

DISEÑO DE FILTROS DIGITALES DE RESPUESTA IMPULSIVA FINITA  
Y FASE LINEAL MEDIANTE UNA APROXIMACION DE CHEBYCHEV OPTIMA

Daniilo Eubén Velis - Alberto Horacio Cominquez \*

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata

RESUMEN

Se presenta en este trabajo una técnica de diseño de filtros digitales de respuesta impulsiva finita y fase lineal. El método obtiene la aproximación de Chebychev óptima en intervalos separados correspondientes a las bandas de paso y de rechazo del espectro de amplitud de un filtro ideal.

Se estudia el algoritmo de intercambio múltiple de Remez capaz de implementar tal aproximación eficientemente, permitiendo, a la vez, la especificación exacta de las frecuencias de corte para cada banda, así como el valor relativo de la amplitud del ripple en cada una de ellas.

Se concluye sobre la eficacia del procedimiento, estudiando comparativamente filtros obtenidos mediante la técnica propuesta y filtros de diseño convencional cuyos parámetros no pueden ser controlados propiamente por el diseñador.

ABSTRACT

This paper is concerned with a design technique for linear-phase finite impulse response digital filters.

The optimum Chebychev approximation over separate intervals corresponding to the passbands and stopbands of an ideal amplitude spectrum is obtained by the forementioned method. The Remez multiple exchange algorithm is studied, as allowing to implement such approximation efficiently, along with the exact specification of the cutoff frequencies for each band, and the corresponding relative value of the ripple amplitude.

The procedure efficiency is discussed by studying filters derived from the proposed technique as compared with conventional design filters whose parameters cannot be properly controlled by the user.

---

\* Miembro de la Carrera del Investigador Científico del CONICET

## 1. INTRODUCCION

Los filtros de respuesta impulsiva finita (filtros RIF) son de vital importancia en el procesamiento de señales digitales. Se pueden destacar tres atributos que hacen de ellos una herramienta práctica y atractiva: estabilidad, fase lineal exacta, y rápida implementación vía convolución.

Existen varias técnicas de diseño de tales filtros, pero el objetivo es único: hallar una secuencia finita de números reales tal que su transformada de Fourier cumpla con dos condiciones: 1) su espectro de amplitud debe tener bandas de rechazo y de paso de acuerdo a los requerimientos del diseñador; 2) su espectro de fase debe ser lineal. Básicamente, se trata de un problema de aproximación.

Una de las técnicas de diseño clásicas es el "método de ventanas", descrito por numerosos autores (Blackman y Tukey, 1958; Kaiser, 1966; Rabiner y Gold, 1975). El procedimiento utiliza una secuencia de peso finita, llamada "ventana", que modifica a los coeficientes de Fourier de manera de controlar la convergencia de la serie homónima. Es una técnica muy sencilla, y para muchos fines eficaz, pero presenta ciertas limitaciones. Por ejemplo, no incluye ningún tipo de optimización que minimice alguna función de error entre el espectro de amplitud ideal o deseado y el calculado. Tampoco es posible ejercer algún control directo sobre los parámetros del filtro. Tanto el ripple como el ancho de las bandas de transición (bandas donde existen discontinuidades en el espectro de amplitud ideal) sólo se pueden conocer una vez calculado el filtro. Lo mismo puede decirse para la locación exacta de las frecuencias de corte.

Otra técnica de diseño, llamada de "muestreo en frecuencias", propuesta por Gold y Jordan (1969) y desarrollada por Rabiner y otros (1970) consiste en muestrear el espectro de amplitud ideal que se requiere aproximar en  $N$  puntos equiespaciados. Luego se evalúa el espectro de amplitud como una interpolación del espectro muestreado. Haciendo que ciertas muestras correspondientes a la banda de transición sean variables, es posible minimizar alguna función simple del error de aproximación. Pero la elección de las frecuencias para las cuales se toman las muestras es arbitraria, por lo que los resultados obtenidos no son óptimos desde un punto de vista absoluto.

Herrmann (1970) fue el primero en desarrollar un método de diseño de filtros RIF óptimos en el sentido de Chebychev. Asumiendo que el espectro de amplitud del filtro óptimo tuviera ripple constante en todas las bandas (equiripple), y fijando el número de ripples en cada banda, Herrmann estableció un sistema de ecuaciones no lineales que describía completamente al filtro. La longitud de los filtros así diseñados estaba limitada a unos 40 elementos.

Hofstetter y otros (1971) eliminó este inconveniente desarrollando un algoritmo capaz de solucionar las ecuaciones no lineales mediante el algoritmo de intercambio múltiple de Pemez de la teoría de aproximación de Chebychev. Sin embargo, es posible probar que los filtros de Herrmann y Hofstetter son una subclase de los filtros óptimos que se discutirán en este trabajo. Además, persiste la dificultad de no poderse determinar *a priori* la posición exacta de las frecuencias de corte.

Parks y Mc Clellan (1972) formularon la aproximación de un filtro pasabajos ideal en dos intervalos separados, la banda de paso y la de rechazo, dejando la banda de transición sin especificar. El teorema de alternación fijaba las condiciones de la aproximación óptima y el algoritmo de Pemez resolvía eficientemente el problema. Más tarde generalizaron el procedimiento para incluir todos los ti-

pos de filtros RIF de fase lineal (Mc Clellan y Parks, 1973). Mediante esta técnica, los inconvenientes arriba mencionados resultaban eliminados.

La técnica de diseño de dichos filtros óptimos (filtros minimax), que incluye filtros pasabajos, pasabandas, pasabanda y rechazabanda múltiples, se describe en los párrafos siguientes. Algunas pequeñas modificaciones pueden hacerse a la teoría para incluir además filtros minimax diferenciadores y transformadores de Hilbert (Pabiner y Gold, 1975). Tanto el primer grupo de filtros como el segundo son abarcados por la técnica de diseño implementada en un programa de computación Fortran (Pabiner y Gold, 1975; Velis, 1989).

## 2. FILTROS RIF CON FASE LINEAL

Sea  $\{h(n)\}$  una secuencia real, causal y conformada por  $N$  elementos. O sea:  $h(n) \neq 0$  sólo si  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Su transformada de Fourier es:

$$HC(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-j\omega n) \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia en radianes, y  $j = \sqrt{-1}$ . Se puede reescribir la (1) de la forma

$$HC(j\omega) = H^*(j\omega) \exp[j\theta(\omega)] \quad (2)$$

siendo  $H^*(j\omega) = \pm |HC(j\omega)|$  el espectro de amplitud, una función real, y  $\theta(\omega)$  el espectro de fase, que debe ser lineal. La linealidad puede expresarse escribiendo

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega \quad (3)$$

donde  $\alpha$  es el retardo de fase.

Tomando en cuenta esta última expresión, de las igualdades de las ecuaciones (1) y (2) se desprende el siguiente par de condiciones necesarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = (N-1)/2 \\ h(n) = h(N-1-n). \end{array} \right. \quad (4a)$$

$$h(n) = h(N-1-n). \quad (4b)$$

La ecuación (4a) expresa que para cada valor de  $N$ , existe un solo valor de  $\alpha$  para el cual la fase es exactamente lineal; en tanto que la (4b) expresa que para ese  $\alpha$  dado, la respuesta impulsiva del filtro presenta cierta clase de simetría (Pabiner y Gold, 1975; Velis, 1989).

Como se expresara oportunamente, el propósito de una técnica de diseño consiste en hallar los  $h(n)$  tales que  $H^*(j\omega)$  se aproxime a cierta forma deseada. La vinculación de los  $h(n)$  con  $H^*(j\omega)$  se obtiene a partir de la ecuación

$$H^*(j\omega) = PC(j\omega)Q(j\omega). \quad (5)$$

$\alpha(\omega)$  es una función fija de  $\omega$ , en tanto que  $FC(\omega)$  resulta una combinación lineal de funciones coseno independientes, como se indica en la Tabla 1 (Rabiner y Gold, 1975).

N impar	$\alpha(\omega) = 1$	$FC(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{a}(n) \cos(\omega n)$
N par	$\alpha(\omega) = \cos(\omega/2)$	$FC(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{b}(n) \cos(\omega n)$

Tabla 1. Expresiones para  $FC(\omega)$  y  $\alpha(\omega)$ . Los coeficientes  $\tilde{a}(n)$  y  $\tilde{b}(n)$  se relacionan sencillamente con los  $h(n)$ .

### 3. APROXIMACION PESADA DE CHEBYCHEV

Se consideró el problema de diseño de filtros RIF con fase lineal como un problema de aproximación de Chebychev. La teoría de este tipo de aproximación establece un conjunto de condiciones para las cuales es posible probar que la solución es óptima y única. El teorema de alternación establece estas condiciones, y es la base del algoritmo de intercambio múltiple de Remez, método que calcula los coeficientes del filtro eficientemente.

Para formular el problema, es necesario definir primeramente el espectro de amplitud deseado  $DC(\omega)$  y la función de peso  $WC(\omega)$  de la función de error de aproximación, que permitirá al diseñador elegir el error máximo relativo (ripple) en cada una de las bandas. De esta manera, el error pesado de aproximación queda definido como

$$EC(\omega) = WC(\omega) [DC(\omega) - H^*(\omega)] \quad (6)$$

En virtud de la ecuación (5), se escribirá

$$EC(\omega) = \hat{W}(\omega) [\hat{D}(\omega) - FC(\omega)] \quad (7)$$

donde  $\hat{W}(\omega) = WC(\omega)\alpha(\omega)$  y  $\hat{D}(\omega) = DC(\omega)\alpha(\omega)$ .

El problema consiste ahora en hallar los coeficientes  $\tilde{a}(n)$  ó  $\tilde{b}(n)$  tales que  $FC(\omega)$  se aproxime a  $\hat{D}(\omega)$  en el sentido de Chebychev: minimizar el máximo absoluto de  $EC(\omega)$  sobre las bandas de frecuencias en las cuales la aproximación se está realizando. Denotando como  $\|EC(\omega)\|$  a este valor, luego el problema se puede establecer matemáticamente como:

$$\|EC(\omega)\| = \min_{\{coeff\}} \left[ \max_{\omega \in A} |EC(\omega)| \right] \quad (8)$$

donde  $A$  es la unión de las bandas de interés.

Se trata, como se puede apreciar, de una minimización a norma infinita. Su solución se obtiene a partir de las condiciones establecidas por el teorema de alternación (Davis, 1965).

**Teorema de alternación:**

Si  $PC(j\omega)$  es una combinación lineal de  $r$  funciones coseno, o sea, si

$$PC(j\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n)$$

luego, una condición necesaria y suficiente para que  $PC(j\omega)$  sea la única y mejor aproximación pesada de Chebychev de una función continua  $D(j\omega)$  en  $A$ , subconjunto del intervalo  $(0, \pi)$ , es que la función de error pesada  $EC(j\omega)$  posea al menos  $r+1$  frecuencias extremas en  $A$ ; es decir, deben existir  $r+1$  puntos  $\omega$  en  $A$  tales que:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{r+1} \text{ y tales que } EC(j\omega_i) = -EC(j\omega_{i+1}), \quad i=1, 2, \dots, r \text{ y } |EC(j\omega_i)| = \max_{\omega \in A} |EC(j\omega)|.$$

Este teorema es muy poderoso, puesto que establece las condiciones necesarias y suficientes para que la solución del problema de aproximación expresado en (8) exista y sea única. Establece la propiedad de equioscilación de la función error, o sea:  $EC(j\omega)$  debe ser equioscilante con  $r+1$  extremos alternados. En tales circunstancias,  $PC(j\omega)$  es la mejor aproximación de Chebychev de la función  $D(j\omega)$ .

Si se revisa la Tabla 1, se puede establecer el significado de  $r$  en el teorema. Comparando las expresiones para  $PC(j\omega)$ ,  $r$  vale  $(N+1)/2$  ó  $N/2$  según sea  $N$  impar ó par respectivamente.

La Figura 1 indica el aspecto que presenta el espectro de amplitud de un filtro pasabajos solución del problema planteado. El esquema de tolerancia representado se alcanza mediante la especificación de los parámetros  $F_p$ ,  $F_s$  y la relación  $\delta_1/\delta_2$ . Se ha definido la frecuencia normalizada  $F = \omega/2\pi$ .

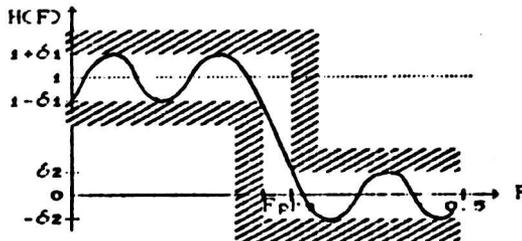


Figura 1. Filtro pasabajos minimax: esquema de tolerancias.

En este momento surge una pregunta: ¿cuáles han de ser las  $r+1$  frecuencias para las cuales  $EC(j\omega)$  toma sus extremos, verificando el criterio de cercanía de aproximación establecido en (8)? La respuesta la brinda el algoritmo de intercambio múltiple de Remez descrito brevemente a continuación.

#### 4. ALGORITMO DE REMEZ PARA EL DISEÑO DE FILTROS MINIMAX

El algoritmo, como se indica en la Figura 2, comienza con una suposición inicial de  $r+1$  puntos, e intercambio de puntos hasta que

obtiene los  $r+1$  puntos del teorema de alternación (frecuencias extremas). Esto se logra de la siguiente manera.

En el paso  $i$ -ésimo del algoritmo, se tienen  $r+1$  puntos en los cuales la función error es forzada a tomar magnitud  $\delta$  con signos alternados (recordar la condición de equioscilación). De esta manera se obtiene un conjunto de  $r+1$  ecuaciones, que de acuerdo a la ecuación (7) tienen la forma

$$\widehat{W}(j\omega_k) \left[ \widehat{D}(j\omega_k) - PC(j\omega_k) \right] = (-1)^k \delta \quad k=0,1,\dots,r. \quad (8)$$

$PC(j\omega)$  es una combinación lineal de cosenos, de modo que el sistema (8) puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos(r-1)\omega_0 & \frac{1}{\widehat{W}(j\omega_0)} \\ 1 & \cos\omega_1 & \cos 2\omega_1 & \dots & \cos(r-1)\omega_1 & \frac{-1}{\widehat{W}(j\omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\omega_r & \cos 2\omega_r & \dots & \cos(r-1)\omega_r & \frac{(-1)^r}{\widehat{W}(j\omega_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{D}(j\omega_0) \\ \widehat{D}(j\omega_1) \\ \vdots \\ \widehat{D}(j\omega_r) \end{bmatrix} \quad (10)$$

La solución directa de este sistema es lenta cuando  $r$  toma valores más o menos grandes. Es más eficiente calcular primero  $\delta$  analíticamente, con la fórmula

$$\delta = \frac{a_0 \widehat{D}(j\omega_0) + a_1 \widehat{D}(j\omega_1) + \dots + a_r \widehat{D}(j\omega_r)}{a_0 / \widehat{W}(j\omega_0) - a_1 / \widehat{W}(j\omega_1) + \dots + (-1)^r a_r / \widehat{W}(j\omega_r)} \quad (11)$$

donde  $a_k = \prod_{i=0, i \neq k}^r (x_k - x_i)^{-1}$  para  $k=0,1,\dots,r$ , y  $x_i = \cos(\omega_i)$ .

Luego, mediante la fórmula de interpolación de Lagrange se interpola la  $PC(j\omega)$  en los  $r$  puntos  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}$  para los cuales  $PC(j\omega)$  vale

$$C_k = \widehat{D}(j\omega_k) - (-1)^k \delta / \widehat{W}(j\omega_k) \quad k=0,1,\dots,r-1. \quad (12)$$

Con el único fin de que el procedimiento sea lo más rápido posible, en lugar de utilizarse la fórmula de interpolación de Lagrange en su forma estándar, se utiliza su forma baricéntrica. Esta proporciona un ahorro total de tiempo de computación en esta etapa del 50% (Velis, 1983).

De modo que se interpola para los  $r$  puntos  $C_k$ , mediante la fórmula:

$$P(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \left[ \frac{\beta_k}{x - x_k} \right] d_{k,y}}{\sum_{k=0}^{r-1} \left[ \frac{\beta_k}{x - x_k} \right]} \quad \text{con} \quad \beta_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{r-1} (x_k - x_i)^{-1} \quad (13)$$

El siguiente paso es evaluar  $EC(\omega)$  en  $A$ . Es suficiente hacerlo en un número finito de puntos equiespaciados, no inferior a 20: (Parks y McClellan, 1972). Si la función error es tal que  $|EC(\omega)| \leq \delta$  para todo  $\omega \in A$ , entonces las frecuencias supuestas coinciden con los extremos de  $EC(\omega)$ , y la solución óptima ha sido encontrada. Pero si para algún  $\omega \in A$ ,  $|EC(\omega)| > \delta$ , entonces se debe elegir un nuevo conjunto de  $r+1$  frecuencias candidatas a ser frecuencias extremas. La estrategia del algoritmo de Remez es elegir estas nuevas frecuencias tales que  $\delta$  se vea incrementada en la próxima iteración. Si los nuevos puntos que se eligen son los extremos de la curva de error (o sea aquellos puntos donde  $|EC(\omega)| \geq \delta$  y  $EC(\omega)$  es extremo local), entonces  $\delta$  es forzada a aumentar hasta que converge a su límite superior, que corresponde a la solución del problema (Rabiner y otros, 1975).

En definitiva, el algoritmo de Remez proporciona el error pico  $\delta$  y el conjunto de  $r+1$  frecuencias extremas para las cuales  $EC(\omega)$  toma sus extremos de magnitud  $\delta$  y signos alternados. Luego, se evalúa  $P(\omega)$  en  $2^M$  puntos igualmente espaciados, tal que  $2^M \geq N$ , y, mediante la transformada rápida de Fourier (FFT), se obtienen los coeficientes  $\alpha(n)$ . Según sea  $N$  par o impar, a partir de los  $\alpha(n)$  se calculan los coeficientes  $h(n)$  que conforman la respuesta impulsiva del filtro minimax.

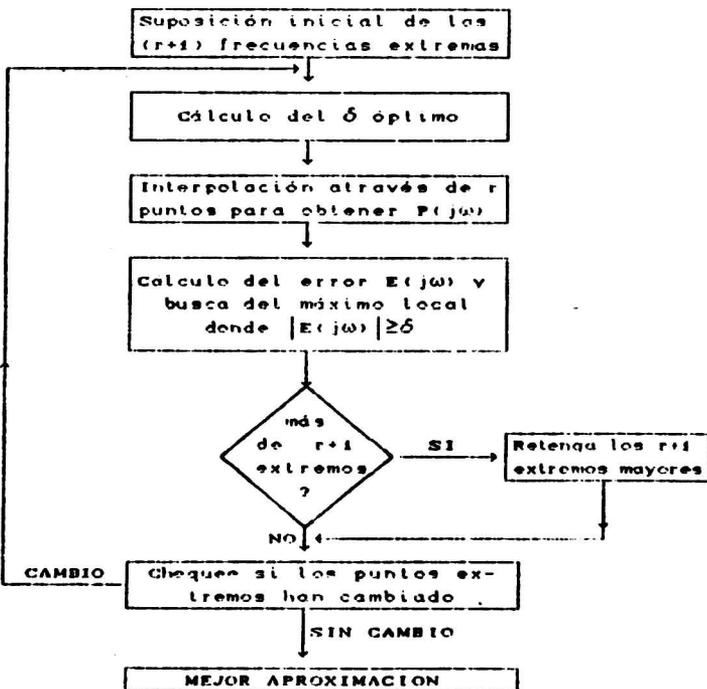


Figura 2. Diagrama en bloques del algoritmo de Remez

## 5. DISEÑO DE FILTROS. DISCUSION Y EJEMPLOS

Se ha calculado un filtro pasabajos de frecuencia de corte normalizada  $F_c=0.35$  mediante el método de ventanas. Se aplicó primero una ventana rectangular y luego una de Hamming. Las Figuras 3 y 5 muestran los respectivos espectros de amplitud en decibelios (db). Las figuras pequeñas incluidas en las grandes enseñan un detalle ampliado de las bandas pasantes, donde se advierten los valores máximos del ripple. Las unidades de sus ejes son las mismas que las de las figuras grandes. Bajo el epígrafe de cada figura, se muestra el espectro de amplitud por unidad del filtro correspondiente. El ancho de la banda de transición se denota por DF.

Las Figuras 4, 6, 7 y 8 muestran los espectros resultantes del mismo filtro pasabajos calculado con el método de optimización descrito en el presente trabajo. Merced a la ductilidad del procedimiento, se han variado ligeramente algunos parámetros del filtro (manteniendo su longitud) con el fin de hacerlo comparable a los filtros de las Figuras 3 y 5.

Las Figuras restantes (9 a 14) muestran filtros minimax diversos, que dan una idea del poder de la técnica de diseño en aproximar una amplia variedad de filtros:

Cabe aclarar que cuando se indica por ejemplo Pesos 1:5 en la Figura 8, éstos son los valores que se especifican para la función de peso  $W(\omega)$  en cada banda. Para este caso, el ripple en la banda de rechazo será 5 veces menor al ripple en la banda de paso.

Nótese además que la fase de cada uno de los filtros es exactamente lineal, también la de los filtros diseñados con el método de ventanas, y vale  $\theta(\omega)=-\omega$ , habiéndose elegido  $\alpha=(N-1)/2$  y tal que  $h(n)=h(N-1-n)$  es su respuesta impulsiva, simétrica respecto a la muestra  $n=\alpha$ .

En el epígrafe de cada figura, se discuten las características de cada uno de los filtros diseñados.

## 6. CONCLUSIONES

La técnica de diseño de filtros minimax realiza una aproximación en intervalos separados. Esto permite la especificación exacta de las frecuencias de corte de cada banda (dos por cada una), y por ende, el conocimiento preciso y *a priori* del ancho de las bandas de transición. Otras técnicas de diseño, tales como el método de ventanas, obtienen estos valores indirectamente.

Se ha probado que a igual DF en los filtros "rectangular" y minimax, y "Hamming" y minimax, las características de ripple en el dominio de las frecuencias del nuevo filtro resultan mejoradas sustancialmente. Lo mismo puede decirse para el DF cuando es el ripple la cantidad comparable.

Una limitación inherente a este procedimiento, así como a otras técnicas de diseño, es que no es posible especificar simultáneamente todos los parámetros del filtro. El ripple (equiripple) no se conoce *a priori*; en cambio, la técnica permite establecer su valor relativo en cada banda mediante la especificación de los pesos.

Cabe destacar la importancia que tendrá en el futuro la utilización de filtros minimax. Sus aplicaciones, tanto en el procesamiento de señales sísmicas como en otras áreas de la ciencia que maneje señales digitales, son múltiples. Los filtros minimax están siendo progresivamente incluidos en los paquetes de software destinados al procesamiento de señales sísmicas para la investigación y producción petrolera, y su uso se vuelve conveniente en todo aquel

procesamiento que requiera un filtro riguroso, bien especificado, y eficiente en cuanto a tiempo de máquina.

Queda hecho el ofrecimiento a la comunidad científica del programa implementado para una computadora IBM PC y compatibles. Dicho programa es de múltiple propósito, permitiendo diseñar no sólo los filtros minimax de las figuras 3 a 14, sino además filtros minimax diferenciadores y transformadores de Hilbert.

### Agradecimiento

Al señor Andrés E. Kaswelder por haber facilitado su computadora para el desarrollo del presente trabajo.

Al Geofísico Mauricio D. Sacchi y a las autoridades de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de La Plata por el apoyo brindado.

### Referencias Bibliográficas

- Blackman, R.B. y Tukey, J.W., 1959: The Measurement of Power Spectra; Dover Publications, Nueva York.
- Davis, P.J., 1959: Interpolation and Approximation; Blaisdell Publ. Co., Nueva York-Toronto-Londres.
- Gold, B. y Jordan, K.L., 1969: A direct search procedure for designing finite duration impulse response filters; IEEE, Trans. on Audio and Electroacoustics, 17, 33-36.
- Herrmann, O., 1970: Design of nonrecursive digital filters with linear phase; Electronics Letters, 6, 328-329.
- Hofstetter, E., Oppenheim, A. y Stegel, J., 1971: A new technique for the design of nonrecursive digital filters; Proc. Fifth Annual Princeton Conf. on Information Sciences & Systems, 64-72.
- Kaiser, K.F., 1966: Digital Filters; capítulo 7 en System Analysis by Digital Computer; John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.
- McClellan, J.H. y Parks, T.W., 1973: A unified approach to the design of optimum FIR linear phase digital filters; IEEE Trans. on Circuit Theory, 20, 897-901.
- Parks, T.W. y McClellan, J.H., 1972: Chebychev Approximation for nonrecursive digital filters with linear phase; IEEE Trans. on Circuit Theory, 19, 189-194.
- Rabiner, L.R., Gold, B. y McClellan, C.A., 1970: An approach to the approximation problem for nonrecursive digital filters; IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 18, 83-100.
- Rabiner, L.R., McClellan, J.H. y Parks, T.W., 1975: FIR digital filter design techniques using weighted Chebychev approximation; IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 23, 595-610.
- Rabiner, L.R. y Gold, B., 1975: Theory and Application of Digital Signal Processing; Prentice-Hall, Inc., Nueva Jersey.
- Velis, D.R., 1989: Diseño de un filtro digital de fase lineal y respuesta impulsiva finita (óptimo en el sentido de Chebychev); Práctica de la Especialidad, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata.

FIGURA 3. Los coeficientes de la serie de Fourier ( $\text{sen}(2nF_c)/n$ , con  $F_c=0.35$ ) han sido truncados mediante una ventana rectangular. Esto produce el fenómeno de Gibbs que se observa (ripple creciente con valores altos próximo a la banda de transición -BT-). Sin embargo, se obtiene un DF pequeño, para un ripple máximo de 0.094 (equivalente a 0.7 db) en la banda de paso (BP) y 0.1 (-20 db) en la banda de rechazo (BR).

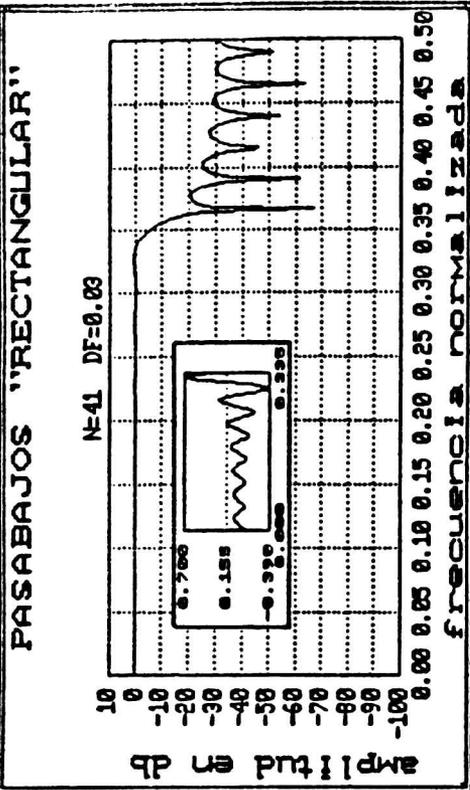
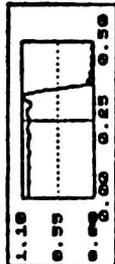
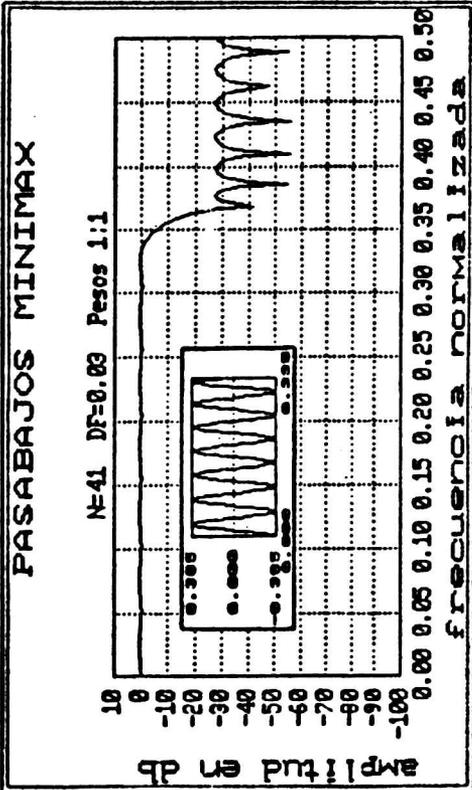
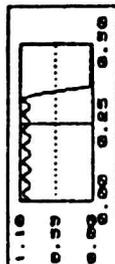


FIGURA 4. Se eligieron las frecuencias de corte tales que el DF resultara igual al DF del filtro "rectangular", o sea 0.03. A igual DF, el ripple es ahora 0.045 (0.385 db y -27 db en cada banda). Para las frecuencias próximas a la BT por la izquierda, se obtiene 4.5 % de deformación frente a 8 % para el filtro "rectangular"; mientras que por la derecha de la BT, es 95.5 % de atenuación frente a 90 %.



PASABAJOS "HAMMING"

N=41 DF=0.09

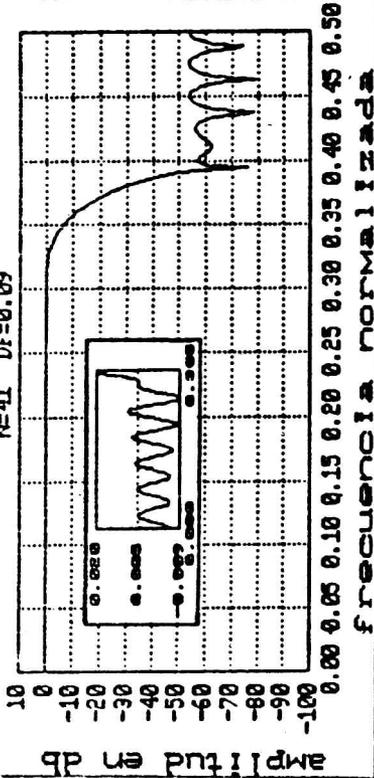
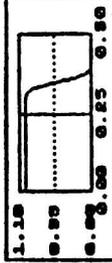


FIGURA 5. Se aplicó a los coeficientes de Fourier una ventana de Hamming. Esta produce un suavizamiento que elimina casi por completo el fenómeno de Gibbs. Sin embargo, como contrapartida, resulta un DF grande, que vale 0.09 (triple del correspondiente al filtro "rectangular"). En cuanto al ripple, para ambas bandas toma (n valor máximo de 0.002 (0.02 db y -55 db respectivamente).



PASABAJOS MINIMAX

N=41 DF=0.09 Pesos 1:1

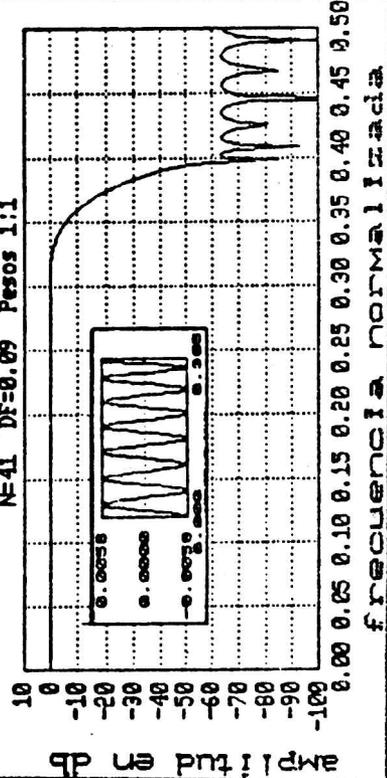


FIGURA 6. Se diseñó este filtro tal que su DF sea igual al del filtro "Hamming". En esta situación extrema (DF grande, ripple bajo), el ripple resultó todavía menor: 0.0007 (0.0058 db y -65 db respectivamente). La deformación de las frecuencias de la BP son mínimas y las alteraciones en la BR son máximas (valores óptimos). Esta situación es inmejorable mediante cualquier técnica de diseño, manteniendo fijos DF y N.

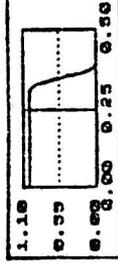
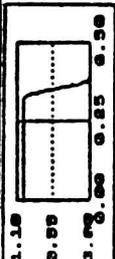
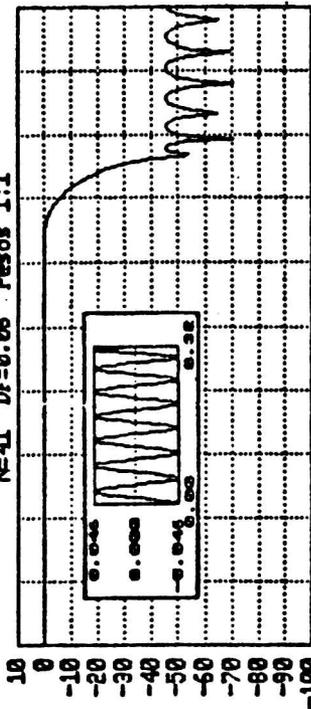


FIGURA 7. En muchos aplicaciones no es necesario un DF tan pequeño como en los casos de las Figuras 3 y 5, ni un ripple tan bajo como en los casos de las Figuras 4 y 6. Para este ejemplo se eligió un DF intermedio (0.00), obteniéndose un ripple de 0.005 (0.046 db y -45 db). Teniendo en cuenta estos valores, se puede concluir que la situación de compromiso siempre existente entre DF y ripple, ha sido muy bien remediada por este filtro minimax. Los filtros de la Figuras 3 y 5 presentan serias dificultades en este punto.



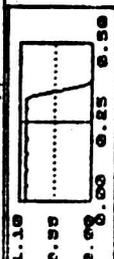
### PASABAJOS MINIMAX

N=41 DF=0.06 Pesos 1:1



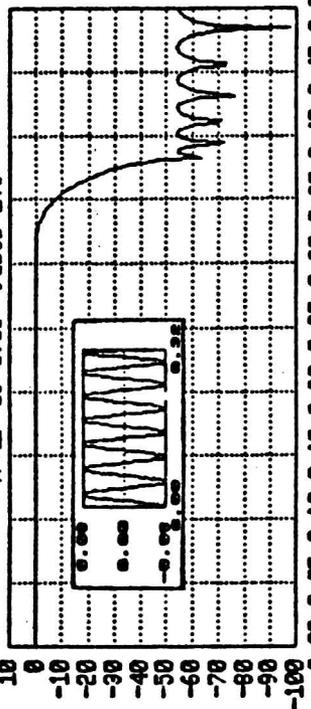
FRECUENCIA NORMALIZADA

FIGURA 8. Manteniendo DF, se ha calculado el mismo pasabajos con una pequeña pero interesante modificación. Se ha dado peso 5 a la BR, de manera que el ripple para cada banda resulta 0.009 (0.06 db) y 0.0018 (-55 db). Nótese que el ripple en la BR es 5 veces menor al de la BP. A la vez, este valor es similar al ripple máximo del filtro "Hamming" de la Figura 5. Y esta excelente atenuación se alcanza con DF=0.06 (frente a DF=0.09 que se tenía para aquel filtro). Esta alternativa que ofrece esta técnica es muy útil para controlar el ripple en cada banda.



### PASABAJOS MINIMAX

N=41 DF=0.06 Pesos 1:5



FRECUENCIA NORMALIZADA

**PASAALTOS MINIMAX**

N=65 DF=0.024 Pesos 1:1

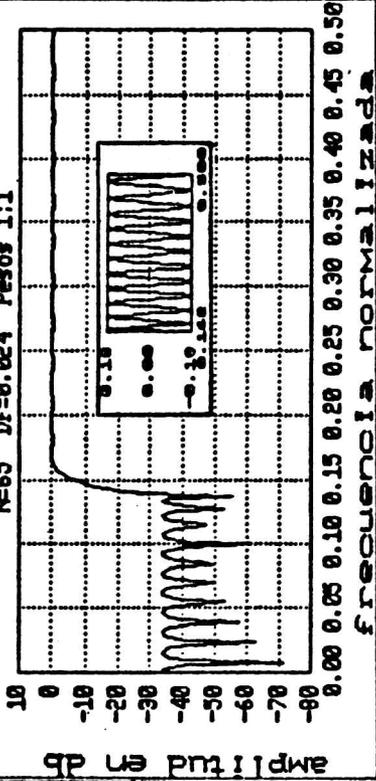
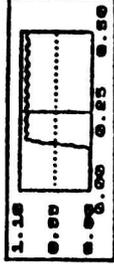


FIGURA 9. En este ejemplo se diseñó un filtro pasaaltos con N=65. Esta mayor longitud del filtro permitió conservar un ripple bajo para un DF también bajo: 0.024. El ripple vale 0.02 (-34 db y 0.18 db) y representa un 98 % de atenuación para las frecuencias de la BR y un 2 % de deformación para las correspondientes a la BP.



**PASABANDA MINIMAX**

N=65 DF=0.030 y 0.024 Pesos 1:1:1

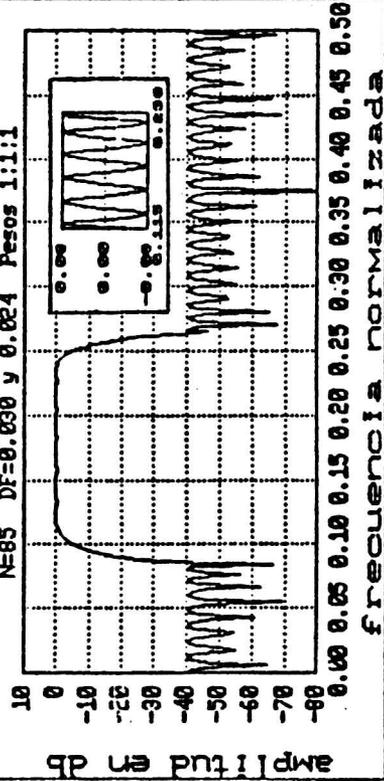


FIGURA 10. En este filtro, un poco más largo, se han elegido las frecuencias de corte tales que se tienen dos BT de distinto ancho: 0.03 y 0.024 (otras técnicas de diseño no permiten esta posibilidad de control). Especificando igual peso a las 3 bandas, el ripple resultante es de 0.009 (-41 db, 0.08 db y -41 db respectivamente).

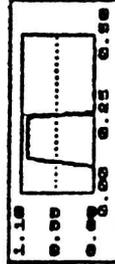


FIGURA 11. El filtro rechazabanda de la figura tiene las mismas características para DF y ripple que el pasabanda de la Figura 10. Los datos especificados para su diseño son idénticos, excepto que para la función deseada  $D_c(\omega)$  se especificó 1-0-1 en lugar de 0-1-0 para cada una de las 3 bandas.

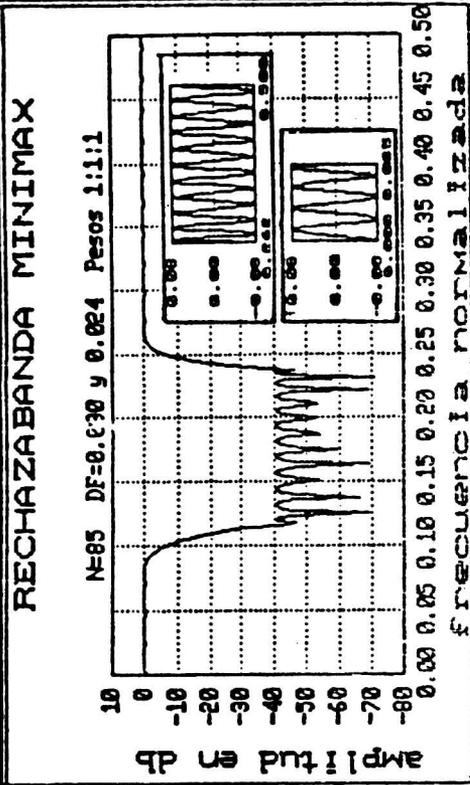
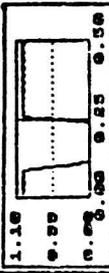
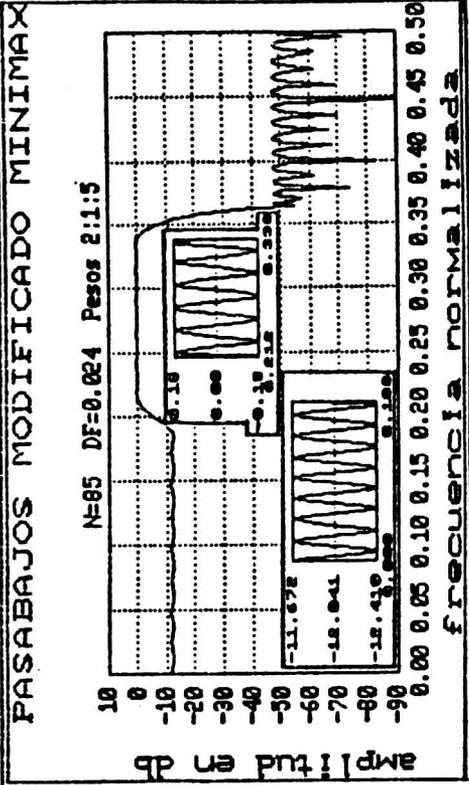
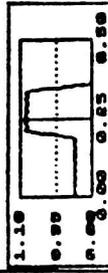


FIGURA 12. El pasabajos modificado representado se puede interpretar como un multibanda de 3 bandas. La primera banda tiene un valor deseado de 0.25 (-12.041 db), la segunda de 1 y la tercera de 0. El DF se especificó igual para las 2 transiciones. Los pesos varían en cada banda, de tal modo que el ripple en las dos son 2 y 5 veces menores al correspondiente a la BP. Esto es: 0.01 (-11.072 db ó -12.041 db), 0.02 (0.18 db) y 0.004 (-47 db) respectivamente.



**MULTIBANDA MINIMAX**

N=155 DF=0.02 Pesos 2:1:2:1:2

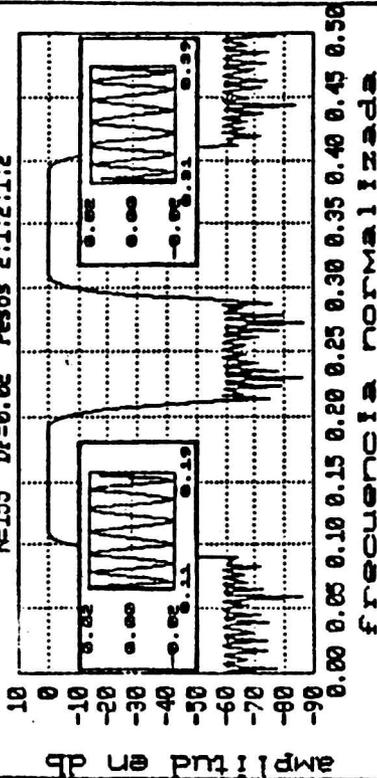
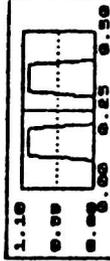


FIGURA 13. El programa fortran mencionado en la introducción está dimensionado para calcular filtros de hasta 10 bandas. El multibanda de la figura tiene 5 bandas con pesos alternados. El DF se eligió de 0.02 en las 4 transiciones. El ripple en las BR, mitad del ripple en las BP, resulta de 0.0012 (-59 db). En la BP su valor es 0.0023 (0.02 db).



**NOTCH MINIMAX**

N=195 DF=0.016 Pesos 1:1:1

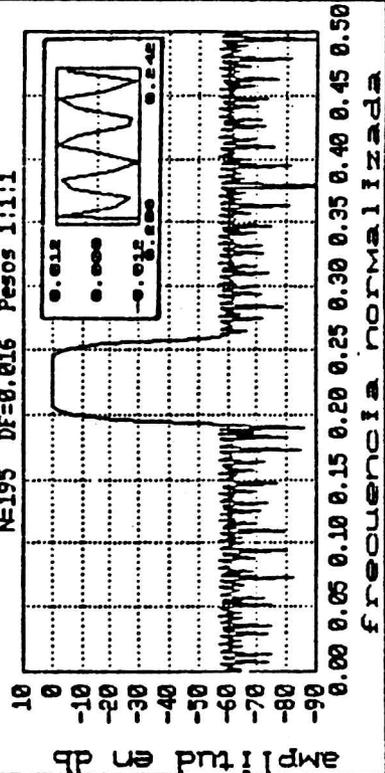


FIGURA 14. La figura muestra un filtro de banda pasante angosta y pendientes muy abruptas (DF=0.016). Asimismo se tienen fuertes atenuaciones en las BR (-57 db), mientras que el ripple obtenido es de 0.0014, que equivale a 0.012 db en la BP.

