

CONSIDERACIONES SOBRE LA
DECONVOLUCION DE LA ONDÍCULA SISMICA
MEDIANTE LA TRANSFORMACION HOMOMORFICA LOGARITMICA

M. D. Sacchi y A. H. Comínguez

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. UNLP.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

RESUMEN

Se estudia en este trabajo la aplicación de la transformación Homomórfica Logarítmica, para estimar la ondícula sísmica. El logaritmo de la transformada de Fourier de la señal seguido de la transformada inversa de Fourier conduce a un nuevo dominio llamado Cepstrum. En dicho dominio la convolución, modelo adoptado para la traza sísmica, se transforma en suma y por lo tanto la deconvolución en el dominio del tiempo equivale a sustracción en el Cepstrum.

La ventaja del método radica en que permite estimar la ondícula sin necesidad de usar la hipótesis de fase mínima ni necesariamente la de serie reflectora aleatoria.

Con un ejemplo sintético se discute las técnicas de normalización de la señal utilizadas, así como la metodología empleada para estimar la ondícula. Finalmente la técnica para la extracción de ondículas de fase mínima usando el Cepstrum de la autocorrelación de la señal es desarrollada.

ABSTRACT

The application of the Logarithmic Homomorphic Transform to estimate the seismic wavelet is studied. The logarithm of the Fourier transform followed by its inverse Fourier transform leads to a new domain called "Cepstrum", where the convolution (model adopted for the seismic trace), is transformed into a summation and, therefore time deconvolution is equivalent to a Cepstrum subtraction.

The method does not need the usual assumptions of a minimum-phase wavelet and a random distribution of the impulsive train, which is its main advantage.

A synthetic example shows the normalization techniques used and the methodology applied to estimate the wavelet. Finally the minimum-phase wavelet extraction by means of the cepstral transform of the signal autocorrelation is developed.

INTRODUCCION

La traza sísmica obtenida de una prueba de reflexión, evaluada en un intervalo de tiempo relativamente pequeño puede representarse como producto de convolución entre la ondícula (fuente) y la respuesta impulsiva de la estructura geológica considerada (serie reflectora). La ondícula que se desea recuperar ha de considerarse invariante en dicho intervalo de tiempo.

El enfoque clásico para recuperar la serie reflectora utiliza filtros lineales inversos, para cuyo diseño se requiere el conocimiento de la ondícula. En trazas donde la ondícula corresponde a una función de fase mínima (Robinson y Treitel, 1980); la misma es calculada a partir de su autocorrelación utilizando diversas técnicas: Transformada de Hilbert, Cepstrum de la Autocorrelación etc. (Sacchi, 1988). La autocorrelación de la ondícula es estimada mediante la autocorrelación de la traza, ya que para intervalos de tiempo suficientemente grandes la serie reflectora puede considerarse aleatoria. Luego la autocorrelación de la traza es equivalente a la de la ondícula. Cuando la traza esta formada por ondículas que no son de mínima fase el procedimiento comentado no será válido debiéndose recurrir a técnicas de extracción total de ondículas para luego diseñar filtros inversos de óptimo retardo capaces de recuperar la serie reflectora (Robinson y Treitel, 1980). El propósito de este trabajo es analizar la posibilidad de recuperar la ondícula sin necesidad de hipótesis alguna sobre su curva de fase.

La Transformación Homomórfica es una técnica no lineal propuesta por Oppenheim (1985) y aplicada por primera vez por Schafer (1969) en la eliminación de eco. Existe una amplia literatura Geofísica sobre la aplicación de la misma para la estimación de la ondícula, (Ulrich, 1971; Souza, 1976; Tribolet, 1979; Comínguez, 1988; Sacchi, 1988). La ondícula estimada con esta técnica también es utilizada para estudios de dispersión y atenuación de ondas elásticas (Furterman, 1982; Strick, 1970). También fue documentado su uso en análisis de parámetros de la voz, procesamientos de imágenes, análisis de datos de electroencefalogramas etc.

TRANSFORMADA HOMOMORFICA LOGARITMICA

Sistema Homomórfico logarítmico

Considerese que la traza sísmica sin ruido admite la expresión $x(n)=b(n)*r(n)$, donde $b(n)$ es la ondícula que se desea estimar y $r(n)$ la respuesta impulsiva del subsuelo. Evaluando la transformada Z de la expresión anterior: $X(z)=B(z)R(z)$ (Roberts y Gabel, 1975). Si $z=\exp(iw)$ donde w es la frecuencia en radianes se obtiene la transformada de Fourier de la señal: $X(w)=B(w)R(w)$. La transformación Homomórfica Logarítmica consiste en calcular el logaritmo de la transformada de Fourier y luego mediante la

transformada inversa de Fourier se pasa a un nuevo dominio llamado Cepstrum. Las operaciones involucradas son las siguientes:

Transformada de Fourier:

$$X(w)=B(w)R(w)$$

Logaritmo de la transformada

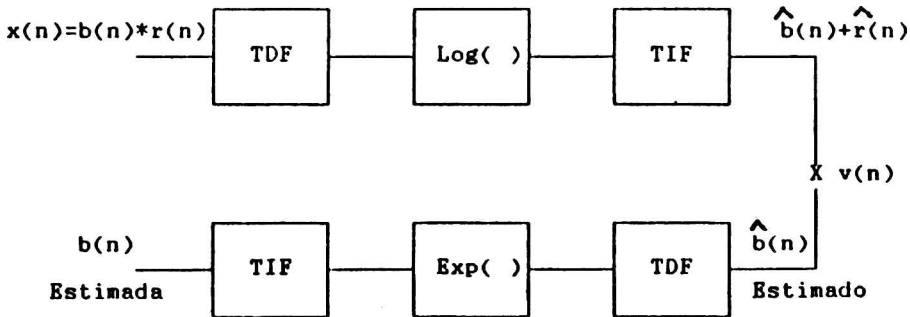
$$\text{Log}(X(w))=\text{Log}(B(w))+\text{Log}(R(w))$$

Por último aplicando la transformada inversa de Fourier a la expresión anterior:

$$\hat{x}(n)=\hat{b}(n)+\hat{r}(n)$$

donde $\hat{b}(n)$ y $\hat{r}(n)$ son el Cepstrum de la ondícula y de la serie reflectora respectivamente. La operación de convolución en el dominio del tiempo se transforma en suma en el dominio Cepstral. Un examen individual de las características de la ondícula y de la serie reflectora en este nuevo dominio, permitirá trazar la estrategia adecuada a seguir para estimar la ondícula sísmica.

El sistema Homomórfico propuesto junto con la transformación inversa para pasar del Cepstrum al dominio del tiempo es representado en la fig.1, $v(n)$ es el operador lineal (normalmente una ventana pasa bajos) que nos permitirá retener la información de la ondícula.



TDF: transformada directa de Fourier

TIF: transformada inversa de Fourier

Fig.1

Consideraciones sobre la continuidad de la fase y del logaritmo

El computo del Cepstrum involucra el cálculo del logaritmo de un complejo de la forma: $X(w) = |X(w)| \text{Exp}(i\phi(w))$ donde $\phi(w)$ es la fase de la señal.

$$\text{Log}(X(w)) = \text{Log}|X(w)| + i(\phi(w) + 2k\pi) \quad \text{donde } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Para garantizar que $x(n)$ tenga una representación única en el Cepstrum (es decir que la transformación sea unívoca) se elegirá de todas las posibles formas que toma la parte imaginaria de la última expresión, la correspondiente a una curva de fase continua. Además del criterio de continuidad de fase, se exige continuidad de $\text{Log}|X(w)|$. Ambas condiciones aseguran la continuidad del Logaritmo de la transformada de Fourier. Para garantizar la continuidad del logaritmo del módulo bastará que la transformada de Fourier no tenga ceros ni polos, luego $x(n)$ será una serie estable con inversa estable.

La continuidad del argumento se logra mediante un algoritmo de fase continua (Oppenheim y Schaffer, 1975), el que transforma el valor principal del argumento (calculado mediante rutinas de arco tangente), en una curva de fase continua. Dicho algoritmo computa el valor principal del argumento de $X(w)$, y luego suma adecuadamente múltiplos de 2π a dicho valor, hasta que las discontinuidades son eliminadas.

Características de las señales en el Cepstrum

La continuidad del logaritmo de la transformada de Fourier permite mediante desarrollos en serie del mismo, demostrar las propiedades aquí enunciadas (Souza, 1976; Sacchi, 1988). Considérese la serie $x(n)$, su Cepstrum $\hat{x}(n)$ tiene las siguientes propiedades:

- 1) Si $x(n)$ fuera una serie de fase mínima, luego $\hat{x}(n) = 0$ para $n < 0$
- 2) Si $x(n)$ fuera una serie de fase máxima, luego $\hat{x}(n) = 0$ para $n > 0$
- 3) Si $x(n)$ fuera una serie de fase mixta cuya transformada Z puede expresarse:

$$X(Z) = AX_1(Z)X_2(Z)$$

con $X_1(Z)$ y $X_2(Z)$ transformadas Z de series de mínima y máxima fase respectivamente, entonces

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} \hat{x}_1(n) & n > 0 \\ \text{Log } A & n = 0 \\ \hat{x}_2(n) & n < 0 \end{cases}$$

- 4) El Cepstrum decae al menos tan rápidamente como $1/n$ (Oppenheim y Schaffer, 1975)
- 5) Si $x(n)$ fuera una serie de impulsos de mínima fase su Cepstrum $x(n)$ no tendría contribución alguna en el intervalo $0 < n_2 - n_1$, y en general será distinto de cero para $n = 0, n_2 - n_1, n_3 - n_1, \dots$ (n_k es la muestra correspondiente al k -ésimo impulso de la serie reflectora), y para todas las combinaciones lineales de estos últimos (Stoffa et al, 1978)

Véase la propiedad 5 por ser de sumo interés a los fines de la deconvolución. Si la serie de impulsos no fuese de fase mínima siempre sería posible multiplicándola con un operador de pesado exponencial transformar dicha serie en una de fase mínima donde sería válida la propiedad 5. El operador de pesado exponencial es de la forma $a^n x(n)$ con $a < 1$. La fig.2a corresponde a una serie de impulsos de fase arbitraria, las fig.2b y 2c son el Cepstrum de la serie sin pesar y pesada con $a=0.97$ respectivamente. Obsérvese un desarrollo del Cepstrum tanto hacia muestras positivas como negativas para la serie sin pesar, mientras que el Cepstrum de la serie pesada exponencialmente tiene desarrollo hacia muestras positivas por tratarse de una serie de mínima fase (propiedad 1). Véase también las primeras muestras donde el Cepstrum es nulo (propiedad 5). En casos reales debido a la atenuación y a la dispersión la serie reflectora será prácticamente de mínima fase, de no ser así un pequeño pesado exponencial alcanza para que lo sea.

Debe aclararse que en principio el Cepstrum es una serie de longitud infinita pero dado que se calcula por medio del algoritmo de transformada rápida de Fourier se obtiene una versión periódica y con aliasing del mismo (Oppenheim y Schaffer, 1975). Afortunadamente el decaimiento del Cepstrum (propiedad 4) minimiza dicho problema, notándose el efecto del aliasing solo en sus extremos.

Dada la configuración de la serie reflectora en el Cepstrum, se analizará que sucede con la ondícula. Un ejemplo nos permitirá intuitivamente comprender este problema. Supóngase un espectro de amplitud constante para todas las frecuencias su antitransformada será un impulso unitario (delta de Dirac), es decir un espectro de amplitud constante tiene como antitransformada una función altamente concentrada alrededor del origen como la delta. Ahora bien tomar logaritmo del espectro de amplitud de la ondícula es equivalente a aplanarlo, ya que el logaritmo reduce las diferencias de amplitud de la transformada de Fourier, luego al antitransformar la ondícula aparece concentrada alrededor del origen. Se tiene así una transformación capaz de concentrar la ondícula alrededor del origen del Cepstrum, mientras que transforma una serie de impulsos de mínima fase en otra serie de impulsos según la propiedad 5. Esto sugiere la posibilidad de recuperar la ondícula con una ventana pasa bajos en el Cepstrum. El diseño de la ventana debe contemplar: (1) Largo adecuado para retener la mayor cantidad de información del Cepstrum de la ondícula. (2) Forma de la ventana que menos altere las características de la ondícula.

EJEMPLO SINTETICO

Técnicas de normalización utilizadas

El esquema descripto fue utilizado para deconvolucionar una ondícula sintética de fase mixta. Para ello se construyó un sismograma sintético convolucionando la ondícula con una serie de impulsos. La fig.3a corresponde a la ondícula utilizada y la 3b a la traza sintética. La ondícula utilizada no se adapta necesariamente a un caso real, la misma fue escogida para probar el buen funcionamiento de la transformación en trazas cuyas ondículas no permiten hipótesis sobre su curva de fase.

Como primer paso el programa de calculo pesa exponencialmente la traza para transformar la serie de impulsos en una de fase mínima. Cabe aclarar que el pesado exponencial afecta también a la ondícula aunque en menor grado que a la serie reflectora por tratarse de una función de suave variación, de todos modos a la ondícula estimada se le aplica la operación de pesado inverso: $a^{-nb(n)}$.

A la traza sísmica se le agregaron los ceros necesarios para llevarla a una longitud de 2^n para poder utilizar el algoritmo de transformada rápida de Fourier. Aumentar la longitud de la traza ofrece dos ventajas: (1) Disminuye el intervalo de muestreo en frecuencia facilitando el funcionamiento del algoritmo de fase continua. (2) Aumenta la longitud del Cepstrum, disminuyendo el efecto de aliasing.

Para normalizar la curva de fase se utilizó el algoritmo de fase continua propuesto por Schafer (Oppenheim y Schaffer, 1975), el mismo también elimina la componente de fase lineal. La fig.4 corresponde a la curva de fase luego del algoritmo.

La eliminación de la bandas de ceros en la transformada de Fourier se realizó mediante el operador de pesado exponencial ya que este al convertir la serie en una de mínima fase aleja los ceros radialmente del círculo unidad, evitando la generación de polos al tomar logaritmo. Por otra parte un valor muy próximo a cero en la transformada de Fourier introducirá en el dominio del Cepstrum componentes periódicas es decir aumentará el aliasing. Por lo tanto con el pesado exponencial al alejar las bandas de valores muy próximos a cero se disminuye el efecto de aliasing. Las múltiples funciones del operador de pesado exponencial lo hacen sumamente interesante en cualquier tipo de transformación Homomórfica. Existen otros métodos tal como el Mapeo Pasa Banda (Tribolet, 1979; Comínguez, 1988) el que mediante un cambio de escala en la transformada de Fourier elimina la bandas de ceros o de muy baja amplitud convirtiendo una señal pasa banda en una de banda completa a la cual puede aplicarse sin problemas una transformación de tipo Homomórfico.

La fig.5 corresponde al Cepstrum de la ondícula; se observa la concentración de energía alrededor del origen así como el desarrollo del Cepstrum tanto hacia muestras positivas como negativas por tratarse de una ondícula con elementos de mínima y máxima fase.

Deconvolución de la ondícula

Para deconvolucionar la ondícula debe elegirse el largo de la ventana pasa bajos. Dicha ventana debe ser capaz de retener la mayor cantidad de energía del cepstrum de la ondícula, dejando fuera los reflectores que como ya vimos se ubican en el Cepstrum a partir de la muestra $n=n_1-n_2$. En definitiva para diseñar la ventana se requiere conocer dicho número, para ello se utilizó el autocorrelograma de la traza (fig.6). El segundo máximo de autocorrelación indica la ubicación relativa del segundo reflector, con este dato se diseñó una función de recuperación de ganancia con un máximo de amplitud para dicho valor que fue aplicada al Cepstrum de la traza (fig.7). En casos reales el examen de la autocorrelación debiera realizarse bajo un esquema de tipo multicanal para desechar la posibilidad de que el segundo máximo corresponda a una reverberación de la ondícula. En la fig.7 puede observarse magnificado debido a la recuperación de ganancia diseñada para dicho efecto, la primera contribución al Cepstrum de la serie reflectora. La misma corresponde $n=25$, con este dato se eligió la longitud de la ventana pasa bajos.

Se escogió una ventana rectangular simétrica respecto del origen del Cepstrum de $n=48$ muestras; previamente se hicieron pruebas con ventanas rectangulares y de Hanning de diferentes longitudes. En todos los casos la ventana óptima fue la rectangular de 48 muestras, ya que es la que retiene mayor información de la ondícula, aunque también se obtuvieron buenos resultados con ventanas de menor longitud. La ondícula estimada corresponde a la fig.8. se observa la buena concordancia con la ondícula sintética de la fig.3a.

Cepstrum de la autocorrelación

Como complemento se aplica la transformación Homomórfica descripta al reemplazo de una ondícula por su correspondiente ondícula de mínima fase en la traza sísmica (Sacchi, 1988). Esta metodología será aplicable para correlacionar secciones sísmicas realizadas con diversas fuentes. La técnica presentada utiliza los conceptos ya expuestos sobre La transformación Homomórfica Logarítmica.

La transformada Z de la función de autocorrelación contiene tanto los ceros originales de la señal así como sus reversos conjugados (Souza, 1978; Sacchi, 1988).

Para una serie de tiempo real: $\Phi(z) = X(z) \cdot X(1/z)$

Es decir la función de autocorrelación contiene tanto los elementos de mínima y máxima fase cuyas posibles combinaciones forman todas las series con igual espectro de amplitud y diferente espectro de fase. Por la propiedad 3, el semieje positivo del Cepstrum de la autocorrelación será igual al Cepstrum de la serie de fase mínima, análogamente el semieje negativo corresponde al Cepstrum de la serie de máxima fase.

El Cepstrum de la autocorrelación de una ondícula de fase cualquiera y su posterior eliminación del semieje negativo o positivo, nos permitirán calcular las ondículas de mínima o máxima fase respectivamente.

Como ejemplo se construyó una traza sísmica con una ondícula de Ricker. La traza se observa en las fig.9. Deconvolucionada la ondícula se calculó su equivalente de mínima fase mediante la técnica descrita. Dado que la convolución en el dominio del tiempo equivale a suma en el Cepstrum, el reemplazo de una ondícula por otra se efectuó en el Cepstrum, sustrayendo al Cepstrum de la traza el de la ondícula de Ricker y luego sumando el Cepstrum de la ondícula de mínima fase calculada mediante el Cepstrum de la Autocorrelación. El resultado corresponde a la fig.9b. En casos reales donde la complejidad del problema es mayor conviene diseñar filtros capaces de transformar una ondícula en otra con distintas características (Shaping filters). Esta técnica puede utilizarse concretamente para correlacionar secciones sísmicas registradas con vibroseis donde la ondícula es simétrica, con secciones registradas con explosivos donde la ondícula es de mínima fase.

CONCLUSIONES

La técnica de deconvolución estudiada en este trabajo posee múltiples ventajas respecto a los métodos clásicos, entre ellas no requiere la hipótesis de fase mínima, ni necesariamente la de serie reflectora aleatoria. El problema del Aliasing en el Cepstrum puede ser fácilmente salvado aumentando el número de muestras del mismo y mediante un adecuado pesado de la serie de tiempo. Aunque el factor de pesado exponencial óptimo no se conoce a priori, siempre es posible mediante monitoreo del Cepstrum, saber si la serie fue suficientemente pesada como para minimizar el efecto del aliasing.

La estrategia utilizada para calcular el largo de la ventana mediante el análisis de la autocorrelación de la señal resultó adecuada para el problema planteado. De todos modos la elección de la longitud de la ventana para seguir siendo tema de investigación en futuros trabajos, donde se intentará salvar la exactitud en la elección de la ventana a través de esquemas de tipo estadísticos. También será necesario estudiar la implementación de mejores algoritmos de fase continua que se adapten a intervalos cortos de trazas sísmicas.

Por último la importancia práctica de poder correlacionar secciones sísmicas registradas con diversas fuentes sugiere la necesidad de continuar investigando técnicas de reemplazo de ondículas mediante el uso de Transformaciones Homomórficas.

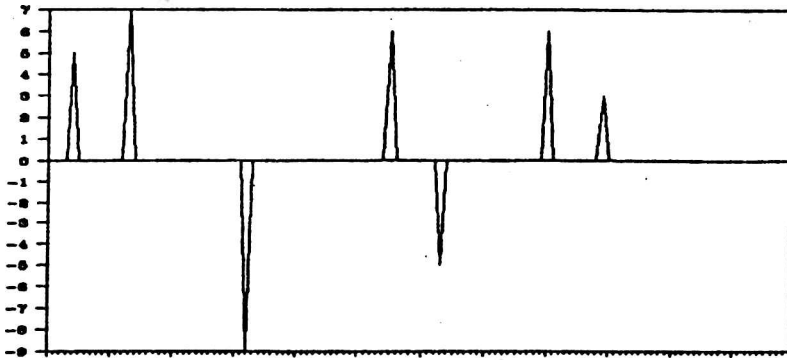


Fig.2a Serie de impulsos

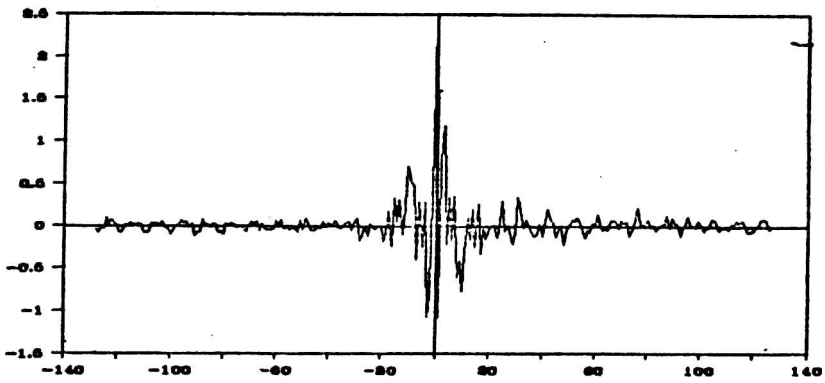


Fig.2b Cepstrum de la serie de impulsos

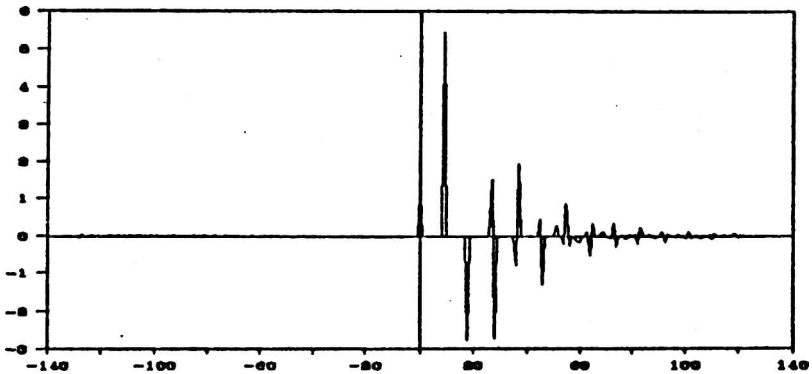


Fig.2c Cepstrum de la serie de impulsos pesada exponencialmente con $a=0.97$

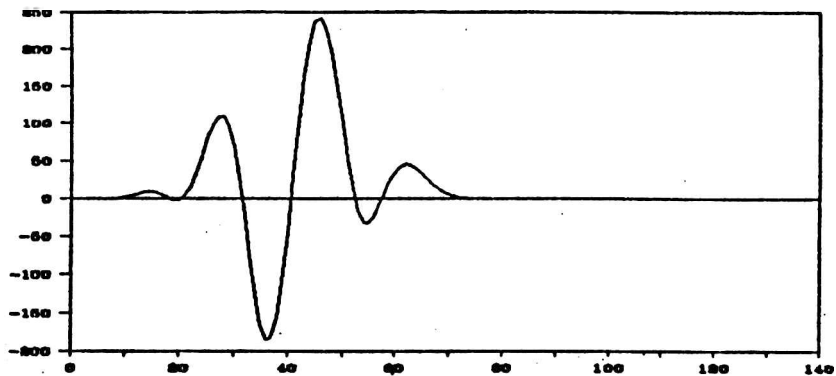


Fig.3a Ondícula sintética

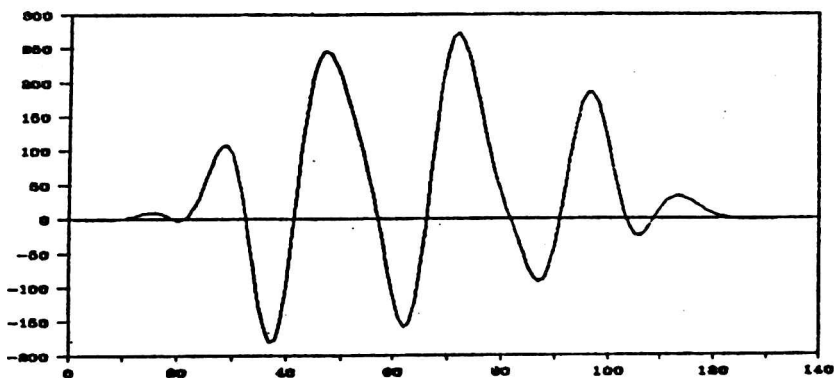


Fig.3b Traza sintética

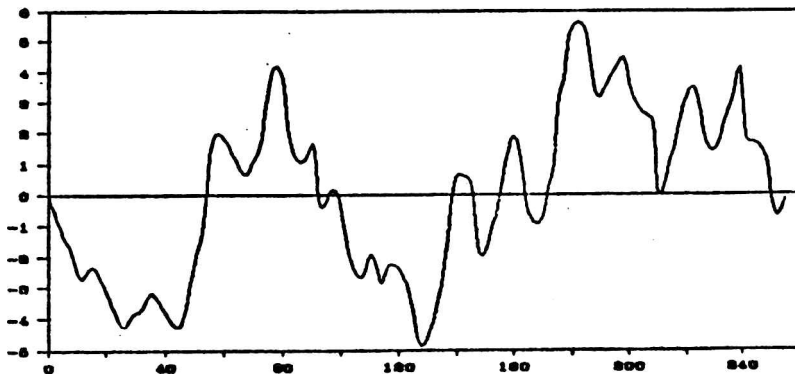


Fig.4 Curva de fase ($w=2k\pi/512$)

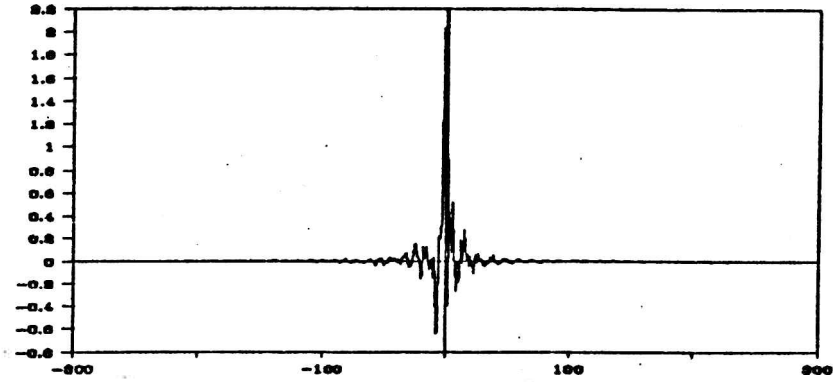


Fig.5 Cepstrum de la ondícula sintética

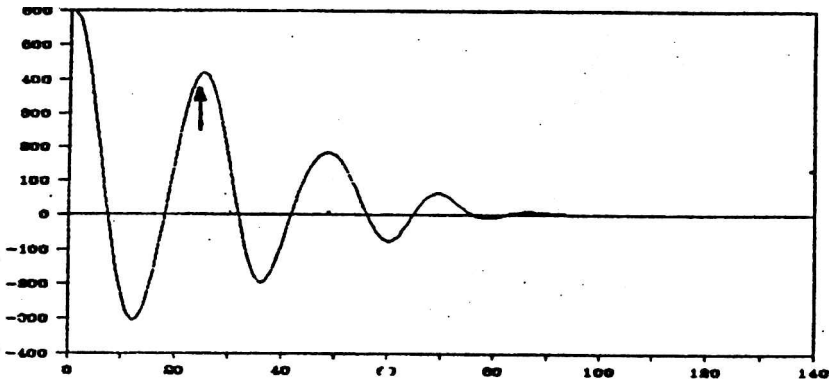


Fig.6 Autocorrelograma de la traza
el segundo máximo corresponde a n=25

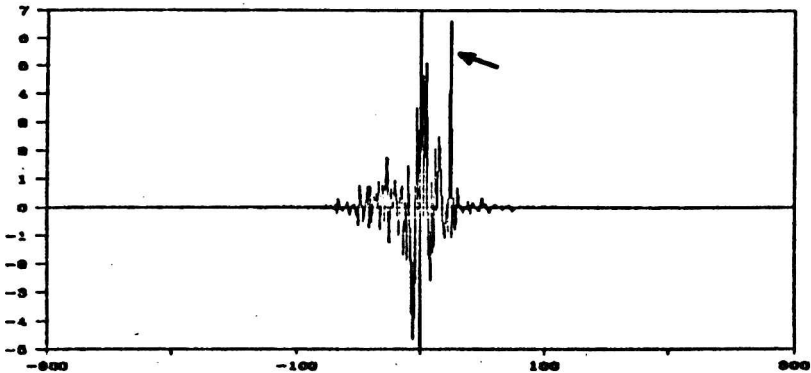


Fig.7 Cepstrum de la traza con
recuperación de ganancia: $1.05 \cdot \exp(-0.0488n)$

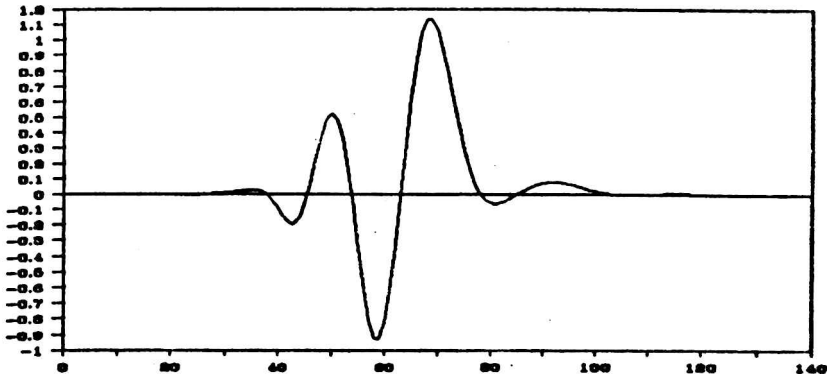


Fig. 8 Ondícula estimada con una ventana rectangular

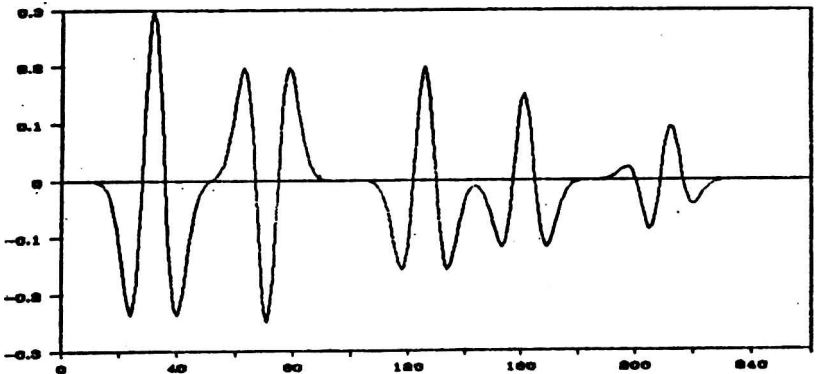


Fig. 9a Traza sintética con ondícula sinétrica (Ricker)

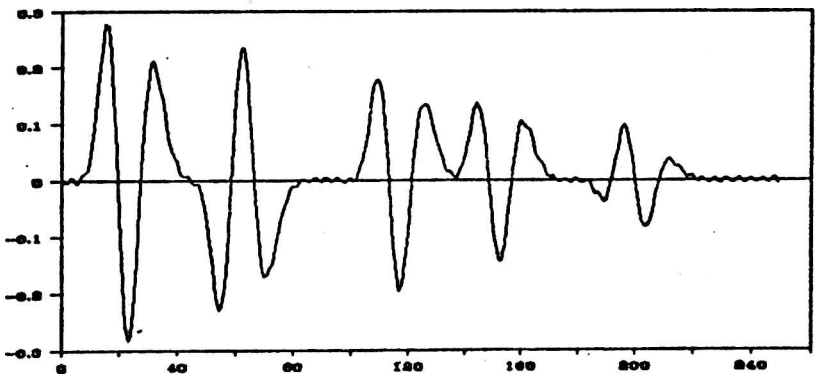


Fig. 9b Traza luego del reemplazo Cepstral

BIBLIOGRAFIA

1. Buhl P., Stoffa P. L., and Bryan G. L., 1974: The application of homomorphic deconvolution to shallow-water seismology, PART I: Models; Geophysics, 39, 401-416.
2. Buttkus B., 1975: Homomorphic Filtering - Theory and practice, Geophysical Prospecting; 23, 712-748.
3. Children D. G., Skinner D. P. and Kemerait R. C., 1977: The Cepstrum : a Guide to Processing; Proceeding of the IEEE, 65 (10),1428-1443
4. Comínguez A., 1988: Deconvolución de la traza sísmica por medio de un nuevo sistema Homomórfico, GEOACTA, 15(1),.1-12.
5. Furtterman, W. I.,1962: Dispersive body waves, J.Geophys. Res.; 67, 5272-5281
6. Gabel R. A. y Roberts R. A.,1975: Señales y Sistemas Lineales; Limusa, Mexico.
7. Morse P. M., Feshbach H., 1953: Methods of theoretical physics; McGraw-Hill,N.Y.
8. Oppenheim A. V. and Schafer R. W., 1975: Digital Signal Processing; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
9. Robinson E. A. and Sven Treitel. 1980: Geophysical Signal Analysis; Prentice-Hall,Inc., N.J.
10. Sacchi, M. D.,1988: Analisis de la traza sísmica mediante la Transformada Homomórfica, Practica de la Especialidad: Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP.
11. Souza, M. M., 1976: Wavelet Extraction Parameter of Homomorphic Deconvolution; Sc. Thesis, University of Houston.
12. Strick,E., 1970: A predicted pedestal effect for pulse propagation in constant-Q solid; Geophysics, 35, 387-403.
13. Tribolet J. M., 1979: Seismic Applications of Homomorphic Signal Processing; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs,N.J..
14. Ulrich T. J.,1971: Application of homomorphic deconvolution to seismology; Geophysics, 39, p.650-660