

Comunicación Breve

CA-DMC-1

Un recurso educativo en la aplicación móvil de GeoGebra para el estudio de serie y polinomio de Taylor

Viviana COSTA
vacosta@ing.unlp.edu.ar
Agustina BAYÉS
agustina.bayes@ing.unlp.edu.ar

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Resumen

Esta investigación se realiza en un curso de matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata y se aborda la problemática del estudio de la serie y del polinomio de Taylor. Estos conceptos matemáticos implican los saberes relativos a polinomio y función polinómica, que en Argentina se comienzan a estudiar en la escuela secundaria. Las funciones polinómicas, suma parcial de la serie de Taylor, son de gran importancia en la matemática, ya que son una familia de funciones definidas para todo número real, continuas, derivables e integrables en todo su dominio. Además, constituyen una buena herramienta de modelización de diversos fenómenos y de aproximación de otro tipo funciones. La investigación se sustenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en particular en las nociones de *praxeología* y de *medio-media*. Se describen algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en el estudio de esos temas, usando la noción de *praxeología*. Luego, con el objetivo de afrontar tales obstáculos se diseña un recurso para usar en la aplicación móvil de GeoGebra que se introduce en el *medio didáctico* como una *media* para el estudio de serie y polinomio de Taylor. Se detalla el recurso y se dan algunos primeros resultados de su uso.

Palabras clave: Serie y Polinomio de Taylor. GeoGebra. Aplicación Móvil. Praxeología.

Introducción

En este trabajo se aborda la problemática del estudio del polinomio y serie de Taylor, en un curso que se denomina Matemática C, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata (FI-UNLP). Esos conceptos matemáticos implican los saberes relativos a polinomio y función polinómica que se estudian desde el cuarto año de la escuela secundaria en Argentina.

Las funciones polinómicas son de gran importancia en la matemática, otras ciencias e ingeniería, ya que son una familia de funciones definidas para todo número real, continuas, derivables e integrables en todo su dominio. Además, constituyen una buena herramienta de modelización de diversos fenómenos físicos (movimiento rectilíneo uniforme, tiro oblicuo), económicos, químicos, entre otros muchos ejemplos donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otras. También, las funciones polinómicas y el polinomio de Taylor son útiles para interpolar (polinomio de Newton, de Lagrange y de Hermite, entre otros) o ajustar, un conjunto de datos obtenidos, en general, experimentalmente (Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., & Benites, G. E., 2011).

El objetivo de este trabajo, es dar una visión respecto a los *saberes* y *saber-hacer* de estudiantes de la FI-UNLP sobre la organización matemática polinomio y serie de Taylor y de cómo la inclusión de un *media*, recurso educativo para utilizar en un dispositivo móvil que puede colaborar en el proceso de estudio y en la construcción de los saberes y saber-hacer.

El texto se organiza del siguiente modo. Primero, se presenta el referencial teórico y las nociones básicas de la teoría que sustenta el trabajo. A continuación, se describe brevemente la praxeología matemática relativa a polinomio, serie y polinomio de Taylor. Luego se mencionan dificultades que tienen algunos estudiantes de los cursos de Matemática C en el estudio de esos temas. Posteriormente se presenta el recurso como propuesta para paliar las dificultades observadas, finalmente se exponen resultados y conclusiones.

Referencial Teórico

La investigación se sustenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que propone enfrentar la pedagogía *monumentalista*, en pos de adoptar la denominada *Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo*. La TAD es propuesta por Yves Chevallard concibiendo a la matemática como una práctica humana antropológica (Chevallard, 1997, p. 26). Uno de los constructos centrales de esta teoría es la noción de *praxeología* que aporta un modelo para describir cualquier actividad humana regularmente realizada (Otero, 2013, p. 16), distinguiendo dos niveles: el de la *praxis*, que comprende el *saber-hacer* (tareas, problemas y técnicas) y el del *logos* que se corresponde con el *saber* que incluyen la tecnología y la teoría, en el que se encuentran los discursos que describen, explican y justifican las tareas y técnicas (Chevallard, 1999). Estudiar matemática consiste, en el marco de la TAD, en construir o reconstruir determinados elementos de una *praxeología matemática* para dar respuesta a un determinado tipo de tarea problemática. Además, en el marco de la TAD al término *estudio* o *proceso de estudio* se lo considera, en un sentido amplio que comprende las nociones de enseñanza y de aprendizaje utilizadas en la cultura pedagógica, y que se refiere a todo aquello que se hace en una determinada institución para aportar respuestas a los problemas que se plantean (Chevallard, 1999). Otra de las nociones de la TAD que utilizaremos en este trabajo es el de *equipamiento praxeológico*, entendido como el conjunto de conocimientos, las capacidades o competencias que posee una persona, en otras palabras, “la amalgama de praxeologías y de elementos praxeológicos que la persona tiene a su disposición, es decir que puede activar en un momento dado y bajo ciertas condiciones y restricciones dadas” (Bosch; Gascón, 2009, p. 93). Por último, utilizaremos además la noción de *media-medio*, entendiendo por *media* a toda fuente de información (un libro, el profesor, una página web, un software, un video, etc.) que le permite a la persona o estudiante ir a buscar el conocimiento para construir e incorporar en el *medio didáctico* la *praxeología* u obra matemática a estudiar (OM). En particular, en este marco referencial, el software GeoGebra se percibe como un *media*, que permitiría hacer aportes al *medio* y construir las *praxeologías matemáticas* (Chevallard, 2008).

Praxeología Matemática relativa a Polinomio, Serie y Polinomio de Taylor

La organización matemática relativa a polinomio y función polinómica (en adelante OM_P) se comienza a estudiar en la escuela secundaria en Argentina en cursos con jóvenes de entre 15-16 años de edad (DGCyE, 2015). En los diseños curriculares la OM_P se encuentra dentro del *saber*: Álgebra y estudio de funciones, Teorema de Ruffini, Teorema del Resto y Teorema de Gauss. Los *saberes-hacer*, se vinculan con calcular el valor numérico de un polinomio en un valor determinado, hallar las raíces de un polinomio, calcular las raíces mediante la Regla de Ruffini, descomposición de un polinomio en factores, factor común, diferencia de cuadrados, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto, operar con polinomios (suma, resta, cociente y producto), graficar aproximadamente una función polinómica, resolver ecuaciones e inecuaciones de segundo grado, identificar distintas expresiones polinómicas. Además, se promueve el uso de *software* para el estudio de las funciones polinómicas. Este *equipamiento praxeológico* se utiliza luego para el estudio, en el año

siguiente, de expresiones fraccionarias polinómicas y ecuaciones, donde es necesario conocer la factorización de polinomios para reducir su expresión y poder hallar el conjunto solución.

En la universidad, en general los conceptos relativos a polinomio y función polinómica son utilizados en diversas disciplinas. En particular, en la FI-UNLP en la asignatura Matemática C, del tercer semestre para todas las carreras, se estudia lo que llamaremos organización matemática “Polinomio y Serie de Taylor” (en adelante OM_{PT}). Este tema se estudia dentro de otro que es la organización matemática “Series de Potencias”, para la cual se utiliza para la construcción de los *saberes* y *saber-hacer* el *equipamiento praxeológico* de la OM_P y el de la OM_S relativa a “Series Numéricas” que se estudian en Matemática B el semestre anterior en la misma facultad.

En el bloque del *saber* de la OM_{PT} se ubica: la noción de polinomio, función polinómica, polinomio de Taylor como suma parcial de una serie de Taylor, convergencia de una serie de potencias. En el bloque del *hacer*, se ubica: identificar un polinomio, operar con polinomios, construir polinomios, graficar polinomios, hallar el polinomio de Taylor que aproxima a una función en el entorno de un punto y de un grado establecido, hallar la serie de Taylor dada una función, acotar el error de una aproximación, calcular límites operando con aproximaciones de funciones por polinomios. Para el estudio de estos temas en los cursos de Matemática C, los estudiantes disponen de una Guía didáctica confeccionada por profesores de la cátedra, que en el marco de la TAD se constituye en un *media* (Guía de Cátedra).

Dificultades observadas en el estudio del Polinomio y la Serie de Taylor en Matemática C

Numerosas dificultades presentan los estudiantes en los cursos de Matemática C durante el proceso de estudio de la OM_{PT} . En una encuesta realizada en el año 2017 en Costa y Rossignoli (2017) que contestaron 295 estudiantes cursantes de la asignatura Matemática C, que el tema “series y polinomio de Taylor” fue para ellos en el que “tuvieron más dificultades en su aprendizaje, el más abstracto y para el que hubiesen necesitado más tiempo de estudio”. Estas dificultades por ellos mencionadas no se vincularía con la comprensión de la Guía de estudio ni en cómo lo explicó el profesor, si no con que la OM_{PT} comprende una gran cantidad de nuevos *saberes*.

A lo largo de los años, se observaron en las evaluaciones parciales numerosos errores relativos a la OM_P , OM_S y a la OM_{PT} . Por ejemplo, en la Figura 1 y Figura 2, se muestra que no identifican el grado de un polinomio y los coeficientes del mismo, llevando esto a dificultades al momento de estudiar polinomio de Taylor para una función y la relación entre los coeficientes y las derivadas de la función a la cual aproxima en un punto dado.

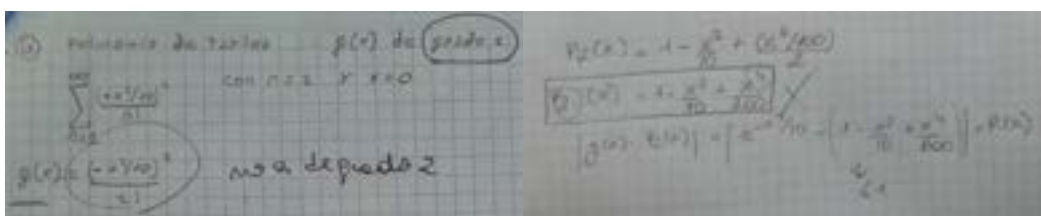


Figura 1: Errores en el grado del polinomio de Taylor

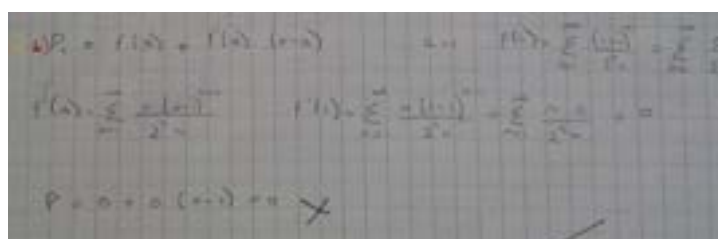


Figura 2: Errores en los coeficientes del polinomio de Taylor

Otra de las dificultades observadas es que no identifican cuáles expresiones algebraicas son polinómicas y cuáles son sus coeficientes (Figura 3). También se encontraron dificultades que se vinculan con las propiedades que posee el polinomio de Taylor que aproxima a una función $f(x)$ en un punto dado, observadas en las gráficas de ambas funciones (Figura 4). Ya que, en los puntos de coordenadas $x=a$, se verificará que $f(a)=P_n(a)$ y además las funciones $f(x)$ y $P_n(x)$ poseen la misma pendiente y concavidad en $x=a$.

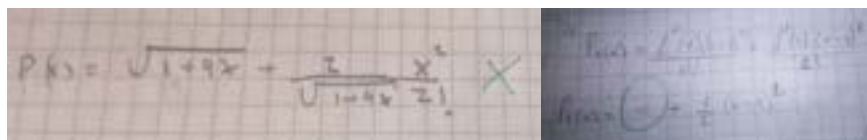


Figura 3: Errores en la noción de polinomio y sus coeficientes

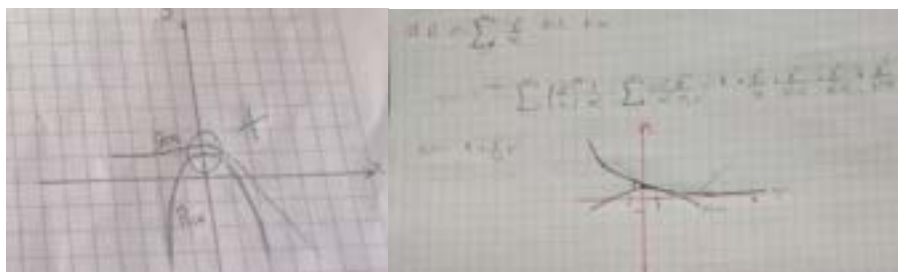


Figura 4: Errores observados en las gráficas del polinomio de Taylor y la función a la que aproxima en el entorno de un punto

Recurso en la aplicación móvil de GeoGebra

En base a los errores que cometen los estudiantes durante el proceso de estudio del tema polinomio y serie de Taylor, y considerando además que en la actualidad, diversos estudios científicos muestran que las herramientas tecnológicas facilitan la comprensión de conceptos matemáticos, es que se decide incorporar un *media* (además de la Guía de estudio y las explicaciones del profesor) a uno de los cursos de Matemática C y a modo experimental, a partir el año 2019, un recurso creado en el *software* GeoGebra, para el estudio del tema (Carrillo, 2012).

El recurso se diseñó para ser utilizado en dispositivos móviles y se encuentra disponible en la página web de GeoGebra (de acceso libre <https://www.geogebra.org/m/xn2kn5rw>) o ingresando a los recursos disponibles con el nombre “Polinomio de Taylor”. En este recurso se puede ingresar la función “ $f(x)$ ” en la vista algebraica, el grado del polinomio “ n ” y el valor “ a ” alrededor de donde se desarrolla el polinomio de Taylor con deslizadores previamente definidos a tal fin. Se obtiene así, en la vista gráfica, la función y el polinomio (sumas parciales de la serie de Taylor), y en la vista algebraica la expresión polinómica. De este modo, al usar este material se puede construir rápidamente todos los polinomios (de distintos grados) y observar las propiedades que tienen con respecto a la función (Figura 5).

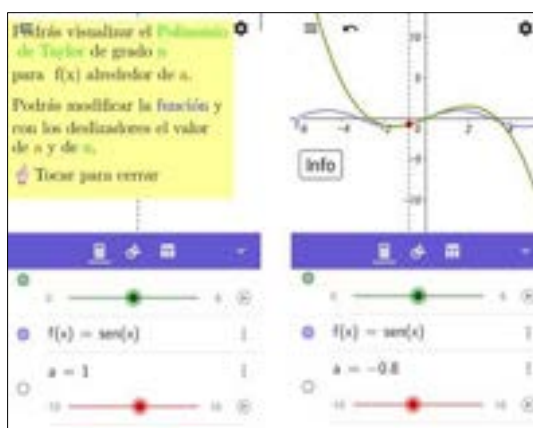


Figura 5: Recurso educativo en GeoGebra diseñado para utilizarse en dispositivos móviles

Su creación se realizó según directrices de diseño de materiales de GeoGebra, para que pueda ser utilizado en dispositivos móviles (Bayés, Del Río y Costa, 2018). Entre las características que se tuvieron en cuenta se destacan la medida de la pantalla (para que sea correcta su visualización en dispositivos de tamaño pequeño), no visualizar objetos que sean necesarios para la construcción, pero no para su uso e incorporación de interactividad mediante los deslizadores y la posibilidad de cambiar tanto la función $f(x)$ como el grado del polinomio, entre otras. La decisión de crear el recurso especialmente para estos dispositivos, y no sólo para su uso en computadoras, fue con el fin de que sea accesible para la mayoría de los jóvenes en todo momento y

lugar, es decir, aprovechar la ubicuidad del aprendizaje mediante dispositivos, además de la inmediatez de consultarlos rápidamente (Alsaadat, 2017; Fombona Cadavieco & Rodil Pérez, 2018).

Algunos resultados

Se les consultó a los estudiantes sobre el recurso diseñado y su uso, con la siguiente pregunta ¿Qué ventajas crees que te dio el uso del recurso con respecto al desarrollo del Polinomio de Taylor?, algunas respuestas fueron:

“facilita mucho el entendimiento del tema”, “Nos ayudara a entenderlo mejor porque lo que hacemos analíticamente, lo vamos a ver gráficamente”, “Comprobar que la serie encontrada corresponde con la función en el intervalo que corresponda”, “Mejor interpretación del concepto”, “Podes ver como a medida que los polinomios aumentan de grado se parecen más a la función verdadera”, “Mayor seguridad a la hora de resolver problemas y mayor exactitud”, “Un paso a paso de cómo usarlo específicamente”, “Hace más simple identificar la relación entre funciones”, “Lograr comprender mejor lo que aplicamos en las clases”, “Poder ver la aproximación de la serie y la función con facilidad”, “Está muy bueno para usar en clase”.

Además, se les consultó si lo utilizaron (Sí/No) para el estudio del tema, o si sólo lo hicieron con “lápiz y papel” y los demás *medias* (Guías de Cátedra, profesor, entre otros) y para cada respuesta se contabiliza la cantidad de estos según aprobaron o no el tema en las evaluaciones, obteniéndose los datos que se muestran en la Tabla 1. Se realiza un test chi-cuadrado para observar si existe relación entre el uso del recurso y condición de aprobado. Se obtuvo en este caso un p-valor de 0.0011, que indica una fuerte vinculación.

		Condición		
		Aprobado	Desaprobado	Totales
Usó GeoGebra	si	52	3	55
	no	22	10	32
Totales		74	13	87

Tabla 1: Datos de la encuesta realizada a estudiantes de Matemática C en el año 2019

En la Figura 6 se muestra las respuestas de una de las evaluaciones de este tema en donde ya se observa que los estudiantes que lo utilizan para resolver el problema de “Encontrar el desarrollo en serie de Taylor y su intervalo de validez de la función $\text{sen}(3x)$ en un entorno de $a=\pi/2$. Dar el polinomio de Taylor grado 2 que aproxima a la función $\text{sen}(3x)$ centrado en $\pi/2$ y graficarlo junto a la función en el intervalo $[0; \pi]$ ”.

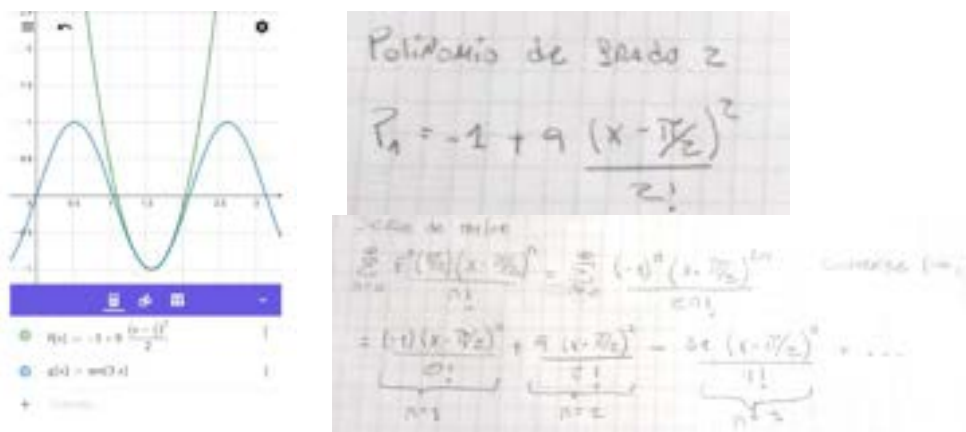


Figura 6: Resoluciones de estudiantes que utilizaron el recurso en Matemática C

Conclusiones

Las dificultades observadas, que se corresponden tanto con el *saber*, como con el *saber-hacer*, y las manifestadas por ellos, pueden deberse a un escaso *equipamiento praxeológico* relativo a la OM_p estudiado en la escuela secundaria y/o en los cursos previos a Matemática C en la FI-UNLP. En general los conceptos relativos a polinomios se consideran sabidos y se asumen (en general) aprendidos y sin revisión previa, utilizándolos en diversas áreas y en distintas carreras, como por ejemplo en cursos de cálculo, álgebra lineal, estadística y probabilidades, pudiendo esto causar problemáticas en el estudio de las organizaciones matemáticas más complejas, tal como menciona Fonseca, Bosch y Gascón (2010) y Fonseca (2004). A partir de los resultados obtenidos, en relación al recurso diseñado y su uso como *media* en algunos cursos de

Matemática C, se podría concluir que colabora en la construcción de los saberes de la OM_{PT} y en recuperar el equipamiento praxeológico de la OM_P. A futuro se propone continuar indagando en esta problemática.

Referencias Bibliográficas

Alsaadat, K. (2017). Mobile Learning Technologies. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*, 7(5), 2833–2837.

Bayés, A., Del Río, L. y Costa, V. (2018). Diseño de materiales educativos para dispositivos móviles con GeoGebra: Análisis de un caso. *Virtual Educa Buenos Aires 2018*. Buenos Aires.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89-114). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (29), 9–22.

Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., & Benites, G. E. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros* (Vol. 5). McGraw-Hill.

Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. 1a.ed. Barcelona: Universitat de Barcelona.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 19(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence: la dialectique des médias et des milieux. Dans Gueudet, G. & Matheron, Y. (Eds.). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*. Paris: IREM de Paris 7 et ARDM, p. 344-366.

Costa, V. A. y Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del algebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, 12.

DGCyE (2015). *Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires*. Recuperado de: http://www.abc.gov.ar/secundaria/sites/default/files/documentos/matematica_4.pdf

Fombona Cadavieco, J. y Rodil Pérez, F. (2018) Niveles de uso y aceptación de los dispositivos móviles en el aula. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 52, 21-35.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). *El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios*. *Educación matemática*, 22(2), 5-34.

Guía de Cátedra, Matemática C

https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0304/descargar.php?secc=0&id=F0304&id_inc=45370

Otero, M. R., Fanaro, M. D., Corica, A., Llanos, V. C., Sureda, P., & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires: Editorial Dunker.