

## ALGUNAS ADVERTENCIAS A LOS ESTUDIOSOS DE LA GEODESIA

RAFAEL N. SANCHEZ

Instituto de Geodesia y Topografía, Facultad de Ciencias  
Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán

La detección de aparentes errores de concepto en obras de prestigiosos geodestas suscita lógicamente perplejidad y estimula —eso es lo positivo— la investigación. Se presentan aquí varios casos incluyendo al final un error atribuido, en el "Bulletin Géodésique" al autor de este artículo, quien, se entiende, no entra en la calificación mencionada más arriba.

**The detection of apparent mistakes when studying famous geodesists' works puzzles the reader. This stimulates research, which is the positive part of it. In this paper several cases are presented; the last one is an error attributed to the Author in the "Bulletin Géodésique". The Author is, of course, excluded from the above qualification.**

Se discuten en este trabajo algunos errores detectados en prestigiosos autores de la bibliografía geodésica, más dos casos domésticos.

### 1. El Caso del Péndulo físico:

Al plantear la teoría del péndulo físico Heiskanen y Vening Meinesz (1958) en su difundido texto *The Earth and its Gravity Field*, página 91, relacionan la aceleración angular de una partícula elemental con las componentes horizontal y vertical de la aceleración, partiendo de

$$v = ds/dt = r\omega$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula situada a distancia  $r$  del eje de suspensión, y  $\omega$  la velocidad angular del péndulo físico en ese instante. Después de unas transformaciones legítimas los autores llegan a

$$-x \, d^2z/dt^2 + z \, d^2x/dt^2 = r^2 \, d\omega/dt.$$

Por ser los ejes  $x$ ,  $z$ , respectivamente horizontal y vertical, los autores dicen (en inglés) "Como las cantidades  $d^2z/dt^2$  y  $d^2x/dt^2$  son las componentes de la aceleración de la gravedad en las direcciones de los ejes  $z$ ,  $x$  resultan respectivamente  $g$ , cero y entonces obtenemos:

$$-gx = r^2 \, d\omega/dt."$$

En ese razonamiento se admite que cada elemento de masa de un péndulo físico se mueve como un péndulo matemático sin sufrir aceleración alguna de los elementos contiguos. Está claro que no es preciso utilizar esa vía discutible para encontrar la aceleración angular producida en un péndulo físico por el momento generado en cada instante por el peso de sus partículas elementales, teniendo en cuenta el momento de inercia del péndulo respecto del eje de oscilación.

### 2. El caso de la Cumbre más sobresaliente de la Tierra:

En el excelente volumen *The Gravity Field of the Earth* de M. Caputo (1967), página 138, el autor se propone analizar la convergencia de desarrollos en serie del potencial gravífico y apela a la esfera más pequeña que, conteniendo a todas las masas sólidas de la Tierra, tiene su centro en el centro de masa planetario. Dado que en ese contexto Caputo menciona la cumbre del Everest se puede presumir que no verificó la diferencia entre el radio geocéntrico correspondiente al Everest a  $28^\circ$  de latitud y el que corresponde a la cumbre más alta cercana al Ecuador, el Chimborazo, a latitud  $2^\circ$ . La distancia de un punto de la superficie topográfica al centro de masa de la Tierra puede calcularse prácticamente por la suma de:

radio vector  $g$  del elipsoide terrestre para esa latitud,

altitud N del geóide respecto del ET en ese lugar, y  
altitud H del punto en cuestión respecto del nivel del mar.

Más abajo se comparan esas sumas para cuatro cerros característicos; el radio vector geocéntrico  $g$  se estimó con la expresión

$$g = a (1 - 0,5 e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 0,5 e^4 \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

tomada de Jordan et al. (1959) en la que  $a$  es el semieje mayor del ET e la primera excentricidad y  $\varphi$  la latitud. Las altitudes N se tomaron de la solución llamada WGS72 del Departamento de Defensa de Estados Unidos, T.O. Seppelin (1974).

	H	N	Diferencia g-a	Distancias geocéntricas menos a g-a+N+H
	(m)	(m)	(m)	(m)
Chimborazo	6270	+25	-24	6271
Kilimanjaro	5895	-20	-54	5821
Everest	8848	-30	-4400	4418
Aconcagua	6960	+50	-5900	1110

Parecería que la esfera citada por Caputo deja fuera los últimos 1400 m del Kilimanjaro y los 1850 m superiores del Chimborazo, de modo que no respondería a las condiciones requeridas. (1)

### 3. El caso de los Parámetros de un Sistema geodésico:

En un trabajo anterior, Sánchez (1971), recordábamos que los parámetros de un sistema geodésico son 8. En efecto, a los dos parámetros del elipsoide de referencia (ER) se agregan las tres coordenadas del punto inicial que dan posición a un punto del ER y su normal más las tres magnitudes angulares que orientan convenientemente al ER respecto del eje fundamental y primer meridiano del sistema geográfico que son, respectivamente, el eje medio de rotación de la Tierra y el meridiano medio convencional de Greenwich. En la página 85 de Geodesy, 2a. edición, de G. Bomford (1962), el más difundido texto inglés de geodesia, se decía que la definición de un ER involucra 7 constantes. Se puede verificar en la 3a. edición, Bomford (1972) que el autor reemplaza en el mismo párrafo 7 por 8. La consideración del 8° parámetro que ubica al primer meridiano del ER paralelo al meridiano medio convencional de Greenwich se hace indispensable si en la red geodésica hay estaciones Laplace, como ocurre en general. La definición de la desviación relativa de la vertical y la expresión del acimut Laplace suponen no sólo la coincidencia del eje de figura del ER con el eje de rotación medio del

<sup>1</sup> Según un colega presente en la reunión de Salta, ya Ripley había difundido esa circunstancia en su notoria serie 'Créase o no'. En la experiencia del autor de este trabajo, la cuestión es, no obstante, generalmente ignorada entre los geodestas. Curiosamente la montaña ecuatorial resultó vinculada a la historia de la geodesia por los trabajos de Pierre Bouguer en el siglo XVIII. Ver J. Goguel (1971).

planeta sino también la del primer meridiano del ER con el meridiano medio de Greenwich. Coincidencia en materia de direcciones sólo significa en realidad paralelismo.

Está claro que en ciertos casos de limitada extensión el ER o simplemente una esfera de referencia puede requerirse meramente a los efectos de compensar una red geodésica y calcular sus lados y ángulos compensados sin llegar a las coordenadas geográficas. Dos parámetros o todavía uno, serían suficientes en tales casos, en los cuales la astronomía geodésica no jugaría ningún rol; la superficie de referencia sólo serviría para compatibilizar observaciones superabundantes de distancias y ángulos horizontales.

#### **4. El Caso de las Fuerzas de Inercia mal calculadas:**

Los buenos tratados de geodesia, por ejemplo Baeschlin (1948), recomiendan calcular la influencia de la Luna sobre la gravedad en un punto P de la superficie terrestre (véase la Figura 1) considerando el vector que resulta de restar la atracción gravitacional de la Luna en P menos la atracción de la Luna en el centro de masa de la Tierra. El método se justifica porque  $-A_0$  es la fuerza de inercia generada en todo punto terrestre en ese instante por el movimiento orbital Tierra-Luna. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es perturbada por la revolución de la Luna así que es necesario tener en cuenta que en cada instante la Tierra está sometida a una translación circular de radio igual a la distancia entre su centro de masa y el centro C de masa del sistema T-L y período aproximadamente igual a 28 días. J. Bartels lo explica en página 734 del tomo XLVIII de la enciclopedia de física editada por Flügge (1957).

Según Bomford (1962) en la citada segunda edición de su *Geodesy*, página 247, la fuerza de inercia generada por la revolución de la Luna es, en cambio, la fuerza centrífuga correspondiente a una rotación alrededor del centro C de masa del sistema. En el punto Z de la Figura 1, en cuyo cenit se encuentra la Luna, la disminución observable en la intensidad de la gravedad por efecto de la Luna sería, según Bomford, la suma de la atracción de la Luna sobre la masa unitaria, más la aceleración centrífuga generada por la rotación alrededor de C. En realidad la citada disminución no es tan grande: aplicando la simple idea de Baeschlin vendría a ser la diferencia entre la mencionada atracción y la correspondiente al centro de masa de la Tierra. La reducción lunar en Z para una Tierra rígida oscilaría en 0,12 mgal mientras que la teoría de Bomford daría 4,51 mgal.

#### **5. El Caso de la Gravedad mal definida:**

El excelente *Physical Geodesy* de Heiskanen y Moritz (1967), texto obligado para los estudiantes de geodesia gravimétrica en las universidades norteamericanas, empieza el capítulo 2 dedicado al campo de gravedad de la Tierra con esta proposición:

“2.1. Gravedad: La fuerza que actúa sobre un cuerpo en reposo en la superficie de la Tierra es la resultante de la atracción gravitatoria y la fuerza

céntrica de la rotación terrestre” Después de adoptar una masa unitaria, describir la atracción de las masas terrestres sobre la misma y tener en cuenta la fuerza centrífuga, dicen los autores: “La fuerza total, la resultante de la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga, se llama gravedad”

A la primera proposición cabría observar que si un cuerpo está en reposo en la superficie de la Tierra es porque esta superficie ejerce sobre el mismo una fuerza igual y opuesta a su peso. Si además el cuerpo está en contacto con el aire habría que agregar a su peso menos el empuje del aire desalojado. Es decir, los autores mencionan sólo una de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo en la superficie de la Tierra: el peso, mientras que, evidentemente, el equilibrio exige por lo menos un par de fuerzas iguales y opuestas.

Además la gravedad es una aceleración, no una fuerza. Su intensidad se mide en  $\text{cm}/\text{seg}^2$ . Que numéricamente la medida del peso de la masa uno sea igual a la medida de la intensidad de la gravedad, no autoriza a decir que el peso de la masa uno se llama gravedad como sostienen los autores en la segunda de las proposiciones acotadas. En mi opinión debió definirse la gravedad como la aceleración observable cuando una masa deja de estar vinculada a un sistema fijo a la Tierra y comienza a caer en el vacío en ausencia de perturbaciones sísmicas, eléctricas, etc. Las actuales determinaciones absolutas de la intensidad de la gravedad explotan los recursos de la tecnología precisamente en experimentos de tipo balístico según esa definición.

## 6. El Caso de las Concavidades imposibles:

Si un área del geoide presentara una concavidad hacia arriba en forma de casquete esférico está claro que una plomada suspendida en el centro de esa esfera, con el plomo al nivel de geoide, podría quedarse en equilibrio en cualquier punto de la concavidad. Lógicamente ello no significa que en el centro de suspensión haya múltiples direcciones de la vertical y que pueda demostrarse por el absurdo la imposibilidad de tales concavidades.

No existe teóricamente ninguna razón que excluya la existencia de esas concavidades; menos aún que esa curvatura inversa pueda producirse en secciones verticales del geoide en puntos hiperbólicos donde la curvatura media sea todavía normal, no inversa. F. Hopfner (1933) y K. Ledersteger (1956) comentan en sus clásicas obras la posible existencia de concavidades hacia arriba de superficies de nivel o de secciones verticales de las mismas.

Por lo dicho llama la atención alguna afirmación del desaparecido M. Hotine (1969) en su *Mathematical Geodesy*, tratado fundamental de la geodesia moderna editado como monografía N° 2 por ESSA de los Estados Unidos. Analizando las características de las líneas (rayos de luz, etc.) de que los geodestas se valen para sus observaciones a distancias terrestres, satelitarias o astronómicas, se refiere Hotine en página 232 de su obra a la curvatura  $k$  de una sección vertical de una superficie de nivel y dice: “Mientras que  $k$  es siempre negativo<sup>2</sup>. . .” agregando al pie de la página esta llamada: “<sup>2</sup> De otra manera dos verticales adyacentes podrían cortarse en el aire en puntos que vendrían a tener dobles valores de latitud y longitud astronómicas. Eso está en contra de la experiencia”

Es cierto que la experiencia no ha verificado —que se sepa!— la existencia de algún caso de concavidad pero parecería que la razón esgrimida por Hotine también eliminaría la posibilidad de curvaturas de signo normal, no inverso, quedando el modelo plano como único posible!

Para evaluar la posibilidad de que se verifiquen curvaturas de signo inverso recordemos que la curvatura media de una superficie de nivel en uno de sus puntos se relaciona, a través del teorema de la divergencia, con el gradiente vertical de la gravedad, de modo que éste es igual a la suma  $-2gJ + 4\pi k\rho - 2\omega^2$  donde J representa la curvatura media de la superficie de nivel; k la constante de gravitación; g la intensidad de la gravedad y  $\rho$  la densidad de las rocas en el punto considerado. Los 4 términos tienen los siguientes valores aproximados en la superficie del planeta:

$$2gJ = 0,3330 \cdot 10^{-5} \text{ u.C.G.S.}$$

$$4\pi k\rho = 0,2232 \cdot 10^{-5}; 2\omega^2 = -0,0014 \cdot 10^{-5}$$

gradiente vertical de g en el aire =  $0,3085 \cdot 10^{-5}$  u.C.G.S. para rocas de densidad 2,67 Resulta entonces que para tener una superficie de nivel plana en el aire, debe prácticamente anularse el gradiente vertical de la gravedad porque la influencia del término centrífugo  $2\omega^2$  puede ser despreciada. Gradientes verticales inversos de la gravedad se asocian; por lo tanto, en el aire a concavidades hacia arriba de las superficies de nivel. En el eje de un cuerpo como el representado en la Figura 2, de dimensiones

$$r_1 = 320 \text{ m} \quad r_2 = 10 \text{ km} \quad h = 1 \text{ km}$$

y densidad = 5 se verificarían gradientes verticales nulos al superponerse al campo gravítico normal. Si  $r_2$  se redujera a 5 km,  $r_1$  deberá reducirse a 250m para mantenerse el gradiente nulo en las mismas condiciones de espesor h y densidad.

Las condiciones en el seno de las rocas superficiales, de densidad 2,67 dan gradientes verticales de la gravedad de 0,0853 mgal/m para curvaturas medias normales de la superficies de nivel. Un gradiente inverso de  $0,223 \cdot 10^{-5}$  u.C.G.S. se requeriría para tener tubos de fuerza cilíndricos, es decir, superficies de nivel planas.

La posibilidad de perfiles verticales de superficies de nivel de curvatura inversa se ha calculado para las inmediaciones de una esfera superpuesta al campo normal según Figura 3. En la siguiente tabla se consignan las distancias D a las que los perfiles meridianos presentarían curvaturas cero:

	d e n s i d a d			
	3	4	5	6
r = 0,5 km	—	34m	77m.	110m
1	50m	80m	170m	240m
2	70	180	350	500
3	130	280	540	750m

**7. El Caso de los dos Sistemas Gauss-Krüger superpuestos:**

Como se sabe el Instituto Geográfico Militar escogió sabiamente el sistema Gauss-Krüger de coordenadas planas conformes para la carta topográfica de la

República. En la cercanía de los meridianos que limitan las fajas de cada sistema puede suscitarse el problema siguiente: se conocen las coordenadas  $x_w, y_w$  de puntos del elipsoide en el sistema oeste y se requiere calcular las coordenadas de los mismos puntos en el sistema este sin utilizar el camino obvio que pasa por las coordenadas geográficas. Según el Handbuch der Vermessungskunde de Jordan, Eggert y Kneissl (1959) Krüger resolvió el problema en 1912, verificandose además una solución de Grossmann en 1935 y más modernamente otras de Hristov y Hirvonen. En las páginas 1152 y siguientes del tomo IV, 2a. mitad de la X edición del tratado mencionado se desarrolla una solución basada en los trabajos de los dos últimos autores. Sobre la misma idea, esto es, relacionar el punto  $P_1$  cuyas coordenadas se quiere transformar con el  $P_0$  del meridiano límite que tiene igual abscisa  $x$ , según la Figura 4, la publicación técnica N° 42 del IGM incluye un interesante desarrollo con tablas que permitan resolver prácticamente el problema.

Recordemos que los sistemas E y O pueden superponerse de modo que  $P_0^w$  coincida con  $P_0^e$  y girarse recíprocamente alrededor de ese punto común hasta que todas las direcciones de líneas imágenes correspondientes a las mismas líneas geodésicas del elipsoide por  $P_0$  coincidan. Ningún otro par de imágenes  $w$  y  $e$  de un mismo punto del elipsoide coincidirán; al oeste de  $P_0^w = P_0^e$  las imágenes E aparecerán dilatadas respecto de las W; al este se dará la situación recíproca debido a la ley de variación de la razón de aumento  $m$ . Dos líneas geodésicas que pasan por  $P_0$  tienen imágenes rectas en los dos sistemas: son las perpendiculares a los meridianos centrales de las dos fajas contiguas. Esa circunstancia se aprovecha para, dadas las coordenadas de  $P_0^w$  explotar el punto  $P_0$  cuyas coordenadas son:

$$x_0^w = x_1^w = x_0^e$$

$$y_0^w = -y_0^e \text{ ordenada calculable con } x_1^w, \Delta\lambda = 1^\circ 30'$$

Recordando además que salvo los meridianos centrales y las geodésicas perpendiculares a los mismos las líneas geodésicas del elipsoide tienen imágenes Gauss-Krüger apenas curvadas y con la concavidad dirigida hacia el meridiano central, es fácil ver que la posición relativa de las imágenes E y W del segmento de geodésica  $P_0P_1$  es la representada en la Figura 5, o sea:

$$\text{idéntica dirección en } P_0^w = P_0^e$$

contracción de la imagen este respecto de oeste

La Figura 6 reproduce la 3 que puede verse en página 16 de la citada publicación técnica; se incluye para comparación. En la página 17 aparece la fórmula (33):  $\epsilon = \Delta\gamma + \delta$  que podría parecer compatible con la Figura 3 aunque en rigor de ésta debería deducirse simplemente  $\epsilon = \Delta\gamma$  dado el significado que se atribuye al ángulo  $\epsilon$  en las expresiones (34) de página 17. De nuestra Figura 5 se deduce que la (33) debió escribirse así:  $\epsilon = \Delta\gamma - \delta$ . A pesar de lo indicado las fórmulas (35) y (36) de página 18 son correctas.

## 8. Un Caso de Autocrítica:

En la reseña del 2º simposio de geodesia tridimensional (Cortina, 1962)

escrita por el colega belga P.L. Baetslé para el N° 67 del Bulletin Géodésique se lee en página 33 una descripción del método desarrollado en la Universidad de Tucumán para estudiar la refracción terrestre vertical: "En montaña se pueden elegir 3 estaciones A, B, C pertenecientes a un mismo plano vertical y con los tres lados en condiciones de intervisibilidad. De la medición de las distancias AB, BC y CA (con telurómetro) se puede deducir el valor de los ángulos del triángulo ABC. Se hace en cada estación una determinación astronómica de latitud y longitud y se miden las 6 distancias cenitales. Cada uno de esos 6 ángulos está afectado por un error de refracción. El conjunto de esos datos permite escribir 5 ecuaciones entre esas 6 incógnitas. **La indeterminación que subsiste puede ser eliminada operando sobre una figura más compleja, un cuadrilátero completo, por ejemplo,** pero los sitios que permiten una tal configuración son evidentemente muy raros"

Se trata de una versión de mi exposición en el panel 1 del citado simposio. Lo que he subrayado es un error. Es fácil ver que un cuadrilátero completo vertical al que se aplique en sus 4 vértices las observaciones mencionadas más arriba para el triángulo permitiría escribir sólo 11 ecuaciones independientes entre 12 incógnitas. El grado de libertad entre la figura geodésica y el haz de las verticales subsiste porque las observaciones superabundantes no definen determinísticamente su orientación relativa. Lo que sí pudo decirse en Cortina es que un cuadrilátero vertical tienen las ventajas de

1. obtener mejores valores de los ángulos de la figura vertical en función de las distancias observadas.

2. aportar más información sobre más vértices, y

3. hacer más probable la aplicación del método clásico para la determinación de los ángulos de refracción el lado inferior será probablemente susceptible de una nivelación geométrica y los dos ángulos de refracción correspondientes podrán calcularse por la vía ordinaria con lo que las 10 incógnitas restantes se despejarían de las 10 ecuaciones independientes disponibles. Este recurso fue explotado en el triángulo de Alpachiri como puede verse en Ledersteger (1967) páginas 288-291.

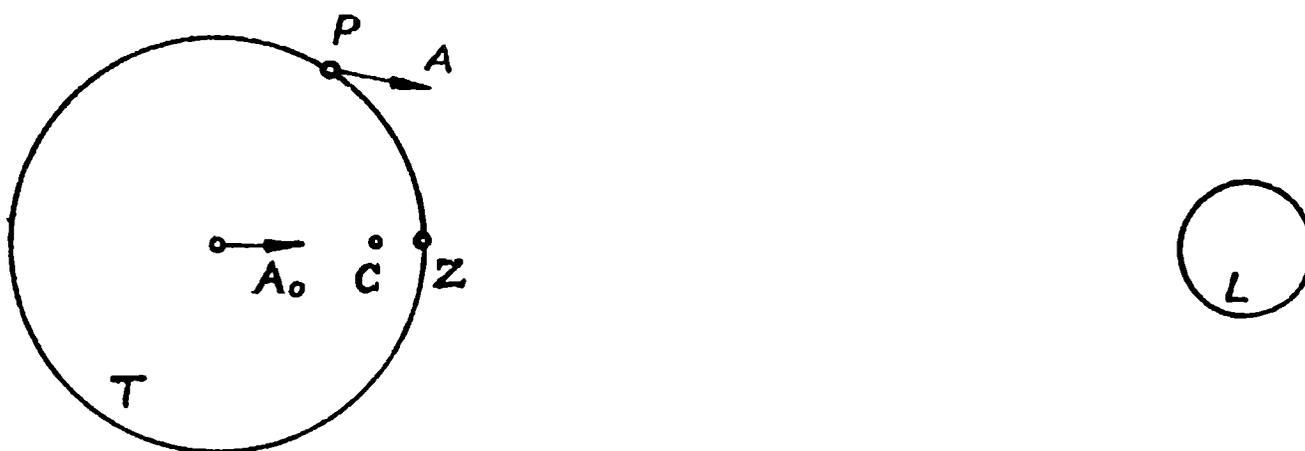


Figura 1: La atracción  $A$  de la Luna  $L$  en un punto  $P$  de la Tierra  $T$  debe combinarse con el vector  $-A_0$  igual y opuesto a la atracción gravitacional de  $L$  en el centro de masa de la Tierra para obtenerse el efecto total.  $C$  representa la posición del centro de masa del sistema Tierra-Luna en ese instante y el punto  $Z$  que tiene a la Luna en su cenit se toma como ejemplo del planteo equivocado de G. Bomford.

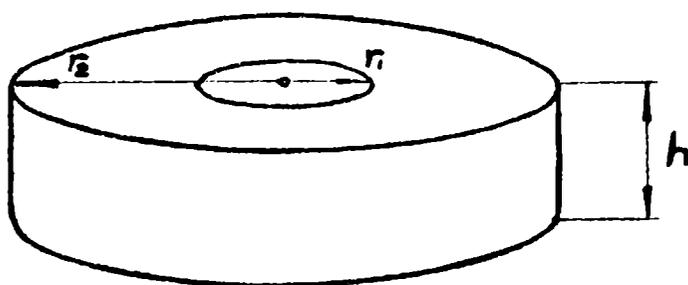


Figura 2: El cuerpo de revolución de espesor  $h$ , radio del hueco central  $r_1$  y radio exterior  $r_2$  sirve para superponer al campo gravítico normal al efecto de obtener en su espacio central gradientes cero verticales de la intensidad de la gravedad lo cual se asocia naturalmente con tubos de fuerza cilíndricos y superficies de nivel planas.

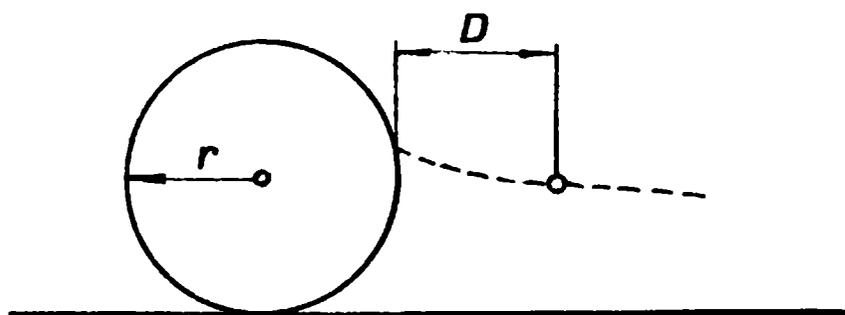


Figura 3: En las inmediaciones de una esfera de radio  $r$  que se superpone al campo gravítico terrestre se pueden presentar secciones verticales de las superficies de nivel de curvatura inversa. La curva de trazos indica una de esas secciones cuyo punto de inflexión dista  $D$  de la esfera.

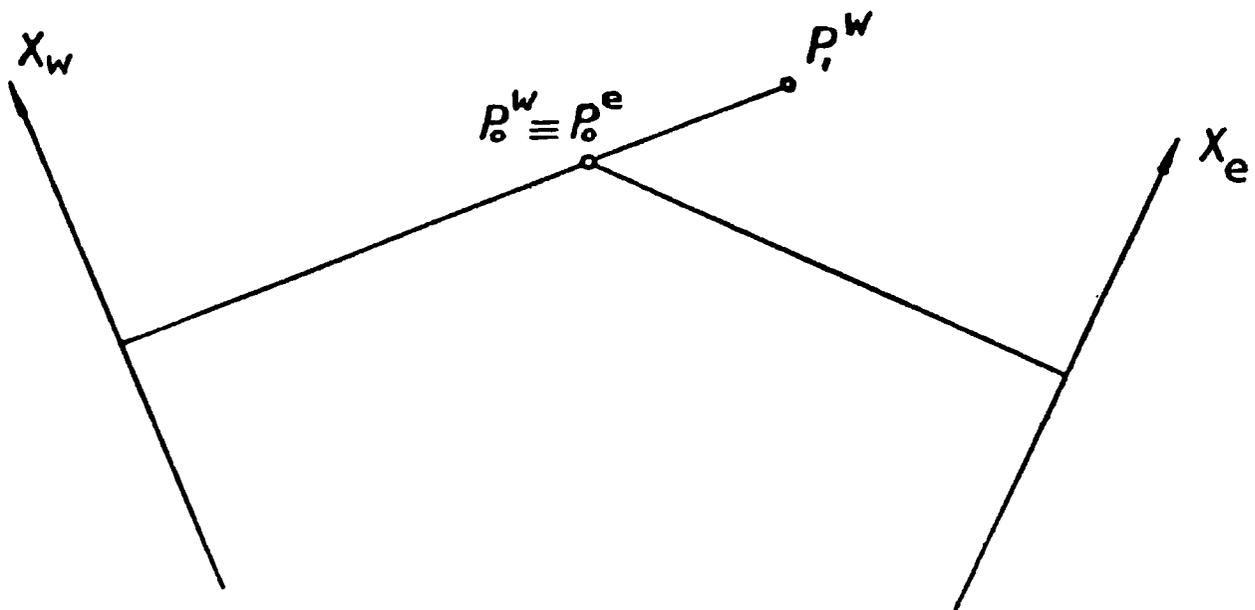


Figura 4: Dos sistemas Gauss-Krüger contiguos pueden superponerse de modo que las imágenes en ambos de un punto del meridiano límite se lleven a coincidir y que las direcciones de las imágenes de líneas geodésicas por  $P_0$  también coincidan. Las imágenes de  $P_0$  en los dos sistemas tienen la misma abscisa que además coincide con la del punto  $P_1$  que se desea transferir del sistema W al E.

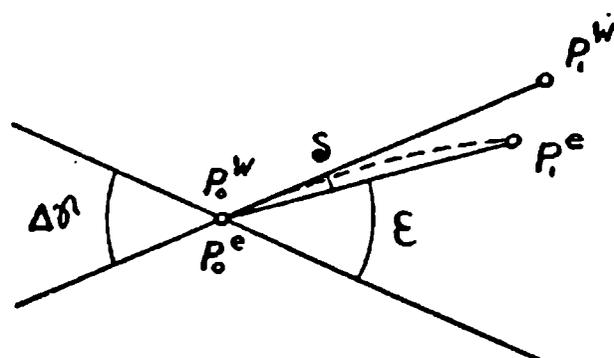


Figura 5: Las imágenes de  $P_0$  y  $P_1$  en ambos sistemas se ven más claramente en esta figura que se ajusta a la orientación relativa descrita en la Figura 4.

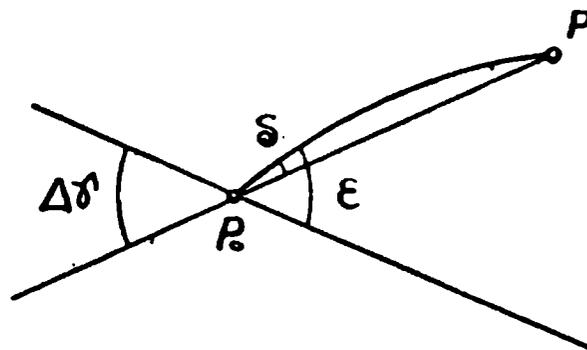


Figura 6: Reproduce la parte significativa de la Figura 3 de página 16 de la Publicación Técnica N° 42 del Instituto Geográfico Militar. La curva trazada entre  $P_0$  y  $P$  es el disparate que motiva la crítica.

## BIBLIOGRAFIA

- BAESCHLIN, C.F., 1948: *Lehrbuch der Geodäsie*, Zürich.
- BOMFORD, G., 1962: *Geodesy*, 2a. edición. Oxford.
- CAPUTO, M., 1967: *The Gravity Field of the Earth*. Academic Press, New York.
- FLUGGE, S., 1957: *Handbuch der Physik*, v. 48, p. 734 a 774 (Gezeitenkräfte, por J. Bartels). Berlín.
- GOGUEL, J., 1971: *Bouguer au Chimborazo*. Bull. Géod. Nº 101, set. 1971, p. 329 a 334. París.
- HEISKANEN, W., y VENING MEINESZ, F.A., 1958: *The Earth and its Gravity Field*. McGraw-Hill, New York.
- HEISKANEN, W., y MORITZ, H., 1967: *Physical Geodesy*. San Francisco.
- HOPFNER, F., 1949: *Grundlagen der Höheren Geodäsie*. Springer-Verlag, Viena.
- JORDAN, EGGERT, KNEISSL, 1959: *H. der V. Stuttgart*.
- LEDERSTEGER, K., 1956: *Astronomische Geodäsie*, tomo V de la X edición del *Handbuch der Vermessungskunde de Jordan, Eggert, Kneissl*. Metzler, Stuttgart.
- LEDERSTEGER, K. 1967: *Proceedings of the International Symposium Figure of the Earth and Refraction*, Viena, separata 25 del *Oesterreichische Zeitschrift der Vermessungswesen*.
- SANCHEZ, R.N., 1971: *El Elipsoide de referencia para América del Sur*. GEOACTA v. 6 n. 1, p. 71 a 74.
- SEPPELIN, T. O., 1974: *International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Geodetic Networks*, Fredericton, Canadá. Separata de *The Canadian Surveyor*, v. 28, n. 5, dic. 1974, p. 496 a 506.