omega)^{n-1} dist(x, \partial\Omega) Mu(\Omega)$$

  juntamos diámetro y distancia en la constante y tomamos el mímino para conseguir

  $$|\min_\Omega u(x)|^n \leq C_2 Mu(\Omega).$$

□

Juntando estos dos teoremas, decimos que $|\min_{x\in\Omega}|$ es **comparable** con $Mu(\Omega)$, y se escribe $Mu(\Omega) \approx |\min_{x\in\Omega} u(x)|$.

Teorema 5.4. ***Caffarelli***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo y sea $\alpha\Omega : \{\alpha x : x \in \Omega\}$ su normalización. Sea $u \in C(\overline{\Omega})$ convexa y $u = 0$ en $\partial\Omega$, y tal que la medida de Monge Ampère esté dominada, es decir, $\lambda|E| \leq \partial u(E) \leq \Lambda|E|$ para todo $E \subset \Omega$.
Entonces:

I)
$$u(x) \geq -C(dist(x, \partial\Omega))^{\frac{2}{n}}$$

II)
$$\min_{x\in\Omega} u(x) \leq -C\alpha_n^2$$

con α_n el radio del elipsoide que está dentro de $\alpha\Omega$.

Demostración.

I) Por un lado, tenemos que $Mu \leq \Lambda$ en Ω. Además, u es 0 en el borde de Ω. Nuestra primera misión será encontrar una función v, $v \in C(\overline{\Omega})$ convexa, de manera que

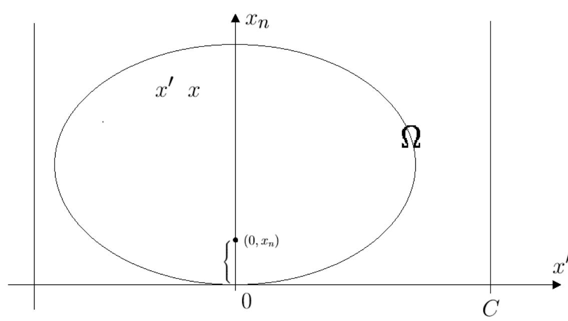
   - $u(x) \geq v(x)$ *en* $\partial\Omega$
   - $Mu \leq \Lambda \leq \det D^2 v$

   y, por el corolario del principio de comparacion, obtendremos que

   $$u(x) \geq v(x) \text{ en } \Omega$$

   y, esta v resulta milagrosamente en nuestro resultado final.

   Lo que vamos a hacer primero es, rotar el Ω de manera que el eje de la variable x_n sea paralelo al eje y en dos dimensiones.



y vamos a discriminar esa variable. Vamos a definir $v(x', x_n)$.

Sea $v(x', x_n) = x_n^{\frac{2}{n}}(|x'|^2 - K)$ donde K es una constante que nos va a salvar.
Hay que ver un par de cosas.
Primero, que al hacer esto de rotar, no hagamos trampa (y para que nos sirve rotar).
Segundo, $\det D^2 v \geq \Lambda$ para poder comparar con Mu.
Tercero, que $\langle D^2 n v(x', x_n)\psi, \psi\rangle \geq 0$ para ver que la matriz de las derivadas segundas es semidefinida positiva y, por el teorema 2.3, llegamos a la convexidad.

Para ver lo primero, vamos a considerar 2 casos.

- caso a) Consideremos $f(x) = \phi(|x|)$. Veamos como queda la matriz Hessiana de f.

$$f_i(x) = \phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$$

$$f_{ij} = \phi''(|x|)\frac{x_j}{|x|}\frac{x_i}{|x|} + \phi'(|x|)\left(\frac{\delta_{ij}|x| - x_i\frac{x_j}{|x|}}{|x^2|}\right)$$

para δ_{ij} siendo el Delta de Kronecker.

$$f_{ij} = \phi''(|x|)x_i x_j |x|^{-2} + \phi'(|x|)\left(\delta_{ij}|x|^{-1} - x_i x_j |x|^{-3}\right)$$

Sea ahora $\Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de rotación y consideremos $\tilde{f}(x) = f(\Theta x)$. Tenemos

$$\tilde{f}(x) = f(\Theta x) = \phi(|\Theta x|) =_{\star^1} \phi(|x|) = f(x)$$

donde $\star^1$ es porque Θ es una matriz de rotación.
De esta manera, podemos concluir que

$$D^2\tilde{f}(x) = \Psi^t D^2 f(\Theta x)\Psi$$

y obtenemos así que

$$\det D^2\tilde{f}(x) = \det D^2 f(\Theta x).$$

Como vimos recién que rotar no hace trampa, podemos tomar una rotación Θ de manera que me mande la primera coordenada x_1 a $|x|$ y me mande $x_i, i : 2, \dots, n$ a 0. (Por eso tambien tome una función que dependía del módulo).
Como los determinantes quedan iguales, calculemos el determinante de la Hessiana de la matriz rotada que es más sencilla. Para eso, la matriz queda:

- el elemento $(1,1)$ resulta

$$\phi''(|x|)|x||x||x|^{-2} + \phi'(|x|)\left(1|x|^{-1} - |x||x||x|^{-3}\right)$$

  y, haciendo algebra con esto, nos queda que es equivalente a

$$\phi''(|x|).$$

- el elemento (i,j) con $i \neq j$ resulta

$$\phi''(|x|)\underbrace{x_i x_j}_{=0}|x|^{-2} + \phi'(|x|)\left(0|x|^{-1} - \underbrace{x_i x_j}_{=0}|x|^{-3}\right)$$

  y, haciendo algebra con esto, nos queda que es equivalente a 0.
- el elemento (i,j) con $i = j, i \geq 2$ resulta

$$\phi''(|x|)\underbrace{x_i x_j}_{=0}|x|^{-2} + \phi'(|x|)\left(1|x|^{-1} - \underbrace{x_i x_j}_{=0}|x|^{-3}\right)$$

  y, haciendo algebra con esto, nos queda el equivalente a

$$\frac{\phi'(|x|)}{|x|}.$$

Luego, la matriz nos queda

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} \phi''(|x|) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\phi'(|x|)}{|x|} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\phi'(|x|)}{|x|} \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\det D^2 f(x) = \phi''(|x|)\left(\frac{\phi'(|x|)}{|x|}\right)^{n-1}.$$

- caso b) Este caso consiste en hacer lo mismo que en el caso a, pero vamos a discriminar la última variable. Así anda bien la función v que tiene la última variable discriminada.
  Sea $f(x', x_n) = \phi(|x'|, x_n)$, y definimos
  $\tilde{f}(x', x_n) = f(\Psi x', x_n) = f(\Theta x)$ donde

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con Ψ es una matrix de rotación, y Θ también es una matriz de rotación. Igual que antes, nos queda que

$$\det D^2 \tilde{f}(x) = \det D`2f(\Theta x)$$

donde $x = (x', x_n)$.
Veamos como nos quedan los elementos de la Hessiana.
Por simplicidad, llamemos r a $|x|$. Y vamos a usar el mismo truco de elegir la rotación que manda a la coordenada x_1 el $|x'|$ y deja quieto el x_n.

$$D_i(x', x_n) = \phi_r(|x'|, x_n) x_i |x'|^{-1} \text{ con } i : 1, \dots, n-1$$
$$D_{ij}(x', x_n)\phi_{rr} = (|x'|, x_n) x_i x_j |x'|^{-2} + \phi_r(|x'|, x_n)(\delta_{ij}|x'|^{-1} - x_i x_j |x'|^{-3}) \text{ con } j : 1, \dots, n-1$$
$$D_{in}(|x'|, x_n) = \phi_{rn} x_i |x'|^{-1}$$
$$D_{nn}(|x|`, x_n) = \phi_{nn}(|x'|, x_n)$$

Y así, la matriz es

$$\begin{pmatrix} \phi_{rr}(|x'|, x_n) & 0 & \dots & 0 & \phi_{rn}(|x'|, x_n)|x||x|^{-1} \\ 0 & \frac{\phi_r}{|x'|} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\phi_r}{|x'|} & 0 \\ \phi_{rn}(|x'|, x_n)|x||x|^{-1} & 0 & \dots & 0 & \phi_{nn}(|x'|, x_n) \end{pmatrix}$$

y el determinante queda (todas las funciones están evaluadas en $(|x'|, x_n)$)

$$\phi_{rr} \left(\frac{\phi_r}{|x'|} \right)^{n-2} \phi_{nn} + (-1)^{n+1} \phi_{rn} \phi_{rn} (-1)^{n+1} \left(\frac{\phi_r}{|x'|} \right)^{n-2}.$$

Haciendo algebra, conseguimos que esto es

$$\left(\frac{\phi_r}{|x'|} \right)^{n-2} (\phi_{rr}\phi_{nn} - \phi_{rn}^2).$$

Y con estos pequeños calculitos, los determinantes de las matrices quedan bastantes lindos.

Habiendo visto TODO esto, ya que tenemos a v de manera explicita, calculemos la matriz Hessiana de v.

$$\begin{aligned}
v(|x'|, x_n) &= x_n^{\frac{2}{n}}(|x'|^2 - C)\\
v_i(|x'|, x_n) &= x_n^{\frac{2}{n}}\frac{x_i}{|x'|}\\
v_n(|x'|, x_n) &= \frac{2}{n}x_n^{\frac{2}{n}-1}(|x'| - C)\\
v_{in}(|x'|, x_n) &= \frac{2}{n}x_n^{\frac{2}{n}-1}\frac{x_i}{|x'|}\\
v_{ij}(|x'|, x_n) &= x_n^{\frac{2}{n}}(\delta_{ij}|x'|^{-1} - x_i x_j |x'|^{-3})\\
v_{nn}(|x'|, x_n) &= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n} - 1\right)x_n^{\frac{2}{n}-2}(|x'| - C).
\end{aligned}$$

Y reemplazando en nuestro ϕ en cada uno para ver que vale cada derivada.

$$\begin{aligned}
\phi(r, x_n) &= x_n^{\frac{2}{n}}(r^2 - C)\\
\phi_r(r, x_n) &= x_r^{\frac{2}{n}}2r\\
\phi_{x_n}(r, x_n) &= \frac{2}{n}x_n^{\frac{2}{n}-1}(r^2 - C)\\
\phi_{rr}(r, x_n) &= 2x_n^{\frac{2}{n}}\\
\phi_{rx_n}(r, x_n) &= \frac{2}{n}x_n^{\frac{2}{n}-1}2r\\
\phi_{x_n x_n}(r, x_n) &= \frac{2}{n}(\frac{2}{n} - 1)x_n^{\frac{2}{n}-2}(r^2 - C).
\end{aligned}$$

Y el determinante queda

$$\left(\frac{x_n^{\frac{2}{n}}2\cancel{r}}{\cancel{r}}\right)^{n-2}\left(2x_n^{\frac{2}{n}}(\frac{2}{n}(\frac{2}{n} - 1))x_n^{\frac{2}{n}-2}(r^2 - C) - (\frac{2}{n}x_n^{\frac{2}{n}-1}2r)^2\right).$$

A partir de aca, se pueden hacer las cuentas una a una, sin embargo es muy largo escribirlo, asi que vamos a escribir sólo algunas.

$$\begin{aligned}
2^{n-2}x_n^{\frac{2n-4}{n}}\left(\frac{4-2n}{n^2}2x_n^{\frac{4-2n}{n}}(r^2 - C) - \frac{4}{n^2}x_n^{\frac{4-2n}{n}}4r^2\right) &=\\
\frac{2^{n-2}}{n^2}\left((4n-8)(C - r^2) - 16r^2\right) &=\\
\frac{2^{n-2}}{n^2}(-4nr^2 - 8r^2) + \frac{2^{n-2}}{n^2}C(4n-8)&
\end{aligned}$$

y yo quiero que esto sea $\geq \Lambda$. Así, despejando, nos queda que C depende solo de Λ, r y n.

Ahora, veamos que v es convexa para poder usar el principio de comparación.

Para ser convexa, tengo que ver que, dado un vector ψ, el producto interno

$$\langle D^2 v(x', x_n)\psi, \psi\rangle$$

es ≥ 0, para que sea semidefinida positiva.

Antes que nada, veamos un truquito interesante.

Lema 5.2. *Dados $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, \exists\ \epsilon$ de manera que*

$$2ab \leq \left(\frac{a}{\epsilon}^2\right) + (b\epsilon)^2.$$

Demostración. Sea ϵ y tomemos $\left(\frac{a}{\epsilon} - b\epsilon\right)^2$. Entonces

$$0 \leq \left(\frac{a}{\epsilon} - b\epsilon\right)^2 = \left(\frac{a}{\epsilon}\right)^2 + (b\epsilon)^2 - 2\frac{a}{\epsilon}b\epsilon$$

entonces, pasando el último miembro queda que

$$2\frac{a}{\epsilon}b\epsilon \leq \left(\frac{a}{\epsilon}\right)^2 + (b\epsilon)^2.$$

□

Ahora si, que tenemos el truquito, queremos el producto interno.

$$\langle D^2 v(x', x_n)\psi, \psi\rangle$$

y, poniendo las derivadas de v y calculado el producto, queda que

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \delta_{ij} 2x_n^{\frac{2}{n}} \psi_i\psi_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{4}{n} x_n^{\frac{2-2n}{n}} x_i\psi_i\psi_n + \frac{4-2n}{n^2} x_n^{\frac{2-2n}{n}} (|x'| - C)\psi_n^2 =_{\star^1}$$

$$= 2x_n^{\frac{2}{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{4}{n} x_n^{\frac{2-n}{n}} x_i\psi_i\psi_n + \left(\frac{4-2n}{n^2}\right) x_n^{\frac{2-2n}{n}} (|x'| - C)\psi_n^2.$$

Hacemos factor común $x_n^{\frac{2-2n}{n}}$

$$x_n^{\frac{2-2n}{n}} \left(2x_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^2 + \frac{8}{n} x_n \sum_{i=1}^{n-1} x_i\psi_i\psi_n + \left(\frac{4-2n}{n^2}\right)(|x'| - C)\psi_n^2\right) =_{\star^2}$$

$$x_n^{\frac{2-2n}{n}} \left(2x_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^2 + \frac{8}{n} x_n \sum_{i=1}^{n-1} x_i\psi_i\psi_n + \left(\frac{2n-4}{n^2}\right)(C - |x'|)\psi_n^2\right).$$

Muy bien, ahora usamos el lema que vimos como truquito. ab será, en este caso, $x_n x_i \psi_i \psi_n$, que están en el termino del medio (el que tiene un $\frac{8}{n}$ multiplicando). Sacamos un 2 de $\frac{8}{n}$ para tener $2ab$ y, por el truquito, conseguimos que

$$2|x_i\psi_n x_n\psi_i| \leq \left(x_i\psi_n\frac{1}{\epsilon}\right)^2 + (x_n\psi_i\epsilon)^2.$$

Le ponemos módulo, porque no sabemos su signo, pero para el truquito, tiene que ser positivo. Cambiamos el sentido de la desigualdad. y agregamos $\frac{4}{n}$ para que me quede muy parecido a lo que yo tengo,

$$-\frac{x_i^2\psi_n^2}{\epsilon^2}\frac{4}{n} - x_n^2\psi_i^2\epsilon^2\frac{4}{n} \leq 2x_i\psi_n x_n\psi_i\frac{4}{n}.$$

Ahora, tomamos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}$ a ambos lados

$$\frac{4}{n}2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\psi_n x_n\psi_i \geq -\frac{4}{n}\left(\frac{\psi_n^2}{\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\epsilon^2\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^2\right)$$

reemplazamos esto en el original, que tenía tres terminos dentro del parentesis, reemplazamos el del medio por estos 2 para que aparezca el mayor ó igual y conseguimos que

$$x_n^{\frac{2-2n}{n}}\left(\underbrace{2x_n^2\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^2 - \frac{4}{n}x_n^2\epsilon^2\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^2}_{A} - \underbrace{\frac{4}{n}\frac{\psi_n^2}{\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2 + \left(\frac{2n-4}{n^2}\right)(C-|x'|)\psi_n^2}_{B}\right).$$

Yo quiero que tanto A como B sean mayors que cero, porque $x_n^{\frac{2-2n}{n}}$ es mayor que cero.

- A) Sacando factor común sumatoria y x_n, tenemos

  $$x_n^2\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^2\left(2-\frac{4}{n}\epsilon^2\right)$$

  entonces, tenemos

  $$x_n^2 \geq 0$$
  $$\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^2 = |\psi'| \geq 0$$
  $$\left(2-\frac{4}{n}\epsilon^2\right) > 0$$

  Así, resulta que $A > 0$.

- B) Sacando factor común ψ_n^2 tenemos

$$\psi_n^2 \left(-\frac{4}{n}\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \left(\frac{2n-4}{n^2}(C-|x'|) \right) \right).$$

Así, resulta que

$$\psi_n^2 \geq 0$$

despejando lo otro,

$$|x'| \left(\frac{4\epsilon^2 - 4n - 2\epsilon^2 n}{\epsilon^2 n^2} \right) + C \left(\frac{2n-4}{n^2} \right)$$

con n adecuado y con C adecuado, tenemos que $B > 0$.

Así, llegamos a que toda la ecuación es positiva y, en conclusión, que es semidefinida positiva. donde:
$\star^1$ es hacer el delta de Kroneker, así que solo sobreviven en ese término cuando $i = j$,
$\star^2$ es, como $n \geq 3$ y $C \geq |x'|$, los términos $\frac{4-2n}{n^2}$ y $(|x'| - C)$ ambos son menores que cero y se están multiplicando, puedo invertirlas a ambas y quedan $\frac{2n-4}{n^2}$ y $(C - |x'|)$.

Por lo tanto, estamos en las condiciones de poder usar el principio de comparación, y conseguimos que

$$u(x) \geq v(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

De esta manera, si evaluamos en $(|x'| = 0, x_n)$, tenemos

$$u(0, x_n) \geq v(0, x_n) = x_n^{\frac{2}{n}}. - C =_{\star^1} -Cdist(x_n, \partial\Omega)$$

donde $\star^1$ es porque para eso juega la rotación que hicimos al principio y despues, hacemos el mismo truco con cada una de las dimensiones, para concluir que

$$u(x) \geq -Cdist(x, \partial\Omega)^{\frac{2}{n}}.$$

II) Por un lado, tenemos que $Mu \geq \lambda$ en Ω y que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Nuevamente, vamos a usar el principio de comparación.

Sea

$$v(x) = \lambda^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|x|^2 - \alpha_n^2}{2} \right)$$

con α_n la esfera de adentro de Ω.

Quiero que $\det D^2 v \leq Mu$ y que $v \geq u$ en $\partial\Omega$.

$$v_i(x) = \lambda^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2x_i}{2} \right).$$

$$v_i j(x) = \lambda^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\delta_{ij}}{2} \right).$$

Así, la Hessiana quedaría una matriz diagonal en donde el elemento a_{ii} es $\lambda^{\frac{1}{n}}$, y el determinante de esto es λ. Por hipotesis, tenemos que $Mu \geq \lambda$, así que tenemos lo que queríamos con respecto a la medida.

v es convexa, así que, usando el principio de comparación, concluimos que $v \geq u$ en Ω.

Así, tomando $x = 0$, podemos afirmar que

$$u(0) \leq v(0) = -\frac{\lambda^{\frac{1}{n}} \alpha_n^2}{2}$$

y, tomando mín en u, conseguimos que

$$\min_{x \in \Omega} u(x) \leq -\frac{\lambda^{\frac{1}{n}} \alpha_n^2}{2}$$

y metemos que $C = \frac{\lambda^{\frac{1}{n}}}{2}$.

Con este teorema, podemos concluir la siguiente relación que deja de depender de la medida de Monge-Ampère.

$$C(dist(x, \partial\Omega))^{\frac{2}{n}} \geq \left| \min_{x \in \omega} u(x) \right| \geq C\alpha_n^2$$

$\square$

6. Regularidad C^1

Nos centraremos ahora en la regularidad de la función que resuelve nuestro problema. Vamos a considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ unconjunto convexo, abierto y, pediremos que la solución a nuestro problema valga 0 en el borde del mismo. Esta situación nos ayuda a entrar dentro de las hipotesis de Alexandrov, así que tendremos un arma fundamental para poder utilizar. Sin embargo, el camino a la regularidad no es tan sencillo, pero podremos llegar a él a travez del absurdo.

Definición 6.1. *Dado $x \in \Omega$, decimos que x es un punto extremal de Ω si no se puede escribir como convinación convexa de puntos del conjunto.*

Sea $u \in C(\overline{\Omega})$, convexa de manera que

$$u = 0 \ \ en \ \ \partial\Omega$$

$$\lambda \leq Mu \leq \Lambda$$

Si $x_0 \in \Omega$ y $p \in \partial u(x_0)$, llamemos $l(x) = u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$.

Sea $S = \{x \in \Omega : u(x) = l(x)\}$. S es el conjunto de los puntos de contacto del hiperplano soporte en la gráfica de u.

Proposición 6.1. *Sea S el conjunto de los puntos de contacto del hiperplano. Entonces, S es convexo.*

Demostración. Sea $x, y \in S$. Quiero ver que $(1-t)x+ty \in S$, $\forall t \in [0,1]$. Vamos a verlo de la siguiente manera:
llamemos $w = (1-t)x + ty$.

- $u(w) \leq l(w))$

  $$u(w) \leq_{\star^1} (1-t)u(x)+tu(y) =_{\star^2} (1-t)l(x)+tl(y) =_{\star^3} l((1-t)x+ty) = l(w)$$

  con $\star^1$ es porque u es convexa, $\star^2$ es porque $x, y \in S$ y $\star^3$ es porque l es lineal por ser un hiperplano.

- $l(w) \leq u(w))$

  $$u(w) \geq u(x_0) + \langle p, w - x_0\rangle = u(x_0) + \langle p, (1-t)x + ty - x_0\rangle =_{\star^1}$$
  $$u(x_0) + \langle p, x\rangle - t\langle p, x\rangle + t\langle p, y\rangle + \langle p, -x_0\rangle$$

  donde $\star^1$ es porque despejamos mucho, y tenemos arriba, acomodando un $l(x)$, quedando así, tras sumar y restar los correspondientes x_0 y $u(x_0)$

  $$l(x) - t\langle p, x - x_0 + x_0\rangle + t\langle p, y - x_0 + x_0\rangle - u(x_0) + u(x_0)$$

  acomodando

  $$l(x) - t(u(x_0) + \langle p, x\rangle - \langle p, x_0\rangle) + t(u(x_0) + \langle p, y\rangle - \langle p, x_0\rangle) = l(x) - tu(x) + t(y) =_{\star^2}$$

$$l(x) - tl(x) + tl(y) = (1-t)l(x) + tl(y) =_{\star^3} l((1-t)x + ty) = l(w)$$

con $\star^2$ es porque $x, y \in S$ y $\star^3$ es porque es lineal.

Concluimos que $u(w) \geq l(w)$.

Luego, tenemos que S es convexo.

□

Nuestro objetivo actual es ver que, en realidad, S es un solo punto.

Para eso, vamos a verlo de la siguiente manera: por una doble contradicción.

Proposición 6.2. *Si S tiene más de un punto, entonces S tiene puntos extremales en Ω.*

Demostración. Sea E el conjunto de puntos extremales de $\overline{S}$, tal que $E \subset \overline{\Omega}$.

Para ver que hay un punto extremal en Ω, vamos a hacerlo por el absurdo. Supongamos que no, que $E \subset \partial\Omega$. Sea $x_0 \in S$ y tomemos $x_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$ de manera que $\alpha_i > 0$ para todo i y, $x_i \in S$ además, $\sum_i \alpha_i = 1$. Entonces,

$$0 \geq_{\star^1} u(x_0) =_{\star^2} l(x_0) =_{\star^3} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i l(x_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x_i) =_{\star^4} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i 0 = 0$$

donde $\star^1$ es porque u es convexa, continua y 0 en el borde, $\star^2$ es porque los x_0 está en S, $\star^3$ es porque es el hiperplano que es lineal y $\star^4$ es porque estoy suponiendo que $E \subset \partial\Omega$.

Así, tenemos que $0 > 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, S tiene algún punto dentro de Ω. □

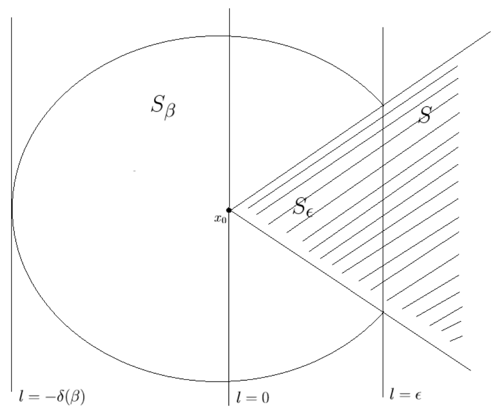
Ahora, vamos a ver que tampoco puede pasar esto. De esta manera, todo el absurdo arranco de suponer que S tiene más de un punto.

Proposición 6.3. *Si S tiene más de un punto, entonces S no tiene puntos extremales en Ω.*

Demostración. Recordemos que $\lambda \leq Mu \leq \Lambda$. Por abuso de notación, llamemos u a la resta entre la función u anterior y el hiperplano que pasa por x_0. De esta manera, conseguimos que $u \geq 0$ en Ω.
Sea $S = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) = 0\}$. Son los puntos de contacto. Empezamos con lo hardcore.

Sea S el conjunto de los puntos de contacto y sea x_0 un "vértice" de él. Llamemos $l = 0$ al plano que solo pasa por x_0 en S.
Sea $l = \epsilon$ al mismo plano, sólo que corrido sobre S y el ϵ sale porque es el área de S que queda entre los planos $l = 0$ y $l = \epsilon$. Llamemos S_ϵ al área encerrada de S entre esos planos.

Ahora, inclinamos el plano $l = \epsilon$ de manera que caiga sobre Ω, pero para el lado donde no esté sobre S. La inclinación, llamada β nos da un área, S_β, donde la función u está por debajo del plano inclinado $l = \epsilon$.



Sea $l = -\delta(\beta)$ el plano $l = 0$, sin inclinación, corrido en la dirección "opuesta" a S, hasta que sea tangente al conjunto S_β.

Formalmente, tenemos $l(x) = \langle x - x_0, \eta \rangle$ y $S_\beta = \{x \in \Omega : u(x) < \beta(\epsilon - l(x))\}$

Notemos que

$$\bigcap_{\beta > 0} S_\beta = S_\epsilon$$

Ahora, sea $v(x) = u(x) - \beta(\epsilon - l(x))$.

Vemos que $v = 0$ en ∂S_β (lo que es v es la resta entre el plano inclinado y la función u). Entonces, ahí en el borde las cosas se pegan.

Por otro lado, $\delta_\beta \to 0$ cuando $\beta \to 0$. Ahora,

$$v(x_0) = u(x_0) - \beta(\epsilon - \cancelto{0}{l(x_0)}) =_{\star^1} \cancelto{0}{l(x_0)} - \beta\epsilon = -\beta\epsilon$$

donde $\star^1$ es porque $x_0 \in S$.

Resulta que

$$v(x) = u(x) - \beta(\epsilon - l(x)) \geq_{\star^1} -\beta(\epsilon - l(x)) = -\beta\epsilon + \beta l(x) \geq -\beta\epsilon - \beta\delta(\beta)$$

así, $v(x) \geq -\beta\epsilon - \beta\delta(\beta)$. Tomamos mínimo y

$$\min_{x \in S_\beta} v(x) \geq -\beta(\epsilon + \delta(\beta))$$

y damos vuelta

$$\beta(\epsilon + \delta(\beta)) \geq \left| \min_{x \in S_\beta} v(x) \right|$$

consiguiendo así, que

$$v(x_0) = -\beta\epsilon$$

entonces

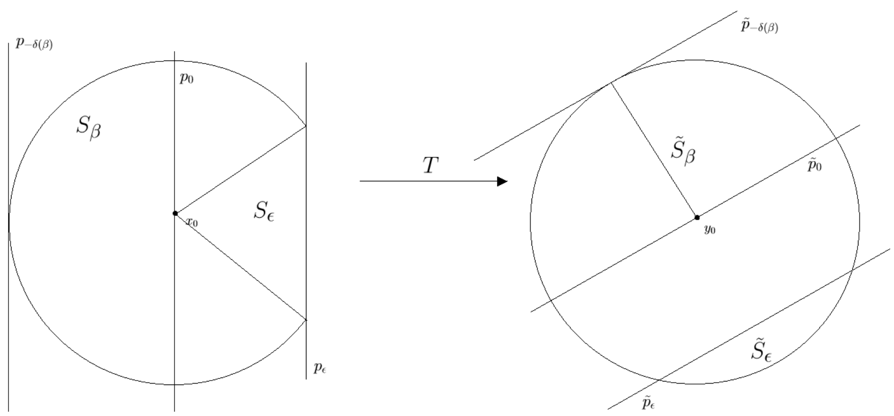
$$|v(x_0)| = \beta\epsilon \Rightarrow \frac{|v(x_0)|}{|\min_{x \in S_\beta} v(x)|} = \frac{\beta\epsilon}{|\min_{x \in S_\beta} v(x)|}$$

entonces, usando que $|\min_{x\in S_\beta} v(x)| \le \beta(\epsilon+\delta(\beta))$,

$$\frac{|v(x_0)|}{|\min_{x\in S_\beta} v(x)|} \ge \frac{\cancel{\beta}\epsilon}{\cancel{\beta}(\epsilon+\delta(\beta))}.$$

Ahora bien, sea T una transformación de manera que normaliza a S_β. Entonces, se cumple que

$$\begin{cases} T(S_\beta) = \tilde{S_\beta} \\ B_{\alpha_n}(0) \subset \tilde{S_\beta} \subset B_1(0) \\ \tilde{v}(y) = C_\beta v(T^{-1}y) \\ \lambda \le M\tilde{v} \le \Lambda \text{ en } \tilde{S_\beta} \\ y_0 = T(x_0) \end{cases}$$



Ahora bien, por Alexandrov, tenemos que

$$|\tilde{v}(y_0)|^n \le Cdist(y_0, \partial\tilde{S_\beta})M\tilde{v}(\tilde{S_\beta})$$

y así, llegamos a que

$$|\tilde{v}(y_0)| \le Cdist(y_0, \partial\tilde{S_\beta})^{\frac{1}{n}}.$$

Ahora, también tenemos que

$$\left|\min_{\tilde{S_\beta}} \tilde{v}\right| \approx M\tilde{v}(\tilde{S_\beta}) \approx 1.$$

Afirmamos lo siguiente:

$$\frac{|\tilde{v}(y_0)|}{\left|\min_{y\in\tilde{S_\beta}} \tilde{v}()\right|} = \frac{|v(x_0)|}{\left|\min_{x\in S_\beta} v(x)\right|}$$

pues, sabemos que $\tilde{v}(y_0) = C_\beta v(T^{-1}y_0)$, $\min_{y\in\tilde{S_\beta}} \tilde{v}(y) = C_\beta v(T^{-1}v)$ y $y \in \tilde{S_\beta} = T(x)$ con $x \in S_\beta$.
Así,

$$\tilde{v}(y_0) = C_\beta v(T^{-1}) = v(T^{-1}Tx) = v(x).$$

Así, concluimos que

$$\frac{|\tilde{v}(y_0)|}{\left|\min_{y\in\tilde{S_\beta}} \tilde{v}(y)\right|} = \frac{|v(x_0)|}{\left|\min_{x\in S_\beta} v(x)\right|} \frac{\cancelto{1}{C_\beta}}{\cancel{C_\beta}} \geq_{\star^1} \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta(\beta)}$$

donde $\star^1$ es por lo que antes (de arribita).
Con lo cual, usando Alexandrov y la dominación de la medida y lo metemos toda en la constante, resulta que

$$|\tilde{v}(y_0)|^n \leq Cdist(y_0, \partial\tilde{S_\beta}).$$

Reemplazamos arriba y tenemos que

$$\frac{Cdist(y_0, \partial\tilde{S_\beta})^{\frac{1}{n}}}{\left|\min_{y\in\tilde{S_\beta}} \tilde{v}(y)\right|} \geq \frac{|\tilde{v}(y_0)|}{\left|\min_{y\in\tilde{S_\beta}} \tilde{v}(y)\right|} \geq \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta(\epsilon)}.$$

Tomamos los dos términos de los extremos y pasamos multimplicando el minimo

$$Cdist(y_0, \partial\tilde{S_\beta})^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta(\beta)} \left|\min_{y\in\tilde{S_\beta}} \tilde{v}(y)\right|.$$

Despejando y metiendo el mín dentro de la constante, llegamos a la conclusión que

$$dist(y_0, \partial\tilde{S_\beta})^{\geq} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon + \delta(\beta)}\right)^n C.$$

Al mirar esto, observamos que lo que quiere decir en realidad, es que hay una distancia entre y_0 y $\partial\tilde{S_\beta}$, osea, que están alejados.

Por otro lado, definamos $P_\gamma\{x : l(x) = \gamma\}$.
Con $\gamma = 0$ tenemos P_0 y así.
Recordemos que $Tx = \Lambda^{\frac{1}{n}}\Psi^t(x - \tilde{x})$, con $y = Tx$. Resulta que si

$$P_\gamma\{x : \langle x - x_0, \eta\rangle = \gamma\}$$

entonces

$$\tilde{P_\gamma}\{Tx : \langle x - x_0, \eta\rangle = \gamma\}$$

despejando y usando que $x = T^{-1}y$

$$\tilde{P_\gamma}\{y : \langle y - y_0, A\rangle = \gamma\}$$

con $A = T\eta$.

Veamos otro truquito, que nos va a servir para estos planos:

Lema 6.1. *Dadas dos rectas paralelas* $P_a = \{x : \langle x, \eta\rangle\} = a$ *y* $P_b = \{x : \langle x, \eta\rangle = b\}$*, tenemos que*

$$dist(P_a, P_b) = \frac{|b-a|}{|\eta|}.$$

Demostración. Sea $y = y_1, \ldots, y_n$ un punto de P_b y desglocemos $\eta = \eta_1, \ldots, \eta_n$. Luego, calculamos la distancia de P_a al punto y

$$dist(P_a, y) = \frac{|\overbrace{\eta_1 y_i + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_n y_n}^{b} - a|}{\underbrace{\sqrt{\eta_i^2 + \ldots + \eta_n^2}}_{|\eta|}}$$

y así queda lo que queriamos ver. □

Veamos que pasa con $dist(y_0, \partial\tilde{S_\beta})$.

$$dist(y_0, \partial\tilde{S_\beta}) \leq dist(y_o, \tilde{P}_{-\delta(\beta)}) =_{\star^1} dist(\tilde{P_0}, \tilde{P}_{-\delta(\beta)}) \underset{\beta\to 0}{\to} 0$$

donde $\star^1$ es porque son planos paralelos. Y este límite es cierto, ya que, por un lado, tenemos que

$$0 \leq \frac{dist(\tilde{P_0}, \tilde{P}_{-\delta(\beta)})}{dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_\epsilon})} = \frac{dist(P_0, P_{-\delta(\beta)})}{dist(P_0, P_\epsilon)}$$

por ser una contracción, por otro lado, que

$$\frac{dist(P_0, P_{-\delta(\beta)})}{dist(P_0, P_\epsilon)} = \frac{|0 - -\delta(\beta)|}{|\epsilon|}$$

por el truquito y, por último, tenemos que

$$dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_\epsilon})$$

está dominado por 2, que es el diámetro.

□

De esta manera, llegamos a la conclusión que, si hay un punto extremal dentro de Ω, podemos decir que la distancia entre ese punto y el borde del conjunto es al mismo tiempo mayor que cero, y tiende a cero. Con lo cual, esto es absurdo. Todo este absurdo salió de suponer que había más de un punto de contacto entre el hiperplano y la función, así que definitivamente podemos concluir el conjunto de los puntos de contacto entre la función y el hiperplano es un sólo punto.

Muy bien. Ya vimos que todos los hiperplanos tiene un sólo punto de contacto. Sin embargo, nos encontramos por ahora que, como hay un único punto de contacto, dada una función convexa u, pueden pasar varios hiperplanos por el mismo punto de contacto. Vamos a ver ahora que $\partial u(x)$ tiene un único punto. Juntando esto y lo anterior, vamos a poder concluir, via el teorema 3.2, la función $u \in C^1(\Omega)$.

Definición 6.2. *Dada $\xi \in \mathbb{R}^n$, definimos la derivada direccional en el punto x_0 y en la direccion ξ como*

$$\psi(\xi) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t}$$

Observación 6.1. *No es necesario que el vector que da la dirección esté normalizado.*

Observación 6.2. *Sea $\delta \in (0,1)$. Entonces,*

$$D_\xi u(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \sup_{\substack{|x - x_0| \leq \epsilon \\ t \leq \epsilon}} \frac{u(x + t\xi) - u(x)}{t} =_{\star^1}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sup_{\substack{|x - x_0| \leq \delta\epsilon \\ t \leq \epsilon\delta}} \frac{u(x + t\xi) - u(x)}{t} \leq_{\star^2}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sup_{\substack{|x - x_0| \leq \delta\epsilon \\ t \leq \epsilon}} \frac{u(x + t\xi) - u(x)}{t} \leq$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sup_{\substack{|x - x_0| \leq \epsilon \\ t \leq \epsilon}} \frac{u(x + t\xi) - u(x)}{t} = D_\xi u(x)$$

Donde $\star^1$ es porque multiplico por δ a los dos ϵ.
Donde $\star^2$ es porque $\delta < 1$.

Luego, queda todo acotado y podemos cambiar lo del supremo tanto a derecha como a izquierda.

Proposición 6.4. *El funcional ψ cumple con las siguientes propiedades:*

I)
$$\psi(s\xi) = s\psi(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

II)
$$\psi(\xi_1 + \xi_2) \leq \psi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$$

Demostración.

I) Dados s y x_0, consideremos $w = st$. Ahora, calculemos $\psi(s\xi)$:

$$\psi(s\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + ts\xi) - u(x_0)}{t}.$$

Usando el cambio de variable, notamos que si

$$\text{Si } t \to 0 \quad \text{entonces} \quad w \to 0$$

con lo cual, tenemos que

$$\lim_{w\to 0} \frac{u(x_0+w\xi)-u(x_0)}{\frac{w}{s}} =_{\star^1} s \lim_{w\to 0} \frac{u(x_0+w\xi)-u(x_0)}{w}$$

porque como s no depende del límte, lo puedo sacar afuera.

Luego, tenemos que

$$\psi(s\xi) = s\psi(\xi).$$

II) La demostración de esta propiedad es directa de la combinación de los siguientes lemas:

Lema 6.2.

$$D_{\xi_1+\xi_2}u(x_0) \leq D_{\xi_1}(x_0) + D_{\xi_2}(x_0).$$

Demostración.

$$D_{\xi_1+\xi_2}u(x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_0|\leq\epsilon \\ t\leq\epsilon}} \frac{u(x+t(\xi_1+\xi_2))-u(x_0)}{t} =_{\star^1}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_0|\leq\epsilon \\ t\leq\epsilon}} \frac{u(x+t\xi_1+t\xi_2)-u(x_0)+u(x+t\xi_1)-u(x+t\xi_1)}{t} \leq_{\star^2}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_0|\leq\epsilon \\ t\leq\epsilon}} \frac{u(x+t\xi_1+t\xi_2)-u(x+t\xi_1)}{t} + \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_0|\leq\epsilon \\ t\leq\epsilon}} \frac{u(x+t\xi_1)-u(x_0)}{t} =_{\star^3}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_0|\leq\epsilon \\ t\leq\epsilon}} \frac{u(x+t\xi_1+t\xi_2)-u(x+t\xi_1)}{t} + D_{\xi_1}u(x_0).$$

Con $\star^1$ es porque sumo y resto $u(x+t\xi_1)$.
Con $\star^2$ es porque $\sup(a+b) \leq \sup(a)+\sup(b)$.
Con $\star^3$ tomando límite a la derecha.

Ahora biem, tomamos $y = x+t\xi_1$ y queremos $|y-x_0|$. Entonces, $|x+t\xi_1-x_0| \leq \underbrace{|x-x_0|}_{\leq\epsilon} + t\underbrace{|\xi_1|}_{\leq\epsilon}$ y, de esta forma, volviendo a donde nos habiamos quedados, podemos decir que

$$=_{\star^4} \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\substack{|y-x_0|\leq 2\epsilon|\xi_1| \\ t\leq\epsilon}} \frac{u(y+t\xi_2)-u(y_0)}{t} + D_{\xi_1}u(x_0) = D_{\xi_2}u(x_0) + D_{\xi_1}u(x_0)$$

Con $\star^4$ es usando la observación 3.2.

Y conseguimos lo que queriamos. □

Lema 6.3.

$$D_\xi u(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0)$$

con u convexa.

Demostración.

- $\geq$)

$$D_\xi u(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \sup_{|x-x_0|\leq \epsilon} \frac{u(x+\epsilon\xi)-u(x)}{\epsilon} \geq_{\star^1} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{u(x_0+\epsilon\xi)-u(x_0)}{\epsilon} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0)$$

Con $\star^1$ es por ser el supremo.

- $\leq$)
Sea $\delta > 0$ y tomemos $|x-x_0| \leq \frac{\epsilon\delta}{2k}$, siendo k la constante de Lipschitz.
Entonces,

$$\frac{u(x+\epsilon\xi)-u(x)}{\epsilon} = \frac{u(x_0+\epsilon\xi)-u(x_0)}{\epsilon} + \frac{u(x+\epsilon\xi)-u(x)-u(x_0+\epsilon\xi)+u(x_0)}{\epsilon} \leq$$

$$\frac{u(x_0+\epsilon\xi)-u(x_0)}{\epsilon} + \left|\frac{u(x+\epsilon\xi)-u(x_0+\epsilon\xi)}{\epsilon}\right| + \left|\frac{u(x)-u(x_0)}{\epsilon}\right| \leq_\star^1$$

$$\frac{u(x_0+\epsilon\xi)-u(x_0)}{\epsilon} + \frac{2k|x-x_0|}{\epsilon} \leq \frac{u(x_0+\epsilon\xi)-u(x_0)}{\epsilon} + \delta$$

Con $\star^1$ es porque usamos las desigualdades de Lipschitz dos veces, y usamos el siguiente lemita auxiliar:

Lema 6.4. *Si $a \leq b+\delta,\ \forall \delta > 0$, entonces*
$a \leq b$.

Demostración. Supongamos que no. Que $a > b$. Sea $\delta = \frac{a-b}{2}$.
Por un lado, $\delta > 0$. Ahora bien, sabemos que $a \leq b+\delta$, entonces

$$a \leq b + \frac{a-b}{2} \Rightarrow a - \frac{a}{2} \leq b - \frac{b}{2} \Rightarrow a \leq b$$

lo cual es absurdo. □

Por lo tanto, usando esto, tenemos que

$$D_\xi u(x_0) =_\star^1 \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{\substack{|x-x_0|\leq \frac{\epsilon\delta}{2k} \\ t\leq\epsilon}} \frac{u(x+t\xi)-u(x)}{t} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{|x-x_0|\leq \frac{\epsilon\delta}{2k}} \frac{u(x+\epsilon\xi)-u(x)}{\epsilon} \leq_{\star^2}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{u(x_0+\epsilon\xi)}{\epsilon} + \delta = \frac{\partial u}{\partial xi}(x_0) + \delta$$

Donde $\star^1$ es por la observación 3.2. Donde $\star^2$ es por lo de arriba.
Así, usando el lemita auxiliar, tenemos que $D_\xi u(x_0) \leq \frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0)$.

□

□

Ahora, veamos para que sirven estas dos propiedades.

Lema 6.5. *Sea* $\psi(\xi) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0)$*. Entonces, tenemos que* ψ *es convexa.*

Demostración. Sean $t \in (0,1)$ y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\psi((1-t)\xi_1 + t\xi_2) \leq_{\star^1} \psi((1-t)\xi_1) + \psi(t\xi_2) =_{\star^2} (1-t)\psi(\xi_1) + t\psi(\xi_2).$$

Donde $\star^1$ es usando la propiedad II) y $\star^2$ es usando la propiedad I). □

La pregunta real ahora es para que serviría esto. Bueno, para esto esta este lema.

Lema 6.6.

$$p \in \partial u(x_0) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) \geq \langle p, \xi \rangle, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración.

- $\Rightarrow$)

  Sea $p \in \partial u(x_o)$. Entonces, $u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle$.
  Tomemos $\xi \in \mathbb{R}^n$ y usemos el truco de escribir a $x = x_0 + t\xi$. Ahora, reemplazamos en la ecuación del hiperplano.

  $$u(x_0 + t\xi) \geq u(x_0) + \langle p, \cancel{x_0} + t\xi \cancel{- x_0} \rangle$$

  y despejamos

  $$u(x_0 + t\xi) - u(x_0) \geq \langle p, t\xi \rangle = t\langle p, \xi \rangle$$

  paso dividiendo

  $$\frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t} \geq \langle p, \xi \rangle$$

  y tomo límite cuando $t \to 0^+$. Así, consigo la desigualdad buscada.

- $\Leftarrow$)

  Si vale que $\forall \xi$, $\frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) \geq \langle p, \xi \rangle$, entonces $\forall t$

  $$\frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t} \geq_{\star^1} \frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) \geq_{\star^2} \langle p, \xi \rangle$$

  Con $\star^1$ es tomando el limite cuando $t \to 0$ y $\star^2$ es por hipotesis.
  Ahora, me quedo con los extremos.

  $$\frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t} \geq \langle p, \xi \rangle$$

  paso multiplicando el t, sumo y resto x_0 y sea $x = x_0 + t\xi$

  $$u(x) - u(x_0) \geq \langle p, x_0 - x_0 + t\xi \rangle$$

  despejando

  $$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle$$

  con lo cual, $p \in \partial u(x_0)$.

$\square$

Lema 6.7.
$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) = \text{máx}\{\langle \xi, p\rangle : p \in \partial u(x_0)\}$$

Demostración.

- $\geq$) Por el lema 6.6,
$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) \geq \langle p, \xi\rangle, \ \forall \xi$$
en particular, para el máximo.

- $\leq$) Fijemos $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Como ψ es convexa, $\exists p \in \partial\psi(\tilde{\xi})$ tal que
$$\psi(\xi) \geq \psi(\tilde{\xi}) + \langle p, \xi - \tilde{\xi}\rangle, \ \forall \xi$$
entonces
$$\psi(\xi) \geq \psi(\tilde{\xi}) + \langle p, \xi - \tilde{\xi}\langle \Rightarrow_{\star^1} 0 \geq \psi(\tilde{\xi}) - \langle p, \tilde{\xi}\rangle$$
y así
$$\langle p, \tilde{\xi}\rangle \geq \psi(\tilde{\xi})$$
donde $\star^1$ es porque evaluo en $\xi = 0$. Quedemonos con $\langle p, \tilde{\xi}\rangle \geq \psi(\tilde{\xi})$.
Tomemos $\xi = s\tilde{\xi}, s \in \mathbb{R}$ y hagamos el mismo calculo.
$$\psi(s\tilde{\xi}) \geq \psi(\tilde{\xi}) + \langle p, s\tilde{\xi} - \tilde{\xi}\rangle \Rightarrow_{\star^1} s\psi(\tilde{\xi}) \geq \psi(\tilde{\xi}) + \langle p, s\tilde{\xi}\rangle - \langle p, \tilde{\xi}\rangle$$
entonces
$$s\psi(\tilde{\xi}) - \psi(\tilde{\xi}) \geq s\langle p, \tilde{\xi}\rangle - \langle p, \tilde{\xi}\rangle$$
sacando factor común
$$\psi(\tilde{\xi})\cancel{(s-1)} \geq \langle p, \tilde{\xi}\rangle\cancel{(s-1)}$$
y conseguimos que $\psi(\tilde{\xi}) \geq \langle p, \tilde{\xi}\rangle$.
De esta manera,
$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) = \psi(\xi) \geq \psi(\tilde{\xi}) + \langle p, \xi - \tilde{\xi}\rangle = \langle p, \tilde{\xi}\rangle + \langle p, \xi - \tilde{\xi}\rangle =$$
$$\cancel{\langle p, \tilde{\xi}\rangle} + \langle p, \xi\rangle \cancel{- \langle p, \tilde{\xi}\rangle}$$
y así,
$$\psi(\xi) \geq \langle p, \xi\rangle.$$
Luego, por el lema 6.6, resulta que $p \in \partial u(x_0)$.
Entonces,
$$\psi(\tilde{\xi}) = \langle p, \tilde{\xi}\rangle \leq \text{máx}\{\langle p, \tilde{\xi}\rangle, p \in \partial u(x_0)\}$$

Con lo cual, queda que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) = \max\{\langle p, \xi\rangle p \in \partial u(x_0)\}$$

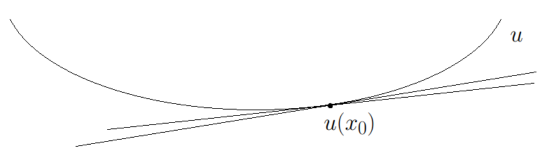
□

Ahora viene lo hardcore.

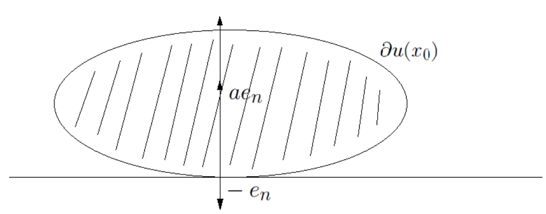
Teorema 6.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto estrictamente convexo y abierto. Sea u continua y estrictamente convexa en Ω y de manera que $\lambda \leq Mu \leq \Lambda$ en Ω. Entonces, $\partial u(x)$ tiene un solo punto.*

Observación 6.3. *Al combinar el teorema de aca arriba con que cada hiperplano soporte toca en único punto, podriamos concluir que $u \in C^1(\Omega)$.*

Demostración. La demostración de esto es por contradicción.
Supongamos que no. Supongamos que $\partial u(x_0)$ tiene más de un punto.



Sabemos que $\partial u(x_0)$ es cerrado y convexo. Asumamos que $o \in \partial u(x_0)$ y que $\partial u(x_0) \subset \{p : p_n \geq 0\}$. Esto sería



□

Como $0 \in \partial u(x_0)$, tenemos que $u(x) \geq u(x_0)$. Veamos que pasa si nos salimos afuera de la region. Tomemos $\xi = -e_n$.
Asumamos que $x_0 = 0$ y $u(0) = 0$. Con todo lo visto anteriormente y la estricta convexidad de Ω, resulta que

$$u(x) > 0, \ \forall x \in \Omega, x \neq 0.$$

Entonces, por un lado

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) = \text{máx}\{\langle \xi, p\rangle : p \in \partial u(x_0)\},$$

con lo cual afirmamos que $\frac{\partial u}{\partial \xi}(x_0) \leq 0$.
Por otro lado, como $u > 0$ y cero en x_0, tenemos que $0 \in \partial u(x_0)$ y

$$\frac{v(x_0 + s\xi) - v(x_0)}{s} \geq_{\star^1} 0$$

porque $\star^1$ es usando la proposición 4.4. Así, conseguimos que $\partial u(x_0) = 0$.

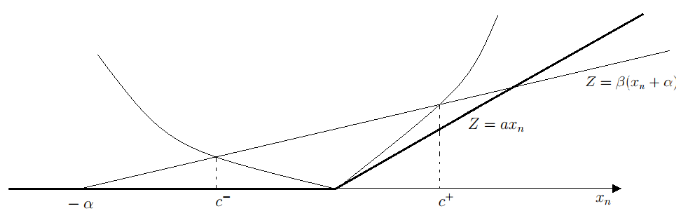
En particular, si discriminamos la última coordenada

$$u(x) \geq a x_n, \; x_n > 0.$$

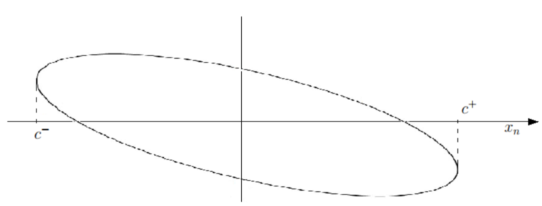
Tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{u(t - e_n) - \cancelto{0}{u(0)}}{t} = 0 = \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Sean $-\alpha$ el número en x_n donde $u(-\alpha)$ está en el borde. Sea también, $Z = \beta(x_n + \alpha)$ el plano que tiene inclinación β. Además, que los dos planos se corten por fuera de $\mathcal{S}$, que lo definimos abajo.



Defino c^+ y c^- de la siguiente manera:



Sea $\mathcal{S} = \{x : u(x) - \beta(x_n + \alpha) < 0\}$. Lo que vamos a hacer ahora, vamos a acotar c^+ y c^- con respecto a α y a β. Calculemos el punto de interseccion entre el plano Z y el plano ax_n.

$$\beta(x_n + \alpha) = ax_n \Rightarrow \beta x_n + \alpha\beta = ax_n \Rightarrow \alpha\beta = ax_n - \beta x_n \Rightarrow$$

$$\alpha\beta = x_n(a-\beta) \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{a-\beta} = x_n$$

De esta manera, $c^+ \leq \frac{\alpha\beta}{a-\beta}$.

Por otro lado, tomemos $\frac{-\alpha}{2}$, y definamos

$$\beta := \frac{u(\frac{-\alpha}{2})}{\frac{\alpha}{2}}.$$

Queremos ver que $\frac{-\alpha}{2} \geq c^-$.
Dado $t \in [\frac{-\alpha}{2}, 0]$, conseguimos, evaluando t en la coordenada en x_n, que

$$u(t) \leq_{\star^1} u(\frac{-\alpha}{2}) =_{\star^2}$$

$$\frac{\alpha}{2}\beta \leq_{\star^3} \beta(\alpha+t).$$

con $\star^1$ es por como es u, $\star^2$ por como definimos β y $\star^3$ es por como es el plano $\beta(\alpha + x_n)$. Luego,

$$(0,t), t \in [\frac{-\alpha}{2}, 0] \subset \mathcal{S}$$

y concluimos que $\frac{-\alpha}{2} \geq c^-$.

Ahora, definimos $v(x) = u(x) - \beta(x_n + \alpha)$.

$$v = 0 \text{ en } \partial\mathcal{S};$$

$$v < 0 \text{ en } \mathcal{S}.$$

Resulta que

$$\min_{\mathcal{S}} v = v(0) = -\alpha\beta.$$

También, tenemos que

$$\begin{cases} v(x) \geq -\beta\alpha & x_n < 0 \\ v(x) \geq u(x) - ax_n - \beta\alpha & x_n > 0 \end{cases}$$

donde la segunda desigualdad es porque $\beta < a$, ya que si no fuera el caso, nunca se cortarían.

Llego la hora de normalizar. Sea T de manera que normaliza a $\mathcal{S}$. Resultaria:

$$T(\mathcal{S}) = \tilde{\mathcal{S}}, \text{ tal que } B_{\alpha_n} \subset \tilde{\mathcal{S}} \subset B_1(0)$$

$$\tilde{v}(y) = |\det T|^{\frac{2}{n}} v(T^{-1}y) \quad \tilde{v} = 0 \text{ en } \partial\tilde{\mathcal{S}}$$

$$\lambda \leq M\tilde{v} \leq \Lambda \quad y_0 = T(0) \quad \min_{\tilde{\mathcal{S}}} = \tilde{v}(y_0)$$

$\tilde{v}$ es convexa, continua y todo lo de siempre que conseguimos con las normalizaciones. Por el teorema 4,4 parte I conseguimos que

$$-\tilde{v}(y_0) \leq C_n dist(y_0, \partial\mathcal{S})^{\frac{2}{n}}$$

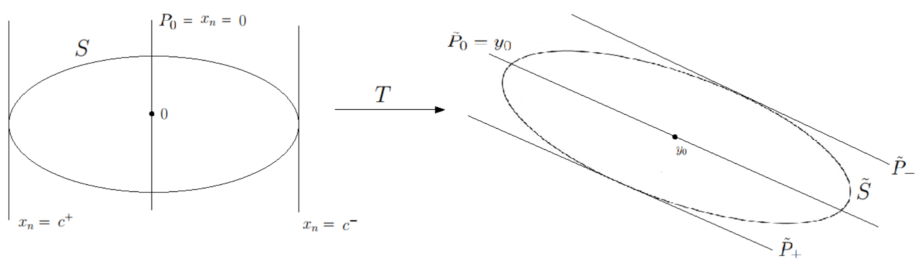
$$|\tilde{v}(y_0)|^n C_n \leq dist(y_0, \partial\mathcal{S})$$

y con esto, tenemos que la distancia es más grande que algo.

Ahora, tomemos las rectas

$$x_n = c^- \qquad x_n = c^+ \qquad x_0 = 0$$

y llamemoslas p_-, p_+ y p_0 respectivamente.



Entonces, tomamos las rectas $\tilde{P_-}, \tilde{P_+}$ y $\tilde{P_0}$. Miremos a $\tilde{P_+}$.

$$dist(y_0, \partial\tilde{\mathcal{S}}) \leq dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_+}).$$

Así

$$dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_+}) = dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_+}).\frac{dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_-})}{dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_-})} \leq_{\star^1} 2\frac{dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_+})}{dist(\tilde{P_0}, \tilde{P_-})} =_{\star^2}$$

$$2\frac{dist(P_0, P_+)}{dist(P_0, P_-)} = 2\frac{c^+}{|c^-|} \leq_{\star^3} \frac{\frac{\alpha\beta}{a-\beta}}{\left|\frac{\alpha}{2}\right|} =_{\star^4} \frac{4\beta}{a-\beta} \to 0$$

Con $\star^1$ es porque está normalizado, $\star^2$ porque así es T, $\star^3$ es por las cotas de c^- y c^+ y $\star^4$ es haciendo álgebra.

Con lo cual, tenemos que $dist(y_0, \partial\mathcal{S}) \to 0$, con lo cual, llegamos a una contradicción.

Esta contradicción surgió de pensar que podíamos tener mas de un punto en $\partial u(x)$. Así, llegamos a la conclusión de que sólo puede haber un punto.

Sumando los dos teoremas grandes, llegamos a la conclusión de que
$u(x) \in C^1(\Omega)$.

7. Segundo problema de borde

Llegamos a la segunda sección. Ahora, vamos a considerar dos conjuntos, Ω y Ω^*. Las hipotesis que pondremos en ellos son:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convexo y abierto.
- $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$, convexo y cerrado.

Sea $f : \Omega \to [o, \infty]$ una función dada. Nuestro objetivo es hallar una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, convexa, de manera que:

- $|\partial u(E)| = Mu(E) = \int_E f(x)dx = \mu(E),\ \forall E \subset \Omega.$
- $\partial u(\Omega) = \Omega^*.$

Ahora, si bien perdimos la restricción de que u es igual a una función g continua en el borde, podemos tener infinitas soluciones. Para evitar esto, vamos a considerar lo siguiente:

- $o \in \Omega$
- $u(0) = 0$

El método de resolución de este problema es el siguiente: descomponer a μ en suma de masas delta

$$\mu = \sum_{i=0}^{N} \theta_i \delta_{x_i}$$

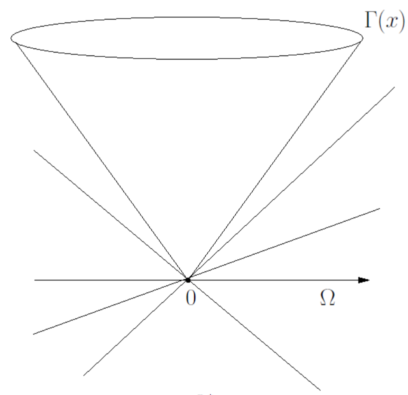
respetando que

$$|\Omega^*| = |\partial u(\omega)| = \mu(\Omega) = \sum_{i=0}^{N} \theta_i$$

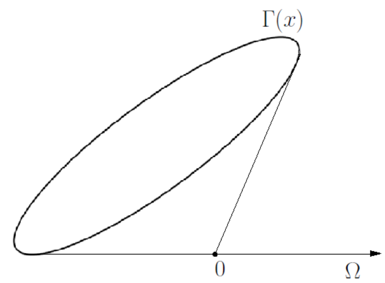
y luego tomamos convergencia débil.

7.1. Caso donde $\mu = \theta$

Veremos primero el caso donde μ es solo "un delta"; es decir que $N = 1$.
Sea $\Gamma(x) = \text{máx}\,\{\langle x, p\rangle : p \in \Omega^*\}$. Esto forma un cono con vértice en 0.



$0 \in \Omega^*$



$0 \notin \Omega^*$

Queremos corroborar ahora que:

- $\partial\Gamma(0) = \Omega^*$
- $\partial\Gamma(0) = \partial\Gamma(\Omega)$

Demostración.

- $\partial\Gamma(0) = \Omega^*$

  I) $\Omega \subset \partial\Gamma(0)$
  Sea $\tilde{p} \in \Omega^*$. Por un lado, debido a las suposiciones generales, sabemos que $\Gamma(0) = 0$. Queremos ver que

  $$\Gamma(x) \geq \Gamma(0) + \langle \tilde{p}, x - 0 \rangle.$$

  Por definición,

  $$\Gamma(x) = \text{máx}\{\langle x, p \rangle : p \in \Omega^*\} \geq \langle x, \tilde{p} \rangle$$

  entonces tenemos que $\Gamma(x) \geq \langle x, \tilde{p} \rangle$. Pero, por la restricción de que $\Gamma(0) = 0$ (porque Γ es nuestra u),

  $$\Gamma(x) \geq \underbrace{\Gamma(0)}_{0} + \langle \tilde{p}, x - 0 \rangle$$

  y así concluimos que $\tilde{p} \in \Gamma(0)$.

  II) $\partial\Gamma(0) \subset \Omega^*$
  Supongamos que no, entonces $\exists \tilde{p} \in \partial\Gamma(0)$, pero $\tilde{p} \notin \Omega^*$.
  Como $\tilde{p} \in \partial\Gamma(0)$ y $\Gamma(0) = 0$,

  $$\Gamma(x) \geq 0 + \langle x, \tilde{p} \rangle \ \forall x \in \Omega,$$

  con lo cual, tenemos que

  $$\text{máx}\{\langle x, p \rangle : p \in \Omega^*\} \geq \langle x, \tilde{p} \rangle.$$

Por otro lado, tomemos $\tilde{p}$ de manera que no está en Ω^* y sea $p \in \Omega^*$. Dado que $\tilde{p} \in \Gamma(0)$, consideremos un $\overline{x} \in \Omega$, (para hallarlo, sea $x \in \Omega$ y consideremos $B_\epsilon(x) \subset \Omega$ y sea $\overline{x}$ en esa esferita) tal que $p \in \partial\Gamma(\overline{x})$. Por la monotonía de los subdiferenciales,

$$\langle p - \tilde{p}, \overline{x} - 0 \rangle > 0,$$

así que si tomamos un angulito $\delta > 0$, tenemos que

$$\langle p - \tilde{p}, \overline{x} - 0 \rangle < -\delta < 0.$$

Entonces,

$$\langle p, \overline{x} \rangle < -\delta + \langle \tilde{p}, \overline{x} \rangle$$

para todo $p \in \Omega^*$. En particular,

$$\text{máx}\left\{\langle p, \overline{x} \rangle : p \in \Omega^*\right\} \leq \underbrace{-\delta}_{>0} + \langle \tilde{p}, \overline{x} \rangle$$

y, de esta manera, conseguimos que

$$\Gamma(x) < \langle \tilde{p}, \overline{x} \rangle$$

con lo cual, es absurdo.
Este absurdo apareció de suponer que $\tilde{p} \notin \Omega^*$.
Por lo tanto, tenemos que $p \tilde{\in} \Omega^*$.

- $\partial\Gamma(0) = \partial\Gamma(\Omega)$

  I) $\partial\Gamma(0) \subset \partial\Gamma(x)$
  Es trivial. Es un cono con vértice en cero, si tengo un hiperplano en el vértice, ese mismo hiperplano es un hiperplano de todos los otros puntos.

  II) $\partial\Gamma(x) \subset \partial\Gamma(0)$
  Primero, veamos la siguiente propiedad:

$$\Gamma(\lambda x) = \lambda\Gamma(x), \text{ con } \lambda > 0$$

  En efecto,

$$\Gamma(\lambda x) = \text{máx}\left\{\langle p, \lambda x \rangle : p \in \Omega^*\right\} = \text{máx}\left\{\lambda\langle p, x \rangle : p \in \Omega^*\right\} =$$

$$\lambda\,\text{máx}\left\{\langle p, x \rangle : p \in \Omega^*\right\} = \lambda\Gamma(x)$$

  Volvamos a lo que queríamos ver. Queremos ver que, dado $p \in \partial\Gamma(x)$, entonces $p \in \partial\Gamma(0)$ para cualquier $x \in \Omega$. Entonces, por el p que tenemos vale que

$$\Gamma(z) \geq \Gamma(x) + \langle p, z - x \rangle.$$

Usamos el truquillo de arriba y escribimos a $z = \lambda x$ (observar que, si $\lambda = 1$ esto no tiene gracia, asi que $\lambda \neq 1$), y de esta forma

$$\Gamma(\lambda x) \geq \Gamma(x) + \langle p, \lambda x - x\rangle \Rightarrow \lambda\Gamma(x) - \Gamma(x) \geq (\lambda - 1)\langle p, x\rangle \Rightarrow$$

$$\Gamma(x) \geq \frac{\cancel{(\lambda - 1)}}{\cancel{(\lambda - 1)}}\langle p, x\rangle \Rightarrow \Gamma(x) \geq \langle p, x\rangle$$

y así, tenemos que $p \in \partial\Gamma(0)$.

$\square$

7.2. Caso donde $\mu = \sum_{i=0}^{N} \theta_i \delta_{x_i}$

Bueno, la idea de cuando son varios θ es tomar varios conos con vertices en los x_i donde están centradas las medidas y, despues, tomar la cápsula convexa de todos los conos de manera óptima.

Consideremos los conos

$$\Gamma(x - x_i) + a_i$$

los cuales están centrados en x_i y el vértice se encuentra a altura a_i con $i = 1, \ldots, N$ y, para poder cumplir con la restricción nueva, $\Gamma(x)$ el cono con vértice en cero. También, definimos el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$.

Con esto, definimos una función $v_{\vec{a}}(x)$ de la siguiente manera:

$$v_{\vec{a}}(x) := \text{mín}\left\{\Gamma(x), \Gamma(x - x_i) + a_i, \quad i = 1, \ldots, N\right\}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

Esta función $v_{\vec{a}}$ es a lo que nos referíamos con el “manera óptima”. Así, construimos la función que estamos buscando:

$$u_{\vec{a}}(x) := \sup\left\{l(x) : l \text{ es afín}, \ l \leq v \text{ en } \Omega\right\}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Nuevamente,queremos corroborar que:

- $\partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \ldots, x_N) = \Omega^*$
- $\partial u_{\vec{a}}(\{0, x_1, \ldots, x_N\}) = \partial u_{\vec{a}}(\Omega)$

Demostración.

- $\partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \ldots, x_N) = \Omega^*$

  I) $\partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \ldots, x_N) \subset \Omega^*$
  Sea $p \in \partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \ldots, x_N)$, entonces tambien vale que $p \in \partial u_{\vec{a}}(x_{i_0})$ con el i_0 con el cual se consigue

  $$\langle p, x_{i_0}\rangle - u(x_{i_0}) = \max_{x \in \overline{\Omega}} \left\{\langle p, x\rangle - u(x)\right\}$$

  pero entonces, tenemos que

  $$p \in \Gamma(0).$$

  Por otro lado, una vez que conseguimos el x_{i_0}, hacemos $u_{\vec{a}}(x_{i_0}) = a_{i_0}$ (sale evaluando en $v_{\vec{a}}$). Y así, tenemos que $p \in \Omega^*$.

II) $\Omega^* \subset \partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \dots, x_N)$
Sea $p \in \Omega^*$, entonces $p \in \Gamma(0)$ y $\exists x_k \in \{0, x_1, \dots, x_N\}$ tal que,

$$\langle x_k, p \rangle - u(x_k) = \max_{x \in \Omega} \{\langle x, p \rangle - u(x)\}$$

y entonces tenemos $p \in \partial u_{\vec{a}}(x_k)$ y concluimos que $p \in \partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \dots, x_N)$.

- $\partial u_{\vec{a}}(\{0, x_1, \dots, x_N\}) = \partial u_{\vec{a}}(\Omega)$

Vamos a usar la igualdad que ya vimos que es cierta.

I) $\partial u_{\vec{a}}(\{0, x_1, \dots, x_N\}) \subset \partial u_{\vec{a}}(\Omega)$
Es trivial, ya que $x_i \in \Omega,\ \forall i = 1, \dots, N$ y también $0 \in \Omega$.

II) $\partial u_{\vec{a}}(\Omega) \subset \partial u_{\vec{a}}(\{0, x_1, \dots, x_N\})$
Ahora si, usamos lo que ya vimos y vamos a ver que $\partial u_{\vec{a}}(\Omega) = \Omega^*$.
Sea $p \in \partial u_{\vec{a}}(\Omega)$, y llamemos

$$\mathscr{C} = \{x \in \Omega : v_{\vec{a}}(x) = u_{\vec{a}}(x)\}.$$

El conjunto $\mathscr{C}$ es el conjunto de puntos de contacto entre la función $v_{\vec{a}}$ y su cápsula convexa.
Pueden ocurrir 2 casos

a) $p \in \partial u_{\vec{a}}(\overline{x})$ y $\overline{x} \in \mathscr{C}$.
Pero, si pasa esto, sabemos que

$$v_{\vec{a}}(x) = \min_{x \in \Omega}\{\Gamma(x), \Gamma(x - x_i) + a_i\}$$

entonces, $\exists\ i_0$ tal que $p \in \partial\Gamma(x - x_i) + a_i$, y, por ser un cono, podemos concluir que $p \in \partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \dots, N)$ y, por la igualdad de arriba, $p \in \Omega^*$.

b) $p \in \partial u_{\vec{a}}(\overline{x})$ y $\overline{x} \notin \mathscr{C}$.
Como $\overline{x} \notin \mathscr{C}$, entonces podemos afirmar lo siguiente:

$$v_{\vec{a}}(x) \geq_{\star^1} u_{\vec{a}}(x) \geq_{\star^2} \underbrace{u_{\vec{a}}(\overline{x}) + \langle p, x - \overline{x} \rangle}_{l(x)}$$

donde $\star^1$ es porque $u_{\vec{a}}$ es la cápsula convexa de $v_{\vec{a}}$ y $\star^2$ es porque $p \in \partial u_{\vec{a}}(\overline{x})$.
Lo que vamos a buscar ahora, es un punto $\hat{x}$ de manera que $l(\hat{x}) = v_{\vec{a}}(\hat{x})$.
Como $\overline{x}$ no está en los puntos de contanto, entonces, podemos afirmar que $\exists \delta > 0$ de manera que

$$u_{\vec{a}}(\overline{x}) < l(\overline{x}) + \delta < v_{\vec{a}}(\overline{x}).$$

Ahora, vamos a regular ese δ, hasta que el hiperplano $l(\overline{x})+\delta$ toque a $v_{\vec{a}}$ en algún punto. A ese punto lo vamos a llamar $\hat{x}$. El δ quedaría dependiendo de éste punto. De esta forma, quedaría

$$l(\overline{x})+\delta(\hat{x})=l(\hat{x})=v_{\vec{a}}(\hat{x}),$$

pero $\hat{x}\in\overline{\Omega}$, así que

$$u_{\vec{a}}(\hat{x})\geq u_{\vec{a}}(\overline{x})+\langle p,\hat{x}-\overline{x}\rangle,$$

entonces conseguimos que $u(\hat{x})\geq l(\hat{x})$. Juntamos todo y

$$l(\hat{x})\leq u_{\vec{a}}(\hat{x})\leq v_{\vec{a}}(\hat{x})=l(\hat{x})$$

y así, $v_{\vec{a}}(\hat{x})=u_{\vec{a}}(\hat{x})$, concluyendo que $\hat{x}\in\mathscr{C}$. Y tambien, tenemos que

$$u_{\vec{a}}(\hat{x})\geq l(\hat{x})$$

y caemos en el caso anterior.

Concluimos así que $\partial u_{\vec{a}}(\Omega)\subset\Omega^*$.

$\square$

El siguiente paso, es ver que efectivamente eligiendo adecuadamente $\vec{a}$, $|\partial u_{\vec{a}}(x_k)|=\theta_k$ para $k=0,\dots,N$. Recordemos que $x_0=0$.

Sea $W:=\{\vec{a}=(a_1,\dots,a_N):|\partial u_{\vec{a}}(x_k)|\leq\theta_k,\ k=1,\dots,N\}$. Podemos afirmar las siguientes cuestiones:

- $W\neq\emptyset$

  En efecto, si resultara que $W=\emptyset$, entonces tendriamos en realidad que todos los a_i quedan dentro del cono de vértice 0, con lo cual, tendriamos en realidad que $\mu=\theta$.

- W está acotado por debajo.

  En efecto, si no lo estuviera, abría un a_{i_0} de manera que el cono con vértice en 0 quedaría dentro del cono con vértice en a_{i_0}, y de esta forma, no se cumpliría que $u_{\vec{a}}(0)=0$.

Para poder corroborar la suma, hacemos el mismo truco que hicimos en la sección 4.4,definimos una función $\varphi(\vec{a})=a_1+\ldots+a_N$ y sea

$$\inf_{\vec{a}\in W}\varphi(\vec{a})=\varphi(\tilde{a})$$

y así conseguimos que $|\partial u_{\tilde{a}}(x_k)|=\theta_k$ para $k=1,\dots,N$. Para θ_0, usamos lo siguiente:
por hipótesis inicial, tenemos que

$$|\Omega^*|=\sum_{k=0}^{N}\theta_k$$

entonces, despejamos de ahí para conseguir

$$|\Omega^*| = |\partial u_{\vec{a}}(0)| + \sum_{k=1}^{N} |\partial u_{\vec{a}}(x_k)| = |\partial u_{\vec{a}}(0)| + \sum_{k=1}^{N} \theta_k.$$

y así, llegamos a lo que queríamos.

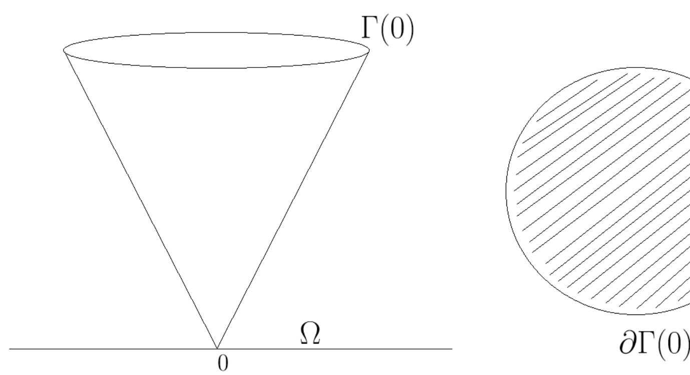
Para finalizar y dar por cierta la igualdad, deberiamos afirmar que la intersección tiene medida nula. En efecto, debido a que $\Omega^* = \partial u_{\vec{a}}(0, x_1, \ldots, x_N)$, si llegara a pasar que $\exists p$ de manera que $p \in \partial u_{\vec{a}}(x_i)$ y que $p \in \partial u_{\vec{a}}(x_j)$ con $i \neq j$, entonces, por el lema 3.3, tiene medida nula.

7.3. Ejemplos Gráficos

Vamos a dar varios ejemplos gráficos para ilustrar todo lo que hicimos recien.

- Caso donde $\mu = \theta$

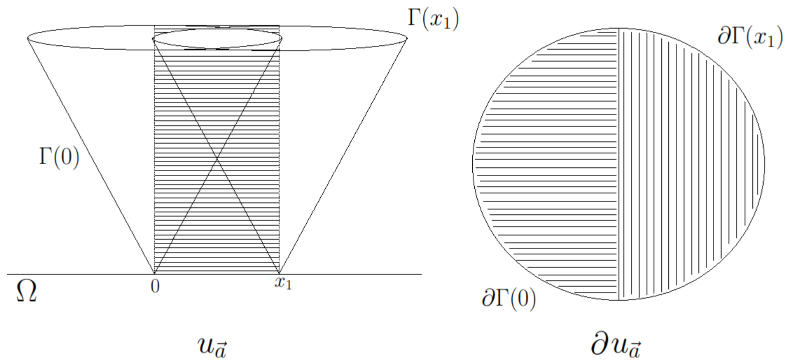
  Ahora, vamos a ver un gráfico esquemático cuando la medida μ se puede escribir con un sólo θ.

  El subdiferencial de la función Γ llena por completo a μ^*.

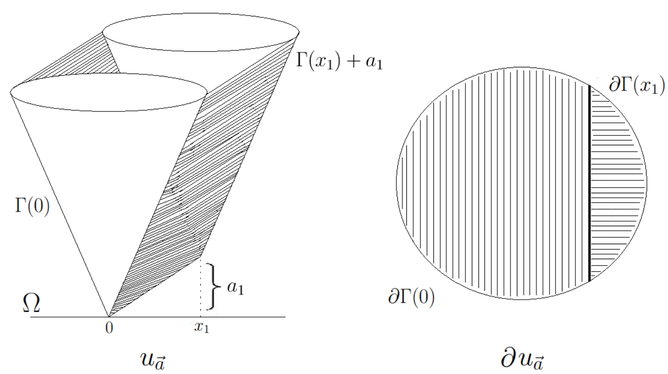
- Caso donde $\mu = \theta_0 + \theta_1$

  Primero, vemos esquemáticamente como sería con suma de 2 θ. En este caso, además, vamos a discriminar cuando los dos vértices están a una misma altura o a diferentes alturas.



Donde $\vec{a} = 0$ en este caso.

El hecho que los dos vértices se encuentren a la misma altura, implica que el subdiferencial se reparta en partes iguales. .



Donde $\vec{a} = a_1$ en este caso.

La altura del vértice en x_1 obliga a que Ω^* no se reparta en partes iguales. Es más, como el vértice en $x = 0$ se encuentra a menor altura, toma mayor parte en el subdiferencial de $u_{\vec{a}}$

- Caso numérico

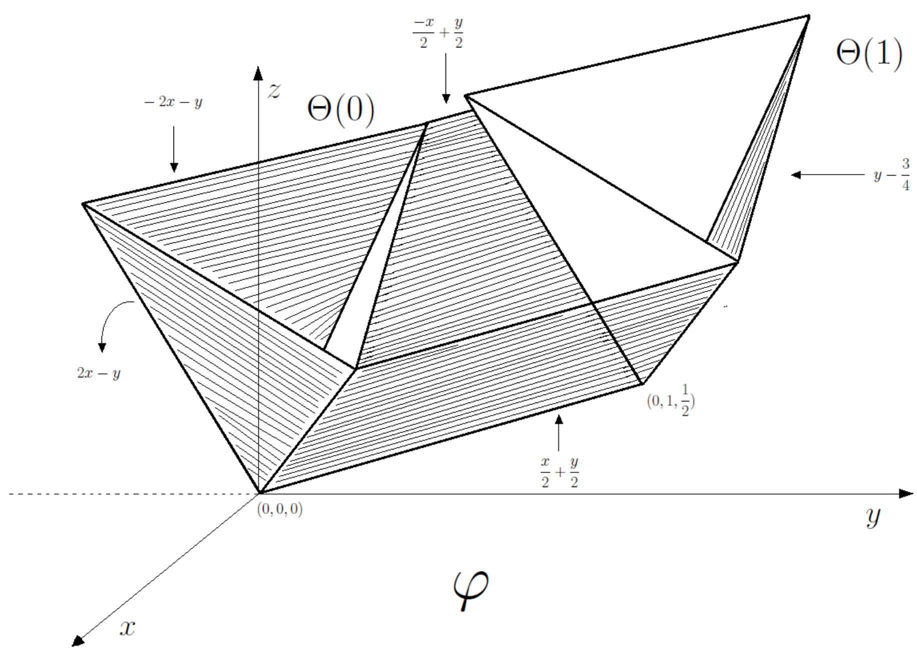
  Vamos a ver un caso donde calculemos numéricamente esta diferencia de cada vértice dentro del subdiferencial. Debido a que calcular la cápsula convexa de dos conos es un trabajo muy difícil, vamos a considerar dos pirámides de base triangular.

  La primera piramide tendrá vértice en el punto $(0, 0, 0)$ la cual llamaremos $\Theta(0)$, y la segunda piramide con vértice en el punto $(0, 1, \frac{1}{2})$, bautizada como $\Theta(1)$.

$$\Theta(0) = \begin{cases} z = 2x - y \\ z = -2x - y \\ z = y \end{cases} \qquad \Theta(1) = \begin{cases} z = 2x - y + \frac{3}{2} \\ z = -2x - y + \frac{3}{2} \\ z = y - \frac{3}{4} \end{cases}$$

y calculemos la cápsula convexa de estas dos piramides, la cual tendrá el nombre de φ.

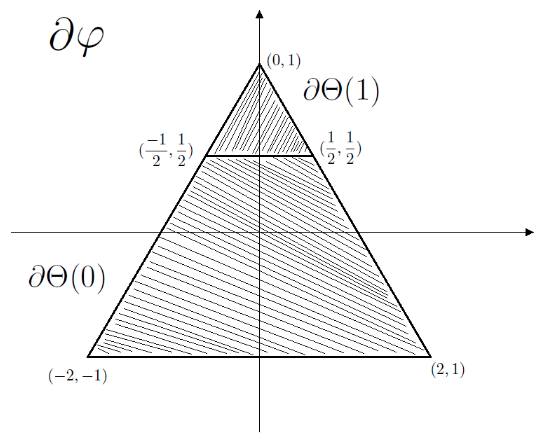
$$\varphi = \begin{cases} z = 2x - y \\ z = -2x - y \\ z = y - \frac{3}{4} \\ z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ z = \frac{-x}{2} + \frac{y}{2} \end{cases}$$



Vemos que al encapsular, perdemos los tres planos $z = y$,$z = 2x - y + \frac{3}{2}$ y $z = -2x - y + \frac{3}{2}$ y ganamos los dos planos $z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ y $z = \frac{y}{2} - \frac{x}{2}$, los cuales "enganchan" las dos piramides por debajo.

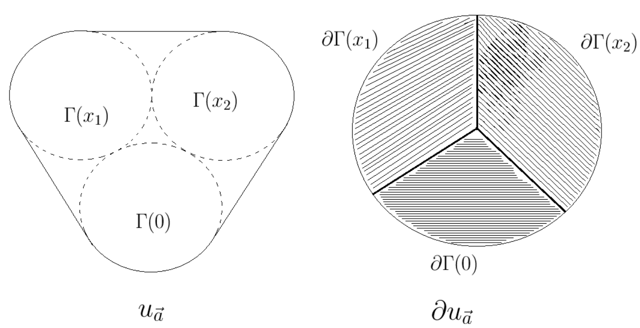
Calculamos el subdiferencial (son todos planos, así que coinciden con los gradientes) de φ y, podemos notar que el vértice de $(0, 0, 0)$ le gana al de $(0, 1, \frac{1}{2})$.

$$\partial\varphi = \begin{cases} (2,-1) \\ (-2,-1) \\ (0,1) \\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ (\frac{-1}{2},\frac{1}{2}) \end{cases}$$



- <u>Caso donde $\mu = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2$</u>

  Ahora, vemos (desde arriba, es muy complicado dibujarlo de costado) el caso donde hay tres conos con vértices $0, x_1$ y x_2.



En este caso, el vector $\vec{a} = (0,0)$ y, de esta manera, estamos teniendo en cuenta que los 3 vértices están a altura 0. El subdiferencial, queda dividido en tres partes iguales.

8. Pasemos al límite

Bueno, nuestra misión ahora es pasar al límite, para de alguna manera "cubrir" a Ω. A medida que tomemos más puntos de Ω, vamos a tener más alturas de los conos que transladнамos, con lo que el vector $\vec{a}$ donde cada componente es una altura, va a ser cada vez más "largo".

8.1. Límite dentro de Ω

Sea Ξ un conjunto acotado, contenido en $\mathbb{R}^n$, de manera que

$$\overline{\Omega} \subset \Xi.$$

Para simplificar, vamos a llamar N al vector $\vec{a}$. Va a pasar lo siguiente:

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_N) = N; \quad \vec{a} = (a_1, \ldots, a_N, a_{N+1}) = N + 1$$

Por un lado, debido a que los x_i que generan las alturas están en un conjunto acotado, van a converger a algún punto que pertenece a la clausura de Ω. Por otra parte, debido a la restricción de que $u_N(0) = 0$ para todo N, las alturas también estarán en un rango, con lo cual quedarán acotadas.

Vamos a tomar las funciones u_N.

I) $|u_N(x)| \leq M, \; \forall x \in \overline{\Omega}, \; \forall N$ donde M no depende ni de x ni de N.

En efecto, ya que $\forall N, u_N = g \in \partial\Omega$, consideremos $M = \max_{x \in \partial\omega} |g(x)|$. Entonces, tenemos que $|u_N(x)| \leq M, \forall x \in \overline{\Omega}$, ya que u_N es convexa, para toda N.

II) $|u_N(y) - u_N(z)| \leq K|y - z|, \; \forall y, z \in \Xi, \; \forall N$, donde esa constante K no depende de N. (Para esto necesitabamos Ξ.)

Sean $y, z \in \Xi$. Dados $p_y, p_z \in \Omega^*$ de manera que

$$p_y \in \partial u_N(y) \quad p_z \in \partial u_N(z)$$

tenemos que

a) $u_N(x) \geq u_N(y) + \langle p_y, x - y \rangle, \; \forall x \in \Xi$

b) $u_N(x) \geq u_N(z) + \langle p_z, x - y \rangle, \; \forall x \in \Xi$

y hacemos el viejo truco de apreovecharnos que vale para todo punto y, en particular, para y y para z.

a) $u_N(z) \geq u_N(y) + \langle p_y, z - y \rangle$, y despejando

$$u_N(z) - u_N(y) \geq \langle p_y, z - y \rangle = |p_y||z - y|\cos(\theta) \geq_{\star^1} -|p_y||z - y|$$

donde $\star^1$ es porque $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$.

Ahora, sea α de manera que $B_\alpha(o) \subset \Omega^*$. Entonces, llamemos $K = |B_\alpha(0)|$, con lo cual,

$$-|p_y||z - y| \geq -K|z - y|$$

b) $u_N(y) \geq u_N(z) + \langle p_z, y - z\rangle$, y despejando

$$u_N(y) - u_N(z) \geq \langle p_z, y - z\rangle$$

invertimos la desigualdad

$$u_N(z) - u_N(y) \leq \langle p_z, z - y\rangle = |p_z||z - y|\cos(\theta) \leq_{\star^1} \leq K|z - y|$$

donde $\star^1$ es nuevamente por el coseno. Y tomamos el mismo K de antes.

Así, combinando las dos cosas, tenemos que

$$-K|z - y| \leq u_N(y) - u_N(z) \leq K|z - y|$$

y así, concluimos

$$|u_N(y) - u_N(z)| \leq K|z - y|$$

III) Gracias al punto I) y II), estamos en las condiciones de afirmar, por Arzelà-Ascoli, que

$$u_N \to u$$

uniformemente en $\overline{\Xi}$.

IV) Convergencia débil.

La idea de esto es utilizar un razonamiento similar en la sección 4.4

V) Efectivamente, tenemos que $\partial u(\overline{\Omega}) = \Omega^*$.

- $\Omega^* \subset \partial u(\overline{\Omega})$
Sea $p \in \Omega^*$. Entonces, $p \in \partial u_N(\Omega)$, $\forall N$, con lo cual, $\exists x_N \in \Omega$ tal que $p \in \partial u_N(x_N)$. Tomamos la sucesión x_N. Luego, como Ω está acotado por estar dentro de Ξ, existe una subsucesión $\{x_{N_k}\}$ de manera que $x_{N_k} \to x_0$ con $x_0 \in \overline{\Omega}$. Para simplificar, vamos a llamar x_N a esa subsucesión. Ahora bien, como $p \in \partial u_N(x_N)$ con los miembros de esa subsecesión, podemos afirmar que

$$u_N(x) \geq u_N(x_N) + \langle p, x - x_N\rangle, \ \forall N, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, tomando límite en x_N

$$u_N(x) \geq u_N(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$$

y tomando límite sobre las funciones, gracias a la convergencia brindada por Arzelà-Ascoli

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$$

concluyendo, así, que $p \in \partial u(x_0)$ y, en consecuencia, que $p \in \partial u(\overline{\Omega})$.

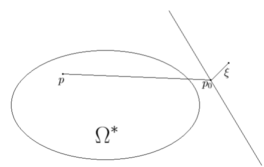
- $\partial u(\overline{\Omega}) \subset \Omega^*$

  Supongamos que no. Supongamos que $\exists p_0 \in \partial u(\overline{\Omega})$ y que $p_0 \notin \Omega^*$. Entonces, hay un $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p_0, x - x_0 \rangle, \ \forall x \in \Xi.$$

  Debido a la convexidad de Ω^*, existe un hiperplano de manera que Ω^* quede "de un sólo lado". Esto, se traduce de la siguiente manera:

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^n : \forall p \in \Omega^*, \langle p - p_0, \xi \rangle < 0.$$



  Es decir, que el $\cos(\theta)$ con θ el ángulo entre $p - p_0$ y ξ es mayor a $90°$.
  Sea $w = x_0 + \epsilon\xi$, con ϵ de manera que $w \in \Xi$. Sea $p_N \in \partial u_N(w)$, con $p_N \in \Omega^*$. Luego, como Ω^* es conciderado cerrado, tenemos que $p_N \to p_w \in \Omega^*$. De esta manera, para p_N, tenemos que

$$u_N(x) \geq u_N(w) + \langle p_N, x - w \rangle, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

  Tomamos convergencia de p_N

$$u_N(x) \geq u_N(w) + \langle p_w, x - w \rangle$$

  y tomamos convergencia de las funciones

$$u(x) \geq u(w) + \langle p_w, x - w \rangle,$$

  con lo cual, $p_w \in \partial u(w)$.
  Recapitulando, tenemos que
  - $p_w \in \partial u(w)$
  - $p_0 \in \partial u(x_0)$

  Luego, usando la monotonía,

$$\langle p_w - p_0, w - x_0 \rangle \geq 0.$$

  Ahora, reemplazamos en esta ecuación cuanto vale w

$$\langle p_w - p_0, \cancel{x_0} + \epsilon\xi \cancel{- x_0} \rangle = \langle p_w - p_0, \epsilon\xi \rangle = \epsilon \underbrace{\langle p_w - p_0, \xi \rangle}_{<0}$$

  pues $p_w \in \Omega^*$.
  Con lo cual, conseguimos que
  - $\langle p_w - p_0, \xi \rangle < 0$
  - $\langle p_w - p_0, \xi \rangle \geq 0$

  con lo cual, el absurdo aparece al suponer que $\exists p_0 \in \partial u(\overline{\Omega})$ y que $p_0 \notin \Omega^*$.

8.2. Límite fuera de Ω

Ya vimos que podemos pasar al límite al descomponer a Ω^* en masas delta. Lo que queremos pasar al límite ahora, es extender el dominio de la función, de manera que la función quede, definitivamente, definida en todo $\mathbb{R}^n$.
Lo interesante es, que cuando pasemos al límite, la función resultante cumplirá que

$$\partial u(\mathbb{R}^n) = \Omega^*.$$

Definición 8.1. *Dada la función u convexa, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de manera que:*

- $0 \in \overline{\Omega}$
- $u(0) = 0$
- $|\partial u(E)| = \mu(E), \forall E \subset \Omega$
- $\partial u(\overline{\Omega}) = \Omega^*$

Llamaremos "extensión lineal de u" a

$$\tilde{u}(x) = \sup\{u(\overline{x}) + \langle \overline{p}, x - \overline{x}\rangle : \overline{x} \in \overline{\Omega},\ \overline{p} \in \partial u(\overline{x})\}$$

Muy bien. Veamos primero que, dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, $\exists p_0 \in \Omega^*$ de manera que

$$\tilde{u}(x) \geq \tilde{u}(x_0) + \langle p_0, x - x_0\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\overline{\Omega}$ y, para cada x_n, tomamos el correspondiente $p_n \in \Omega^*$ de manera que $p_n \in \partial u(x_n)$. Debido a que, tanto $\overline{\Omega}$ como Ω^* son acotados, existe una subsecesion, a la cual abusaremos de notación y la llamaremos x_n, de manera que

- $x_n \to \overline{x} \in \overline{\Omega}$
- $p_n \to \overline{p} \in \Omega^*$

la idea, es que este $\overline{p}$ será nuestro p_0 que existe.
Debido a las convergencias de x_n y de p_n, tenemos que

$$u(x) \geq u(\overline{x}) + \langle \overline{p}, x - \overline{x}\rangle,\ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por otro lado, llamemos

$$\tilde{u}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(u(x_n) + \langle p_n, x_0 - x_n\rangle\right).$$

Y así,

$$\tilde{u}(x_0) = u(\overline{x}) + \langle \overline{p}, x_0 - \overline{x}\rangle.$$

Para ver definitivamente lo que queríamos ver, primero tenemos que afirmar que

$$\tilde{u}(x) \geq \tilde{u}(\overline{x}) + \langle \overline{p}, x - \overline{x}\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto, si estoy dentro de $\overline{\Omega}$, $\tilde{u}$ coincide con u, así que vale. Y fuera de $\overline{\Omega}$, vale ya que $\tilde{u}$ es el supremo, así que le gana a todos. Luego, reemplazamos por como llamamos a $\tilde{u}(x_0)$.

$$\tilde{u}(x) \geq \underbrace{\tilde{u}(x_0) - \langle \overline{p}, x_0 - \overline{x} \rangle}_{u(\overline{x})} + \langle \overline{p}, x - \overline{x} \rangle$$

y haciendo álgebra

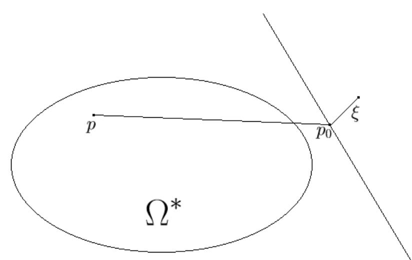
$$\tilde{u}(x) \geq \langle \tilde{p}, x \cancel{-\overline{x}} - x_0 \cancel{+\overline{x}} \rangle \Rightarrow \tilde{u}(x) \geq \tilde{u}(x_0) + \langle \overline{p}, x - x_0 \rangle$$

y, concluimos, como dijimos, tomando a $\overline{p}$ como p_0, lo que queríamos ver.

Ahora, veamos que, al "extendir linealmente a u", no agregamos ningún punto a Ω^*.

Supongamos que no. Supongamos que tenemos $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, $\exists p_0 \in \partial\tilde{u}(x_0)$ y $p_0 \in \Omega^*$. Entonces, como Ω^* es convexo, $\exists \xi$ de manera que

$$\langle p - p_0, \xi \rangle < 0, \ \forall p \in \Omega^*.$$



Y consideramos $\overline{x} = x_0 + \xi$ y $\overline{p} \in \Omega^*$, de manera que $\overline{p} \in \partial\tilde{u}(\overline{x})$. Luego, gracias a la monotonía,

$$\langle \overline{p} - p_0, \overline{x} - x_0 \rangle > 0$$

pero, reemplazando por $\overline{x} = x_0 + \xi$, conseguimos que

$$\langle \overline{p} - p_0, \xi \rangle > 0$$

con lo cual, llegamos a un absurdo.

Con esto, podemos concluir que $p_0 \in \Omega^*$ y, al extenden linealmente, no agregamos ningún punto al subdiferencial.

Juntando estas dos afirmaciones, vemos que, para cada punto $x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, ya hay un vector en Ω^* que le corresponde. De esta manera, si tomamos un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, podemos afirmar que

$$|\partial\tilde{u}(E)| = 0,$$

ya que

$$\partial\tilde{u}(E) = \{p : p \in \partial\tilde{u}(z) \cap \partial\tilde{u}(w), \ z \neq w, \ z, w \in E\}$$

y, por el lema 3.3, este conjunto tiene medida nula.

Perfecto, ahora, ya tenemos una función definida en todo $\mathbb{R}^n$, veamos el siguiente lema que es bastante interesante.

Lema 8.1. *Sea $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa, $\tilde{u}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, de manera que $u(0, x_n) = 0$.*
Entonces, $|\partial \tilde{u}(E)| = 0,\ \forall E \subset \mathbb{R}^n$.

Lo que quiere decir esto es, que si tenemos un conjunto donde la función es nula, y ese conjunto tiene una línea recta (consiguiendo así que la función sea nula en esa línea), el subdiferencial de esa función para cualquier conjunto queda dentro de un conjunto de dimensión menor a la dimensión del dominio haciendo que tenga medida nula. En el caso del lema, suponemos que esa recta se encuentra sobre el eje x_n para simplicidad.

Demostración. Tomemos un punto en la recta donde la función es cero, el punto $(0, s)$, y consideremos (x', t) un punto del dominio, con $t > 0$. Tomemos la combinación convexa de (x', t) con los puntos $(0, s)$ y $(x', 0)$.

$$(1 - \lambda)(0, s) + \lambda(x', 0) = (x'\lambda, s - \lambda s).$$

Llamamos $t = s - \lambda s$, y despejamos para conseguir $\lambda = 1 - \frac{t}{s}$. Reemplazando en la combinación convexa, y multiplicamos a la segunda variable por $\frac{s}{s}$

$$(x'(1 - \frac{t}{s}), t\frac{s}{s}).$$

De esta manera, como $\tilde{u}$ es convexa

$$\tilde{u}(x'(1 - \frac{t}{s}), t\frac{s}{s}) \leq (1 - \frac{t}{s})\tilde{u}(x', 0) + \frac{t}{s}\cancelto{0}{\tilde{u}(0, s)} = (1 - \frac{t}{s})\tilde{u}(x', 0)$$

y cuando hacemos $s \to \infty$, tenemos que

$$(1 - \frac{t}{s})\tilde{u}(x', 0) \underset{s\to\infty}{\to} \tilde{u}(x', 0)$$

y concluimos

$$\tilde{u}(x', t) \leq \tilde{u}(x', 0).$$

Por otro lado, tomemos ahora $(0, -s)$. Nuevamente, $\tilde{u}(0, -s) = 0$ y también tomemos el punto $(x', -t)$. Consideremos la combinación convexa de $(x', -t)$ desde los puntos $(0, -s)$ y $(x', 0)$.

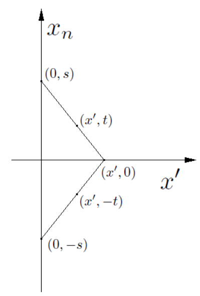
$$(1 - \lambda)(x', 0) + \lambda(0, -s) = (x'(1 - \lambda), -s\lambda)$$

y considerando $-\lambda s = -t$, tenemos que $\lambda = \frac{t}{s}$, con lo cual, si multiplicamos por $\frac{s}{s}$ a la variable discriminada, y usando la convexidad de la función,

$$\tilde{u}(x'(1 - \frac{t}{s}), -t\frac{s}{s}) \leq (1 - \frac{t}{s})\tilde{u}(x', 0) + \frac{t}{s}\cancelto{0}{\tilde{u}(0, -t)} = (1 - \frac{t}{s})\tilde{u}(x', 0).$$

Nuevamente, tomamos que $s \to \infty$ tenemos que

$$\tilde{u}(x'(1 - \frac{t}{s}), -t) \leq \tilde{u}(x', 0).$$



Luego, $\forall t$ tenemos que $\tilde{u}(x', t) = \tilde{u}(x', 0)$. De esta manera, tenemos que la función está definida en una dimensión menor, con lo cual,

$$\partial\tilde{u}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$|\partial\tilde{u}(E)| = 0, \ \forall E \subset \mathbb{R}^n.$$

$\square$

9. Regularidad C^1, segunda parte

Recapitulemos la situación en la que nos encontramos. Tenemos

- Una función $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convexa.
- Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo abierto.
- $|\partial\tilde{u}(E)| = \int_E f(x)dx$ con $\lambda \leq f \leq \Lambda$.
- $\begin{cases} \lambda|E| \leq |\partial\tilde{u}(E)| \leq \Lambda|E| & \forall E \subset \Omega \\ |\partial\tilde{u}(E)| = 0 & \forall E \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}. \end{cases}$

El objetivo actual es ver, nuevamente, que para cada punto de la función hay un único hiperplano soporte, y después, enarbolando el teorema 2.2 conseguimos que $\tilde{u} \in C^1$.

Teorema 9.1. *Sea $x_0 \in \Omega, p \in \partial\tilde{u}(x_0)$. Llamemos*

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{u}(x) = \tilde{u}(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle\}$$

a los puntos de contacto.
Entonces, tenemos que $\mathcal{C} = \{x_0\}$.

Demostración. Lo demostraremos por el absurdo.

Supongamos que no, supongamos que $\mathcal{C}$ tiene más de un punto. Por abuso de notación, consideraremos $u(x) \geq 0$ y $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$. (sino, deberiamos llamar $v(x) = \tilde{u}(x) - \tilde{u}(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle$ y trabajo con $v(x)$) (y nos olvidamos del tilde de arriba de la u, así hacemos más fácil la notación)

Como en la sección 5, nos concentraremos en los puntos extremales.

I) <u>$\mathcal{C}$ no tiene puntos extremales</u>

Si resulta que $\mathcal{C}$ no tiene puntos extremales, entonces $\mathcal{C}$ tiene al menos una linea infinita. Entonces, por el lema 8.1, concluimos que

$$|\partial u(E)| = 0, \ \forall E \subset \mathbb{R}^n$$

y en particular,

$$|\partial u(E)| = 0, \ \forall E \subset \Omega.$$

Pero, tenemos que

$$\lambda|E| \leq |\partial u(E)|, \ \forall E \subset \Omega,$$

con lo cual, llegamos al absurdo.

De esta manera, tenemos que concluir que $\mathcal{C}$ tiene puntos extremales. Llamemos E al conjunto de los puntos extremales de $\mathcal{C}$.

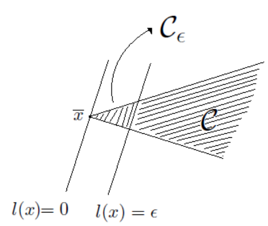
II)
$$\underline{E \cap \Omega \neq \emptyset}$$

Sin embargo, este no puede ser el caso, ya que estamos en las misma situación que el capítulo 5, lo cual vimos que no puede haber puntos extremales dentro del conjunto. Con lo cual, ya llegamos al absurdo.

III)
$$\underline{E \cap (\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}) \neq \emptyset}$$

Si nos encontramos en esta situación, quiere decir que $\exists \overline{x} \in \partial \mathcal{C}$ y una función l afín, de manera que

- $\mathcal{C} \subset \{x : l(x) > 0\}$
- $l(\overline{x}) = 0$
- $diam(\underbrace{\{x \in \mathcal{C} : l(x) < \epsilon\}}_{\mathcal{C}_\epsilon}) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$



y este ϵ es chiquito, de manera que $\{x \in \mathcal{C} : l(x) < \epsilon\} \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$. Definimos $\Gamma_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) < \delta(\epsilon - l(x))\}$. Luego, tenemos que

$$\bigcap_{\delta > 0} \Gamma_\delta = \mathcal{C}_\epsilon.$$

En efecto,

- $\mathcal{C}_\epsilon \subset \bigcap_{\delta>0} \Gamma_\delta$.
  Sabemos que $l(x) < \epsilon$ y que $u(x) = 0$, entonces, despejando de la ecuación
  $$u(x) = 0 < \epsilon - l(x)$$
  multiplicamos por δ
  $$\delta 0 < \delta\epsilon - \delta l(x)$$
  y así nos quedamos con los extremos de las desigualdades, y conseguimos lo que queríamos, ya que no importa cual sea el δ, siempre y cuando sea positivo.

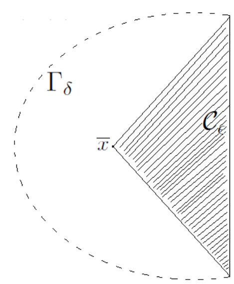
- $\bigcap_{\delta>0} \Gamma_\delta \subset \mathcal{C}_\epsilon$
  Sea $x \in \mathbb{R}^n$ de manera que $u(x) < \delta(\epsilon - l(x))$ para todo $\delta > 0$. Queremos ver que $x \in \mathcal{C}$.
  Por un lado, ya que $u(x) < \delta\epsilon - \delta l(x)$ y, como $\delta > 0$ y $u(x) \geq 0$,

  $$0 \leq \frac{u(x)}{\delta} \leq \epsilon - l(x)$$

  nos quedamos con los extremos y tenemos que $l(x) < \epsilon$. Nos falta ver que $u(x) = 0$. Pero, como ya tenemos que $l(x) < \epsilon$,

  $$u(x) < \delta\epsilon - \delta l(x) < \delta\epsilon - \delta\epsilon = 0$$

  Luego, concluimos que $u(x) = 0$ y, por lo tanto, vale la contención.



Llamo $v(x) = u(x) - \delta(\epsilon - l(x))$.

- $v(x) = 0$ en $\partial\Gamma_\delta$.
- $|v(x)|^n \leq Cdist(x, \partial\Gamma_\delta)\underbrace{Mv(\Gamma_\delta)}_{=0}$, entonces $|v(x)| \leq 0$

con lo cual, $v(x) = 0$ para todo $x \in \Gamma_\delta$. Pero esto es un absurdo, ya que $u(x) > 0$ en $\Gamma_\delta \cap \mathcal{C}_\epsilon^c$.

IV)

$$\underline{E \subset \partial\Omega}$$

Llegamos al dificil. Suponiendo que tenemos que $E \subset \partial\Omega$, entonces debe existir $\overline{x} \in \partial\mathcal{C}$ y l afín de manera que

- $\mathcal{C}\backslash\{\overline{x}\} \subset \{x : l(x) > 0\}$
- $l(\overline{x} = 0)$
- $\mathcal{C} \cap \{l(x) = 0\} = \{\overline{x}\}$

Luego, $\overline{x}$ es un punto extremal de $\mathcal{C}$, entonces, $\overline{x} \in \partial\Omega$. (Si no fuese un punto extremal, $l(x) = 0$ en varios puntos)

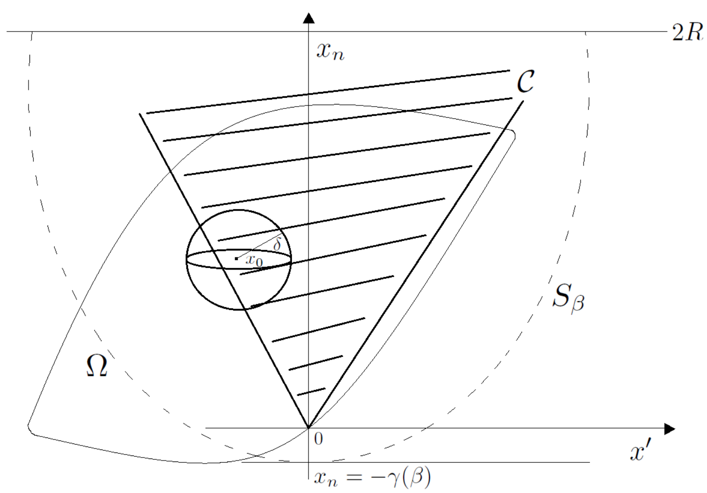
Por simplicidad, vamos a suponer que $\overline{x} = 0, \mathcal{C} \subset \{x_n > 0\}$.
Sea $x_0 \in \mathcal{C} \cap \Omega$, y sea $\delta > 0$ de manera que

- $B_\delta(x_0) \subset \Omega$
- $B_\delta(x_0) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$
- $\overline{x} \notin B_\delta(x_0) \cap \mathcal{C}$

Como sabemos que Ω es acotado, tomemos la esfera $B_{2R}(0)$ de manera que $\Omega \subset B_{2R}(0)$. Nos quedamos con el punto que dista $2R$ del centro en el eje x_n. Llamemos

$$S_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) < \beta(2R - x_n)\}$$

y sea $x_n = -\gamma(\beta)$ la recta tangente a S_β en la parte negativa de x_n.



Consideremos $v(x) = u(x) - \beta(2R - x_n)$. Entonces,

$$\bigcap_{\beta > 0} S_\beta = \mathcal{C}$$

y también

$$-\gamma(\beta) \to 0, \quad \text{cuando } \beta \to 0.$$

- $v(0) = u(0) - \beta(2R - 0) = -\beta 2R$
- $v(x) \leq 0$

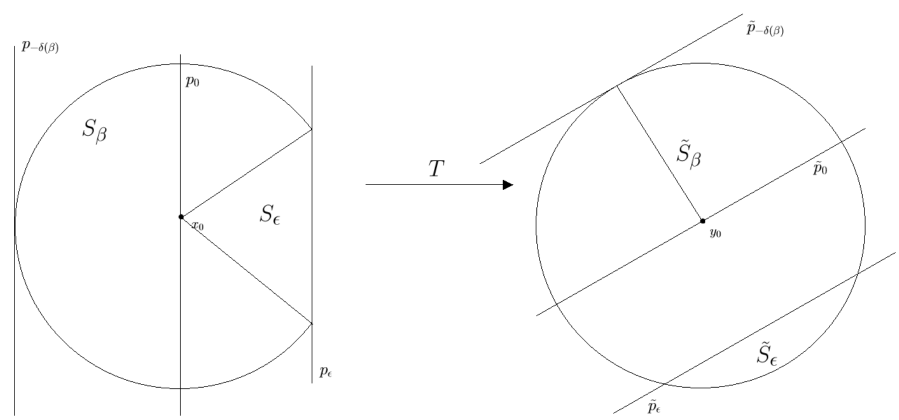
Como sabemos que $u(x) \geq 0$,

$$u(x) - \beta 2R + \beta x_n \geq 0 - \beta 2R + \beta x_n$$

quedando así que

$$v(x) \geq -\beta 2R + \beta x_n \geq -2R\beta - \beta\gamma(\beta), \ \forall x$$

y, en particular,
$$\min_{S_\beta} v \geq -\beta(2R + \gamma(\beta))$$
y como $v < 0$,
$$\left|\min_{S_\beta} v\right| \leq \beta(2R + \gamma(\beta))$$
$$|v(0)| = \beta 2R$$
Si dividimos ambas expresiones
$$\frac{|v(0)|}{|\min_{S_\beta} v|} \geq \frac{\cancel{\beta}2R}{\cancel{\beta}2R + \cancel{\beta}\gamma(\beta)} = \frac{2R}{2R + \gamma(\beta)}.$$
Consideremos T una transformación tal que T normaliza a S_β. Tenemos
$$\begin{cases} T(S_\beta) = \tilde{S}_\beta \\ B_{\alpha_n}(0) \subset \tilde{S}_\beta \subset B_1(0) \\ \tilde{v}(y) = C_\beta v(T^{-1}y) \\ \lambda \leq M\tilde{v} \leq \Lambda \text{ en } \tilde{S}_\beta \\ y_0 = T(x_0) \end{cases}$$



y, en particular, tenemos que
$$|Tx - T\tilde{x}| \geq \frac{1}{C}|x - \tilde{x}|,\ \forall x, \tilde{x}$$
con una constante que depende sólo de la dimensión. En efecto,
$$|Tx - t\tilde{x}| = |T(x - \tilde{x})| = \left|\Lambda^{\frac{1}{n}}\mathcal{O}(x - \tilde{x})\right| = \left|\Lambda^{\frac{1}{n}}(y - \tilde{y})\right| =$$
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\lambda_i}(y_i - \tilde{y}_i)^2} \geq_{\star^1} \frac{1}{C}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2} = \frac{1}{C}\,|x - \tilde{x}|$$

donde $\star^1$ es porque $\Lambda^{\frac{1}{n}} = diag(\lambda_i)$, con lo cual $\frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_i}} \leq C$ y, así, $\sqrt[n]{\lambda_i} \geq \frac{1}{C}$.

Una cosa útil es la siguiente: dado x_0 de manera que $T(x_0) = y_0 \in \tilde{S}_\beta$. Entonces, tenemos que

$$B_{\frac{\delta}{C}}(y_0) \subset T(B_\delta(x_0)).$$

Esto es así pues, tomamos un $y \in B_{\frac{\delta}{C}}(y_0)$. Entonces, $\exists x : y = Tx$. Usando la desigualdad de arribita,

$$\frac{1}{C}|x - x_0| \leq |Tx - Tx_0| = |y - y_0| \leq_{\star^1} \frac{\delta}{C}$$

donde $\star^1$ es por hipotesis. Nos quedamos con los extremos y tenemos que

$$\frac{1}{C}|x - x_0| \leq \frac{\delta}{C}$$

pasamos multiplicando el C

$$|x - x_0| \leq \delta$$

con lo cual, concluimos que $x \in T(B_\delta(x_0))$.

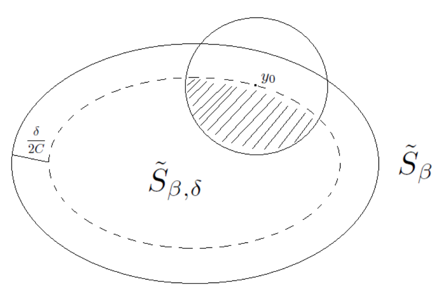
Muy bien, ahora tomamos $\tilde{v}(y) = |\det T|^{\frac{2}{n}} v(T^{-1}y)$ (vemos en forma explicita la C_β y, T depende de β ya que normaliza a S_β) Recordemos que $\tilde{v} = 0$ en $\partial\tilde{S}_\beta$, y definamos ahora

$$\tilde{S}_{\beta,\delta} := \left\{ y \in \tilde{S}_\beta : dist(y, \partial\tilde{S}_\beta) > \frac{\delta}{2C} \right\}.$$

Con esto, haciendo un poco de cuentas, tenemos que

$$\left| \tilde{S}_{\beta,\delta} \bigcap B_{\frac{\delta}{C}}(y_0) \right| \approx \delta^n$$

es decir, que $\tilde{S}_{\beta,\delta} \bigcap B_{\frac{\delta}{C}}(y_0)$ es comparable con δ^n.



Ahora, un lemita:

Lema 9.1.
$$\left|\partial\tilde{v}(\tilde{S}_{\beta,\delta})\right| \leq \frac{C}{\delta^n}\left|\min_{\tilde{S}_\beta}\tilde{v}\right|^n.$$

Demostración. Vamos a ver que
$$\partial\tilde{v}(\tilde{S}_{\beta,\delta}) \subset B_{\frac{|\min_{y\in\tilde{S}_\beta}\tilde{v}(y)|}{dist(\tilde{S}_{\beta,\delta},\partial\tilde{S}_\beta)}}(0).$$

Sea $\overline{p}\in\partial\tilde{v}(\tilde{S}_{\beta,\delta})$, entonces, $\exists\overline{y}\in\tilde{S}_{\beta,\delta}$ tal que
$$\tilde{v}(y)\geq\tilde{v}(\overline{y})+\langle\overline{p},y-\overline{y}\rangle.$$

Debido a que $dist(\tilde{S}_{\beta,\delta},\partial\tilde{S}_\beta)>\delta$, estonces podemos escribir a y como
$$y=\overline{y}+\frac{\overline{p}}{|\overline{p}|}\delta.$$

Y, recordando que $\tilde{v}\leq 0$, hacemos lo siguiente:
$$0\geq\tilde{v}(y)\geq\tilde{v}(\overline{y})+\langle\overline{p},\overline{y}+\frac{\overline{p}}{|\overline{p}|}\delta\rangle$$

despejando y cancelando
$$0\geq\tilde{v}(y)\geq\tilde{v}(\overline{y})+|\overline{p}|\delta\Rightarrow\frac{-\tilde{v}(\overline{y})}{\delta}\geq|p|,\ \forall\overline{y}\in\tilde{S}_{\beta,\delta}.$$

Tomo mínimo
$$\left|\min_{\tilde{S}_{\beta,\delta}}\tilde{v}\right|\geq|p|$$

y así, tenemos que
$$\partial\tilde{v}(\tilde{S}_{\beta,\delta}) \subset B_{\frac{|\min_{y\in\tilde{S}_\beta}\tilde{v}(y)|}{dist(\tilde{S}_{\beta,\delta},\partial\tilde{S}_\beta)}}(0).$$

□

Por otro lado, tenemos que
$$|\partial\tilde{v}(\tilde{S}_{\beta,\delta})|\geq_{\star^1}\left|\partial\tilde{v}(\tilde{S}_{\beta,\delta}\cap B_{\frac{\delta}{2}}(y_0))\right|\geq_{\star^2}\lambda\left|\tilde{S}_{\beta,\delta}\cap B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)\right|\geq C\delta^n$$

con $\star^1$ es porque $\tilde{S}_{\beta,\delta}\subset\tilde{S}_{\beta,\delta}\cap B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)$ y $\star^2$ es porque la medida del subdiferencial se encuentra entre dos constantes. Vamos a mezclar esto de aca arriba con el lemita, asi conseguimos que
$$\left|\min_{\tilde{S}_\beta}\tilde{v}\right|^n\geq C\delta^{2n}.$$

Ahora, debido a Alexandrov, tenemos que

$$|\tilde{v}(T(o))|^n \leq C dist(T(0), \partial\tilde{S}_\beta) M\tilde{v}(\tilde{S}_\beta) \leq_{\star^1} C dist(T(0), \partial\tilde{S}_\beta)$$

donde $\star^1$ es porque debido a que $M\tilde{v}(\tilde{S}_\beta) \leq \Lambda$ y lo meto en la constante C que sólo depende de n. Nos quedamos con los extremos

$$|\tilde{v}(T(o))|^n \leq C dist(T(0), \partial\tilde{S}_\beta)$$

y, en el término de la izquieda, multiplico y divido pr $\left|\min_{\tilde{S}_\beta} \tilde{v}\right|^n$.

$$\frac{|\tilde{v}(T(0))|^n}{\left|\min_{\tilde{S}_\beta} \tilde{v}\right|^n} \left|\min_{\tilde{S}_\beta} \tilde{v}\right|^n$$

pero,

$$\frac{|\tilde{v}(T(0))|^n}{\left|\min_{\tilde{S}_\beta} \tilde{v}\right|^n} \left|\min_{\tilde{S}_\beta} \tilde{v}\right|^n = \frac{|v(0)|^n \cancel{C_\beta}}{\left|\min_{S_\beta} v\right|^n \cancel{C_\beta}} \left|\min_{\tilde{S}_\beta} \tilde{v}\right|^n \geq \frac{|v(0)|^n}{\left|\min_{S_\beta} v\right|^n} C\delta^{2n} \geq \frac{2R}{2R+\gamma(\beta)} C\delta^{2n}$$

Con lo cual, si hacemos tender β a 0, concluimos que

$$dist(T(0), \partial\tilde{S}_\beta) \geq C\delta^{2n},$$

es decir, que la distancia es más grande que algo.

Pero, al mismo tiempo, definamos $P_\gamma\{x : l(x) = \gamma\}$.
Con $\gamma = 0$ tenemos P_0 y así.
Recordemos que $Tx = \Lambda^{\frac{1}{n}} \mathcal{O}^t (x - \tilde{x})$, con $y = Tx$. Resulta que si

$$P_\gamma\{x : \langle x - x_0, \eta\rangle = \gamma\}$$

entonces

$$\tilde{P}_\gamma\{Tx : \langle x - x_0, \eta\rangle = \gamma\}$$

despejando y usando que $x = T^{-1}y$

$$\tilde{P}_\gamma\{y : \langle y - y_0, A\rangle = \gamma\}$$

con $A = T\eta$.

Y, usando el lema 6.1 tenemos que

$$dist(T(0), \partial\tilde{S}_\beta) \leq dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{-\gamma(\beta)}) = \frac{dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{-\gamma(\beta)})}{dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{2R})} dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{2R})$$

y por ser contracción

$$\frac{dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{-\gamma(\beta)})}{dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{2R})} dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{2R}) = \frac{dist(P_0, P_{-\gamma(\beta)})}{dist(P_0, P_{2R})} dist(\tilde{P}_0, \tilde{P}_{2R}) \leq_{\star^1} 2\frac{dist(P_0, P_{-\gamma(\beta)})}{dist(P_0, P_{2R})} \leq 2C\frac{\gamma(\beta)}{\delta}$$

y, haciendo $\beta \to 0$, tenemos que $\gamma(\beta) \to 0$ y, así

$$dist(T(0), \partial\tilde{S}_\beta) \leq 0$$

con lo cual, quiere decir que $dist(T(0), \partial\tilde{S}_\beta)$ tiende a cero.

De esta forma, llegamos a un absurdo cuando la distancia tiende a cero al mismo tiempo que debe ser mayor que cero. De esta forma, concluimos que no puede haber puntos extremales en $\partial\Omega$

□

Por lo tanto, concluimos que todos los hiperplanos soporte tienen un sólo punto de contacto.

Ahora, nos encontramos nuevamente en la situación de que, dada una función convexa $\tilde{u}$, todos los hiperplanos tienen un sólo punto de contacto. Sin embargo, puede pasar que por cada punto, pasen varios hiperplanos. Pero eso en realidad no puede pasar, ya que estamos en exactamente las mismas hipotesis que en la sección 5 en esto. Así, usando exactamente la misma demostración, llegamos a la conclusión que hay un solo hiperplano en cada punto de $\tilde{u}$.

Por lo tanto, gracias al teorema 2.2, tenemos que $\tilde{u}$, donde $\tilde{u}$ es la "extensión lineal de u", es $C^1(\mathbb{R}^n)$.

10. Bibliografía

- ◇ Cristian E. Gutiérrez *The Monge-Ampère Equation.*
- ◇ I. J. Bakelman. *Convex analisys and nonlinear geometric elliptic equations.* **Springer-Verlag, Berlin 1994**
- ◇ L. A. Caffarelli. *A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity.* **Ann. of Math., 1990**
- ◇ L. A. Caffarelli. *Some regularity properties of solutions of Monge-Ampère equation.* **Comm. Pure Appl. Math., 1991**
- ◇ L. A. Caffarelli. *Boundary regularity of maps with convex potentials.***Comm. Pure Appl. Math. 1992**
- ◇ A. V. Pogorelov. *Monge-Ampère equations of elliptic type.* **P. Noordhoff, Ltd., Groningen, Netherlands, 1964**