

PROLONGACION ASCENDENTE Y DESCENDENTE

DE CAMPOS POTENCIALES

EN EL DOMINIO FRECUENCIAL

Fernando Guspí y M. Cristina Pacino

Instituto de Física de Rosario, Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Rosario

Rosario, República Argentina

RESUMEN

En el presente trabajo se investigan las posibilidades de uso de la prolongación de campos potenciales en el dominio frecuencial como método de filtrado operando tanto con datos areales como en secciones.

Se analizan los errores del método utilizando la FFT: digitalización, aliasing y periodicidad y se señalan las normas básicas para minimizar su influencia en los resultados.

Por último se efectúa un análisis comparativo preliminar de los resultados obtenidos al efectuar prolongaciones de campos potenciales en los dominios frecuencial y espacial.

ABSTRACT

In the present paper, the possibilities of using the continuation of potential field data in the frequency domain as a filtering method are investigated.

The errors of the FFT method: digitization, aliasing and periodicity are analyzed and some rules to minimize its influence on the results are pointed.

Finally, a preliminary comparative study between the continuation of potential field data in both frequency and spatial domain is performed.

INTRODUCCION

Un problema importante en la interpretación geofísica es la separación de los datos que informan acerca de las características de distintas estructuras geológicas.

Como es sabido, el campo gravimétrico medido contiene una superposición de efectos locales debidos a masas cercanas ó superficiales y efectos regionales // provocados por masas ubicadas lejos del área en estudio ó a grandes profundidades.

El primer paso en la interpretación es transformar el mapa de gravedad original en otro que enfatice uno de los efectos y suprima el otro.

Se han publicado numerosos métodos que permiten efectuar la separación de anomalías operando directamente sobre los datos de medición; suavización (Dehlinger,1972; Introcaso et al.,1984;...), primera y segunda derivada (Peters, 1949; Rosenbach,1953;...), superficies de tendencia (Morelli,1967; Pacino,1983 ...), continuación analítica (Henderson-Zietz,1949...)

Tsuboi(1937) y Dean(1958) introducen respectivamente las series y transformadas de Fourier en el cálculo de anomalías regionales y residuales por prolongación de campos potenciales.

El método consiste básicamente en "transformar" los datos de medición del dominio espacial al frecuencial y luego de operar sobre los datos transformados haciendo uso del teorema de convolución, "antitransformarlos" para recuperar / los resultados de la prolongación en el dominio espacial.

PROLONGACION DE CAMPOS POTENCIALES HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO

Dado un campo potencial $g(x,y)$ en un plano horizontal y considerando que el mismo se repite periódicamente en rectángulos de lados L_x , L_y , entonces $g(x,y)$ es desarrollable en series de Fourier:

$$g(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k,l} \begin{Bmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{Bmatrix} \frac{2k\pi}{L_x} x \times \begin{Bmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{Bmatrix} \frac{2l\pi}{L_y} y$$

Según Tsuboi (1939), los valores del campo situados en otro plano horizontal a una distancia d del anterior (d positiva hacia abajo, negativa hacia arriba) se obtienen multiplicando cada coeficiente del desarrollo anterior por

$$e^{\frac{d}{L_y} \sqrt{\left(\frac{2k\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{2l\pi}{L_x}\right)^2}}$$

En la práctica el campo estará discretizado en una red rectangular de n_x puntos con separación h_x a lo largo del eje x , y n_y puntos separados h_y a lo largo del / eje y .

Los coeficientes de Fourier se calculan entonces aplicando la transformada discreta.

Si en lugar de un campo potencial se tiene un perfil extraído del mismo, $g(x)$, en un plano horizontal y se considera que el mismo se repite periódicamente con período L como se ve en Fig.1, entonces $g(x)$ es desarrollable en series de Fourier y el perfil correspondiente a otro plano horizontal situado a una distancia d del anterior se obtiene multiplicando cada coeficiente de la serie por $e^{2k\pi d/L}$

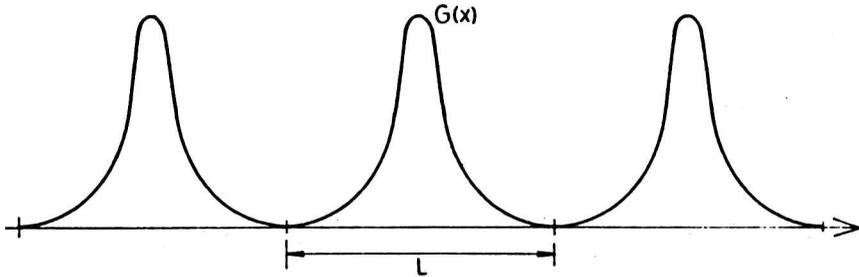


Fig.1: Perfil gravimétrico supuesto periódico con período L

CONSIDERACIONES SOBRE EL MUESTREO DE DATOS

Los datos geofísicos deben convertirse a la forma digital antes de su procesamiento en computadoras digitales, las cuales requieren que los datos de entrada / estén dados en forma de una secuencia finita de números.

El proceso por el cual una señal analógica se convierte en una secuencia de números se conoce con el nombre de digitalización e involucra dos operaciones: muestreo y cuantización. El muestreo define los puntos en los cuales será observada / la señal, en nuestro caso, el campo potencial, mientras que la cuantización es la conversión, en los puntos de muestreo, de las amplitudes de una señal continua en una secuencia de números.

En lo que a la cuantización concierne, consideraremos que los errores que se cometen son suficientemente pequeños y en consecuencia despreciables.

El muestreo generalmente se efectúa en puntos equiespaciados. No obstante, en / algunos casos puede ser necesario digitalizar el campo en puntos no equiespaciados y luego, mediante interpolaciones, llevar a cabo la regularización (Baranov, 1975).

Teóricamente la digitalización debe efectuarse con un muestreo denso que garantice una adecuada semejanza entre el campo continuo y el discreto. Sin embargo, un muestreo con puntos demasiado cercanos se traduce en datos redundantes que incrementan innecesariamente el tiempo de computación. Por otro lado, un muestreo con puntos demasiado alejados puede provocar pérdida de información. La elección del espaciamiento de muestreo está entonces regida por un compromiso razonable / entre estos dos requerimientos opuestos (Kulhanek, O, 1976).

Un importante teorema, conocido como teorema de muestreo, establece que una // función f dada por sus ordenadas f_0, f_1, \dots, f_{n-1} en un conjunto finito de puntos equiespaciados a igual distancia Δx , puede ser aproximada mediante la siguiente función continua:

$$f^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \frac{\text{sen} \pi / \Delta x (x - k \Delta x)}{\pi / \Delta x (x - k \Delta x)}$$

cuya transformada de Fourier continua vale cero para valores de la frecuencia $|w| > 1/2 \Delta x$, frecuencia de Nyquist o de repliegue.

Dado que la transformada discreta de Fourier de la función f es igual a la // transformada continua de f^* , al muestrear una función arbitraria se pierde toda información relativa a frecuencias mayores que la de Nyquist. Si el aporte de / dichas frecuencias es importante se produce el fenómeno denominado "aliasing".

Además, y de acuerdo con Baranov(1976) se ha comprobado la dependencia que existe entre la altura de la prolongación y el espaciamiento de muestreo de manera tal que al prolongar un campo a profundidades mayores que el espaciamiento / de grilla se producen oscilaciones en el espectro y en consecuencia los resultados no son confiables.

Existe además otra restricción para la altura de continuación indicada por // Henderson R.G. (1960) de modo que cuando la altura de continuación excede la mitad de la profundidad de entierro de cuerpos rectangulares ó la mitad de la profundidad al centro para cuerpos esféricos, puede esperarse que el error exceda el 10%.

Por otra parte, la representación de un campo potencial por series de Fourier implica periodicidad del campo a representar y dado que en la práctica el campo de isoanómalas no es periódico se cometen errores de borde.

La forma usual de disminuir el efecto de periodicidad consiste en extender el campo potencial en estudio, operar con el campo extendido y eliminar luego todos los valores agregados. Este procedimiento puede llevarse a cabo de distintas maneras:

Extensión del campo potencial con ceros

Este método fue propuesto por Sato (1954), quien sugirió la inserción de regiones nulas conectadas con los bordes del campo potencial a prolongar.

En Fig. 2a se muestra el plano de isoanómalas de gravedad correspondiente al efecto gravimétrico conjunto de un paralelepípedo bidimensional y una esfera homogénea y su representación tridimensional y en Fig. 2b la sección del plano de // Fig. 2a para $y=0$.

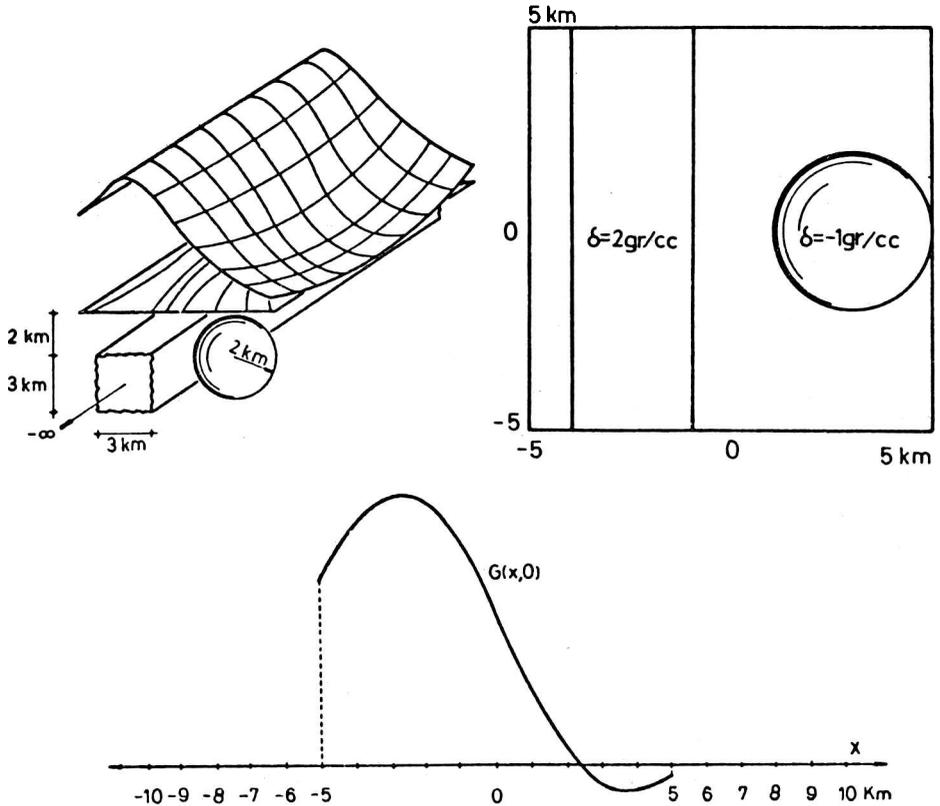


Fig.2: a) Isoanómalas de gravedad correspondientes al efecto gravimétrico conjunto de un paralelepípedo bidimensional de sección rectangular y una esfera homogénea.

b) Sección del plano de isoanómalas para $y=0$.

Los campos potenciales de Fig. 2a y 2b fueron extendidos con valores nulos y // prolongados con distintas cotas de prolongación.

Las diferencias entre los valores teóricos esperados de la prolongación y los / calculados, como era de suponer, disminuyen en los extremos del campo prolongado con ceros. La disminución del error se hace más notable a medida que se incrementa el valor absoluto de la cota de prolongación.

En Fig. 3 se muestran las prolongaciones ascendentes para $z=1\text{Km}$. calculadas con los datos de Fig. 2b , con los datos extendidos con ceros y los valores teóricos esperados.

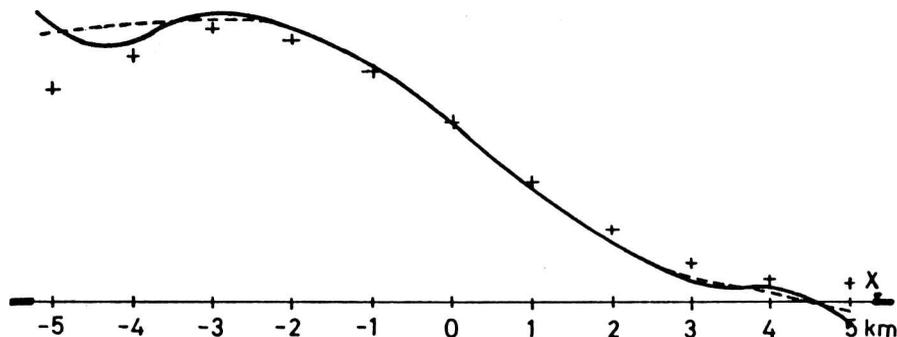


Fig. 3: Prolongaciones ascendentes para $z=1\text{Km}$. con los datos de Fig. 2b (—) , con los datos extendidos con ceros (---) y valores teóricos esperados (+)

Extensión del campo potencial con constantes

Tsay (1974 y 1978) sugiere que la extensión del campo potencial se lleve a cabo mediante la adición de datos constantes a ambos lados de los perfiles a continuar.

Este método fue el adoptado por Pacino (1984) para la disminución del error por truncamiento en la continuación analítica de datos potenciales en el dominio espacial con muy buenos resultados.

En los numerosos ejemplos efectuados se comprobó que con este procedimiento la / disminución de los errores en los bordes es mayor que con el método anterior.

En Fig. 4 se graficaron las prolongaciones ascendentes para $z=1\text{Km}$. calculadas // con los datos de Fig. 2b , con los datos extendidos con constantes y los valores teóricos esperados

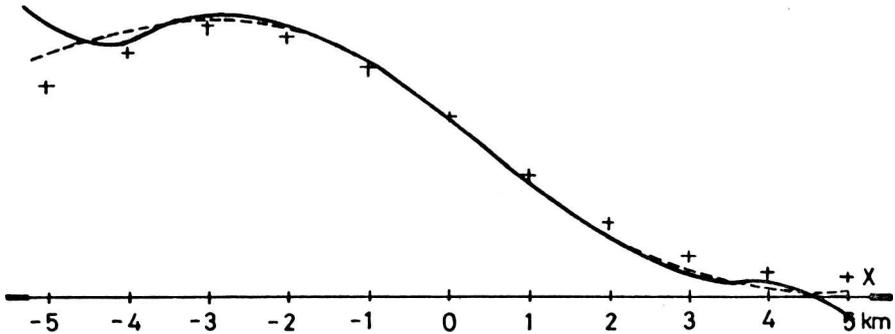


Fig. 4: Prolongaciones ascendentes para $z=1\text{km}$. calculadas con los datos de Fig.2b (—), con los datos extendidos con constantes (----) y valores teóricos esperados (+).

Extensión del campo potencial con valores pertenecientes a rectas de pendiente uniforme tendiendo a cero

Una solución intermedia entre los métodos anteriores se encuentra al extender el campo potencial hacia ambos lados con rectas de pendiente uniforme y que tienden a un valor de $g=0$.

Las prolongaciones ascendentes para $z=1\text{ Km}$. calculadas con los datos de Fig.2b , con los datos extendidos con este método y los valores teóricos esperados son los que se muestran en Fig. 5.

Puede verse como con este procedimiento de extensión de perfiles y áreas el error de periodicidad disminuye considerablemente.

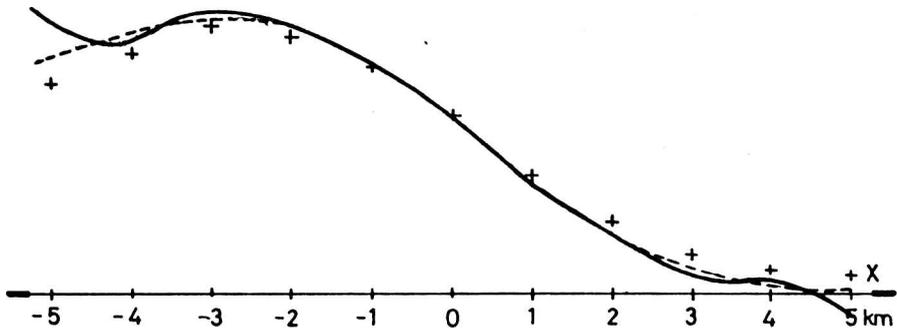


Fig.5: Prolongaciones ascendentes para $z=1\text{km}$. calculadas con los datos de Fig. 2b, (—), con los datos extendidos (----) y valores teóricos esperados (+)

Continuación lateral

Baranov (1975) propone un método de continuación lateral de perfiles y áreas que asegura que la función y su derivada parcial de primer orden será continua dentro del área ampliada.

Así, si tenemos un perfil gravimétrico (ó magnético) definido en un intervalo / (x1,x2) como el de Fig.6, éste podrá ampliarse a un intervalo (a,b), con x1 > a y x2 < b haciendo

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 2g(x_1) - g(2x_1 - x) && \text{si } a < x < x_1 \\
 \text{y } g(x) &= 2g(x_2) - g(2x_2 - x) && \text{si } b > x > x_2
 \end{aligned}$$

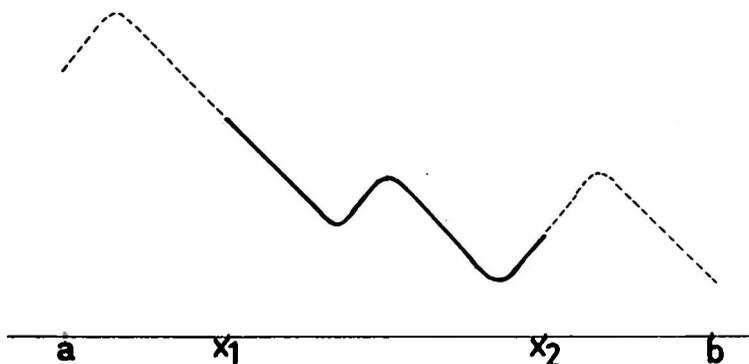


Fig.6: Función definida en un intervalo (x1,x2) continuada lateralmente al intervalo (a,b).

Cuando el campo de isoanómalas está definido dentro de un rectángulo con x1 x x2 y1 y y2 denominado R0 en Fig.7 la continuación lateral se lleva a cabo haciendo

- $g(x,y) = 2g(x_1,y) - g(2x_1 - x, y)$ en la región R1
- $g(x,y) = 2g(x_2,y) - g(2x_2 - x, y)$ en la región R2
- $g(x,y) = 2g(x,y_1) - g(x, 2y_1 - y)$ en la región R3
- $g(x,y) = 2g(x,y_2) - g(x, 2y_2 - y)$ en la región R4

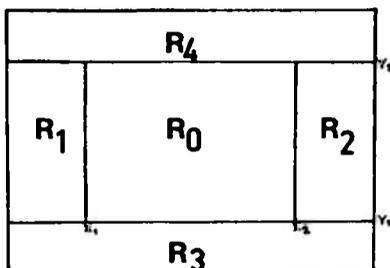


Fig.7: Continuación lateral de una función definida en la región R0

En prolongaciones de campo este método da buenos resultados sólo si el campo potencial a filtrar presenta la forma clásica de campana.

Prolongación de campos mediante transformada de Fourier de la función de convolución

Cuando se tiene un perfil g en un plano horizontal, la ley que determina el perfil en otro plano horizontal situado d Km. más arriba es:

$$g_1(\xi) = \frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-\xi)^2 + d^2} dx \quad (1)$$

Definiendo la función $h(x) = d/(x^2+d^2)$ es inmediato que $g_1 = \frac{1}{\pi} g * h$

Puesto que la transformada de Fourier de una convolución es igual al producto de las transformadas, tendremos:

$$G(g_1) = \frac{1}{\pi} G(g) G(h) \quad (2)$$

donde $G(h)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{x^2+d^2} e^{-2\pi wxi} dx = e^{-2\pi |w| d}$

Esta es la ecuación dada por Tsuboi-Fuchida (1937) y por este motivo se multiplican por exponenciales cada término de la transformada $G(g)(w)$.

En la práctica se trabaja con perfiles cuyos valores son conocidos en un intervalo $(-a,a)$. Si se supone que fuera de ese intervalo el campo es periódico, puede aplicarse (1) directamente.

Si en cambio la hipótesis es que el campo fuera del intervalo $(-a,a)$ vale cero, (1) se convierte en

$$g_1(\xi) = \frac{d}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g(x)}{(x-\xi)^2 + d^2} dx \quad (2')$$

Definiendo la función $h^*(x) = \begin{cases} d/(x^2 + d^2) & \text{si } x \in (-a,a) \\ 0 & \text{si } x \notin (-a,a) \end{cases}$

la ecuación 2' puede expresarse como

$$g_1(\xi) = \frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-\xi)^2 + d^2} dx$$

Luego $g_1 = \frac{g}{\pi} * h^*$

y $G(g_1) = \frac{1}{\pi} G(g) G(h)$ (3)

La transformada de Fourier de h^* es

$$G(h)(w) = \int_{-a}^a \frac{d}{x^2+d^2} e^{-2\pi wxi} dx = \int_{-a}^a \frac{d}{x^2+d^2} e^{-2\pi wxi} dx$$

Esta integral, en un intervalo finito, no tiene expresión analítica conocida. Ha-

brá que resolverla por transformación discreta con un número suficiente de puntos entre $-a$ y a .

Entonces de (3) se ve que en lugar de multiplicar la transformada de g por exponenciales, se multiplica por la transformada de otra función. Si la prolongación se efectúa hacia abajo se debe dividir en lugar de multiplicar.

Los resultados obtenidos son luego antitransformados al dominio espacial.

Este método tiende a disminuir el error de periodicidad pero introduce el error por truncamiento tanto del campo como de la función de convolución. No obstante, pueden obtenerse muy buenos resultados si se lo combina con alguno de los métodos de extensión lateral explicados.

En Fig.8 se muestra la prolongación ascendente para $z=1\text{km}$. del campo potencial de Fig.2b extendida con ceros, la correspondiente al cálculo con este método y / los valores teóricos esperados.

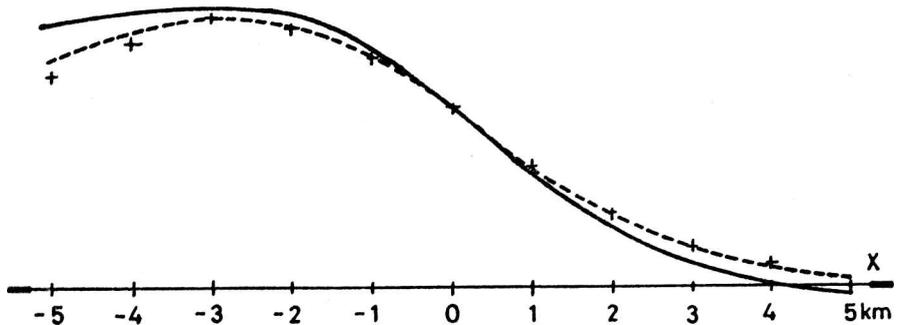


Fig.8: Prolongaciones ascendentes para $z=1\text{km}$. del campo potencial de Fig. 2b extendida con ceros calculadas con el método clásico (—), mediante transformada de Fourier de la función de convolución (-----) y valores teóricos esperados (+).

CONCLUSIONES

El análisis de los resultados obtenidos al prolongar campos potenciales en el dominio frecuencial revela la necesidad de respetar el Teorema de Muestreo a los fines de minimizar la influencia del error por digitalización y evitar el fenómeno de aliasing.

Además se advierte que, para disminuir el error por periodicidad debe llevarse a cabo una extensión lateral de los datos.

Para tal fin se detallan cinco métodos, extensión lateral con ceros, con constantes, con rectas de pendiente uniforme, continuación lateral de Baranov y prolongación de campos mediante transformada de Fourier de la función de convolución, señalando que con el último se obtienen los mejores resultados.

El análisis comparativo de los resultados obtenidos al prolongar campos potenciales en los dominios frecuencial y espacial revela que los valores más precisos son los obtenidos al efectuar el cálculo en el dominio espacial.

Sin embargo, el gran ahorro de tiempo de cálculo que supone el uso de la FFT justifica en algunos casos, fundamentalmente en cálculos areales, el uso del dominio frecuencial.

En un trabajo actualmente en ejecución se está realizando una comparación más completa de ambos métodos.

RECONOCIMIENTO: A Y.P.F. por facilitarnos el uso de sus computadoras.

BIBLIOGRAFIA

BARANOV, W. (1975). Potential Fields and their Transformations in Applied Geophysics. Gebruder Borntraeger. Berlín. 122 pp.

COCHRAN, W.T. et al. (1967). What is the Fast Fourier Transform?. Proc. IEEE, 55,1664-1674

COOLEY Y TUCKEY (1965). An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Math. Comput. Vol 19, p.297-301.

DEAN, W.C.(1958). Frequency Analysis for Gravity and Magnetic Interpretation.

DEHLINGER, P. (1978). Marine Gravity. Elsevier Scientific Publishing Company 322 pp.

HENDERSON-ZIETZ (1949). The Upward Continuation of Anomalies in Total Magnetic Intensity Fields. Geopys.14,517-534.

INTROCASO et al. (1984). Crustal Structure in Southern Uruguay from Gravimetric Study of the Santa Lucía Basin. Bollettino di Geofísica Teórica ed Applicata. Vol XXVI, N.101-102.

KULHANEK, O. (1976). Introduction to Digital Filtering in Geophysics.Elsevier Scientific Publishing Company. 168 pp.

MORELLI, C. (1967). Gravimetría. Ed. Del Bianco - Udine. 575 pp.

PACINO, M.C. (1983). Determinación de Anomalías de Gravedad Regionales y Residuales por medio de Superficies de Tendencia. II Simposio sudamericano de COGEOGDATA. Vol 1, p.151-171.

PACINO, M.C. (1984). Prolongación ascendente de datos potenciales en el dominio espacial.

PETERS, L.J: (1949). The Direct Approach to Magnetic Interpretation and its Practical Application. Geophys. XIV, 290.

ROSENBACH, O. (1953). A Contribution to the Computation of the Second Derivative from Gravity Data. Geophys XVIII, 894.

SATO, Y. (1954). A Note on Tsuboi-Nagata's Method. Bull. Earth Res. Inst. 32, 259-269.

TSAY, L.J. (1974). The Use of Fourier Series Method in Upward Continuation with new Improvements. Geophys. Prosp. 23. 28-41.

TSAY, L.J. (1978). A Spatial Analysis of Upward Continuation of Potential Field Data. Geophys. Prosp. Vol.26, N°4, 822-840.

TSUBOI, C. (1937). Relation Between Gravity Anomalies and the Corresponding Mass Distribution. Bull. Esrthq. 15, 636-649.