OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Director Interino: Prof. Ing. SIMON GERSHANIK

SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXXI

SOLUCION DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS POR PROLONGACIONES ANALITICAS APROXIMADAS

POR

REYNALDO P. CESCO

LA PLATA

1965

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Presidente
Doctor Roberto Ciafardo

Vicepresidente
Ingeniero Conrado Ernesto Bauer

CONSEJO SUPERIOR

Decanos

Ing. Agr. Héctor C. Santa María, Ing. Conrado E. Bauer, Dr. Bartolomé Fiorini, Dr. Joaquín Pérez, Dr. Guillermo G. Gallo, Dr. Héctor Luis Fasano, Dr. Luis Pianzola, Dr. Mario Egidio Teruggi, Cr. Pedro Delfino, Arq. Alfredo Juan Kleinert, Ing. Simón Gershanik.

Director (interino) del Observatorio Astronómico
Ing. Simón Gershanik

CONSEJEROS TITULARES

Delegados de los profesores

Ing. Alfredo M. Leguizamón, Ing. Enrique P. Villareal, Dr. Jorge Lascano Prof. Ricardo Nassif, Dr. Constantino C. Brandariz, Dr. Enrique Gaspar Escalante, Dr. Ricardo Rosendo Rodríguez, Dr. Enrique Modesto Sívori, Cr. Natalio Victorio Vittone, Dr. Alejo Mariano Fournier.

Delegados de los graduados

Ing. Agr. Alfredo N. Bettendorff, Ing. Raúl R. De Luca, Dr. Leopoldo J. Russo, Prof. Lázaro Seigelschifer, Dr. Cecilio Alberdi, Lic. Ricardo Pedro Ochoa, Dr. Néstor O. Dron, Geól. Jorge Rafael, Cr. Miguel Angel García Lombardi, Arq. Enrique Fernández.

Delegados de los estudiantes

Susana Dessy, Raúl A. Pessacq, Carlos Alberto Cañete, Daniel Pabón, Alberto O. Müller, Hugo Julio Lara, Horacio L. Perechodnik, Jorge Orlando San Cristóbal, Mariano A. Gil, Juan M. Valcárcel.

Secretario general
Dr. Osvaldo Balbín

Prosecretario general
Sr. Elioser C. Rossotti

Director General de Administración
Dr. Hugo Emir Scafati

Tesorero General
Sr. Rafael F. Arriola

ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF THREE BODIES BY APPROXIMATE ANALYTICAL CONTINUATIONS

By

R. P. Cesco

1. — Some recent works on the general solution of the problem of three bodies with arbitrary masses and the possibility of binary collisions permit to assume that even from the numerical point of view, Sundman's [1] theory can be very useful, not only in all theoretical cases but also in astronomical applications.

According to this theory, if the angular momentum vector $\overline{C}$ corresponding to any problem of three bodies is not equal to zero, the coordinates and the time are analytical functions of the regularization variable

$$\tau = \int_0^t (U + 1)dt, \qquad (U\text{: force function})$$

in the infinite strip of the complex plane τ defined by $|\mathrm{Re}\tau| < \infty$ and $|\mathrm{Im}\tau| < \Omega$, where $\Omega > 0$ depends only on the masses and the initial conditions. See, for example, [2].

The coordinates of the three bodies and the time may then be developed in Taylor series about any real point of the τ-plane, each convergent in a circle whose radius is greater than or equal to Ω, and by means of these series one can calculate some arcs of the orbit directly or by applying a specified method of analytical continuation.

In a paper presented to the last International Congress of Mathematicians [3] we have shown, by means of an example, that Borel's integral method of summability of divergent series, conveniently adapted for numerical computations, can be used for this purpose even outside the circle of convergence of the Taylor series solution.

Putting for a series $\sum u_n$:

$$\sigma(a) = \sum u_n I_n(a)$$

where

$$I_n(a) = \frac{1}{n!} \int_0^a e^{-\theta}\theta^n d\theta = I_{n-1}(a) + \frac{a}{n}\left[I_{n-2}(a) - I_{n-1}(a)\right]$$

one has a regular transformation, i.e. $\lim\limits_{a\to\infty} \sigma(a) = s$ whenever the series $\sum u_n = s$ converges. If the series $\sum u_n$ diverges but one has

$$\sigma(a) \to s \quad \text{as } a \to \infty \quad (s\text{: a finite number})$$

we can take s as the sum of $\sum u_n$, and the values of $\sigma(a)$ for some increasing values of a as approximate values of its sum, i.e.

$$\sigma(a_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n I_n(a_\nu) \sim \sum u_n, \quad 0 < a_1 < a_2 <$$

where the functions $I_n(a)$ have been tabulated for some values of a, say for $a = 10, 11, \ldots$

More recently Brumberg [4] has numerically applied to some theoretical problems of three bodies the theorem of Mittag-Leffler on expansion of an analytical function defined by a Taylor series in series of polynomials.

Let the series in

$$f(\tau) = \sum a_n \tau^n$$

be convergent in a circle of radius $R > 0$.

If we put

$$f_n(\tau) = \sum_{h=0}^{m_n} c_k^{(n)} a_k \tau^k, \qquad g_n(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} c_k^{(n)} \tau^k$$

and if

$$g_n(\tau) \longrightarrow 1/(1-\tau) \text{ as } n \longrightarrow \infty$$

uniformly in any closed and bounded region containing no point of the infinite interval $\mathrm{Re}\tau \geqq 1$, then

$$f_n(\tau) \longrightarrow f(\tau) \text{ as } n \longrightarrow \infty$$

uniformly in any closed and bounded region interior to the Mittag-Leffler rectilinear star of $f(\tau)$.

Incidentally, we observe that the infinite strip of Sundman mentioned above is contained in each Mittag-Leffler rectilinear star of the coordinates and of the time, so that the series of polynomials are convergent for any real value of τ, hence of t.

After computing the coefficients $c_k^{(n)}$ (neglecting those which are less than $\varepsilon = 10^{-10}$), by applying Goursat's method with $m_n = (\nu + 1)^n - 1$ Brumberg shows that for $n = 2, 3, 4, 5$ and for $\nu = 9, 10, 157$ terms of the Taylor series solution are needed for computing the coordinates and the time to six decimal places in some particular problems of three bodies.

2. — On the basis of Sundman's theory we propose the approximate application of the classical principle of analytical continuation by a chain of Taylor series, as a simpler and very effective method for the numerical solution of the problem of three bodies.

Let suppose that the system (S) of differential equations of the problem of three bodies, with τ as independent variable* be written in a form suitable for the calculation of the coefficients of its solution in Taylor series, by means of the Newton-Cauchy method of undetermined coefficients, and let $X_\nu(0) = a_{00}^{(\nu)}$ be the (real) initial conditions of any problem of three bodies for which $\overline{C} \neq 0$.

Let

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0}^{(\nu)} \tau^n, \qquad \nu = 0,\ 1,\ 2, \ \ldots, k \tag{1}$$

be the element of the solution of the problem in Taylor series. According to Sundman's theory each of these series is convergent in the circle Γ_0 whose radius ($\geqq \Omega$) is given by

$$R = 1/l \quad \text{where } l = \max_{0 \leq \nu \leq k} \ \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_{n0}^{(\nu)}|}$$

If we take as an approximate value of R the number

$$R_0 = 1/l_0 \quad \text{where } l_0 = \max_{0 \leq \nu \leq k} \ \max_{N-\lambda \leq n \leq N} \sqrt[n]{|a_{n0}^{(\nu)}|} \tag{2}$$

* If $r = \min\limits_{\nu=1,2,3} (r_\nu) \geqq d > 0$ (r_ν: mutual distances), in some interval I of the independent variable t, the use of any regularization variable is unnecessary and we can take simply $\tau = t$ in I.

N being large enough and $\lambda << N$, the point $\tau_1 = \kappa_0 R_0$ is inside Γ_0 if $\kappa_0 > 0$ is small enough*, so that we have approximatively

$$X_\nu(\tau_1) = \sum_{n=0}^{N} a_{n0}^{(\nu)} (\kappa_0 R_0)^n, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

With these new approximate initial conditions we can solve the system (S) in Taylor series by means of the same recursion formulae *as before*, thus finding a first *approximate analytical continuation*

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1}^{(\nu)} (\tau - \tau_1)^n, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

Each of these series is convergent in a circle Γ_1 center at τ_1 whose radius ($\geqq \Omega_1 \sim \Omega$) can be computed approximatively by means of the same formula (2), that is by taking

$$R_1 = 1/l_1 \quad \text{where } l_1 = \max_{0 \leq \nu \leq k} \; \max_{N-\lambda \leq n \leq N} \sqrt[n]{|a_{n1}^{(\nu)}|}$$

Let the point $\tau_2 = \tau_1 + \kappa_1 R_1$, with $\kappa_1 < \kappa_0$ if necessary, be inside Γ_1. We can similarly calculate the approximate initial conditions

$$X_\nu(\tau_2) = \sum_{n=0}^{N} a_{n1}^{(\nu)} (\kappa_1 R_1)^n, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

necessary for computing, with the same recursion fomulae, the solution of the system (S) in Taylor series

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n2}^{(\nu)} (\tau - \tau_2)^n, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

each convergent in a circle Γ_2 center at τ_2 and radius $\geqq \Omega_2 \sim \Omega$, thus finding a second approximate analytical continuation, and so on.

3. — In the numerical applications with punched cards this method can be made entirely automatic, that is, the results can be automatically controlled and improved in many ways. Let suppose we wish to tabulate an ephemeris with the argument τ and with constant tabular interval, say $\tau = 0(0.01)T$, taking $N = 60$. With $\lambda = 5$ we can compute R_0 and by taking $\kappa_0 = 0.30$ the point $\tau_1 = [30R_0]/100$ where $[x]$ denotes the integral part of x. After performing the table for $\tau = 0(0.01)\tau_1$, we can find the first approximate analytical continuation about the point τ_1. By means of the coefficients thus obtained we compute R_1 and for $\kappa_1 = 0.32$, the point $\tau_2 = [32R_1]/100$. Next we extend the tabulation of the unknown functions to τ_2, and so on. An estimate of the error can be obtained by repeating the computation for a larger N, say $N = 80$, and by varying κ as before.

We can also obtain some information about the error by testing the constancy of the energy integral and of the angular momentum vector. When these integrals are used, we can find the approximate analytical continuations without calculating the approximate radii and making no judgments regarding the best values of κ.

Let

$$\Phi_\xi(X_\nu(\tau)) = h_\xi, \quad (h_\xi : \text{constants}), \quad \xi = 0, 1, 2, 3$$

* The numbers N and κ_0 are closely related (but in no simple way) to the desirable approximation, κ_0^N being *grosso modo* the order of the last term of each Taylor series taken into account.

be the four known integrals of the problem of three bodies. By means of a truncation of the Taylor series solution (1) we can compute, taking for instance $N = 60$, a tabulation of the functions $X_\nu(\tau)$ as well as

$$E_\xi(\tau) = \Phi_\xi(X_\nu(\tau)) - h_\xi, \quad \xi = 0, 1, 2, 3$$

for $\tau = 0(0.01)\tau_1^*$ where τ_1^* is the largest value of the argument for which

$$|E_\xi(\tau)| < \varepsilon_1, \quad \xi = 0, 1, 2, 3$$

so that

$$|E_{\xi_1}(\tau_1^* + 0.01)| \geqq \varepsilon_1$$

where ξ_1 is some value of ξ, and $\varepsilon_1 > 0$ is a (reasonable) prefixed number, depending on the tolerable error and on the number of decimals used in the computations.

By using the values $X_\nu(\tau_1^*)$ as new initial condition we can find a first approximate analytical continuation

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1}^{(\nu)} (\tau - \tau_1^*)^n, \quad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

by a truncation of which we can approximatively compute, with the same N, a tabulation of the functions $X_\nu(\tau)$ and $E_\xi(\tau)$ for the interval $(\tau_1^* + 0.01)\ (0.01)\tau_2^*$, where τ_2^* is the largest value of the argument τ for which

$$|E_\xi(\tau)| < \varepsilon_2, \quad \xi = 0, 1, 2, 3$$

so that

$$|E_{\xi_2}(\tau_2^* + 0.01)| \geqq \varepsilon_2$$

where ξ_2 denotes some value of ξ, and where $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ is another prefixed number, and so on* **.

4. — In this section we would like to return [5]*** to a particular case of the problem of three bodies in which there must occur a binary collision and in which, therefore, Taylor series cannot be applied without a previous remotion of the real singularities of the differential equations of the problem. In this case, a planar isosceles solution of the Fransén-Mac Millan type with a fixed axis of symmetry, the angular momentum vector vanishes. However, no simultaneous collision can occur.

For the same initial conditions (see p. 13) the differential equations of this problem of three bodies can be written, in Jacobian coordinates, as

$$\begin{aligned} (\dot{x})' &= -xy/\rho^3 \\ y'' &= -0.2 + y'^2/y - 0.8(y/\rho)^3, \quad \rho^2 = x^2 + y^2/4 \end{aligned} \qquad (S_1)$$

* When the radii of the succesive circles of convergence are rapidly diminishing, we can arrive to a τ_p^* for which

$$|E_\xi(\tau_p^*)| < \varepsilon_p + 1, \ \xi = 0, 1, 2, 3 \quad \text{and} \quad |E_{\xi p}(\tau_p^* + 0.01)| \geqq \varepsilon_p + 1$$

for some value ξ_p of ξ. In such a case a smaller tabular interval, say 0.001, must be used before calculating the starting initial conditions for the next approximate analytical continuation.

** Obviously, this method can be also applied to obtain the perturbations, that is, the differences between the actual coordinates and the coordinates of the osculating orbit (two-body approximation), all of them expressed as Taylor series expansions.

*** Let me take this opportunity to point out some errors in that paper. Page 84, last line: Insert "generalized" after "analysing the"; page 88, lines 13, 14: The sentences "as rapidly" and "as the power series expansion of exp ($\alpha\tau$)" must be omited Page 88: The whole section 4 on the hyperbolic two-body approximation is superseded by the present paper.

where dot and primes denote, respectively, differentiations with respect to t and to the regularization variable of Sundman and Levi-Civita $\tau = \int_0^t dt/y$, being

$$3.2\dot{x}^2 + (y'/y)^2 = 6.4/\rho + 0.4/y + h_1$$

the energy integral.

If we put

$$X_0 = t \qquad X_1 = \dot{x} \qquad X_2 = (y'^2/y - 0.4)/y$$
$$X_3 = yX_6 \qquad X_4 = y'X_6 \qquad X_5 = xX_6$$
$$X_6 = 1/\rho = 0.5X_1^2 + 0.15625X_2 - H$$

system (S_1) becomes

$$\begin{aligned} X_1' &= -X_3X_5X_6 \\ X_2' &= -1.6\,X_3X_4X_6 \\ X_3' &= X_4 - X_3X_8 \\ X_4' &= X_2X_3 - X_4X_8 + 0.2(1-4X_3^3)\,X_6 \\ X_5' &= X_1X_3 - X_5X_8 \end{aligned} \qquad (S)$$

where

$$X_8 = X_3X_7,$$
$$X_7 = X_1X_5 + 0.25X_4$$

being now

$$\begin{array}{lll} X_0(0) = 0 & X_3(0) = 2/\sqrt{65} & X_6(0) = 1/\sqrt{65} \\ X_1(0) = 1 & X_4(0) = -32/\sqrt{65} & H = 40.34471\ 52654. \\ X_2(0) = 255.8 & X_5(0) = 8/\sqrt{65} & \end{array}$$

The functions by means of which we have tested the accuracy of the computations are in this case

$$E_0(\tau) = 1 - 0.25X_3^2 - X_5^2$$
$$E_1(\tau) = 0.5X_1^2 + 0.15625X_2 - X_6 - H$$
$$E_2(\tau) = X_2X_3^2 + 0.4X_3X_6 - X_4^2$$

Table (p. 17) gives the numerical results obtained on the IBM 1620 of the University of La Plata*. Column I shows the values of κ_p and the corresponding values of τ_{p+1} ($p = 0, 1, 2, \ldots$). Column II includes the values of ε_p and the corresponding values of τ_p^* ($p = 1, 2, \ldots$). Calculations were performed with 28 significant figures, but the results were printed by the computer with only 15 significant figures.

* I wish to express my deep gratitude to Prof. Dr. J. Gordon who has kindly prepared the computer program, and to the operator of the machine Mr. F. G. P. Gottfried for his valuable assistance.

(Added 30 June 1965). Another application of this method has been performed by my pupil F. López García in the paper "Extensión de la tabla de Zumkley por prolongaciones analíticas aproximadas" to appear. In this paper López improves and extends to t = 20 (to fifteen decimal places), the classical table computed by Zumkley in 1941 for the interval —0.2 (0.1) 10 (to three decimal places) of a planar problem of three bodies with equal masses.

REFERENCES

[1] SUNDMAN, K. *Mémoire sur le problème des trois corps*. Acta Math. *36* (1913), 105-179.

[2] SIEGEL, C. L. *Vorlesungen über Himmelsmechanick*. Springer-Verlag, (1955).

[3] CESCO, R. P. *On the general solution of the problem of three bodies*. International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, p. 177.
——— *Sobre la solución general del problema de los tres cuerpos*. Observatorio Astronómico de La Plata, Serie Astr. Tomo XXV, N° 4, (1963).

[4] BRUMBERG, V. A. *The series of polynomials in the problem of three bodies* (in Russian). Bull. Inst. Theor. Astr. IX, N° 4 (107), (1963), 234-256.

[5] CESCO R. P. *Some theorems and results in the three-body problem*. Proc. Intern. Meeting on Problems of Astrometry and Celestial Mechanics. Astronomical Observatory, La Plata, (1961), p. 81-92.

SOLUCION DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS POR PROLONGACIONES ANALITICAS APROXIMADAS

Por

R. P. Cesco

1. — Algunos trabajos recientes acerca de la solución del problema de los tres cuerpos con masas arbitrarias y posibles choques entre dos cuerpos cualesquiera, autorizan a suponer que aún desde el punto de vista numérico la teoría de Sundman [1] puede ser de gran utilidad, no sólo para resolver todos los casos teóricos conocidos, sino también en las aplicaciones astronómicas.

Conforme a esta teoría, si el vector momento angular $\overline{C}$ correspondiente a cualquier problema de tres cuerpos, es distinto de cero, las coordenadas y el tiempo son funciones analíticas de la variable de regularización

$$\tau = \int_0^t (\mathrm{U} + 1)\, dt$$

siendo U la función potencial, en la franja infinita del plano complejo τ definida por las desigualdades $|\mathrm{Re}\tau| < \infty$ y $|\mathrm{Im}\tau| < \Omega$, donde el número positivo Ω sólo depende de las masas y de las condiciones iniciales. Véase, p.e., [2].

Las coordenadas de los tres cuerpos y el tiempo admiten pues sendos desarrollos en series de Taylor en torno de cualquier punto del eje real, cada uno de los cuales converge en un círculo de radio mayor o igual que Ω. Con dichas series se podrán pues calcular ciertos arcos de órbita directamente o aplicando algún método especial de prolongación analítica.

En una nota presentada al último Congreso Internacional de los Matemáticos [3], hemos demostrado que el método de la integral de Borel de sumación de series divergentes, convenientemente adaptado para cálculos numéricos, es muy adecuado para ese fin y hemos dado un ejemplo en el cual, a pesar de que los coeficientes de las series de potencias que resuelven el problema crecen muy rápidamente ($|a_{50}| \sim 4.10^{17}$)! bastan 50 términos de las mismas para calcular las coordenadas y el tiempo aún en puntos bastante alejados del círculo de convergencia.

Muy recientemente Brumberg [4] acaba de aplicar numéricamente a algunos problemas teóricos de tres cuerpos el teorema de Mittag-Leffler sobre desarrollo de funciones analíticas en series de polinomios.

Consideremos la función analítica definida por el elemento

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n$$

siendo esta serie convergente en el círculo $|\tau| < R \neq 0$.

Si ponemos

$$f_n(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} c_k^{(n)}\, a_k \tau^k, \quad g_n(\tau) = \sum_{k=0}^{m_n} c_k^{(n)} \tau^k$$

y si se tiene

$$\lim_{n \to \infty} g_n(\tau) = 1/(1 - \tau)$$

uniformemente en cualquier recinto cerrado y acotado que no contenga puntos del intervalo infinito $\mathrm{Re}\,\tau \geqq 1$, resulta

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\tau) = f(\tau)$$

uniformemente en cualquier recinto cerrado y acotado interior a la estrella rectilínea de Mittag-Leffler de la función $f(\tau)$.

Observemos, de paso, que la franja infinita de Sundman recién mencionada está contenida en cada una de las estrellas de Mittag-Leffler de las coordenadas y del tiempo y que, por tanto, las series de polinomios correspondientes a estas funciones convergen para cualquier valor de τ, luego de t.

Después de calcular los coeficientes $c_k^{(n)}$ no inferiores a $\varepsilon = 10^{-10}$ mediante el método de Goursat, pero aplicando una generalización del teorema de Cauchy-Lipschitz obtenida por Picone en 1932, Brumberg demuestra numéricamente que si se pone $m_n = (\nu + 1)^n - 1$ y se toma $n = 2, 3, 4, 5$; $\nu = 9, 10$ se necesitan 157 términos de la solución en series de Taylor de algunos problemas particulares de tres cuerpos (sin colisiones reales) para obtener las coordenadas y el tiempo con seis cifras decimales.

2. — En este artículo nos permitimos proponer, como método más simple y muy efectivo para la resolución numérica del problema de los tres cuerpos, basado en la teoría de Sundman, la aplicación aproximada del clásico principio de prolongación analítica mediante una cadena de círculos.

Supongamos que el sistema (S) de ecuaciones diferenciales del problema de tres cuerpos, con τ como variable independiente*, se ha escrito en una forma cómoda para el cálculo de los coeficientes de la solución en series de Taylor, por el método de los coeficientes indeterminados de Newton-Cauchy, y sean $X_\nu(0) = a_{00}^{(\nu)}$ las condiciones iniciales (reales) de cualquier problema de tres cuerpos en el cual sea $\overline{C} \neq 0$.

Sea

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0}^{(\nu)} \tau^n, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, k \tag{1}$$

el elemento de la solución en series de Taylor. En virtud del teorema de Sundman todas estas series convergen en un círculo Γ_0 cuyo radio ($\geqq \Omega$) está dado por la fórmula

$$R = 1/l \text{ siendo } l = \operatorname*{Max}_{0 \leq \nu \leq k} \ \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_{n0}^{(\nu)}|}$$

Si tomamos como valor aproximado de R el número

$$R_0 = 1/l_0 \text{ donde } l_0 = \operatorname*{Max}_{0 \leq \nu \leq k} \ \operatorname*{Max}_{N-\lambda \leq n \leq N} \sqrt[n]{|a_{n0}^{(\nu)}|} \tag{2}$$

---

* Si para todo valor de t de cierto intervalo I, se tiene $r = \operatorname*{Min}_{\nu=1,2,3} (r_\nu) \geqq d > 0$ donde las r_ν son las distancias mutuas, es complicación innecesaria el uso de variable de regularización en I.

siendo N bastante grande y $\lambda << N$, el punto $\tau_1 = \kappa_0 R_0$ será interior a Γ_0 si se toma $\kappa_0 > 0$ suficientemente pequeño*, de modo que se tendrá aproximadamente

$$X_\nu(\tau_1) = \sum_{n=0}^{N} a_{n0}^{(\nu)} (\kappa_0 R_0)^n, \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$$

Con estas nuevas condiciones iniciales aproximadas se podrá resolver el sistema (S) usando las mismas fórmulas de recurrencia y hallar así una primera *prolongación analítica aproximada*

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1}^{(\nu)} (\tau - \tau_1)^n, \qquad \nu = 0,\ 1, \ldots,\ k \tag{3}$$

Todas estas series convergen en un círculo Γ_1, centro en τ_1, cuyo radio ($\geqq \Omega_1 \sim \Omega$) se puede calcular aproximadamente por medio de la misma fórmula (2), es decir tomando

$$R_1 = 1/l_1 \text{ donde } l_1 = \max_{0 \leq \nu \leq k} \ \max_{N-\lambda \leq n \leq N} \sqrt[n]{|a_{n1}^{(\nu)}|}$$

Supongamos que el punto $\tau_2 = \tau_1 + \kappa_1 R_1$, con $\kappa_1 < \kappa_0$ si fuese necesario, sea interior a Γ_1. Mediante sumas parciales de (3) podremos calcular análogamente, las condiciones iniciales aproximadas

$$X_\nu(\tau_2) = \sum_{n=0}^{N} a_{n1}^{(\nu)} (x_1 R_1)^n, \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$$

que se necesitan para hallar, con las mismas fórmulas de recurrencia, la solución del sistema (S) en series de potencias:

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n2}^{(\nu)} (\tau - \tau_2)^n, \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$$

convergentes en un círculo Γ_2, centro en τ_2 y radio $\geqq \Omega_2 \sim \Omega$, obteniéndose de este modo una segunda prolongación analítica aproximada, y así sucesivamente.

3. — En las aplicaciones numéricas con tarjetas perforadas este método puede automatizarse enteramente, en el sentido de que los resultados pueden controlarse y mejorarse automáticamente, de varios modos.

Supongamos que se desea tabular una efemérides con argumento τ y paso tabular constante, digamos $\tau = 0(0.01)T$, fijando $N = 60$. Con los coeficientes calculados mediante las condiciones iniciales dadas y con $\lambda = 5$ se puede calcular R_0 y, tomando $\kappa_0 = 0.30$, el punto $\tau_1 = [30R_0]/100$ siendo $[x]$ la parte entera de x. Después de tabular las coordenadas y el tiempo en el intervalo $\tau = 0(0.01)\tau_1$, se procederá a calcular los coeficientes de la primera prolongación analítica aproximada en torno de τ_1. Por medio de éstos calcularemos R_1 y con $\kappa_1 = 0.32$ el punto $\tau_2 = \tau_1 + [32R_1]/100$. Luego extenderemos la tabulación de las incógnitas hasta τ_2, y así sucesivamente. Una estimación del error puede obtenerse repitiendo el cálculo con más términos, digamos con $N = 80$, y variando κ como antes.

Pero también puede obtenerse información respecto del error, controlando los valores de la constante de la energía y del vector momento angular. El uso de estas integrales conocidas permite determinar las sucesivas prolongaciones analíticas aproximadas, fijando N, sin abrir juicio respecto de los mejores valores de κ.

* Los números N y κ_0 dependen de la aproximación deseada, aunque no, en general, de manera simple. Empero se puede afirmar que, *grosso modo*, el orden del último término de cada serie tomado en cuenta está dado por κ_0^N.

Sean

$$\Phi_\xi(X_\nu(\tau)) = h_\xi, \quad \xi = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \quad (h_\xi\text{: constantes})$$

las cuatro integrales conocidas del problema de los tres cuerpos.

Por medio de sumas parciales de la solución (1) del sistema (S) en series de Taylor, tomando por ejemplo $N = 60$, se pueden tabular las funciones $X_\nu(\tau)$ como asimismo

$$E_\xi(\tau) = \Phi_\xi(X_\nu(\tau)) - h_\xi, \quad \xi = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

en el intervalo $\tau = 0(0.01)\tau_1^*$ donde τ_1^* es el máximo valor del argumento que satisface las desigualdades

$$|E_\xi(\tau)| < \varepsilon_1, \quad \xi = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

de modo que será

$$|E_{\xi_1}(\tau_1^* + 0.01)| \geqq \varepsilon_1$$

para algún valor ξ_1 de ξ, donde el número $\varepsilon_1 > 0$ debe prefijarse teniendo en cuenta que depende del error tolerable de los resultados y del número de decimales utilizados en los cálculos.

Con los valores $X_\nu(\tau_1^*)$ como nuevas condiciones iniciales se puede hallar una primera prolongación analítica aproximada:

$$X_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1}^{(\nu)}\ (\tau - \tau_1^*)^n, \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$$

y por medio de sumas parciales de estas series, con el mismo valor de N, la tabulación de las funciones X_ν y E_ξ en el intervalo $(\tau_1^* + 0.01)\ (0.01)\tau_2^*$, donde τ_2^* es el mayor valor del argumento que satisface las desigualdades

$$|E_\xi(\tau)| < \varepsilon_2, \quad \xi = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

de modo que será

$$|E_{\xi_2}(\tau_2^* + 0.01)| \geqq \varepsilon_2$$

para cierto valor ξ_2 de ξ, donde $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ es otro número prefijado, y así sucesivamente*.

4. — En este párrafo desearíamos volver a considerar un caso particular del problema de tres cuerpos en el cual debe ocurrir una colisión binaria y en que, por tanto, las ecuaciones diferenciales del movimiento presentan una singularidad real que impide la aplicación directa de las series de Taylor, exigiendo una previa regularización. Se trata de una solución isósceles del tipo Fransén-Mac Millan, con un eje fijo de simetría y a pesar de que en este caso el vector momento angular es nulo, no puede ocurrir un choque simultáneo de los tres cuerpos; y, como ya hemos demostrado en [5], la variable de regularización de Sundman y Levi-Civita permite evitar cómodamente dicha singularidad.

Sean $m_0 = 0.8$ y $m_1 = m_2 = 0.1$ las masas de los tres cuerpos y, para $t = 0$

$$\begin{array}{llllll}
\xi_0^{(0)} = 1.6 & \eta_0^{(0)} = 0 & \xi_1^{(0)} = -6.4 & \eta_1^{(0)} = 1 & \xi_2^{(0)} = \xi_1^{(0)} & \eta_2^{(0)} = -\eta_1^{(0)} \\
\dot\xi_0^{(0)} = 0.2 & \dot\eta_0^{(0)} = 0 & \dot\xi_1^{(0)} = -0.8 & \dot\eta_1^{(0)} = -8 & \dot\xi_2^{(0)} = \dot\xi_1^{(0)} & \dot\eta_2^{(0)} = -\dot\eta_1^{(0)}
\end{array}$$

las coordenadas baricéntricas y las componentes de las velocidades, donde con $(\xi_i \eta_i)$ se indican las coordenadas del punto-masa $m_i (i = 0,\ 1,\ 2)$.

* Como es obvio, este método puede aplicarse también para obtener las perturbaciones, es decir las diferencias entre las coordenadas que hemos venido considerando y las coordenadas de la órbita osculadora, expresadas también en series de potencias.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento pueden escribirse, en coordenadas de Jacobi, en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x/\rho^3 \\ \ddot{y} &= -0.8y/\rho^3 - 0.2/y^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2/4 \end{aligned} \qquad (S_0)$$

donde

$$x = \xi_0 - \xi_1, \quad y = \eta_1 - \eta_2 = 2\eta_1$$

siendo

$$0.80\dot{x}^2 + 0.25\dot{y}^2 = 1.60/\rho + 0.10/y + h_0$$

la integral de la energía, y, para $t = 0$,

$$x_0 = 8, \quad \dot{x}_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad \dot{y}_0 = -16$$

las condiciones iniciales del sistema (S_0).

Introduciendo la variable independiente $\tau = \int_0^t dt/y$ el sistema (S_0) y la integral de la energía toman la forma

$$\begin{aligned} (\dot{x})' &= -xy/\rho^3 \\ y'' &= -0.2 + y'^2/y - 0.8y^3/\rho^3 \\ 3.2\dot{x}^2 + y'^2/y^2 &= 6.4/\rho + 0.4/y + h_1 \end{aligned} \qquad (S_1)$$

donde el punto sigue indicando derivación respecto de t y los acentos significan derivaciones respecto de τ.

Si introducimos ahora las funciones incógnitas

$$\begin{aligned} &X_0 = t \qquad X_1 = \dot{x} \qquad X_2 = (y'^2/y - 0.4)/y \\ &X_3 = yX_6 \qquad X_4 = y'X_6 \qquad X_5 = xX_6 \end{aligned}$$

donde

$$X_6 = \frac{1}{\rho} = 0.5X_1^2 + 0.15625X_2 - H$$

el sistema (S_1) se transforma en el siguiente:

$$\begin{aligned} X_1' &= -X_3X_5X_6 \\ X_2' &= -1.6X_3X_4X_6 \\ X_3' &= X_4 - X_3X_8 \\ X_4' &= X_2X_3 - X_4X_8 + 0.2(1 - 4X_3^3)X_6 \\ X_5' &= X_1X_3 - X_5X_8 \end{aligned} \qquad (S)$$

donde

$$X_8 = X_3X_7, \quad X_7 = X_1X_5 + 0.25X_4$$

con las correspondientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} &X_0(0) = 0 \qquad X_1(0) = 1 \qquad X_2(0) = 255.8 \\ &X_3(0) = 2/\sqrt{65} \qquad X_4(0) = -32/\sqrt{65} \qquad X_5(0) = 8/\sqrt{65} \end{aligned}$$

y las siguientes funciones para control de los cálculos:

$$E_0(\tau) = 1 - 0.25X_3^2 - X_5^2$$
$$E_1(\tau) = 0.5X_1^2 + 0.15625X_2 - X_6 - 40.3447152654.$$
$$E_2(\tau) = X_2X_3^2 + 0.4X_3X_6 - X_4^2$$

Cambiando ahora en (1) $a_{k-1,0}^{(\nu)}$ por $a_{k0}^{(\nu)}$ o más simplemente por $a_k^{(\nu)}$, $k = 1, 2, \ldots$, la solución del sistema (S) puede expresarse en la forma

$$X_\nu(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} \tau^{k-1}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, 5 \tag{4}$$

siendo

$$a_1^{(\nu)} = X_\nu(0)$$

Para simplificar las fórmulas finales prolonguemos las (4) dando a ν los valores 6, 7, 8 con las condiciones:

$$a_1^{(6)} = 1/\sqrt{65}; \qquad a_1^{(7)} = 0; \qquad a_1^{(8)} = 0$$

y pongamos, para $\nu = 9$, 10, 11, respectivamente,

$$(X_3(\tau))^2 = X_9(\tau); \qquad (X_3(\tau))^3 = X_{10}(\tau); \qquad X_3(\tau)/X_6(\tau) = y = X_{11}(\tau)$$

con

$$a_1^{(9)} = 4/\sqrt{65}; \qquad a_1^{(10)} = 8/65\sqrt{65}; \qquad a_1^{(11)} = 2$$

Los coeficientes $a_2^{(\nu)}$, $a_3^{(\nu)}$, .., $(v = 0, 1,$., $11)$, se obtienen aplicando las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$ka_{k+1}^{(1)} = -\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu^{(6)} P_{k-\nu+1}, \qquad P_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} a_\nu^{(3)} a_{\mu-\nu+1}^{(5)}$$

$$ka_{k+1}^{(2)} = -1.6\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu^{(6)} Q_{k-\nu+1}, \qquad Q_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} a_\nu^{(3)} a_{\mu-\nu+1}^{(4)}$$

$$ka_{k+1}^{(3)} = a_k^{(4)} - \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu^{(3)} a_{k-\nu+1}^{(7)}$$

$$ka_{k+1}^{(4)} = 0.2a_k^{(6)} + \sum_{\nu=1}^{k} (a_\nu^{(2)} a_{k-\nu+1}^{(3)} - a_\nu^{(4)} a_{k-\nu+1}^{(7)} - 0.8a_\nu^{(6)} a_{k-\nu+1}^{(10)})$$

$$ka_{k+1}^{(5)} = \sum_{\nu=1}^{k} (a_\nu^{(1)} a_{k-\nu+1}^{(3)} - a_\nu^{(5)} a_{k-\nu+1}^{(7)})$$

$$a_{k+1}^{(6)} = 0.15625\, a_{k+1}^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k+1} a_\nu^{(1)} a_{k-\nu+2}^{(1)}$$

$$a_{k+1}^{(7)} = 0.25\, a_{k+1}^{(5)} + \sum_{\nu=1}^{k+1} a_\nu^{(1)} a_{k-\nu+2}^{(5)}$$

$$a_{k+1}^{(8)} = \sum_{\nu=1}^{k+1} a_\nu^{(3)} a_{k-\nu+2}^{(7)}$$

$$a_{k+1}^{(9)} = \sum_{\nu=1}^{k+1} a_\nu^{(3)} a_{k-\nu+2}^{(3)}$$

$$a_{k+1}^{(10)} = \sum_{\nu=1}^{k+1} a_\nu^{(3)} a_{k-\nu+2}^{(9)}$$

$$a_1^{(6)} a_{k+1}^{(11)} = a_{k+1}^{(3)} - \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu^{(11)} a_{k-\nu+2}^{(6)}$$

$$a_{k+1}^{(0)} = a_{k+1}^{(11)}/(k+1)$$

En la tabla inserta se dan los resultados numéricos obtenidos con la computadora IBM 1620 de la Universidad de La Plata*. Los cálculos se realizaron con 28 cifras significativas pero los resultados, es decir, la tabla de las funciones

$$x = X_5/X_6 \qquad y = X_3/X_6 \qquad t = \int_0^\tau X_3 d\tau/X_6$$
$$x' = X_1X_3/X_6 \qquad y' = X_4/X_6 \qquad E_0,\ E_1,\ E_2$$

solamente se ha hecho imprimir por la computadora con 15 cifras significativas. La columna I de la tabla contiene los valores elegidos de κ_p y los correspondientes valores de τ_{p+1} ($p = 0, 1, 2, \ldots$); y en la columna II hemos incluído los valores adoptados de ε_p y los valores correspondientes de τ_p^* ($p = 1, 2, \ldots$).

Observatorio Astronómico de La Plata, Abril 26 de 1965.

(Agregado el 30 de junio de 1965). Otra aplicación de este método ha sido realizada por mi alumno F. López García en su trabajo "Extensión de la tabla de Zumkley por prolongaciones analíticas aproximadas" en curso de publicación. En este artículo López perfecciona y amplía hasta t = 20, una clásica efemérides referente a un problema de tres cuerpos con masas iguales, calculada por Zumkley en 1941.

* Deseo dejar aquí expresa constancia de mi profundo agradecimiento al Prof. Dr. Jacobo Gordon a cuya amistosa colaboración se debe la preparación del programa de cómputos, y al señor Federico G. P. Gottfried por su valiosísima ayuda en las operaciones de máquina.

TABLA ($N = 60$; $\lambda = 5$)

	t	x	y	x'	y'	I		II	
						τ_p	$Max\|E_\xi\|$ $\xi = 0,1$	τ_p°	ε_p
.00	.00000 00000	8.00000 00000	2.00000 00000	2.00000 00000	— 32.00000 00000				
.01	.01848 19939	8.01847 93849	1.70427 81143	1.70379 67914	27.27038 70700				
.02	.03423 11315	8.03422 21774	1.45226 42172	1.45150 41345	23.23978 14876	$\kappa_0 = 0.30$			
.03	.04765 13330	8.04763 39768	1.23749 84740	1.23659 66148	19.80488 61909				
.04	.05908 68207	8.05906 01300	1.05447 56887	1.05352 26928	16.87766 45307	τ_1	$2.10^{-[illegible]}$		
.05	.06883 09412	8.06879 47179	0.89850 42630	0.89755 83282	14.38308 74319				
.06	.07713 36843	8.07708 81932	.76558 59791	.76468 28342	12.25721 26445			τ_1°	$10^{-[illegible]}$
.07	.08420 80911	8.08415 38723	.65231 35380	.65147 35485	10.44554 71049	$\kappa_1 = 0,32$			
.08	.09023 57147	8.09017 34568	.55578 32326	.55501 64308	8.90165 09823				
.09	.09537 12739	8.09530 17296	.47352 05232	.47283 01429	7.58594 77885				
.10	.09974 66199	8.09967 05506	.40341 66103	.40280 15498	6.46471 02012	τ_2	$3.10^{-[illegible]}$		
.11	.10347 41156	8.10339 22575	.34367 43795	.34313 09016	5.50919 56877				
.12	.10664 95164	8.10656 25601	.29276 23354	.29228 52249	4.69490 98275				
.13	.10935 44245	8.10926 30044	.24937 53430	.24895 86830	4.00097 84808				
.14	.11165 83811	8.11156 30712	.21240 11717	.21203 88515	3.40961 27304	$\kappa_2 = 0.34$			
.15	.11362 06490	8.11352 19625	.18089 19836	.18057 80204	2.90565 28932			τ_2°	$10^{-[illegible]}$
.16	.11529 17317	8.11519 01236	.15404 00358	.15376 87690	2.47617 99194				
.17	.11671 46681	8.11661 05388	.13115 69745	.13092 31721	2.11018 42230				
.18	.11792 61358	8.11781 98359	.11165 61885	.11145 50957	1.79828 34572	τ_3	$4.10^{-[illegible]}$		
.19	.11895 73916	8.11884 92262	.09503 77719	.09486 51219	1.53248 20006				
.20	.11983 50721	8.11972 53065	.08087 57086	.08072 77093	1.30596 59916				
.21	.12058 18775	8.12047 07410	.06880 69516	.06868 02583	1.11292 86551				
.22	.12121 71525	8.12110 48433	.05852 21161	.05841 37964	0.94842 14462				
.23	.12175 73830	8.12164 40717	.04975 75485	.04966 50438	.80822 71940	$\kappa_3 = 0.36$			
.24	.12221 66184	8.12210 24517	.04228 85675	.04220 96541	.68875 19939				
.25	.12260 68317	8.12249 19356	.03592 37045	.03585 64558	.58693 30777				
.26	.12293 82264	8.12282 27091	.03049 97949	.03044 25466	.50016 02991				
.27	.12321 94983	8.12310 34525	.02587 77959	.02582 91128	.42620 92221				
.28	.12345 80584	8.12334 15634	.02193 92217	.02189 78687	.36318 40973				
.29	.12366 02226	8.12354 33462	.01858 31061	.01854 80221	.30946 92640	τ_4	$4.10^{-[illegible]}$	τ_3°	$10^{-[illegible]}$
.30	.12383 13739	8.12371 41741	.01572 34146	.01569 36888	.26368 77326				
.31	.12397 61001	8.12385 86266	.01328 68383	.01326 16899	.22466 58850				
.32	.12409 83118	8.12398 06068	.01121 09154	.01118 96753	.19140 33890				
.33	.12420 13423	8.12408 34421	.00944 24290	.00942 45247	.16304 75544				
.34	.12428 80333	8.12416 99686	.00793 60436	.00792 09853	.13887 14740				
.35	.12436 08075	8.12424 26047	.00665 31429	.00664 05115	.11825 53896				
.36	.12442 17309	8.12430 34124	.00556 08395	.00555 02767	.10067 08040				
.37	.12447 25658	8.12435 41507	.00463 11318	.00462 23315	.08566 69332	$\kappa_4 = 0.38$			
.38	.12451 48157	8.12439 63203	.00384 01867	.00383 28869	.07285 91501				
.39	.12454 97642	8.12443 12024	.00316 77282	.00316 17050	.06191 91248				
.40	.12457 85075	8.12445 98910	.00259 65177	.00259 15795	.05256 64077				
.41	.12460 19830	8.12448 33218	.00211 19121	.00210 78948	.04456 12403				
.42	.12462 09928	8.12450 22955	.00170 14884	.00169 82513	.03769 84085				
.43	.12463 62247	8.12451 74985	.00135 47253	.00135 21476	.03180 19824				
.44	.12464 82697	8.12452 95205	.00106 27335	.00106 07113	.02672 08060				
.45	.12465 76369	8.12453 88699	.00081 80278	.00081 64711	.02232 46224	τ_5	$7.10^{-[illegible]}$		
.46	.12466 47669	8.12454 59863	.00061 43351	.00061 31659	.01850 07347				
.47	.12467 00428	8.12455 12522	.00044 64336	.00044 55839	.01515 11167				
.48	.12467 38004	8.12455 50026	.00031 00192	.00030 94291	.01218 99004				
.49	.12467 63364	8.12455 75338	.00020 15948	.00020 12111	.00954 11745				
.50	.12467 79163	8.12455 91107	.00011 83811	.00011 81558	.00713 70383				
.51	.12467 87809	8.12455 99736	.00005 82447	.00005 81339	.00491 58615			τ_4°	10^{-10}
.52	.12467 91529	8.12456 03449	.00001 96441	.00001 96067	.00282 07037				
.53	.12467 92422	8.12456 04341	.00000 15898	.00000 15868	— .00079 78551				
.54	.12467 92516	8.12456 04434	.00000 36189	.00000 36120	+ .00120 45403				
.55	.12467 93816	8.12456 05732	.00002 57835	.00002 57344	.00323 78143				
.56	.12467 98362	8.12456 10269	.00006 86516	.00006 85210	.00535 40903				
.57	.12468 08273	8.12456 20161	.00013 33224	.00013 30686	.00760 76194	$\kappa_5 = 0.40$			
.58	.12468 25808	8.12456 37663	.00022 14536	.00022 10320	.01005 61712				
.59	.12468 53420	8.12456 65223	.00033 53044	.00033 46661	.01276 25149				
.60	.12468 93822	8.12457 05548	.00047 77935	.00047 68840	.01579 60280				
.61	.12469 50054	8.12457 61673	.00065 25736	.00065 13313	.01923 44751				
.62	.12470 25562	8.12458 37037	.00086 41252	.00086 24801	.02316 60017				
.63	.12471 24285	8.12459 35572	.00111 78715	.00111 57432	.02769 13929				
.64	.12472 50758	8.12460 61804	.00142 03173	.00141 76129	.03292 66582				
.65	.12474 10228	8.12462 20971	.00177 92158	.00177 58276	.03900 60044				
.66	.12476 08788	8.12464 19152	.00220 37676	.00219 95703	.04608 52768				
.67	.12478 53531	8.12466 63429	.00270 48560	.00269 97033	.05434 59538				
.68	.12481 52736	8.12469 62064	.00329 53266	.00328 90475	.06399 97995	τ_6	$6.10^{-[illegible]}$		
.69	.12485 16077	8.12473 24713	.00399 03162	.00398 27107	.07529 42918				
.70	.12489 54873	8.12477 62673	.00480 76409	.00479 84744	.08851 89673				
.71	.12494 82378	8.12482 89171	.00576 82531	.00575 72504	.10401 28429				
.72	.12501 14116	8.12489 19704	.00689 67782	.00688 36162	.12217 31070				
.73	.12508 68289	8.12496 72437	.00822 21461	.00820 64454	.14346 53014				
.74	.12517 66233	8.12505 68666	.00977 83330	.00975 96473	.16843 52553				
[illegible]	[illegible]	[illegible]	.01160 52319	.01158 30364	.19772 30783				
.77	.12555 95314	8.12543 90418	.01626 66377	.01623 54590	.27238 54624				
.78	.12573 65738	8.12561 57447	.01922 06406	.01918 37484	.31967 40076	$\kappa_6 = 0.42$			
.79	.12594 56519	8.12582 44212	.02268 74109	.02264 37927	.37515 74552				
.80	.12619 23258	8.12607 06203	.02675 58198	.02670 42799	.44025 81335				
.81	.12648 31194	8.12636 08532	.03153 01619	.03146 92862	.51664 49104				
.82	.12682 56878	8.12670 27592	.03713 28281	.03706 09427	.60627 59749				
.83	.12722 90131	8.12710 53025	.04370 74439	.04362 25638	.71144 90357				
.84	.12770 36351	8.12757 90010	.05142 25507	.05132 23184	.83486 02232				
.85	.12826 19212	8.12813 61966	.06047 59269	.06035 75367	.97967 32053				
.86	.12891 83836	8.12879 13707	.07109 96572	.07095 97632	1.14960 02883				
.87	.12969 00514	8.12956 15156	.08356 60830	.08340 06846	1.34899 75826			τ_5°	$10^{-[illegible]}$
.88	.13059 69067	8.13046 65699	.09819 47833	.09799 90838	1.58297 66715				
.89	.13166 23975	8.13152 99285	.11536 07675	.11512 89976	1.85753 56470				
.90	.13291 40381	8.13277 90426	.13550 40885	.13522 92846	2.17971 28706	τ_7	$6.3\ 10^{-[illegible]}$		
.91	.13438 41150	8.13424 61219	.15914 11239	.15881 48478	2.55776 74014				
.92	.13611 05144	8.13596 89593	.18687 78130	.18648 97960	3.00139 07147				
.93	.13813 76933	8.13799 18980	.21942 51901	.21896 28780	3.52195 51402				
.94	.14051 78190	8.14036 69663	.25761 76121	.25706 55787	4.13280 53846				
.95	.14331 21071	8.14315 52077	.30243 41469	.30177 33357	4.84960 06124				
.96	.14659 23899	8.14642 82421	.35502 36714	.35423 04088	5.69071 58488	$\kappa_7 = 0.44$			
.97	.15044 29584	8.15027 00954	.41673 43226	.41577 90264	6.67771 29920				
.98	.15496 27229	8.15477 93455	.48914 90563	.48799 35380	7.83589 34981				
.99	.16026 77485	8.16007 16387	.57412 11985	.57272 04237	9.19494 68972				
1.00	.16649 42306	8.16628 26387	.67383 20298	.67212 51510	10.78971 17409				
1.01	.17380 10859	8.17357 14837	.79083 66209	.78874 70360	12.66106 84581				
1.02	.18237 85492	8.18212 48377	.92813 43501	.92556 34559	14.85698 69507				
1.03	.19244 39800	8.19216 16366	1.08924 47796	1.08606 49785	17.43375 57042	τ_8	$6.3\ 10^{-[illegible]}$		
1.04	———	8.20393 86484	1.27829 78600	———	———				
1.05	.21811 91411	8.21775 69839	1.50013 97689	1.49519 36663	24.00549 24869				
1.06	.23438 74452	8.23396 97199	1.76045 70917	1.75423 56103	28.16889 96708				
1.07	.25347 86485	8.25299 08215	2.06592 25148	2.05805 26640	33.05434 71833	$\kappa_8 = 0.46$			
1.08	.27588 23378	8.27530 55836	2.42436 57509	2.41435 67245	38.78703 02923				
1.09	.30217 30039	8.30148 28483	2.84497 40507	2.83217 98075	45.51383 80582				
1.10	.33302 47620	8.33218 92984	3.33852 74041	3.32209 85615	53.40710 52152				
1.11	.36922 86213	8.36820 61856	3.91767 44029	3.89649 75104	62.66900 98022				
1.12	.41171 27464	8.41044 89139	4.59725 57626	4.56987 85232	73.53672 69322	τ_9	$1.6\ 10^{-[illegible]}$		
1.13	.46156 62243	8.45998 99879	5.39468 36926	5.35922 59228	86.28846 83882				
1.14	.52006 69453	8.51808 59382	6.33038 67186	6.28443 90078	101.25056 11085				
1.15	.58871 43040	8.58620 89681	7.42833 12884	7.36884 63799	118.80574 62475	$\kappa_9 = 0.48$			
1.16	.66926 75550	8.66608 42210	8.71663 29967	8.63981 88097	139.40291 54791				
1.17	.76379 07069	8.75973 37447	10.22827 43174	10.12949 85919	163.56854 30760				
1.18	.87470 57316	8.86952 84042	12.00194 51017	11.87566 26958	191.92012 01451	τ_{10}	$1.5\ 10^{-[illegible]}$		
1.19	1.00485 35450	8.99824 91586	14.08303 03379	13.92273 48102	225.18194 89204				
1.20	1.15756 74916	9.14915 92603	16.52476 76349	16.32295 99445	264.20370 82474				
1.21	1.33675 80439	9.32608 90789	19.38960 80008	19.13775 83636	309.98225 82560	$\kappa_{10} = 0.50$			
1.22	1.54701 27912	9.53353 54681	22.75081 17154	22.43928 58957	363.68722 06925				
1.23	1.79371 36516	9.77677 79391	26.69432 19938	26.31224 33392	426.69096 22779	τ_{11}	$5.8\ 10^{-[illegible]}$		

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR
EL DÍA 2 DE AGOSTO DEL
AÑO MIL NOVECIENTOS
SESENTA Y CINCO EN
LA IMPRENTA LÓPEZ,
PERÚ 666, BUENOS AIRES,
REPÚBLICA ARGENTINA.