

/Comunicación presentada en el Primer Congreso Interobservatorios
Nacionales del año 1950, en la sesión del día 25 de noviembre/

SOBRE LA DETERMINACION DE LAS CORRECCIONES DE TRAZO DE LOS CIRCULOS
GRADUADOS Y ERRORES DE GRADUACION DEL CIRCULO I DEL ANTEOJO MERI-
DIANO REPSOLD DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA PLATA ^{*})

Por el Dr. Sergejs J. Slaucitajs

Antes de comenzar la comunicación sobre la determinación de los errores de graduación del círculo meridiano Repsold del Observatorio Astronómico de La Plata, me permito expresar unas palabras sobre el problema en general.

El descubrimiento de la variación sistemática de la altura del polo, hecho por *Kuestner* (1885) mediante un instrumento que no utilizaba círculo graduado para realizar las observaciones, también demostró que había necesidad de un mejoramiento de los métodos de observación con instrumentos de círculos graduados.

Uno de los instrumentos más fundamentales entre los instrumentos astronómicos, es el círculo meridiano, porque las observaciones con él hechas permiten hallar las coordenadas de las estrellas. La seguridad o la exactitud de las observaciones dependen en gran parte de la exactitud con que están graduados los círculos, por lo cual tenemos que dedicar especial atención a la determinación de los errores de la graduación.

Antes reinaba la opinión de que siendo tan poca la precisión que se alcanzaba en las lecturas del círculo, en comparación con los pequeños valores de los errores de graduación, no se requería un mayor conocimiento de estos errores; hoy tal idea no tiene razón de ser, porque la precisión en la lectura ha aumentado notablemente.

En los círculos más modernos también aparecen saltos en el curso de las graduaciones regulares, los cuales perturban la marcha sistemática de las mismas.

Por ejemplo, el círculo meridiano Repsold en el Observatorio de Charkow tiene un salto de 3."36 en un intervalo de 2' (*W. Struve*, 1838). Por consiguiente no deben olvidarse estos saltos en las investigaciones sobre los círculos, y el método utilizado para la determinación de los errores de graduación no debe permitir una compensación artificial de los mismos.

Por otra parte, como ya indicó *E. Grossmann* (Munich (1917)), comparando las observaciones en las dos posiciones del círculo, al aplicar correcciones de trazo, la discrepancia media disminuyó de $\pm 0''28$ a $\pm 0''18$. ¿Qué círculo podemos llamar bueno? Un círculo teóricamente bien graduado debe tener corrección nula para cada trazo. Yo desearía dar una respuesta a esta pregunta mediante un ejemplo concreto, utilizando el círculo meridiano Repsold de nuestro Observatorio. El círculo meridiano Repsold del Observatorio de La Plata tie-

^{*}) **EXTRACTO.** Las correcciones de trazo (c_x) del círculo correspondientes a intervalos de 5 grados no son suficientes para una ulterior interpolación para divisiones intermedias. Es menester determinar las c_x por lo menos para cada grado. Puesto que las graduaciones del círculo tienen errores sistemáticos y también accidentales, y no siendo posible separarlos, conviene hacer la determinación de las correcciones individuales de cada trazo. Método para la determinación de c_x de los trazos intermedios.

ne ambos círculos con un diámetro de 75 cm y una lectura directa de 0'4. El intervalo entre dos trazos sucesivos es igual a 4', o sea 0,436 mm en medida lineal. El intervalo de 1" es igual entonces a 0,0018 mm, o sea 0,001 mm es igual a 0'55. En tal círculo, en el cual no solamente las lecturas directas, sino también el error medio de la graduación no sobrepasa 0'4, cada trazo debería estar rayado exactamente dentro de los 0,0007 mm, con una precisión que toca casi al límite de lo posible —cuando el círculo es copiado de un "círculo patrón"— pero esto no es posible con un procedimiento automático.

Según esto, no podemos obtener técnicamente una graduación mejor. Por consiguiente debe sorprendernos una exactitud de 0'1, en círculos de 90 mm de diámetro, y tanto más con círculos de 40 mm. Con 90 mm de diámetro de limbo, y con divisiones de 20', el intervalo es de 0,2618 mm, es decir, 1" es igual a 0,000218 mm, o sea 0,001 mm es igual a 4'58; con un limbo de 40 mm y divisiones de 20', el intervalo tiene entonces 0,1163 mm, luego 1" es igual a 0,000097 mm, o sea 0,001 mm es igual a 10'31.

Este último número demuestra cuán utópica es una lectura de 0'1 que corresponde a un error lineal de 0,00001 mm, es decir, cien veces menor que en un círculo de 750 mm, cuya exactitud ya está en los límites de lo posible.

Por desgracia tenemos que reconocer que si bien la fabricación de los instrumentos astronómicos es un trabajo de alta precisión, desde el punto de vista del astrónomo, los instrumentos son aún demasiado burdos, en vista de las mediciones que se deben efectuar, y esto pese a que en la construcción de los mismos se emplean todos los recursos de la actual mecánica de precisión.

Para las mediciones actuales no debemos limitar la investigación a cada 5°, e interpolar estos valores para los trazos intermedios; sino que es necesario determinar las correcciones de trazo por lo menos para cada grado.

Como los trazos de los círculos contienen tanto errores sistemáticos como accidentales, y en la determinación de las correcciones es imposible separarlos, en muchos estudios se determinan solamente los errores sistemáticos de la graduación, suponiendo que los errores accidentales no perturban el curso sistemáticos de ellos. Nosotros tenemos la opinión de que la determinación de los errores individuales de trazo se acerca mucho más a nuestro objeto.

Podemos determinar las correcciones de los grados enteros, es decir, 180 diámetros, agregando después las observaciones de las divisiones intermedias. En la determinación de estas correcciones de trazo debemos evitar naturalmente cualquier compensación (p. ej., en lugar de leer el trazo que se investiga, leer dos, tres o más trazos vecinos).

Generalmente la determinación de errores de graduación representa en la astrometría una de las investigaciones más trabajosas y difíciles. No solamente se emplea mucho tiempo para realizar las mediciones, sino también para los cálculos. Además en este problema es muy delicada la elección del método de investigación. Las investigaciones realizadas con dos métodos diferentes sobre el círculo meridiano Repsold del Observatorio de Engelhardt en Kasan, por *Porezky* (1885) y *Gracheff* (1907), dieron una discrepancia máxima de 0'69 para el mismo trazo. Para el círculo meridiano de Gautier en el Observatorio de París, *Loewy* (1906) y *Fayet* (1907) con diferentes métodos tuvieron una discrepancia máxima de 0'35.

Estos números nos indican que no es suficiente determinar las correcciones de trazo una sola vez; por esto es necesario emplear un método que permita repetir las observaciones solamente para aquellos trazos que intervengan en alguna investigación especial.

En la literatura astronómica podemos encontrar un gran número de trabajos (más de 30) que tratan sobre la investigación de los errores de graduación. Casi todos los trabajos están basados en los tres métodos de *Bessel*, y únicamente unos cuantos no entran en esta clasificación, como por ejemplo los procedimientos de *Kaiser*, *Boss*, *Tucker* y *Harzer*.

Queremos expresar en pocas palabras la definición de los errores y la corrección de trazo, pues la expresión "errores de graduación", no muy clara, ha conducido a confusiones graves (Pulkovo, Kasan y Munich).

Definiremos como corrección de trazo la cantidad, positiva o negativa, que se debe sumar algebraicamente a la lectura real para obtener la lectura ideal (verdadera). El error de trazo es igual en valor absoluto a la corrección, pero con signo contrario. Entonces la corrección del trazo, aplicada a la lectura del mismo, transforma la lectura real del círculo en la ideal. Según nuestra definición c_x , corrección c del trazo x , es la coordenada de la división real respecto de la división ideal, medida positivamente en sentido creciente, de las divisiones del círculo. De este modo el signo de la corrección de trazo queda definido rigurosamente.

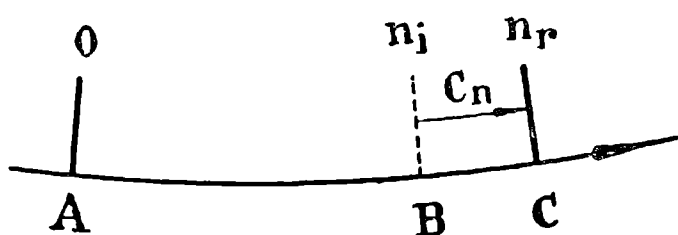


Fig. 1.



Fig. 2.

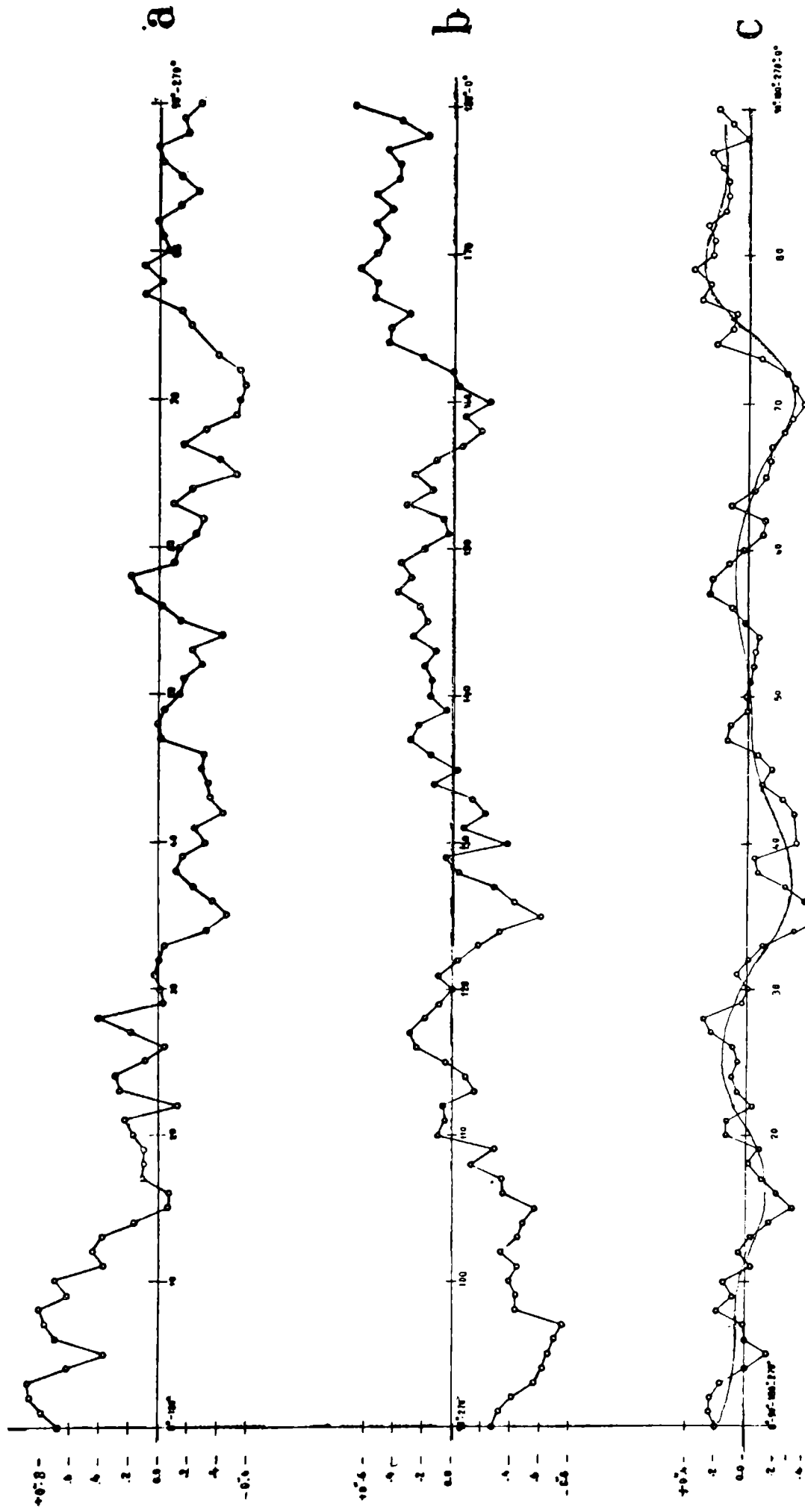
A — origen de la graduación del círculo.
 n_r , n_i , m_r , m_i — los trazos reales e ideales correspondientes.
 c_n , c_m — las correcciones de los trazos n_r , m_r .
 (La flecha muestra el sentido de las divisiones del círculo.)

$$c_n = + BC = + c_1 \qquad c_m = - ED = - c_2$$

En julio de 1949, el señor Director de nuestro observatorio nos encomendó la tarea de la determinación de las correcciones de trazo, para cada trazo del círculo meridiano Repsold. Teníamos a disposición el material de observación de las mediciones realizadas en los años 1940 y 1941,* consistente en lecturas de microscopio, únicamente. Para no perder ese extenso material de observación, consistió nuestro primer paso en encontrar un método apropiado que permitiese emplear los datos de las observaciones que ya poseíamos. Dividimos el problema en dos partes: correcciones de diámetros de los grados enteros, y correcciones de cada trazo (4'). No habiendo sufrido el círculo desde la fecha de estas lecturas, ninguna modificación que afectara el valor de las correcciones, las completamos en el año 1950, determinando la corrección para poder usar el método de *Brunns-Fayet*.

La primera parte de la investigación para el círculo I (con freno) se terminó completamente, y las correcciones de trazo definitivas para grados enteros, que han de aplicarse al promedio de las lecturas de los cuatro microscopios que distan 90°, están representados en la figura 3 (c).

* Existente en nuestro Archivo Técnico.



$C_1 = 0.144 \sin(0.171x) + 0.031 \sin(0.342x) + 0.018 \sin(0.513x) + 0.011 \sin(0.684x) + 0.006 \sin(0.855x) + 0.004 \sin(1.026x) + 0.003 \sin(1.197x) + 0.002 \sin(1.368x) + 0.001 \sin(1.539x)$
 $C_2 = 0.144 \sin(0.171x) + 0.031 \sin(0.342x) + 0.018 \sin(0.513x) + 0.011 \sin(0.684x) + 0.006 \sin(0.855x) + 0.004 \sin(1.026x) + 0.003 \sin(1.197x) + 0.002 \sin(1.368x) + 0.001 \sin(1.539x)$
 $C_3 = 0.144 \sin(0.171x) + 0.031 \sin(0.342x) + 0.018 \sin(0.513x) + 0.011 \sin(0.684x) + 0.006 \sin(0.855x) + 0.004 \sin(1.026x) + 0.003 \sin(1.197x) + 0.002 \sin(1.368x) + 0.001 \sin(1.539x)$

Fig. 3

El gráfico (a) representa las correcciones para diámetros de 0-180° a 90-270°; el gráfico (b), las correcciones para diámetros 90-270° a 180-0°.

Según nos demuestra este gráfico (c) podemos considerar el círculo en general suficientemente bueno. El rayado del círculo es un fiel reflejo del "círculo patrón". No aparecen saltos importantes en el curso sistemático de las correcciones, por lo cual está permitido analizar los valores definitivos con análisis armónico. La curva puesta en la figura 3 (c), representa el resultado de la suma de los ocho primeros términos de la serie de *Fourier*. Con ello tenemos la representación de las correcciones sistemáticas de los trazos que indican grados enteros.

Así tenemos: los valores directamente obtenidos del método, los valores compensados y además la posibilidad de interpolar trigonométricamente errores sistemáticos para trazos intermedios. Todos los resultados finales serán publicados numérica y gráficamente.

Para la determinación de las correcciones de cada trazo, es decir, de los trazos de 4', desarrollamos un método aprovechando las correcciones para grados enteros, como datos de apoyo. Las correcciones de trazos intermedios de un grado dado, las obtuvimos del siguiente modo.

Supongamos que el arco de círculo igual a un grado posee s intervalos, es decir, cada arco de un grado tiene el número de trazos $s + 1$, incluyendo los trazos que indican los grados enteros. Si el arco de un grado estuviera dividido correctamente, la distancia angular verdadera entre dos trazos (trazos ideales) sucesivos sería igual a $\frac{3600}{s}$ igual a σ'' . Sea m revoluciones del tornillo del micrómetro del microscopio igual a m^R , R'' — el valor de una revolución, y $mR = \sigma + x$.

Designamos en serie las divisiones reales del grado dado con n_r , $(n + \sigma)_r$, $(n + 2\sigma)_r$, $(n + s\sigma)_r = (n + 1)_r$; los ideales con el índice i y las correcciones de trazo correspondientes a n_r y $(n + 1)_r$ con c_n y $c_{n+s\sigma} = c_{n+1}$. Entonces como vemos fácilmente en la figura 4, que corresponde a la imagen dada por el microscopio, las lecturas del microscopio aumentan cuando disminuyen las lecturas del círculo, y tenemos para el intervalo $n_r - (n + \sigma)_r$ una relación de la forma:

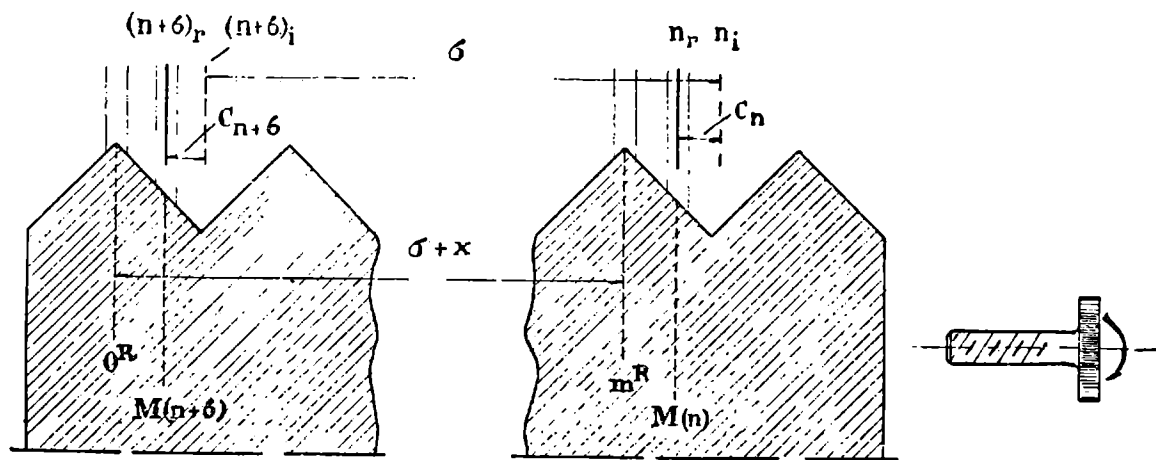


Fig. 4.

$$\sigma + x = \sigma + c_{n+\sigma} + M(n + \sigma) + y_{M(n+\sigma)} - c_n - M(n) - y_{M(n)} \quad (1)$$

siendo $M(n)$ y $M(n + \sigma)$ las lecturas del tambor del micrómetro del microscopio, y $y_{M(n+\sigma)}$ y $y_{M(n)}$ las correcciones correspondientes a estas lecturas, y $c_n, c_{n+\sigma}$ las correcciones de los trazos $n_r, y_{i(n+\sigma)_r}$.

La ecuación (1) la podemos transformar en la siguiente:

$$c_{n+\sigma} - c_n = M(n) - M(n + \sigma) + x + y_1 \quad (1^\sigma)$$

designando la diferencia $y_{M(n)} - y_{M(n+\sigma)} = y$, con índice 1 para el primer intervalo.

Análogamente para el intervalo $(n + \sigma)_r - (n + 2\sigma)_r$ y próximos, tenemos:

$$c_{n+2\sigma} - c_{n+\sigma} = M(n + \sigma) - M(n + 2\sigma) + x + y_2 \quad (1^{2\sigma})$$

$$c_{n+3\sigma} - c_{n+2\sigma} = M(n + 2\sigma) - M(n + 3\sigma) + x + y_3 \quad (1^{3\sigma})$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c_{n+s\sigma} - c_{n+(s-1)\sigma} = M[n + (s-1)\sigma] - M(n + s\sigma) + x + y_s \quad (1^{s\sigma})$$

Sumando todas las ecuaciones, entonces:

$$c_{n+s\sigma} - c_n = \sum_{i=1}^s \{M[n + (i-1)\sigma] - M(n + i\sigma)\} + sx + \sum_{i=1}^s y_i \quad (2)$$

Siempre es posible arreglar el microscopio en tal modo que prácticamente $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_s$ (también podemos lograr fácilmente que y no tenga influencia sobre el centésimo o milésimo de segundo del resultado, o sea, en este caso $y_i = 0$) por lo que la ecuación (2) la podemos escribir en la forma

$$c_{n+s\sigma} - c_n = \sum_{i=1}^s \{M[n + (i-1)\sigma] - M(n + i\sigma)\} + s(x + y) \quad (2')$$

de donde deducimos

$$x + y = \frac{c_{n+1} - c_n - \sum_{i=1}^s \{M[n + (i-1)\sigma] - M(n + i\sigma)\}}{s} \quad (3)$$

La relación fundamental para el cálculo de c_x intermedias es entonces:

$$c_{n+i\sigma} = c_{n+(i-1)\sigma} + M[n + (i-1)\sigma] - M(n + i\sigma) + (x + y) \quad (4)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, s$

Podemos ver fácilmente que la suma

$$\sum_{i=1}^s \{M[n + (i-1)\sigma] - M(n + i\sigma)\} + s(\sigma + x) + \sum_{i=1}^s y_i \quad (5)$$

nos da la magnitud del arco de círculo entre los trazos reales, que indican los grados enteros sucesivos y la expresión

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{M[n + (i-1)\sigma] - M(n + i\sigma)\} + \sigma + x + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s y_i + \frac{c_n - c_{n+1}}{s} \quad (6)$$

representa la magnitud del intervalo entre dos divisiones ideales sucesivas.

Para el procedimiento mencionado las observaciones se realizaron en la siguiente forma:

1. Para disminuir la acumulación de errores de observación se midió cada intervalo en las dos direcciones, además las mediciones se distribuyeron entre dos observadores, de modo que cada diámetro se midió con el par de microscopios $M_I - M_{III}$ y $M_{II} - M_{IV}$ (se leyeron simultáneamente los dos trazos que forman un diámetro).

2. Cada trazo se colocó en cada par de hilos del micrómetro ocho veces en cada dirección, es decir, en total 16 veces.

3. Se calaba aproximadamente de modo que el trazo cayera en la *misma lectura* de la primera revolución del tambor del micrómetro del microscopio I.

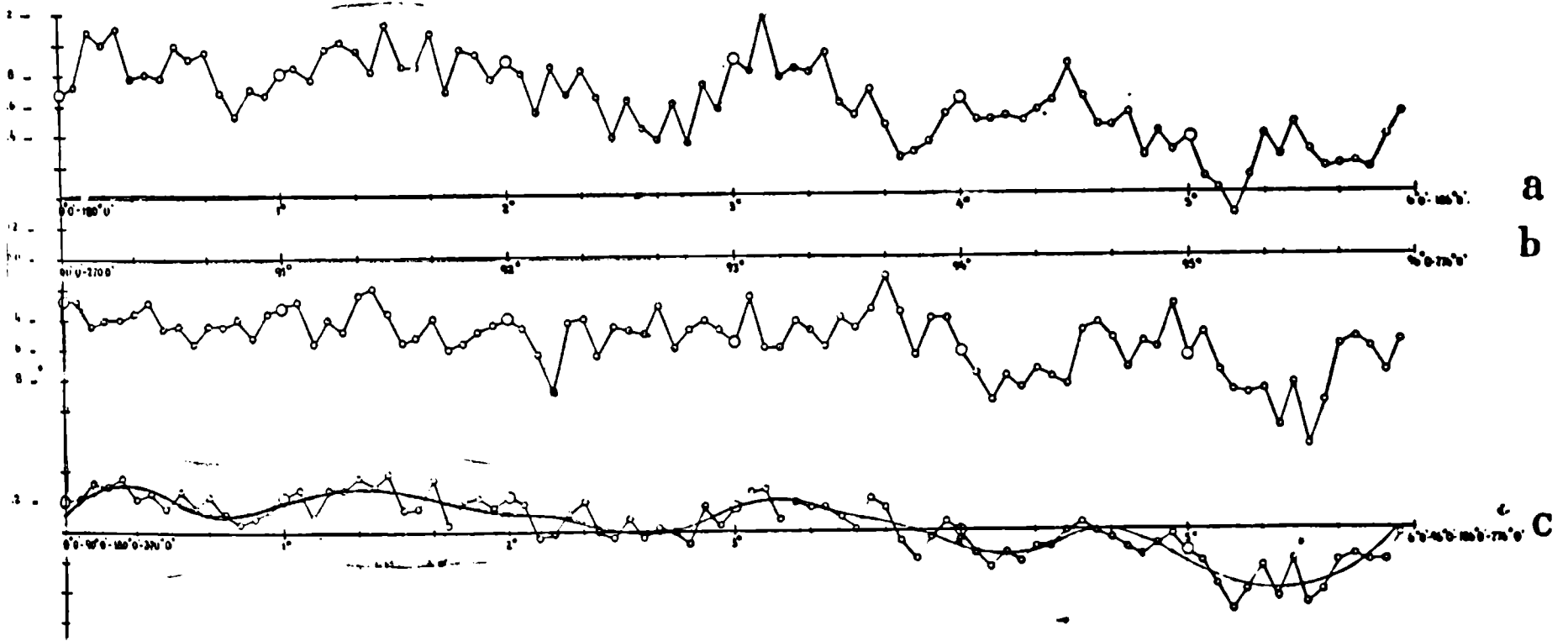
4. Se controló *continuamente* la posición horizontal exacta de los microscopios, y la posición del círculo.

5. Además las observaciones fueron dispuestas con atención especial para obtener la homogeneidad de circunstancias para las lecturas de los micrómetros, y eliminar en lo posible todas las demás influencias que podrían perturbar.

Para estas determinaciones (círculo I del anteojo meridiano Repsold) se han hecho en total unos 105.000 calajes del micrómetro.

El error medio de la determinación de un intervalo es de $\pm 0'' 057$.

Para dar un ejemplo de los resultados, me permito mostrar el curso de las correcciones definitivas para trazos de $4'$ en $4'$, entre $0^\circ 0'$ y $5^\circ 56'$. El gráfico (c) de la figura 5 representa las c_x , al promedio de la lectura de los cuatro microscopios que distan 90° de $/0^\circ 0' - 5^\circ 56' / - /180^\circ 0' - 185^\circ 56' / - /90^\circ 0' - 95^\circ 56' / - /270^\circ 0' - 275^\circ 56' /$. El gráfico (a) — las c_x de diámetros de $0^\circ 0' - 180^\circ 0'$ a $5^\circ 56' - 185^\circ 56'$; el gráfico (b) — las c_x para diámetros de $90^\circ 0' - 270^\circ 0'$ a $95^\circ 56' - 275^\circ 56'$.



$$c_x = 0.040 + 0.109 \sin(34^\circ 0' + x) + 0.125 \sin(10^\circ 0' + 2x) + 0.010 \sin(10^\circ 0' + 3x) + 0.172 \sin(39^\circ 0' + 4x) + 0.048 \sin(76^\circ 0' + 5x) + 0.024 \sin(15^\circ 0' + 6x) + 0.023 \sin(29^\circ 0' + 7x) + 0.017 \sin(27^\circ 0' + 8x)$$

$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ tomando los primeros 9 términos de la serie
 $\sigma = 0.150 : 0.170 : 0.127 : 0.093 : 0.087 : 0.080 : 0.064 : 0.063$

Fig. 5

La curva en el gráfico (c) de la figura 5 representa el resultado de la suma de los ocho primeros términos de la serie de Fourier. Esta curva que representa el curso de las correcciones de cada trazo de $0^{\circ} 0'$ a $5^{\circ} 56'$ (90 ordenadas), tiene el mismo carácter que la curva que ha dado el curso de las correcciones de grados enteros de 0° a 90° (90 ordenadas) —fig. 3, parte c. Esta circunstancia muestra que los trazos para todo el círculo son puestos con la misma precisión, como también que el método utilizado para las determinaciones de c_x para cada trazo es tan seguro como el método para las determinaciones de c_x para grados enteros.

En la figura 6 el gráfico (a) representa c_x^{ind} —las correcciones individuales al promedio de la lectura de los cuatro microscopios que se encuentran relativamente a 90° , para trazos de $4'$ en $4'$, entre $0^{\circ} 0'$ y $5^{\circ} 0'$ y $c_x^{int(1^{\circ})}$, interpoladas gráficamente de grado en grado; el gráfico (b) las discrepancias $\Delta^{(1^{\circ})} = c_x^{ind} - c_x^{int(1^{\circ})}$. El gráfico (c) representa c_x^{ind} y $c_x^{int(5^{\circ})}$ —interpoladas, cuando la interpolación se apoya en $0^{\circ} 0'$ y $5^{\circ} 0'$; el gráfico (d) representa las discrepancias correspondientes.

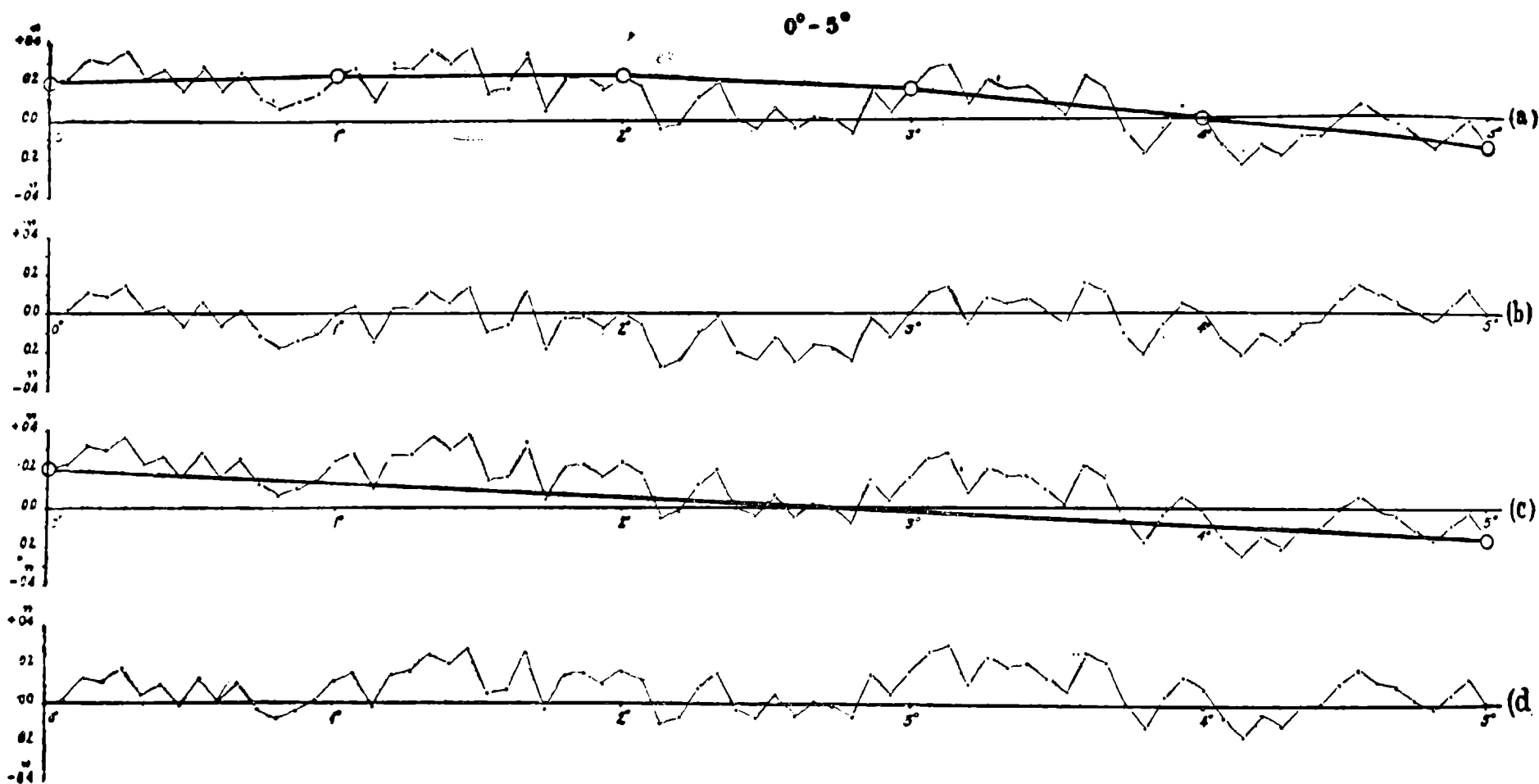


Fig. 6

Lo mismo hemos hecho entre los grados $25^{\circ} 0'$ a $30^{\circ} 0'$. En la figura 7 el gráfico (a) representa $c_x^{ind. 4' en 4'}$ y $c_x^{int(1^{\circ})}$; el gráfico (b) los $\Delta^{(1^{\circ})} = c_x^{ind. 4' en 4'} - c_x^{int(1^{\circ})}$; el gráfico (c) $c_x^{ind. 4' en 4'}$ y $c_x^{int(5^{\circ})}$ y el (d) los $\Delta^{(5^{\circ})} = c_x^{ind. 4' en 4'} - c_x^{int(5^{\circ})}$.

En la tabla 1 están dadas las sumas de las discrepancias para todo el intervalo de $0^{\circ} 0'$ a $5^{\circ} 0'$ y para cada grado; en la tabla 2, los mismos valores para el intervalo de $25^{\circ} 0'$ a $30^{\circ} 0'$,

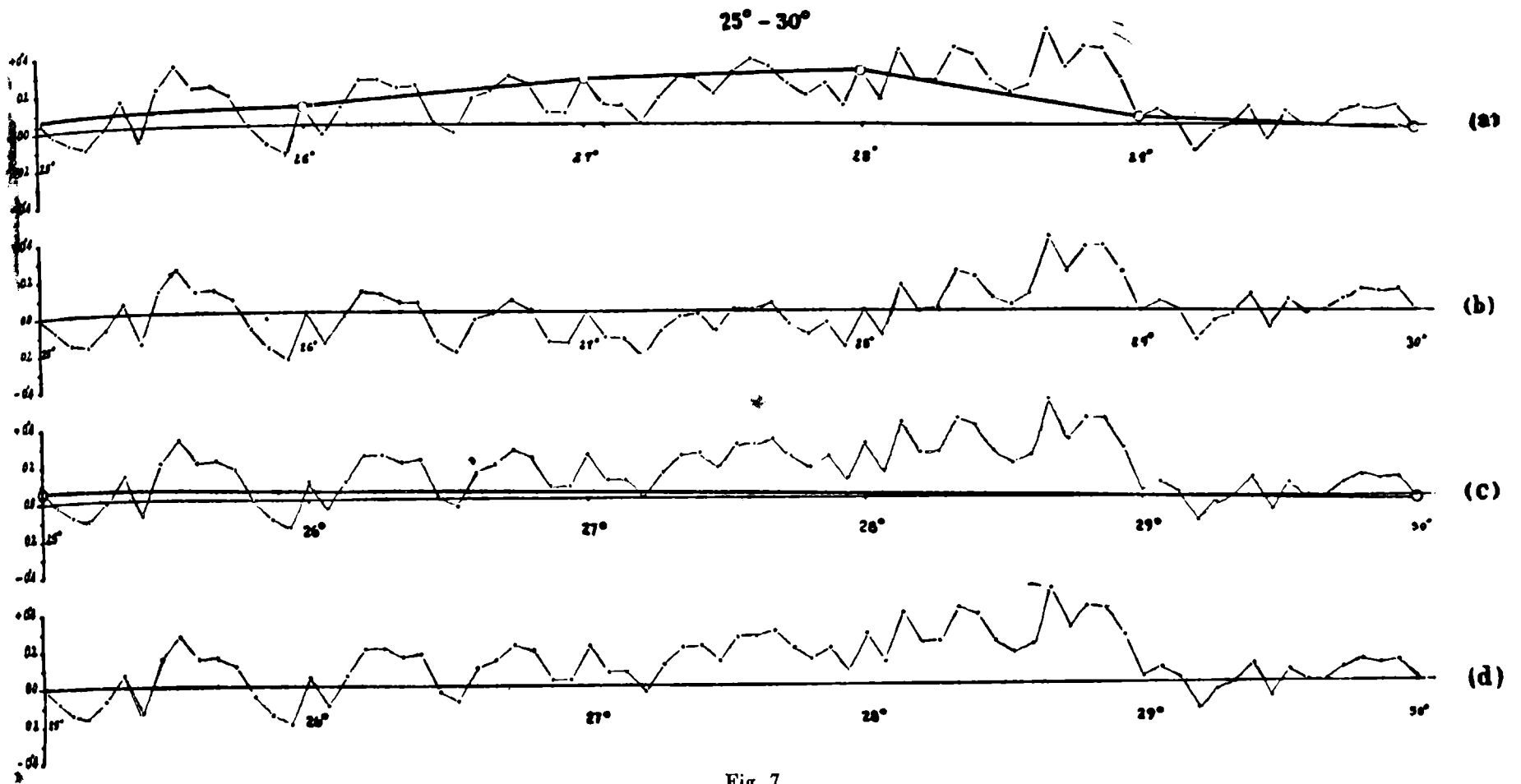


Fig. 7

TABLA 1

Intervalo	$\Sigma \Delta^{(1^\circ)}$	$\Sigma \Delta^{(5^\circ)}$
0° — 5°	— 2'26	+ 5'63
0° — 1°	— 0'13	+ 0'64
1 — 2	— 0.05	+ 2.02
2 — 3	— 2.17	+ 0.38
3 — 4	+ 0.32	+ 2.18
4 — 5	— 0.23	+ 0.41

TABLA 2

Intervalo	$\Sigma \Delta^{(1^\circ)}$	$\Sigma \Delta^{(5^\circ)}$
25° — 30°	+ 0'23	+ 8'63
25° — 26°	— 0'44	— 0'07
26 — 27	— 0.55	+ 1.34
27 — 28	— 1.17	+ 2.40
28 — 29	+ 2.14	+ 4.49
29 — 30	+ 0.25	+ 0.47

Los números de las tablas 1 y 2 muestran que hay gran diferencia entre ambos procedimientos, y que éstas son distintas para diferentes regiones del círculo.

Entonces es evidente que no es conveniente interpolar apoyándose en cada grado, o cada 5°.



Reg. no 1049