

ANALISIS DE LA COMPENSACION ANGULAR DE POLIGONOS

AVERTANO COLINA
Ferrocarriles Argentinos

El objetivo de este estudio es analizar el efecto, que sobre el cierre perimetral de un polígono de n lados, produce el método habitual de sumar una corrección constante a cada ángulo poligonal, igual a la n -ésima parte del error de cierre angular. Se estudia además la posibilidad de minimizar tal efecto.

The objet of this study is an analysis of the consequences produced by the customary method of closing perimetrically an n -side traverse by adding to each of it's angles a constant correction, equal to the n -th part of the angular error of closure, as well as a study of the possibility to reduce to a minimum the effects of this procedure.

Si a los lados de un polígono cerrado de n vértices los designamos vectorialmente por $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3, \dots, \mathbf{L}_r, \dots, \mathbf{L}_n$, se debe verificar

$$\sum_{r=1}^n \mathbf{L}_r = 0 \quad (1)$$

en donde

$$\mathbf{L}_r = I L_r \cos a_r + J L_r \sin a_r \quad (2)$$

siendo L_r el módulo de $\mathbf{L}_r$ y a_r el acimut correspondiente de $\mathbf{L}_r$.

Diferenciando $\mathbf{L}_r$ respecto a a_r se tiene

$$d\mathbf{L}_r/da_r = \mathbf{N}_r$$

en la cual $\mathbf{N}_r$ es el vector normal a $\mathbf{L}_r$ y cuyo módulo es igual al módulo de $\mathbf{L}_r$, o sea

$$|\mathbf{N}_r| = |\mathbf{L}_r| \quad \text{o bien} \quad N_r = L_r \quad (3)$$

resulta entonces

$$d\mathbf{L}_r = \mathbf{N}_r da_r = L_r da_r \quad (4)$$

Los acimutes a_r de los lados se obtienen de

$$a_r = \sum_{k=1}^r A_k + \pi \quad (5)$$

siendo A_k los ángulos internos del polígono.

Diferenciando (5)

$$da_r = \sum_{k=1}^r dA_k \quad (6)$$

Si el error de cierre angular es e y se introduce como corrección el valor

$$c = dA_k = -e/n \quad (7)$$

en cada ángulo medido, se tiene, por reemplazo en (6)

$$da_r = \sum_{k=1}^r c = rc$$

e introduciendo en (4)

$$dL_r = rN_r c$$

de donde resulta que la variación total de cierre perimetral p es

$$p = \sum_1^n dL_r = c \sum_1^n rN_r \quad (8)$$

desarrollando

$$p = c(N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots + rN_r + \dots + nN_n) \quad (9)$$

Dado que el origen para la designación de los lados es arbitrario, se ve que el valor de p en general será diferente para cada origen, dependiendo del lugar elegido como origen de la designación.

Por (3) la expresión (9) puede escribirse

$$p = c \left| (L_1 + 2L_2 + 3L_3 + \dots + rL_r + \dots + nL_n) \right| \quad (10)$$

o en forma simbólica

$$p = c \left| (1(\quad) + 2(\quad) + 3(\quad) + \dots + r(\quad) + \dots + n(\quad)) \right| \quad (11)$$

en donde reemplazando cíclicamente los lados del polígono dentro de cada paréntesis, se puede encontrar un valor mínimo de p . Si además interesa encontrar la orientación real, es suficiente girar p en 90° . Dado que lo que se busca es un mínimo, el factor c puede suprimirse.

En la Figura (1) se da un ejemplo del método gráfico para resolver la expresión (11), resultando mínimo el de la Figura (1f).

Para el cálculo por computadora, cuando el número de lados de la poligonal es grande, conviene la expresión que resulta de expresar la (2) como sigue

$$L_r = I \Delta x_r + J \Delta y_r \quad (12)$$

de donde la (10) se transforma en

$$p = c \left| I(1\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + \dots + n\Delta x_n) + J(1\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + \dots + n\Delta y_n) \right| \quad (13)$$

Prescindiendo de c , interesa encontrar el valor mínimo de

$$R^2 = (1\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + \dots + n\Delta x_n)^2 + (1\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + \dots + n\Delta y_n)^2 \quad (14)$$

por reemplazo cíclico de Δx_r y Δy_r .

Al final se muestra un ejemplo de cálculo para el polígono Figura (2), y en la Figura (3) se indica gráficamente la variación de R para distintos orígenes.

La conclusión que cabe destacar, es el hecho de que es más racional, aunque no más práctico, determinar previamente el valor mínimo de R , calcular el polígono sin compensación angular, comenzando el cálculo por el lado para el cual resultó R mínimo; compensar el cierre lineal; finalmente con las proyecciones compensadas calcular los lados y ángulos resultantes.

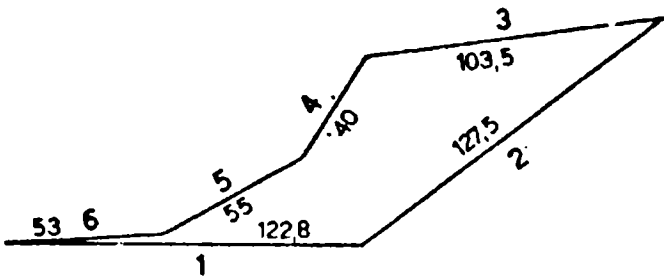


FIG. 1a

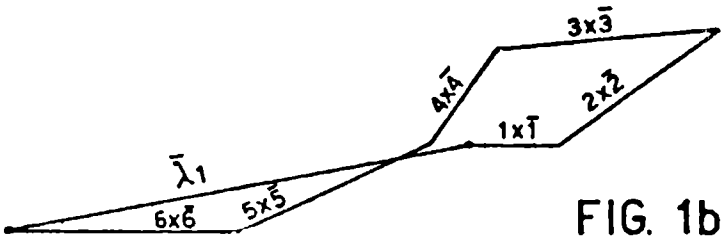


FIG. 1b

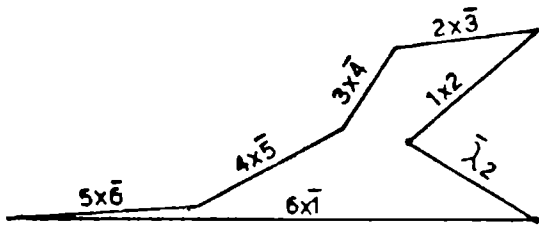


FIG. 1c

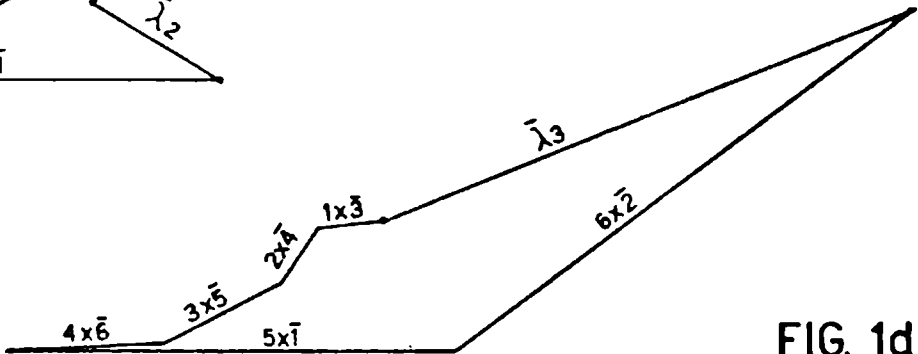


FIG. 1d

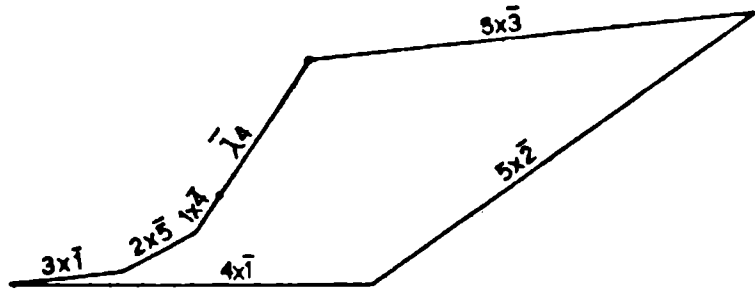


FIG. 1e

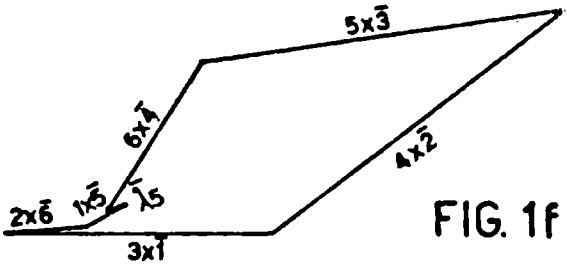


FIG. 1f

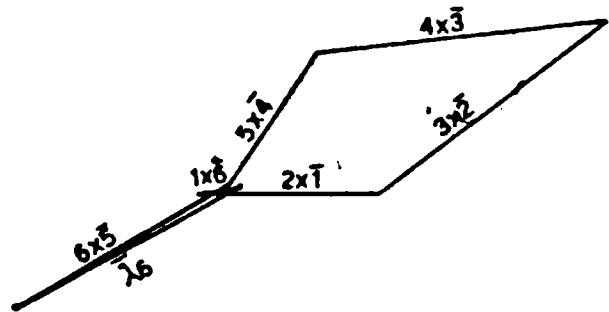
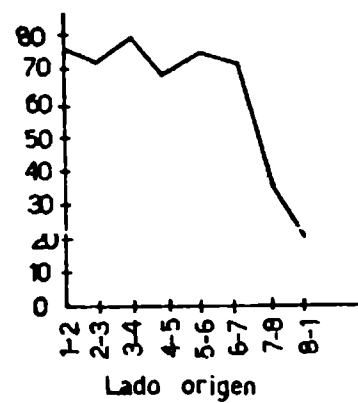
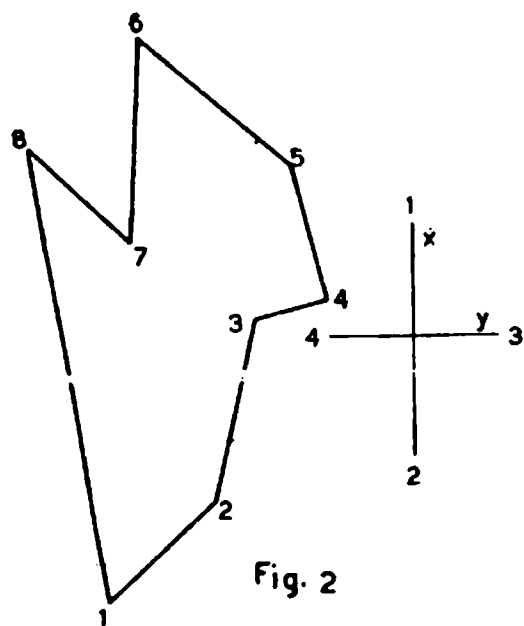


FIG. 1g

ALISIS DE LA COMPENSACION



CALCULO DE PROYECCIONES DE Fig. 2

VÉRTICE	LADO Li	di o	CUADRA- NTE	ΔX		ΔY	
				1	2	3	4
1	204.8	45	1 3	144.8		144.8	
2	285.1	16 21	1 3	273.6		80.3	
3	101.4	76 39	1 3	23.4		98.7	
4	231.7	347 14	1 4	226.0			51.2
5	273.4	310 54	1 4	179.0			206.6
6	306.8	183 31	2 4		306.2		18.8
7	215.3	315 26	1 4	153.4			151.1
8	701.7	171 29	2 3		693.9	104.1	
1							

CALCULO DE LOS PARENTESIS DE LA (14) PARA DISTINTOS ORIGENES

Origen	ΔX	ΔY	2ΔX	2ΔY	3ΔX	3ΔY	4ΔX	4ΔY	5ΔX	5ΔY	6ΔX	6ΔY	7ΔX	7ΔY	8ΔX	8ΔY
1	145	145	290	290	434	434	579	579	724	724	869	869	1013	1013	1158	1158
2	273	80	547	161	821	241	1094	321	1368	401	1641	448	1915	562	2189	642
3	23	89	47	177	70	266	94	355	117	443	140	532	164	621	187	709
4	226	51	452	-10	678	-15	904	-20	1130	-26	1356	-31	1582	-36	1808	-41
5	179	-207	358	-414	537	-621	716	-828	895	-1035	1074	-1242	1255	-1449	1432	-1656
6	-306	-19	-612	-38	-918	-57	-1224	-76	-1530	-95	-1836	-114	-2142	-133	-2448	-152
7	153	-151	306	-302	459	-453	612	-604	765	-755	918	-906	1071	-1057	1224	-1208
8	-694	104	1388	208	2082	312	2776	416	3470	520	4164	624	4858	728	5552	832

CALCULO DE R

r		④ $\sum r \Delta x$	③ $\sum r \Delta y$	① = ④ ² + ② ²	R = $\sqrt{③}$	Lado origen
de	a					
1	8	7348	822	5467.10 ⁴	74 x 10 ²	1-2
2	1	7118	299	5076 "	71 "	2-3
3	2	7919	908	6353 "	80 "	3-4
4	3	6719	1534	4750 "	69 "	4-5
5	4	7139	1470	5313 "	73 "	5-6
6	5	7183	- 189	5163 "	72 "	6-7
7	6	3347	377	1134 "	35 "	7-8
8	7	1798	863	398 "	20 "	8-1