

ENERGÍA LIBRE DE UN CAMPO BOSÓNICO CONFINADO

M. De Francia*

Departamento de Física, Fac. de Ciencias Exactas, U.N.L.P.
CC. 67 (1900) La Plata, Argentina

Se ha estudiado la energía libre para un modelo de prueba: un campo escalar libre sin masa, confinado en una cavidad esférica de radio R y sometido a condiciones de contorno tipo Dirichlet. Se aislaron las divergencias a renormalizar, y se obtuvieron límites de bajas y altas temperaturas. En particular se demostró la necesidad de considerar las correcciones al desarrollo de Debye.

The free energy of a toy-model has been studied: a free scalar massless field, confined in a spherical cavity of fixed radius R , under Dirichlet boundary conditions. Divergencies have been isolated allowing the renormalisation of the model at $T = 0$. Low -and high- temperature (and/or radius) limits have been studied. As regards the first one, it was necessary to include the correction to the Debye expansion.

I. ENERGÍA LIBRE Y FUNCIÓN DE GREEN

El estudio de sistemas confinados en teoría de campos resulta de particular interés para la consideración de modelos efectivos de QCD . En efecto, abundan en la literatura propuestas cuyo punto de partida es la bolsa de M.I.T.¹ hasta llegar a versiones más refinadas como la bolsa quiral híbrida².

Aunque estos sistemas han sido ampliamente estudiados a $T = 0$, la aplicación de técnicas de teoría de campos a temperatura finita es sólo reciente. En particular, el interés en este tipo de análisis reside en la determinación de esquemas conducentes a una transición de fase deconfinante para QCD ³.

En el presente trabajo estudiaremos la energía libre de un modelo de prueba: un campo escalar real libre, sin masa, confinado a una esfera estática de radio R y sometido a condiciones de contorno tipo Dirichlet. Obtendremos de esta manera un panorama del tipo de cálculos a realizar en modelos más realistas, sin incorporar sus complicaciones algebraicas.

La acción euclídea de este sistema puede escribirse como:

$$S_E = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi \quad (1)$$

De la formulación de la integral funcional a temperatura finita sabemos que la función de parti-

ción cumple:

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D} \varphi e^{-S_E} \approx Det^{-1/2}(\partial^2)_{C.C.} \quad (2)$$

donde se entiende que el determinante funcional ha de calcularse sobre funciones que satisfagan las condiciones de contorno en el borde de la región esférica. Por otra parte, por tratarse de un sistema bosónico han de considerarse funciones periódicas en el intervalo $[0, \beta]$.

La energía libre está dada por:

$$-\beta F = -\frac{1}{2} \log [Det(\partial^2)_{C.C.}] = -\frac{1}{2} Tr [\log(\partial^2)_{C.C.}] \quad (3)$$

Usando la periodicidad en la dirección del tiempo euclídeo es posible calcular la "traza temporal" y obtener la energía libre como:

$$-\beta F = -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} Tr \log(-\omega_n^2 + \nabla^2)_{C.C.} \quad (4)$$

Para relacionar con la función de Green, derivaremos e integraremos respecto de la temperatura.

* Becario del CONICET

Así:

$$-\beta F(\beta) + \beta_0 F(\beta_0) = -\frac{1}{2} \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-2\omega_n^2) \text{Tr} G(x, x'; \omega_n) \quad (5)$$

donde la traza restante corresponde a una suma sobre el índice continuo x y la función de Green satisface:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\omega_n^2 + \nabla^2) G(x, x'; \omega_n) = \delta^{(3)}(x - x') \quad x \in \Omega \\ G(x, x'; \omega_n) = 0 \quad \alpha \in \partial \Omega \end{array} \right. \quad (6)$$

El cálculo de la función de Green no presenta dificultades. La simetría del problema sugiere que la base adecuada para G es la de los autoestados simultáneos de los operadores L^2 y L_Z^4 .

Luego de tomar la traza radial, se obtiene, para la energía libre

$$-\beta F(\beta) + \beta_0 F(\beta_0) = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2v(v - d_{j,n}) \quad (7)$$

donde

$$v = j + 1/2; \quad d_{j,n} = x_n \frac{d}{dx} \log I_v(x_n); \quad x_n = |\omega_n R|$$

y el factor $2v$ proviene de haber realizado la suma en m .

En la expresión (7) se obtuvieron sumas dobles divergentes, que exigen la introducción de una adecuada prescripción de regularización. Debido a que estas están relacionadas con el comportamiento para grandes valores de n y j , podremos aislarlas considerando el desarrollo asintótico uniforme (desarrollo de Debye)⁵ de las funciones de Bessel:

$$d_{j,n} = \rho - \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2\rho^2} + x_n D \quad (8)$$

donde

$$x_n D = x_n \frac{d}{dx_n} \log \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(v/\rho)}{v^k} \right] = O(1/\rho) \quad (9)$$

y se ha introducido $\rho = \sqrt{x_n^2 + v^2}$, variable "radial" en el plano (n, j) de las sumas dobles.

Continuando con el desarrollo se obtienen potencias de $1/\rho$ cada vez mayores. Empleando el criterio de comparación de sumas dobles con integrales dobles que las acotan, puede verse que dan lugar a series convergentes los términos del desarrollo de Debye que sean de orden mayor o igual que $1/\rho^4$.

Separando partes divergentes, la energía libre resulta

$$-\beta F(\beta) + \beta_0 F(\beta_0) = C + D = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [2v(v - d_j) - \Delta_M] + \frac{1}{2} \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_M \quad (10)$$

donde Δ_M es el desarrollo de Debye de $2v(v - d_j)$ en potencias de $1/\rho$ hasta algún $M \geq 3$.

Típicamente Δ_M es una combinación lineal de términos de la forma $v^d \rho^{-m}$. Si $m - d < 3$, la serie doble es divergente.

El primer término de (10), C , es una suma doble convergente. A altas temperaturas y/o radios puede estimarse considerando el orden $(1/\rho)^{M+1}$ del desarrollo de Debye, resultando un desarrollo en potencias de $(TR)^{-1}$. En la situación opuesta, habrá que calcular numéricamente cortando las sumas para valores grandes N y J . Para que N y J no sean excesivamente grandes conviene tomar desarrollos de Debye con grandes M , ($M = 6$).

El segundo término de (10), D , corresponde a sumas dobles divergentes. Se definen las correspondientes series introduciendo la regularización

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_M \rho^{-s}, \quad (11)$$

donde la convergencia está garantizada para $Re(s)$ suficientemente grande ($Re(s) \geq 3 - M$), obteniéndose funciones meromorfas de s que son extendidas analíticamente a $s \rightarrow 0$. De acuerdo a lo dicho previamente, los términos que componen la parte divergente son una combinación de

$$\sigma_{m,d} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v^d \rho^{-(m+s)} \quad (12)$$

Introduciendo la transformada de Mellin, se obtiene directamente

$$\sigma_{m,d} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \int_0^\infty d\tau \tau^{\frac{m+s}{2}-1} \left(\sum_{j=0}^\infty v^j e^{-\tau v^2} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\tau x_n^2} \right) \quad (13)$$

en la que se ha transferido el comportamiento singular al límite inferior de la integral en τ .

II. ALTAS TEMPERATURAS Y/O RADIOS

En el segundo término de (10) tomamos $M = 6$, hasta alguna potencia de $(TR)^{-1}$, estimando el primer término por el orden $M = 7$ del desarrollo de Debye.

En cuanto a $\sigma_{m,d}$, a grandes valores de TR , los aportes a la integral correspondientes a grandes τ son suprimidos por el factor $e^{-\tau x_n^2}$, salvo en el caso $n = 0$. Para $n \neq 0$ tomaremos un desarrollo de pequeños τ , a partir de la aproximación asintótica de sumas de Euler-Mc Laurin⁵. Introduciendo este en el desarrollo de Debye y realizando las integrales

$$\sigma_{m,d} = \zeta(m-d+s, 1/2) +$$

$$\left(\frac{\beta}{2\pi R}\right)^{m-d-1+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m-d-1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m-d-1+s) +$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{\beta}{2\pi R}\right)^{m+2l+s} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2l+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m+2l+s) \quad (14)$$

$$\zeta[-(d+2l), 1/2]$$

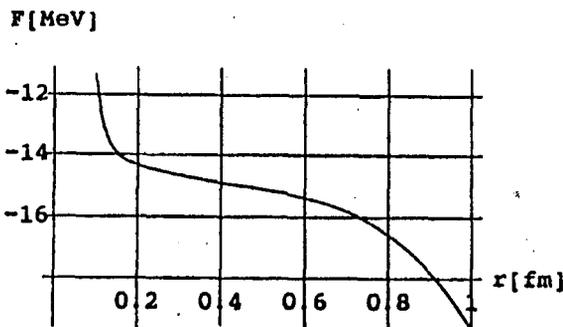


Fig. 1: Energía libre (Desarrollo de altos TR). $T = 150$ MeV.

Desarrollos de Debye de orden $(1/\rho)^M$ corresponden a $m-d = M$ y $m \geq M+1$. De la expresión (14) se ve que $\sigma_{m,d}$ debe considerarse hasta la potencia $(TR)^{M-1}$.

Reemplazando (14), considerada hasta términos de orden $(TR)^{-5}$, en el desarrollo de Debye y realizando la integral entre T_0 y T se obtiene

$$F(R, T) = -\frac{\pi^2}{90} VT^4 - \frac{\pi}{2} \zeta'(-2) ST^3 - \frac{1}{9} \pi RT^2 +$$

$$\frac{1}{48R} RT \log(RT) + E(R) - \frac{2}{315} \frac{1}{2\pi R} \log(RT) +$$

$$\frac{\pi}{11520} \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{RT} + \frac{1}{9009} \zeta(3) \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{(\pi RT)^2} +$$

$$\frac{47\pi}{116121600} \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{(RT)^3} +$$

$$\frac{3196}{193993800} \zeta(5) \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{(\pi RT)^4} + O\left(\frac{1}{R} \frac{1}{(RT)^5}\right) +$$

$$T[-\beta_0 F(\beta_0) + K(\beta_0)] \quad (15)$$

si $(RT) \gg 1$.

En (15)

$$E(R) = \frac{1}{2\pi R} \left[-\frac{69569}{3175200} + \frac{2}{315} (\mathcal{C} - \log(2\pi)) + \frac{2}{315s} \right] \quad (16)$$

donde \mathcal{C} es la constante de Euler⁵.

Este término es independiente de la temperatura y contiene la única divergencia remanente cuando $s \rightarrow 0$. Esto está de acuerdo con el hecho de que las divergencias del modelo son las correspondientes a la teoría de campos a $T = 0$.

Se ha indicado, además, la presencia de un término lineal $T K_A$, constante de integración que nuestro método no puede determinar. El coeficiente que acompaña a T debe ser independiente de β_0 , de T y por ende de R .

La energía libre a altas temperaturas, a menos del término de la forma $T K_A$ se comporta según lo muestra la Fig. 1.

III. BAJAS TEMPERATURAS Y/O RADIOS

Estudiaremos en primer lugar el término D de la ecuación (10). Para analizar el límite de pe-

queños (RT) conviene poner atención en la sumatoria del último factor de (13):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau x_n^2} = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi} R\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 \beta^2 / (4\tau R^2)} \quad (17)$$

Habiendo invertido el argumento de la exponencial se puede aislar el aporte de $T = 0$, que ahora corresponde al término $k = 0$. Separándolo, cálculos directos dan para $\sigma_{m,d}$

$$\sigma_{m,d} = \sigma_{m,d}^{(1)} + \sigma_{m,d}^{(2)} =$$

$$\frac{\beta}{2\pi R} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \zeta(m-d-1+s, 1/2) +$$

$$2 \frac{\beta}{\pi R} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v^d \left(\frac{k}{v}\right)^{\frac{m-1+s}{2}} \left(\frac{1}{2RT}\right)^{\frac{m-1+s}{2}} K_{\frac{m-1+s}{2}}\left(\frac{kv}{RT}\right) \quad (18)$$

$\sigma_{m,d}^{(1)}$ aporta a la energía de Casimir del sistema y es el único término que contiene divergencias.

Tomando $\sigma_{m,d}^{(1)}$ en el desarrollo de Debye obtenemos

$$F_1(R, T) = \frac{1}{2\pi R} \left(-\frac{52211}{12700800} - \frac{229}{20160} \mathcal{C} + \frac{35\pi^3}{65536} -$$

$$\frac{565\pi^5}{6291456} + \frac{2}{315s} - \frac{11}{672} \log[2] + \frac{8429}{549120} \zeta[s] -$$

$$\zeta'[-3, 1/2] + \frac{1}{4} \zeta'[-1, 1/2] \Big) + TK_1(T_0) \quad (19)$$

Resulta remarcable el hecho de que las partes divergentes son las mismas que para grandes (TR), lo que permite renormalizar el modelo a $T = 0$.

En $\sigma_{n,d}^{(2)}$ se encuentran las correcciones de bajas temperaturas que deben ser exponencialmente decrecientes con (TR). En este término puede tomarse $s \rightarrow 0$, observando que los aportes con $m = 0$ resultan nulos. Al reemplazar en tal ecuación los m pares conducen a funciones elementales, mientras que en los correspondientes a m impar se hizo necesario el cálculo numérico de las integrales involucradas.

El aporte total F_2 se calcula numericamente, cortando las sumas dobles en valores K y N que se eligen de modo que el error no supere 10^{-3} MeV. Los valores de K y N varían según cada radio calculado.

La Fig. 2 muestra el comportamiento de F_2 para $T = 150$ MeV y radios hasta 1 fermi. Se ha excluido un aporte lineal de la forma $K_2(T_0)T$.

Segun puede verse, para radios menores que 0,3 fermi, el comportamiento es fuertemente oscilante. Sin embargo, esto proviene de haber utilizado el desarrollo de Debye en regiones en las que no representa adecuadamente a las funciones de Bessel. Se hace necesario entonces, evaluar el término C de (10) que representa las correcciones al desarrollo de Debye:

$$C = \int_{T_0}^T \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2v(v-d_{j,n}) - \Delta_6) \quad (20)$$

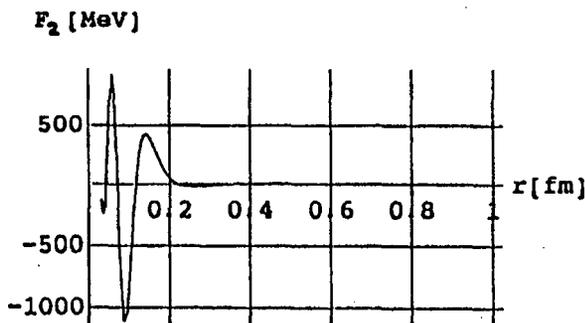


Fig. 2: Correcciones exponenciales a F (bajos TR). $T = 150$ MeV.

Para $T_0 \neq 0$ pueden separarse de la suma un número finito de valores de n y j . Estimamos C por la suma finita y el resto será considerado como un error, tanto menor según crezca el n y j máximo de la suma anterior.

El aporte de C a la energía libre se muestra en la Fig. 3. Como siempre se ha excluido un término $TK_C(T_0)$ proveniente de la temperatura de referencia.

La energía libre completa se obtiene sumando F_1 , F_2 y F_C . La suma es la curva mostrada en la Fig. 4, excluyendo un término de la forma $K_B T$.

La constante adimensional K_B debe ser independiente de T , T_0 y por lo tanto de R . Esta se fijó exigiendo entropía nula a $T = 0$.

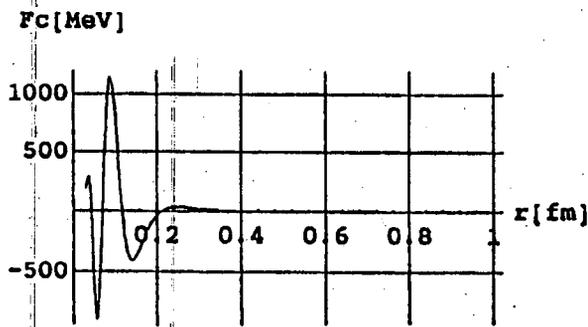


Fig. 3: Corrección al desarrollo de Debye. $T = 150$ MeV.

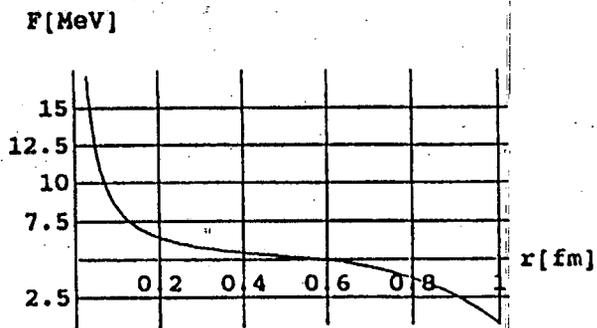


Fig. 4: Energía libre completa (Bajos TR). $T = 150$ MeV.

Por otra parte, ajustando la constante K_A de la sección 2, pueden conectarse las dos regiones estudiadas.

REFERENCIAS

1. A. Chodos, R. L. Jaffe, C. B. Thorn and V. Weisskopf. Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974); P. Hazenfratz and J. Kuti. Phys. Rep., **40**, 75-79 (1978).
2. L. Vepstas and A. D. Jackson. Phys. Rep., **187**, 109-143 (1990); L. Vepstas, A. D. Jackson and A. S. Goldhaber. Phys. Lett., **140B**, 280 (1974).
3. H. Falomir, M. Loewe, C. Rojas. Phys. Lett. **300B**, 278 (1993).
4. T. H. Hansson and R. I. Jaffe. Phys. Rev., **D28**: 882 (1983).
5. *Handbook of Mathematical Functions*, editado por M. Abramowitz e I. A. Stegun (Dover, New York, 1972).
6. H. T. Elze and W. Greiner. Phys. Lett. **179B**, 385 (1986); R. Balian and C. Bloch. Ann. Phys. **64**, 271 (1971); **84**, 559 (E) (1974); **69**, 76 (1972).