

RESOLUCION ESTATICA
DE
SISTEMAS PLANOS

ING. ENRIQUE BUTTY
PROFESOR TITULAR DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL DE BUENOS AIRES

SEGUNDA Y TERCERA PARTE

PRINCIPIOS Y LEYES FUNDAMENTALES PARA LA
RESOLUCION DE SISTEMAS PLANOS

PROCEDIMIENTOS GENERALES PARA LA RESOLUCION
DE SISTEMAS PLANOS

TERCERA EDICION

BUENOS AIRES
CENTRO ESTUDIANTES DE INGENIERIA
DE BUENOS AIRES
1945

DONACION
DE LOS HIJOS DEL
Ing. SALVADOR SPAMPINATO

RESOLUCION ESTATICA
DE SISTEMAS PLANOS

SEGUNDA Y TERCERA PARTE

RESOLUCION ESTATICA

DE

SISTEMAS PLANOS

POR EL

ING. ENRIQUE BUTTY
PROFESOR TITULAR DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL DE BUENOS AIRES

SEGUNDA Y TERCERA PARTE

PRINCIPIOS Y LEYES FUNDAMENTALES PARA LA
RESOLUCION DE SISTEMAS PLANOS

PROCEDIMIENTOS GENERALES PARA LA RESOLUCION
DE SISTEMAS PLANOS

TERCERA EDICION

BUENOS AIRES
CENTRO ESTUDIANTES DE INGENIERIA
DE BUENOS AIRES
1945

Es propiedad. Se ha hecho el depósito de ley.

INDICE

INDICE

SEGUNDA PARTE

PRINCIPIOS Y LEYES FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION DE SISTEMAS PLANOS

CAPITULO IV

TRABAJO EXTERNO DE DEFORMACION

§ 1. — Productos escalares. Trabajo

	PÁG.
346-347. Definiciones	3
348. Teorema	4
349-350. Teorema	5
351-352. Teorema	7
353. Teorema	9

§ 2. — Expresión del trabajo externo de deformación

354-355. Consideraciones generales sobre deformación de cuerpos elásticos	9
356. Expresión del trabajo externo de deformación. Ley de Clapeyron	11

§ 3. — Principio de reciprocidad o ley de Betti

357. Ley de Betti	13
358. Teorema de Maxwell	16

§ 4. — Aplicación de la ley de Betti a la resolución de sistemas hiperestáticos

359-364. Sustitución de los vínculos superfluos por reacciones incógnitas hiperestáticas equivalentes	17
365. Teorema	26
366-369. Resolución de sistemas hiperestáticos	30

§ 5. — Aplicación de la ley de Betti a la obtención de desplazamientos debidos a deformaciones de sistemas planos. Teorema de Mohr

370-371. Esfuerzos auxiliares	35
372-373. Teorema de Mohr	39

§ 6. — Aplicación de la ley de Betti a la determinación de las reacciones de vínculo superfluo debidas a dilataciones térmicas, de frágüe, higrométricas, etc.

	PÁG.
374-375	40

Ejercicios del Capítulo IV

I. Aplicación de la ley de Betti a la resolución de sistemas hiperestáticos	42
II. Aplicación de la ley de Betti (teorema de Mohr) a la obtención de desplazamientos debidos a deformaciones	46
III. Aplicación de la ley de Betti a la determinación de incógnitas hiperestáticas debidas a variaciones de temperatura	49

CAPITULO V

TRABAJO VIRTUAL

§ 1. — Desplazamientos virtuales

376-377. Definiciones J.	53
378. Desplazamientos virtuales equivalentes y dependientes	54
379. Desplazamientos virtuales de puntos libres	54
380-382. Desplazamientos virtuales de sistemas cinemáticos	55
383-385. Desplazamientos virtuales de cadenas elásticas	57

§ 2. — Principio de los trabajos virtuales. Enunciado y aplicaciones

386. Trabajo virtual. Definiciones	60
387-388. Enunciado del principio de los trabajos virtuales	60
389-392. Aplicación del principio de los trabajos virtuales. Ecuaciones de trabajos virtuales	61

§ 3. — Comprobación del principio de los trabajos virtuales

393. Generalidades	65
394-395. Contenido experimental del principio de los trabajos virtuales	66
396-398. Comprobación del principio de los trabajos virtuales para las chapas rígidas	72
399. Comprobación del principio de los trabajos virtuales para las cadenas cinemáticas libres	76
400. Comprobación del principio de los trabajos virtuales para los mecanismos cinemáticos cualesquiera de un grado de libertad	77
401. Comprobación del principio de los trabajos virtuales para los sistemas hiperestáticos	80
402-403. Algunos datos históricos	80

§ 4. — Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la resolución de sistemas planos

	PÁG.
404. Consideraciones generales	82
405. Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la resolución de sistemas isostáticos	83
406. Aplicación del principio de los trabajos virtuales para la resolución de sistemas hiperestáticos	83
407-408. Aplicación del principio de los trabajos virtuales a los sistemas con vínculos unilaterales	84

Ejercicios del capítulo V

Resolución de un sistema isostático	87
-------------------------------------	----

CAPITULO VI

TRABAJO INTERNO DE DEFORMACION

§ 1. — Expresión del trabajo interno de deformación

409. Definiciones	91
410. Trabajo interno de deformación de las cadenas de eslabones finitos de primera especie	91
411-412. Trabajo interno de deformación de las cadenas elásticas de eslabones infinitésimos	94
413. Trabajo interno de deformación de los sistemas cualesquiera de reticulado	96
414. Trabajo interno de deformación de las cadenas de segunda especie	96
415-416. Trabajo interno de deformación de los sistemas generales	98
417. Observación	99

§ 2. — Principio de Menabrea-Castigliano o del trabajo mínimo de deformación

418. Consideraciones generales sobre el trabajo de deformación	99
419-420. Demostración del principio de Menabrea-Castigliano	101
421-424. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano a la resolución de cadenas hiperestáticas de eslabones infinitésimos	105
425-427. Ejemplos	109
428-431. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano a la resolución de cadenas elásticas hiperestáticas de eslabones finitos y de los sistemas hiperestáticos de reticulado cualesquiera	113
432. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano para la resolución de sistemas hiperestáticos generales	117
433. Observación	119

§ 3. — Teorema de Castigliano o de la derivada del trabajo de deformación

	Pág.
434-435. Preliminar	119
436. Demostración del teorema de Castigliano	120
437-439. Aplicación del teorema de Castigliano a las cadenas elásticas de eslabones infinitésimos	122
440-441. Aplicación del teorema de Castigliano a las cadenas elásticas de eslabones finitos y sistemas de reticulado	126

§ 4. — Extensión del principio de Menabrea-Castigliano y del teorema de Castigliano para la obtención de incógnitas hiperestáticas y desplazamientos debidos a dilataciones térmicas, de fragüe, higrométricas, etc.

442-446. Expresión del trabajo de deformación debido a dilataciones térmicas ...	128
447-448. Extensión del principio de Menabrea-Castigliano para la obtención de las reacciones hiperestáticas debidas a dilataciones térmicas	131
449-451. Aplicación de lo anterior al cálculo de reacciones hiperestáticas debidas a dilataciones térmicas	135
452. Ejemplo	137
453-454. Extensión del teorema de Castigliano para el cálculo de desplazamientos debidos a dilataciones térmicas	140
455. Caso en que actúen simultáneamente cargas o dilataciones térmicas	142

Ejercicios del Capítulo VI

I. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano y del teorema de Castigliano a sistemas de reticulado	142
II. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano a la resolución de sistemas de eslabones infinitésimos	147
III. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano y del teorema de Castigliano a la resolución y obtención de desplazamientos de sistemas mixtos (de alma llena y reticulado)	153

TERCERA PARTE

PROCEDIMIENTOS GENERALES PARA LA RESOLUCION
DE SISTEMAS PLANOS

CAPITULO VII

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE RESOLUCION DE SISTEMAS
PLANOS

§ 1. — Problemas que implica la resolución de un sistema

	PÁG
456. Diversas causas de tensión interna o de deformación que pueden actuar sobre un sistema.....	161
457-460. Magnitudes que se requiere calcular para dejar resuelto un sistema	162
461. Observación	165
462-464. Cálculo de las tensiones unitarias máximas en las fibras externas de las secciones de los sistemas de alma llena	166

§ 2. — Cálculo de los sistemas isostáticos de las magnitudes estáticas debidas a cargas permanentes y accidentales

465. Generalidades	169
466-469. Curva de presiones	170
470-471. Diagramas de momentos flectores de sistemas rectilíneos	174
472-475. Diagramas de esfuerzos tangenciales de sistemas rectilíneos	176
476-477. Obtención de los diagramas de esfuerzos tangenciales en función de los de momentos flectores	180
478. Diagramas de esfuerzos normales de sistemas rectilíneos	183
479. Obtención de desplazamientos correspondientes a las deformaciones debidas a las cargas permanentes o accidentales	183

§ 3. — Obtención en los sistemas hiperestáticos de las magnitudes estáticas y desplazamientos debidos a las cargas permanentes y accidentales, a los cambios de forma y a los asientos de las sustentaciones

480-481. Forma de plantear el problema de la resolución de un sistema hiperestático	184
482-483. Elección y cálculo de las incógnitas hiperestáticas	186
484. Cálculo de las magnitudes estáticas debidas a cargas permanentes o accidentales	189
485. Efectos de las variaciones de forma y de los desplazamientos accidentales de los puntos de sustentación	190
486. Desplazamientos correspondientes a las deformaciones originadas por cargas permanentes o accidentales, cambios de forma y asientos de las sustentaciones	192
487. Diferencia entre las sustentaciones destinadas a originar reacciones isostáticas e hiperestáticas	192

§ 4. — Magnitudes estáticas y desplazamientos debidos a cargas móviles. Generalidades sobre líneas de influencia

	PÁG.
488. Preliminar	193
489-490. Líneas de influencia. Definiciones	193
491-493. Aplicación de las líneas de influencia para el cálculo del valor de una incógnita correspondiente a un dado estado de cargas concentradas	196
494-495. Aplicación de las líneas de influencia para el cálculo del valor de una incógnita correspondiente a una carga continua	199
496. Utilización de las líneas de influencia para el cálculo de los valores máximos y mínimos de las incógnitas originadas por cargas móviles	201
497-500. Cambios de escala y de ejes de las líneas de influencia o de otros diagramas cualesquiera	202

§ 5. — Líneas de influencia de magnitudes estáticas

501-504. Obtención gráfica de líneas de influencia de magnitudes estáticas	207
505-508. Ejemplos	210
509. Obtención analítica de líneas de influencia de magnitudes estáticas	217
510-511. Ejemplo I	219
512-513. Ejemplo II	220
514-516. Ejemplo III	222
517. Observación	227
518-519. Líneas de influencia de magnitudes estáticas en los sistemas hiperestáticos	228

§ 6. — Líneas de influencia de desplazamientos

520-522. Obtención gráfica de líneas de influencia de desplazamientos	230
523-525. Ejemplos	233
526. Obtención analítica de líneas de influencia de desplazamientos	236
527-528. Ejemplo I	237
529. Ejemplo II	240
530. Observación	242

§ 7. — Consideraciones complementarias sobre la obtención analítica de líneas de influencia de sistemas rectilíneos

531-535. Elección de coordenadas y notaciones	242
536-539. Forma general de las líneas de influencia y su integración para diversos estados de carga	248
540-542. Obtención gráfica y analítica de las líneas de influencia de piezas rectilíneas, mediante las ordenadas y tangentes correspondientes a sus extremos	256

Ejercicios del Capítulo VII

I. Obtención gráfica de líneas de influencia de desplazamientos	261
II. Obtención gráfica de líneas de influencia de desplazamientos de sistemas rectilíneos	266
III. Obtención analítica de líneas de influencia de desplazamientos	268

CAPITULO VIII

RESOLUCION DE SISTEMAS ISOSTATICOS. OBTENCION DE LINEAS DE INFLUENCIA POR EL METODO CINEMATICO

§ 1. — Líneas de influencia de componentes de reacción

	Pág.
543. Generalidades	275
544-549. Líneas de influencia de la reacción en un apoyo móvil	276
550-552. Líneas de influencia de las proyecciones de la reacción producida por una articulación fija	280
553-555. Líneas de influencia de las componentes de la reacción en una articulación fija, según dos direcciones cualesquiera	282
556. Línea de influencia de la proyección, según una dirección dada, de la reacción en un empotramiento	286
557. Línea de influencia del momento de la reacción en un empotramiento con respecto a un punto cualquiera	287
558-561. Determinación de la reacción en un empotramiento mediante las líneas de influencia de sus proyecciones sobre dos direcciones cualesquiera y de su momento con respecto a un punto dado	289
562-563. Determinación de la reacción en un empotramiento mediante las líneas de influencia de sus componentes según tres direcciones cualesquiera dadas de antemano	293

§ 2. — Sistemas de alma llena. Línea de influencia de características

564. Líneas de influencia de momentos flectores	295
565. Líneas de influencia de esfuerzos tangenciales	297
566. Líneas de influencia de esfuerzos normales ..	298
567-568. Líneas de influencia de las tensiones unitarias en las fibras más alejadas del eje neutro	300

§ 3. — Sistemas de reticulado. Líneas de influencia de tensiones en las barras

569-570. Líneas de influencia de tensiones en las barras de cordón ..	302
571. Líneas de influencia de las tensiones en montantes y diagonales	305
572-573. Líneas de influencia de la tensión en una diagonal o montante en el caso en que los cordones sean paralelos	306
574-576. Líneas de influencia de las tensiones en algunas barras especiales	308

§ 4. — Casos particulares

577-578. Casos en que los polos de las chapas caen fuera de los límites del dibujo. .	312
579. Caso en que los polos relativos de las chapas entre sí (articulaciones ficticias) caen fuera de los límites del dibujo	315

	Págs.
580. Caso en que tanto los polos de las chapas como las articulaciones ficticias que las unen caen fuera de los límites del dibujo	317
581. Caso en que las cargas que actúen en una parte del sistema no tengan influencia sobre la incógnita a calcular	319
582-585. Caso en que el desplazamiento correspondiente a la incógnita resulta infinito	320
586-587. Caso en que no es posible determinar directamente los polos de las chapas, por presentarse cadenas cinemáticas cerradas	323

CAPITULO IX

VIGAS SIMPLES ISOSTATICAS

§ 1. — Ménsulas empotradas

588. Preliminar	329
589-591. Ménsula empotrada de alma llena	329
592-597. Ménsula empotrada de cordones paralelos.	332
598. Ménsula empotrada de altura variable	333

§ 2. — Vigas simplemente apoyadas. Reticulados simples

599-601. Vigas de alma llena..	335
602-606. Viga en N o Prat	335
607-611. Viga en V o Warren con montantes..	340
612-614. Viga en N de altura variable	341

§ 3. — Reticulados compuestos

615. Preliminar	343
616-624. Viga Prat con contradiagonales inferiores	344
625-631. Viga Prat compuesta con contradiagonales superiores...	349
632-644. Viga en K	354
645. Viga en K de cordones paralelos .	362

§ 4. — Reticulados múltiples

646. Preliminar	363
647-656. Viga Warren doble de cordones paralelos	364

SEGUNDA PARTE

PRINCIPIOS Y LEYES FUNDAMENTALES
PARA LA RESOLUCION DE
SISTEMAS PLANOS

CAPITULO IV

TRABAJO EXTERNO DE DEFORMACION

§ 1. — Productos escalares. — Trabajo

346. Definiciones.— Se llama *producto escalar*, o *producto interno*, de los vectores F y v (fig. 212) al producto de la intensidad F de uno cualquiera de ellos por la proyección a del otro sobre él. Si φ es el ángulo que forman las semirectas 01 y 02 , de las direcciones de los vectores contadas según sus sentidos, el producto escalar de los mismos estará dado por la expresión

$$\Phi = F \cdot v \cos \varphi = F \cdot a$$

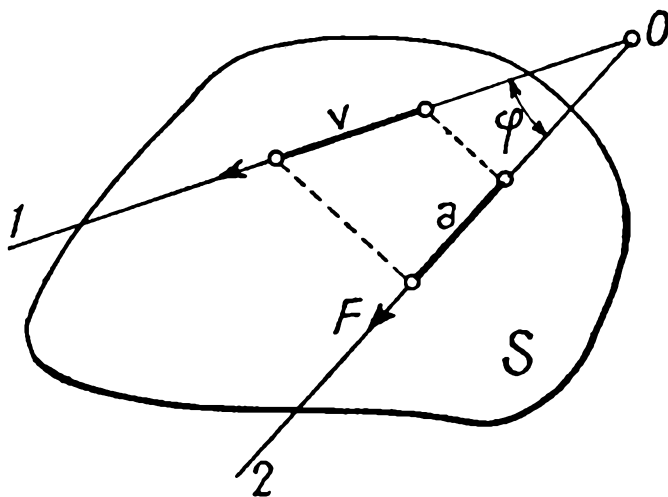


FIG. 212

Producto escalar resultante, o, simplemente, *producto escalar*, de un número cualquiera n de vectores F_i por otros n vectores v_i ($i = 1, 2, \dots, n$), es la suma de los productos escalares de cada uno de los F_i por su correspondiente v_i ; es decir, si φ_i es el ángulo que forman los vectores F_i y v_i , y

$$a_i = v_i \cos \varphi_i.$$

la intensidad de la proyección de este último sobre F_i , el producto escalar resultante de los n vectores F_i por los n v_i es

$$\Phi = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cos \varphi_i = \sum_{i=1}^n F_i a_i.$$

347. — En el caso particular en que uno de los vectores, el F por ejemplo, sea una fuerza y el otro, v , un desplazamiento experimentado por su punto de aplicación, en virtud de la acción de la misma fuerza o por otra causa cualquiera, el producto escalar constituye el *trabajo de la fuerza durante dicho desplazamiento*.

Los teoremas que pasamos a demostrar directamente para el trabajo de fuerzas serán aplicables, por tanto, a los productos escalares de los vectores desplazamientos que en ellos figuran, por otros vectores aplicados cualesquiera, que no sean fuerzas.

348. Teorema.— *El trabajo de un conjunto de fuerzas aplicadas sobre una chapa rígida, durante un desplazamiento de la misma, es igual al trabajo de su resultante.*

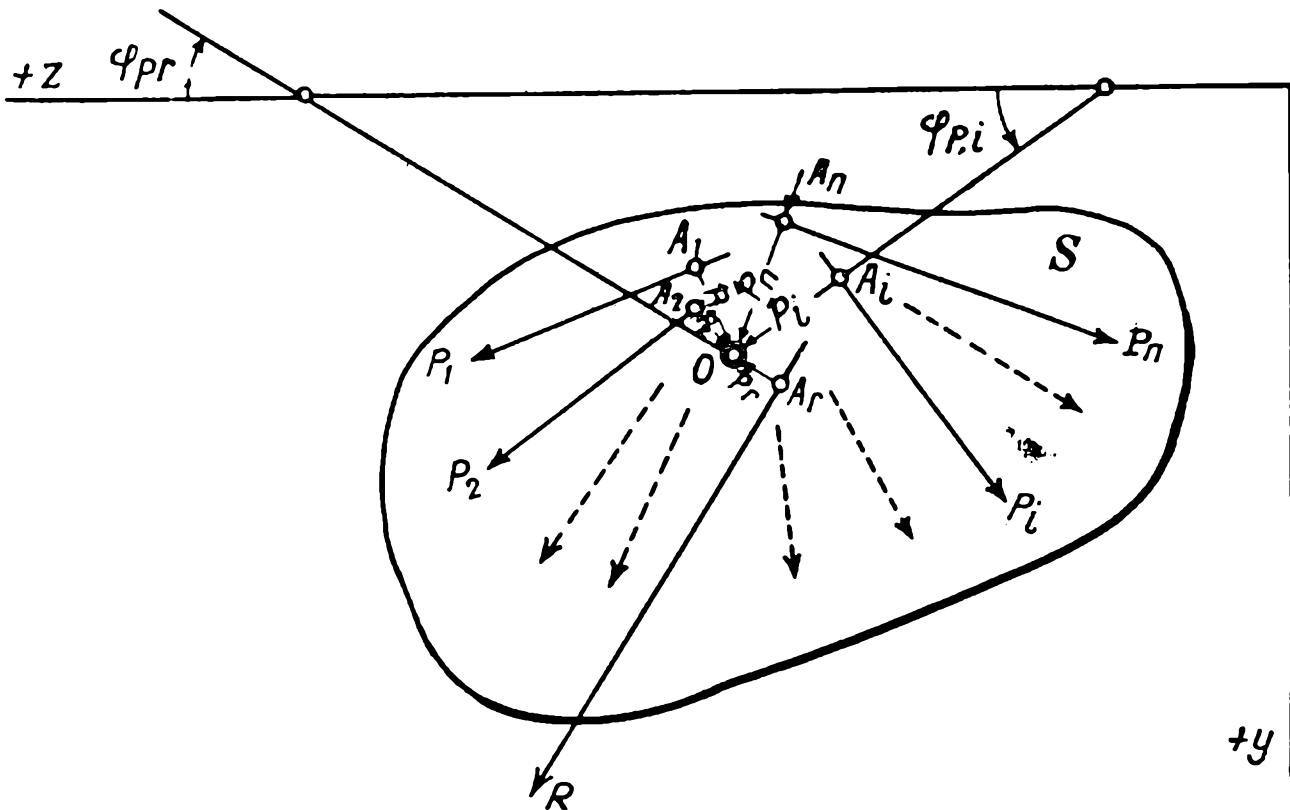


FIG. 213

Sean n fuerzas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (fig. 213) aplicadas en la chapa S y R su resultante. Demos a la chapa un desplazamiento cualquiera, que se reducirá, como sabemos, a una rotación de intensidad θ en torno a un cierto polo O .

Para una fuerza cualquiera P_i , la proyección del desplazamiento de uno cualquiera de sus puntos sobre su dirección — igual al desplazamiento efectivo del punto A_i situado en el pie de la perpendicular trazada por O a la misma — es

$$a = \pm \theta \cdot p_i \begin{cases} + & \text{para } \varphi_{pi} < 0 \\ - & \text{» } \varphi_{pi} > 0 \end{cases}$$

en la que la distancia p_i entre la fuerza y el polo O se considera como un vector dirigido hacia este polo. Por consiguiente el trabajo resultante de las n fuerzas P_i , será

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i = \theta \sum_{i=1}^n \pm P_i \cdot p_i \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pi} > 0 \end{cases} \quad [a]$$

A su vez, siendo

$$a_r = \pm \theta \cdot p_r \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pr} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pr} > 0 \end{cases}$$

la proyección, sobre la recta de acción de la resultante R , del desplazamiento de uno cualquiera de sus puntos, el trabajo correspondiente a la misma, será

$$\Phi' = R \cdot a_r = \pm \theta \cdot R \cdot p_r \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pr} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pr} > 0 \end{cases} \quad [b]$$

Ahora bien, por ser R la resultante de las fuerzas P_i , su momento con respecto a O debe ser igual a la suma de los momentos de estas últimas, es decir,

$$\pm R p_r = \sum_{i=1}^n \pm P_i p_i \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pr} \text{ o } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pr} \text{ » } \varphi_{pi} > 0 \end{cases}$$

y, sustituyendo en la [b], resulta que

$$\Phi' = \theta \sum_{i=1}^n \pm P_i p_i \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pi} > 0 \end{cases}$$

o sea, comparando con la [a], que

$$\Phi = \Phi',$$

según queríamos demostrar.

349. Teorema. — *El trabajo de una cupla de fuerzas aplicadas en una chapa rígida, durante un desplazamiento de esta última, es igual al producto del momento de la cupla por la intensidad de la rotación que constituye este desplazamiento.*

Sea una cupla de fuerzas P_1 y P_2 (fig. 214), aplicada en la chapa S . Se tendrá

$$P_2 = - P_1 \quad [a]$$

y su momento será

$$\mathcal{M} = P_1 p \quad [b]$$

en la que la distancia p se considera como un vector dirigido de P_1 hacia P_2 . Si la chapa experimenta una rotación θ en torno a un polo O , las proyecciones de los desplazamientos de puntos cualesquiera de las rectas de acción de las fuerzas P_1 y P_2 , sobre sus direcciones, iguales,

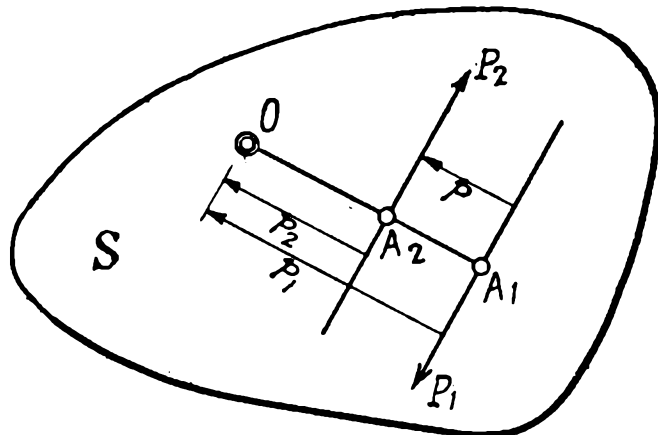


FIG. 214

respectivamente, a los desplazamientos efectivos de los puntos A_1 y A_2 , situados sobre la perpendicular trazada por O a las mismas, serán

$$a_1 = \theta p_1$$

y

$$a_2 = \theta p_2.$$

El trabajo resultante de las dos fuerzas que constituyen la cupla, es por consiguiente:

$$\Phi = P_1 a_1 + P_2 a_2 = \theta (P_1 p_1 + P_2 p_2),$$

o, sustituyendo P_2 por su igual $-P_1$,

$$\Phi = \theta P_1 (p_1 - p_2).$$

Ahora bien, de la figura se deduce que

$$p = p_1 - p_2$$

y, reemplazando,

$$\Phi = \theta \cdot P_1 p,$$

o, recordando la [b],

$$\Phi = \mathcal{M} \theta,$$

según queríamos demostrar.

350. — Como corolario del teorema anterior se deduce que:

El trabajo de una cupla de fuerzas durante una traslación de una chapa rígida es nulo.

351. Teorema.— *El trabajo de un par de fuerzas opuestas, es decir, de dos fuerzas que actuando sobre la misma recta de acción tienen igual intensidad absoluta y signo contrario, durante determinados desplazamientos de sus puntos de aplicación, es igual al producto de la intensidad de una cualquiera de ellas por la proyección sobre su dirección del desplazamiento relativo de su punto de aplicación, con respecto al de la otra.*

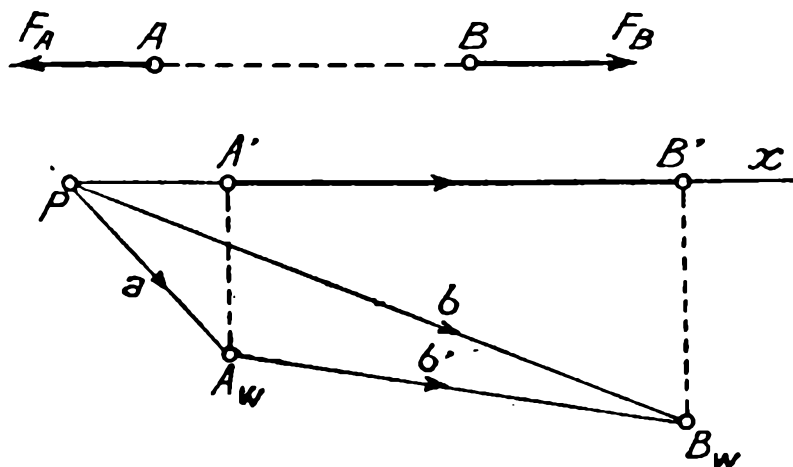


FIG. 215

Sean F_A y F_B (fig. 215) un par de fuerzas opuestas, aplicadas, respectivamente, en los puntos A y B , que experimentan desplazamientos a y b , cuyos vectores equipolentes son pA_w y pB_w . Hallemos las proyecciones pA' y pB' , de estos vectores sobre la paralela px a la dirección de las fuerzas dadas y tendremos que el trabajo de las mismas es

$$\Phi = F_A \overline{pA'} + F_B \overline{pB'},$$

que, siendo, por hipótesis

$$F_A = - F_B,$$

da

$$\Phi = F_B (\overline{pB'} - \overline{pA'}) = F_B \cdot \overline{A'B'},$$

expresión que, constituyendo $A'B'$ la proyección del desplazamiento relativo, $b' = \overline{A_w B_w}$, del punto B con respecto al A , sobre la dirección común de las fuerzas F_A y F_B , nos comprueba lo que queríamos demostrar.

352. — Sabemos que una barra de reticulado está sujeta siempre a dos fuerzas opuestas que constituyen la *tensión* en la misma. Según esto, supongamos que la barra A_1A_2 (fig. 216 a) está sujeta a un esfuerzo de tracción, es decir, a una tensión positiva T . Si desarticulamos la barra del resto del reticulado, el equilibrio en la misma lo obtendremos aplicando en sus extremos dos fuerzas opuestas, T'_1 y T'_2 , de la dirección

que indica la figura 216 *b*, y de intensidad absoluta $|T|$. A su vez para mantener el equilibrio en el resto del reticulado, tendremos que aplicar en los puntos A_1 y A_2 dos nuevas fuerzas T_1 y T_2 , iguales y opuestas a las anteriores (fig. 216 *c*), que constituyen las reacciones que la barra transmite al mismo. Representada, pues en esta forma la tensión de una barra, por las fuerzas que se requiere aplicar a los nudos del reticulado al suprimirla, una tensión de tracción, o positiva, corresponde a un par de fuerzas opuestas concurrentes, y a la inversa.

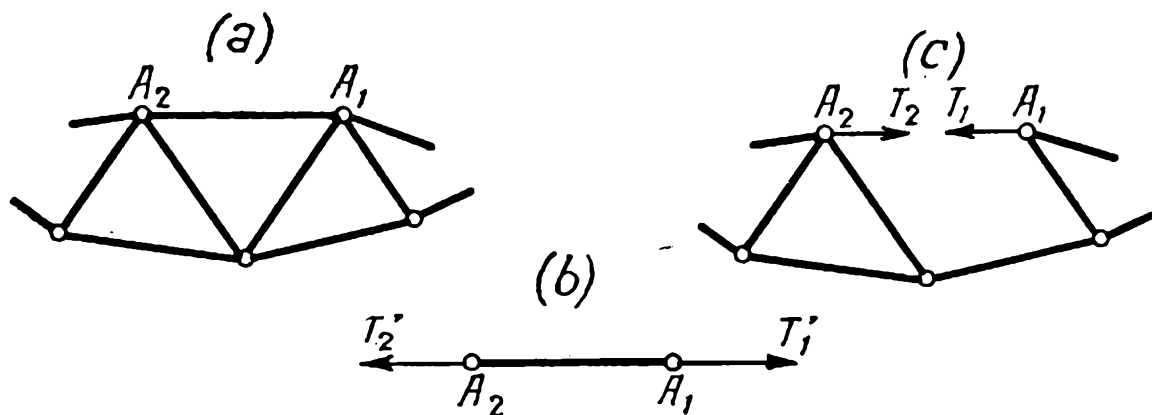


FIG. 216

Si suponemos, ahora, que el reticulado, con la barra suprimida, experimenta una deformación cualquiera, el trabajo de la tensión será igual según lo que acabamos de sentar, al producto de una cualquiera del par de fuerzas opuestas aplicadas al reticulado, la T_1 por ejemplo, por la proyección $a_{1,2}$ sobre su dirección, del desplazamiento relativo del nudo A_1 en que está aplicada, con respecto al A_2 , es decir,

$$\Phi = T_1 \cdot a_{1,2}. \quad [a]$$

Ahora bien, si δ es la variación de distancia entre dichos nudos, se tiene en valor absoluto,

$$|T_1| = |T|$$

y

$$|a_{1,2}| = |\delta|,$$

o sea, sustituyendo

$$|\Phi| = |T| |\delta| \quad [b]$$

Si la tensión T es positiva, como hemos supuesto y si la proyección del desplazamiento relativo $a_{1,2}$ también lo fuera, Φ según la [a] resultaría positivo. Pero en este caso, el punto A_1 se aproxima al A_2 y δ será un acortamiento o variación negativa de distancia, según hemos convenido en (72). Para que el trabajo Φ , expresado en función de la

intensidad T de la tensión y de la variación δ de distancia, nos dé el signo positivo que le corresponde debemos poner, pues,

$$\Phi = - T \delta.$$

Como cuando tengamos que calcular trabajos debidos a tensiones, siempre nos referiremos al trabajo efectuado por los pares de fuerzas opuestas que hay que aplicar al reticulado, en reemplazo de las barras correspondientes al suprimirlas, podemos decir, pues, que:

Dentro de las convenciones de signos adoptadas, el trabajo de una tensión correspondiente a una barra de un reticulado es igual al producto de su intensidad por la variación de distancia entre los nudos extremos de dicha barra, cambiada de signo.

353. Teorema. — *El trabajo de dos cuplas iguales y de sentido contrario, aplicadas en otras tantas chapas rígidas, durante un desplazamiento de éstas, es igual al producto del momento de una cualquiera de las cuplas, por la intensidad de la rotación relativa de la chapa en que está aplicada con respecto a la otra.*

Sean dos cuplas de intensidades \mathcal{M}_a y \mathcal{M}_b iguales y de sentido contrario, es decir, tales que

$$\mathcal{M}_a = - \mathcal{M}_b,$$

aplicadas respectivamente en chapas rígidas, S_a y S_b , que experimentan rotaciones de intensidades θ_a y θ_b . Según el teorema demostrado en (349), el trabajo resultante de ambas cuplas es

$$\Phi = \mathcal{M}_a \cdot \theta_a + \mathcal{M}_b \cdot \theta_b,$$

y, sustituyendo \mathcal{M}_b por su igual $-\mathcal{M}_a$,

$$\Phi = \mathcal{M}_a (\theta_a - \theta_b)$$

expresión que, siendo, según (74), $\theta_a - \theta_b = \theta_{a,b}$ la intensidad de la rotación relativa de la chapa S_a con respecto a la S_b , nos comprueba lo que queríamos demostrar.

§ 2. — Expresión del trabajo externo de deformación

354. Consideraciones generales sobre deformación de cuerpos elásticos. — Al aplicar sobre una cadena elástica, isostática o hiperestáticamente sustentada o sobre un cuerpo elástico cualquiera, en las mismas condiciones, una fuerza P , la cadena, o el cuerpo, experimentará según

sabemos, una determinada deformación, entrando, una vez efectuada, a una nueva posición de equilibrio. Durante dicha deformación, el punto de aplicación de la fuerza experimentará un desplazamiento y ella desarrollará un trabajo igual, en cada instante, al producto de su intensidad por la proyección sobre su dirección del incremento de dicho desplazamiento, correspondiente al instante considerado.

Supondremos, siempre que no hagamos indicación en contra, que al aplicar una fuerza sobre una estructura constructiva cualquiera, lo hagamos haciendo variar paulatina y gradualmente su intensidad, desde cero hasta su valor definitivo P , de modo a mantener el equilibrio en cada instante, es decir, de modo que la deformación se efectúe sin velocidad, o, lo que es equivalente, sin desarrollo de energía viva. Supondremos, además, que durante la deformación de dichas estructuras constructivas, o de las cadenas elásticas que le son equivalentes, no haya desarrollo ni pérdida de calor, y finalmente, que no se efectúen cambios de temperatura, de estado magnético o de otro agente físico cualquiera, que puedan, por sí solos, alterar la mutua distancia de sus partículas constitutivas.

En estas condiciones, el trabajo ejecutado por la fuerza P , que llamaremos *trabajo de deformación*, quedará en virtud del principio de la conservación de la energía, íntegramente acumulado en el cuerpo elástico, o cadena elástica equivalente, en forma de *energía potencial*, listo a ser devuelto en su totalidad, al suprimir, también paulatina y gradualmente, la fuerza P . La deformación de un cuerpo elástico constituirá en todo instante, una *transformación reversible*.

355. — Las hipótesis anteriores equivalen, en primer lugar, a admitir que la deformación de los cuerpos elásticos se efectúa sin frotamiento interno entre sus partículas constitutivas, es decir, sin desarrollo alguno de calor, y, además, que las fuerzas P puedan prácticamente aplicarse aumentando su intensidad hasta su valor definitivo, en un tiempo infinito, de modo a obtener una deformación infinitamente lenta.

Para los entes abstractos que hemos definido como cadenas elásticas, la primera hipótesis puede admitirse con todo rigor; pero para los cuerpos naturales que ellas representan con suficiente aproximación en los cálculos referentes a la resolución estática de sistemas planos, no se satisface en absoluto. En realidad, ningún cuerpo natural al deformarse bajo la acción de fuerzas exteriores, lo hace sin producir una determinada cantidad de calor y, por tanto, no podrá, al desaparecer dichas fuerzas, devolver íntegramente el trabajo por ellas desarrollado, llevando el cuerpo, a su primitivo estado. Siempre quedará éste con una determinada *deformación permanente*. Si volviera el cuerpo exactamente a su primitiva

posición, constituiría lo que se llama un cuerpo *perfectamente elástico*. Pero, los materiales empleados en las construcciones se aproximan mucho a estos cuerpos ideales perfectamente elásticos y, sin error práctico, pueden, dentro del período anterior al límite de elasticidad, ser considerados como tales; es decir, en dichos cuerpos y en el mencionado período, el trabajo equivalente al calor puesto en juego por la deformación es muy pequeño en comparación al desarrollado por las fuerzas exteriores y su adjunción a este último no altera el número de cifras exactas requerido en los cálculos, pudiendo, por tanto, dentro del grado de aproximación correspondiente, no ser tomado en cuenta, o, lo que es equivalente, ser considerado como un infinitamente pequeño despreciable.

Por lo que respecta a la aplicación infinitamente lenta de las fuerzas exteriores, no sólo es físicamente imposible, sino que la forma de actuar de las mismas, en las estructuras constructivas, se aleja mucho de ello. Sin embargo, cuando las fuerzas no se aplican bruscamente, mediante un choque, por ejemplo, sino que se las hace actuar gradualmente, aunque sea en un período de tiempo relativamente corto, como sucede en la generalidad de los casos prácticos, el trabajo equivalente a la energía viva que corresponde a la velocidad de la deformación, es, también, muy pequeño en comparación del trabajo de las fuerzas exteriores, y, puede, dentro del grado de aproximación de los cálculos, ser considerado como un infinitamente pequeño despreciable. Es decir que, con toda exactitud, dentro de dicho grado de aproximación, la aplicación infinitamente lenta de una fuerza es equivalente a su aplicación gradual en un corto intervalo de tiempo, como se efectúa en la práctica.

356. Expresión del trabajo externo de deformación. Ley de Clapeyron. —Sea una cadena elástica, o un cuerpo elástico cualquiera, sustentada en forma también cualquiera, a la que aplicamos, haciéndolo actuar gradualmente, según una ley arbitraria, un sistema de n fuerzas P'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y sea a'_i la proyección sobre la dirección de la fuerza genérica P'_i del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación, una vez efectuada la deformación correspondiente a dicho sistema.

Siendo, según hemos establecido más arriba, almacenado íntegramente en forma de energía potencial el trabajo de deformación desarrollado por las fuerzas dadas, sólo dependerá de la intensidad final P'_i de las mismas y de la deformación de la cadena, siendo absolutamente independiente de la ley de variación de intensidad adoptada para la aplicación gradual de cada una de las referidas fuerzas. Dicho trabajo, en efecto, es una función exclusiva del estado final del cuerpo una vez efectuada la deformación, desde que, cualquiera que sea el camino adop-

tado para llevarlo a dicho estado final, debe ser igual al trabajo único capaz de llevarlo del mismo al estado inicial. A los efectos, pues, de calcular dicho trabajo de deformación, podremos darnos a voluntad una ley cualquiera de variación de la intensidad de las fuerzas P_i .

Consideremos, durante la deformación, un instante cualquiera en que las fuerzas hayan llegado a una intensidad P_i y en que sus puntos de aplicación hayan experimentado desplazamientos, cuyas proyecciones sobre sus respectivas direcciones sean a_i y designemos por da_i el incremento infinitésimo que experimentan dichas proyecciones de desplazamientos, a partir del mismo. El trabajo elemental originado por una cualquiera de las fuerzas P_j , será, salvo infinitamente pequeños de segundo orden, y dado que, según lo establecido, la energía viva y el calor desarrollados, son prácticamente nulos,

$$d\Phi_j = P_j \cdot da_j. \quad [a]$$

La proyección a_j , sobre la fuerza P_j , del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación hasta el instante considerado, siendo originada por fuerzas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) que varían de intensidad, conservando su recta de acción, será una función lineal de sus intensidades, desde que la parte de dicha proyección debida a cada una de dichas fuerzas le es proporcional, es decir, que podemos poner

$$a_j = \alpha_{j,1} P_1 + \alpha_{j,2} P_2 + \dots + \alpha_{j,n} P_n = \sum_{i=1}^n \alpha_{j,i} \cdot P_i,$$

en la que $\alpha_{j,1}, \alpha_{j,2}, \dots$ son constantes.

Si como ley de variación de las fuerzas P_i , que podemos, según hemos establecido, elegir arbitrariamente, establecemos que cada una de ellas se haga variar proporcionalmente a la P_j , es decir, siendo β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) una constante, para cada fuerza P_i , establecemos

$$P_i = \beta_i P_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

la expresión anterior, sustituyendo, nos da

$$a_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{j,i} \beta_i P_j = P_j \sum_{i=1}^n \alpha_{j,i} \beta_i = A \cdot P_j, \quad [b]$$

en la que A es una nueva constante.

Para el valor final P_i' ($i = 1, 2, \dots, n$) de las fuerzas, se tendrá, por tanto, que la proyección resultante, a_j' , del desplazamiento experimentado por el punto de aplicación de la fuerza P_j' , será

$$a_j' = A \cdot P_j',$$

y, comparando con la [b], tenemos

$$P_j = \frac{P_j'}{a_j'} \cdot a_j.$$

Sustituyendo en la [a], resulta

$$d \Phi_j = \frac{P_j'}{a_j'} a_j \cdot da_j,$$

e integrando, a los efectos de obtener el trabajo de deformación debido a la fuerza P_j' , se tiene, finalmente,

$$\Phi_j = \frac{P_j'}{a_j'} \int_0^{a_j'} a_j \cdot da_j = \frac{1}{2} P_j' \cdot a_j'$$

Procediendo en forma análoga para cualquier otra fuerza P_i' , tendríamos, como expresión del trabajo de deformación desarrollado por la misma,

$$\Phi_i = \frac{1}{2} P_i' a_i',$$

y el trabajo de deformación total, Φ , igual a la suma de los trabajos parciales desarrollados por cada una de las fuerzas P_i' ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema dado, resulta, por último

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i' a_i',$$

expresión general de la *ley de Clapeyron*, que nos dice que:

El trabajo de deformación de una cadena elástica, o cuerpo elástico cualquiera, originado por un sistema de fuerzas aplicadas lenta y gradualmente, es independiente de la ley de variación de las intensidades de estas últimas y del orden en que se las haga actuar, e igual a la mitad de la suma de los productos de sus intensidades finales por las proyecciones, sobre sus rectas de acción, de los desplazamientos resultantes experimentados por sus respectivos puntos de aplicación.

§ 3. — Principio de reciprocidad o ley de Betti

357. **Ley de Betti.** — Consideremos una cadena elástica, o cuerpo elástico cualquiera, a la que aplicaremos sucesivamente dos sistemas de fuerzas Σ_k y Σ_l , de intensidades P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y P_j ($j = 1, 2, \dots, n'$), respectivamente.

Designemos, además, en general, por $a_{m,n}$, la proyección sobre una fuerza P_m , del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación, bajo la acción del sistema de fuerzas Σ_n .

Sentado lo anterior, apliquemos primeramente el sistema de fuerzas Σ_k . Las proyecciones, sobre las fuerzas P_i del mismo, de los desplazamientos

que durante la deformación correspondiente experimentan sus puntos de aplicación, son $a_{i,k}$, y el trabajo de deformación, suponiendo que dichas fuerzas actúen lenta y gradualmente, es igual, según la ley de Clapeyron que acabamos de demostrar, a

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,k}.$$

Apliquemos, luego, el otro sistema de fuerzas Σ_l , y siendo $a_{j,l}$, las proyecciones, sobre las direcciones de las fuerzas P_j , de los desplazamientos que sus puntos de aplicación experimentan durante la deformación debida al mismo, estas fuerzas desarrollarán un trabajo igual a

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,l}.$$

Además, los puntos de aplicación de las fuerzas P_i , que ya estaban aplicadas al actuar las P_j , experimentarán desplazamientos cuyas proyecciones sobre sus direcciones serán $a_{i,l}$, y el trabajo de las mismas, desarrollado durante la deformación debida al sistema Σ_l , está dado por la expresión

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,l},$$

en la que se ha hallado el trabajo de las fuerzas P_i , multiplicándolas directamente por las proyecciones de los desplazamientos respectivos, $a_{i,l}$, sin multiplicarlas por $\frac{1}{2}$ a causa de que dichas fuerzas ya actuaban sobre la cadena elástica con toda su intensidad al comenzar a actuar las P_j del sistema Σ_l .

El trabajo total desarrollado por los dos sistemas de fuerzas Σ_k y Σ_l , igual a la suma de los anteriormente calculados, será, por tanto,

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,l} + \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,l}.$$

Procedamos, ahora, a la inversa, aplicando primeramente el sistema de fuerzas Σ_l y luego el Σ_k . Bajo la acción del primero, los puntos de aplicación de sus fuerzas P_j , experimentarán desplazamientos cuyas proyecciones sobre las mismas son $a_{j,l}$, y el trabajo por ellas desarrollado resulta igual a

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,l}.$$

Al aplicar, después, el segundo sistema Σ , los puntos de aplicación de sus fuerzas, P_i , experimentarán desplazamientos, cuyas proyecciones sobre ellas son $a_{i,k}$ y el trabajo correspondiente a las mismas, será igual a

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,k}.$$

Finalmente, los puntos de aplicación de las fuerzas P_j , del sistema Σ_l , que ya actuaban al aplicar el sistema Σ_k , experimentarán desplazamientos cuyas proyecciones sobre ellas son $a_{j,k}$, y el trabajo de las mismas, dado que actúan con toda su intensidad desde el comienzo, será igual a

$$\sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,k}.$$

El trabajo total de deformación, al aplicar los sistemas Σ_l y Σ_k en el nuevo orden, es, por tanto,

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,l} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,k} + \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,k}.$$

Como el trabajo resultante de la deformación debida a los dos sistemas de fuerzas, Σ_k y Σ_l , es, según la ley de Clayperon, independiente del orden en que se apliquen dichos sistemas, deberá tenerse

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

o sea,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,l} + \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,l} &= \\ = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,l} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,k} + \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,k} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i,l} = \sum_{j=1}^{n'} P_j \cdot a_{j,k},$$

expresión general de la *ley de Betti*, o del *principio de reciprocidad*, que dice que:

En una cadena elástica, el producto escalar resultante de las fuerzas de un sistema por los desplazamientos experimentados por sus puntos de aplicación durante la deformación debida a otro sistema, es igual al producto escalar resultante de las fuerzas de este último sistema por los desplazamientos que sus puntos de aplicación experimentan durante la deformación debida al primero.

Esta ley, o mejor, este principio, sobre la que fundaremos todas las otras leyes que utilizaremos para la resolución de sistemas hiperestáticos, fué demostrada por primera vez, por *Enrique Betti*, en su obra *Teoría dell'elasticità* (*).

358. Teorema de Maxwell.— Supongamos que los dos sistemas de fuerzas anteriores, Σ_k y Σ_l , se reduzcan, cada uno, a una sola fuerza y sean P_i y P_j , respectivamente, dichas fuerzas. Supongamos, además, que sus intensidades P_i y P_j , sean iguales, y que los subíndices i y j indiquen solamente las direcciones de sus rectas de acción.

Siendo $a_{i,j}$ la proyección sobre P_i del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación durante la deformación debida a la fuerza P_j y $a_{j,i}$, la proyección análoga sobre P_j , del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación, durante la deformación debida a la fuerza P_i , la ley de Betti, que acabamos de demostrar, nos da

$$P_i \cdot a_{i,j} = P_j \cdot a_{j,i},$$

que, teniéndose por hipótesis,

$$P_i = P_j,$$

se reduce a

$$a_{i,j} = a_{j,i},$$

expresión del *teorema de Maxwell*, que dice que:

En una cadena elástica, la proyección del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza P_j , sobre su propia dirección, durante la deformación debida a otra fuerza, P_i , de dirección cualquiera e intensidad igual a la anterior, es igual a la proyección sobre P_i del desplazamiento de su punto de aplicación correspondiente a la deformación debida a la P_j .

Este teorema, que no es sino un caso particularísimo de la ley de Betti, y del cual, a su vez, el caso más particular en que las dos fuerzas P_i y P_j actúen sobre una chapa rígida ligada a una cadena elástica, ya hemos visto en (324), tiene mucha importancia por su aplicación directa a numerosos problemas, entre otros, el trazado de líneas de influencia de desplazamientos debidos a deformaciones. Lleva el nombre del conocido físico inglés Maxwell, por haber sido por él encontrado con anterioridad a la referida ley de Betti.

(*) *Il Nuovo Cimento*, serie 2ª, tomos VII y VIII.

§ 4. — Aplicación de la ley de Betti a la resolución de sistemas hiperestáticos

359. Sustitución de los vínculos superfluos por reacciones incógnitas hiperestáticas equivalentes. — Si se da un sistema hiperestático, en equilibrio bajo la acción de un conjunto cualquiera de cargas, y se suprime algunos a todos sus vínculos superfluos, de sustentación o internos, aplicando en su reemplazo las reacciones que le son equivalentes, el sistema no altera sus primitivas condiciones de equilibrio. Para calcular estas reacciones hiperestáticas, es indispensable ponerlas en evidencia, mediante dicha sustitución por las mismas de los vínculos superfluos a que son equivalentes. Veamos, pues, antes de entrar a la aplicación de la ley de Betti para la determinación de dichas incógnitas hiperestáticas, como se efectúa en detalle, esta sustitución de los vínculos superfluos.

360. — Por de pronto, si se trata de vínculos externos, o de sustentación, ya hemos visto, en (110), que son equivalentes a fuerzas determinadas, que constituyen las reacciones capaces de producir el mismo efecto cinemático que ellos. Así, un apoyo móvil es equivalente a una fuerza normal a su dirección; una articulación fija de apoyo, a una fuerza de dirección arbitraria que pasa por la misma, o sea, a sus dos componentes según dos direcciones determinadas de antemano, y, finalmente, un empotramiento equivale a una fuerza de dirección cualquiera, o a sus tres fuerzas componentes según rectas determinadas de antemano.

Supongamos, por ejemplo, que se nos dé el sistema hiperestáticamente sustentado de la figura 217 *a*, en equilibrio bajo la acción de las cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) y se nos pida reemplazar el empotramiento *A*, el apoyo móvil *C* y la articulación fija *D*, por las reacciones incógnitas hiperestáticas equivalentes.

Suprimiremos el empotramiento *A* (fig. 217 *b*) y, en una chapa rígida, solidariamente ligada al primer elemento *A* del sistema, aplicaremos según tres direcciones cualesquiera no concurrentes, tres fuerzas X_1, X_2 y X_3 cuyas intensidades incógnitas serán las componentes según las direcciones de las mismas, de la reacción que origina el empotramiento *A*. El sistema con dicha chapa y las tres fuerzas X_1, X_2 y X_3 aplicadas a la misma, se encuentra en iguales condiciones de equilibrio que el sistema empotrado en *A*.

Análogamente, suprimiendo el apoyo móvil *C* y colocando una fuerza normal a su dirección, X_4 , igual a la reacción que le es equivalente, como asimismo, suprimiendo la articulación fija *D*, y haciendo actuar en el punto *D*, dos fuerzas X_5 y X_6 , de direcciones cualesquiera, y de intensi-

dades iguales a las componentes según las mismas de la reacción equivalente a dicha articulación fija, tampoco queda alterado el estado primitivo de equilibrio del sistema.

El sistema, pues, de la figura 217 *b*, isostáticamente sustentado y sujeto a las cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) y a las fuerzas de intensidades incógnitas X_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), se encuentra en las mismas condiciones de equilibrio que el sistema hiperestáticamente sustentado de la figura 217 *a*.

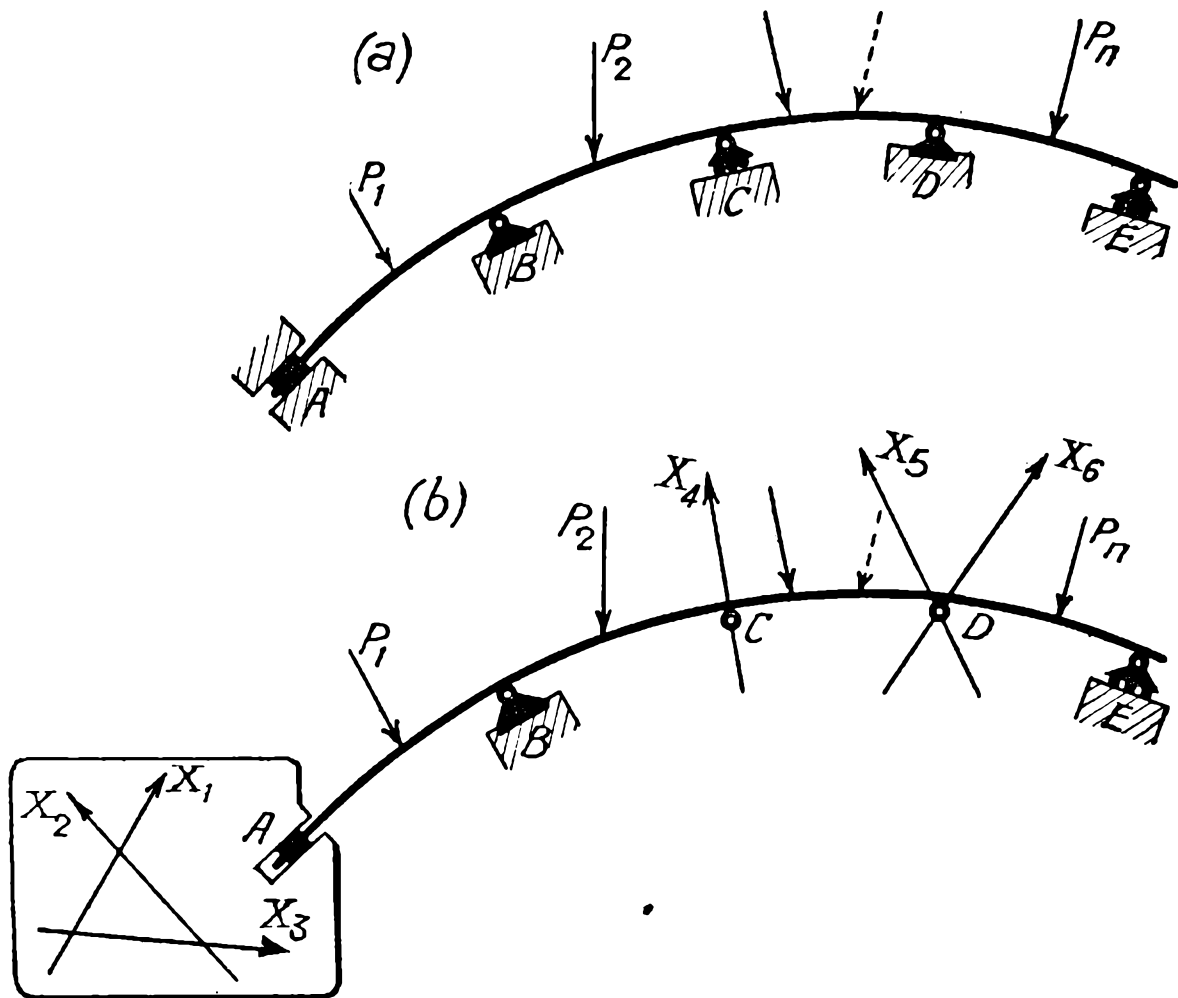


FIG. 217

Las tres fuerzas X_1, X_2 y X_3 , aplicadas sobre la chapa *A* son, por otra parte, las fuerzas capaces de impedir que bajo la acción de las cargas P_p , se desplace dicha chapa, o lo que es equivalente, la sección de arranque *A* del sistema. Análogamente la fuerza X_4 , es la capaz de impedir que el punto *C*, durante la deformación que originan las cargas P_p , se desplace normalmente a la dirección del apoyo móvil respectivo. Finalmente las fuerzas X_5 y X_6 son las capaces de obtener que el punto *D* permanezca inmóvil durante dicha deformación.

361. — En muchos casos no es necesario poner en evidencia, como fuerzas exteriores, la totalidad de las incógnitas que corresponden a un vínculo externo.

Así, por ejemplo, si en el sistema de la figura 218 *a* se quiere únicamente poner en evidencia la proyección de la reacción en la articulación en *B* sobre la dirección xx , convertiremos dicha articulación en un apoyo móvil de esta dirección (fig. 218 *b*), reemplazando el vínculo suprimido por la fuerza incógnita X que actúa según la misma dirección, fuerza que debe ser la capaz de impedir que, durante la deformación debida a las cargas P , el punto *B* experimente los desplazamientos que permite dicho apoyo.

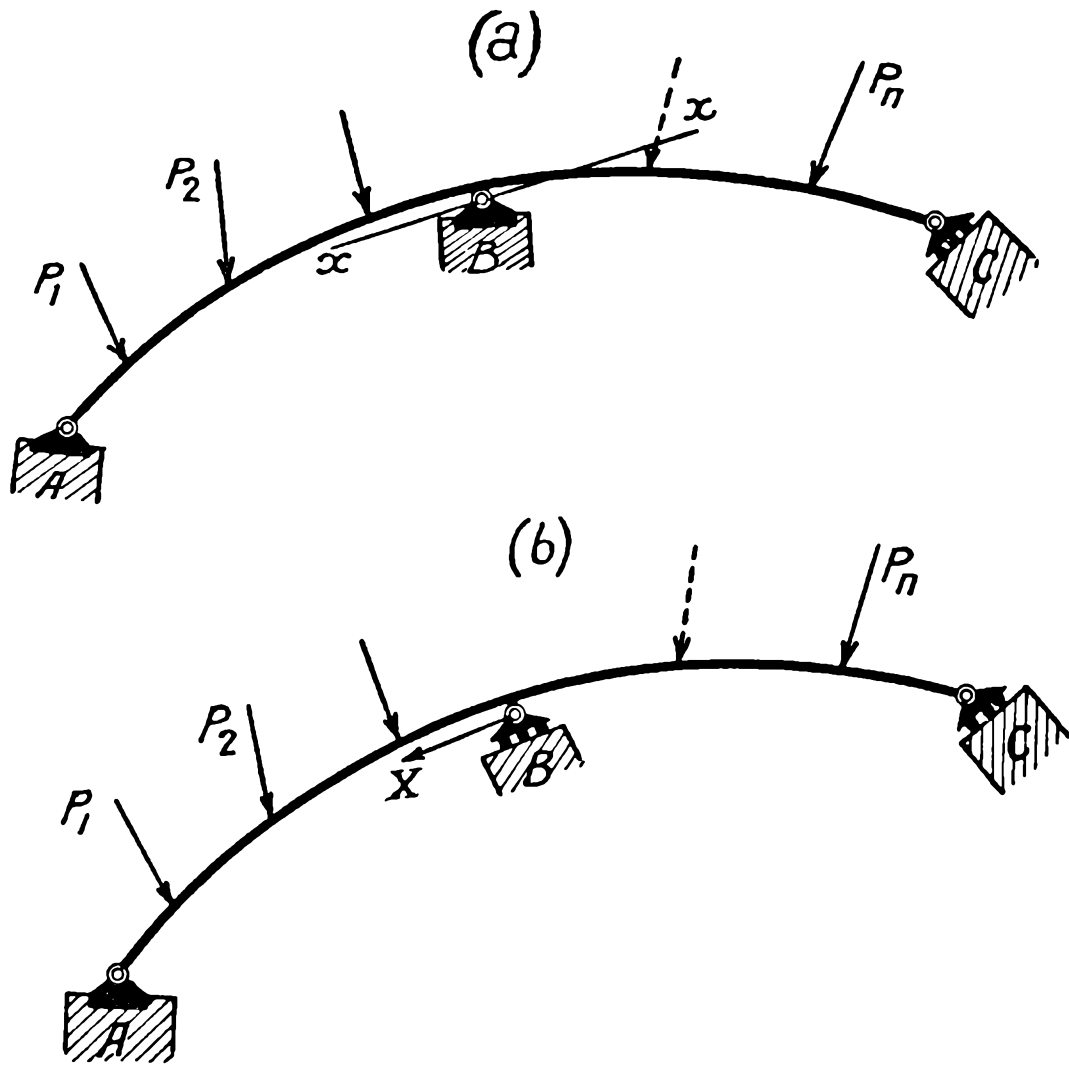


FIG. 218

Análogamente, si de las tres incógnitas que corresponden al empotramiento *A* del sistema representado en la figura 219 *a*, se quiere poner en evidencia solamente una, se podrá articular el sistema en el punto *A* (fig. 219 *b*) y sobre una chapa S_A ligada al primer elemento *A*, aplicar la reacción hiperestática X_1 , capaz de impedir la rotación que bajo la acción de las cargas P , esta chapa experimentaría en torno a dicha articulación.

En igual forma, si se desea poner en evidencia dos de dichas reacciones incógnitas, dotaríamos el punto *A* de un apoyo móvil según una dirección cualquiera (fig. 219 *c*) y aplicaríamos una fuerza X_2 paralela a esta dirección, capaz de anular el desplazamiento que, según la misma, dicho

punto experimentaría bajo la acción de las cargas. Además, sobre la chapa S_A , ligada al primer elemento aplicaríamos una nueva fuerza X_1 capaz de impedir que la misma gire en torno a A bajo dicha acción de las cargas. El sistema de la figura 219 *c* se encontraría evidentemente en las mismas condiciones que el de la 219 *a*, puesto que no pudiendo trasladarse el punto A a causa de la fuerza incógnita X_2 , ni girar la chapa S_A , por efecto de la X_1 , el primer elemento A permanecería empotrado.

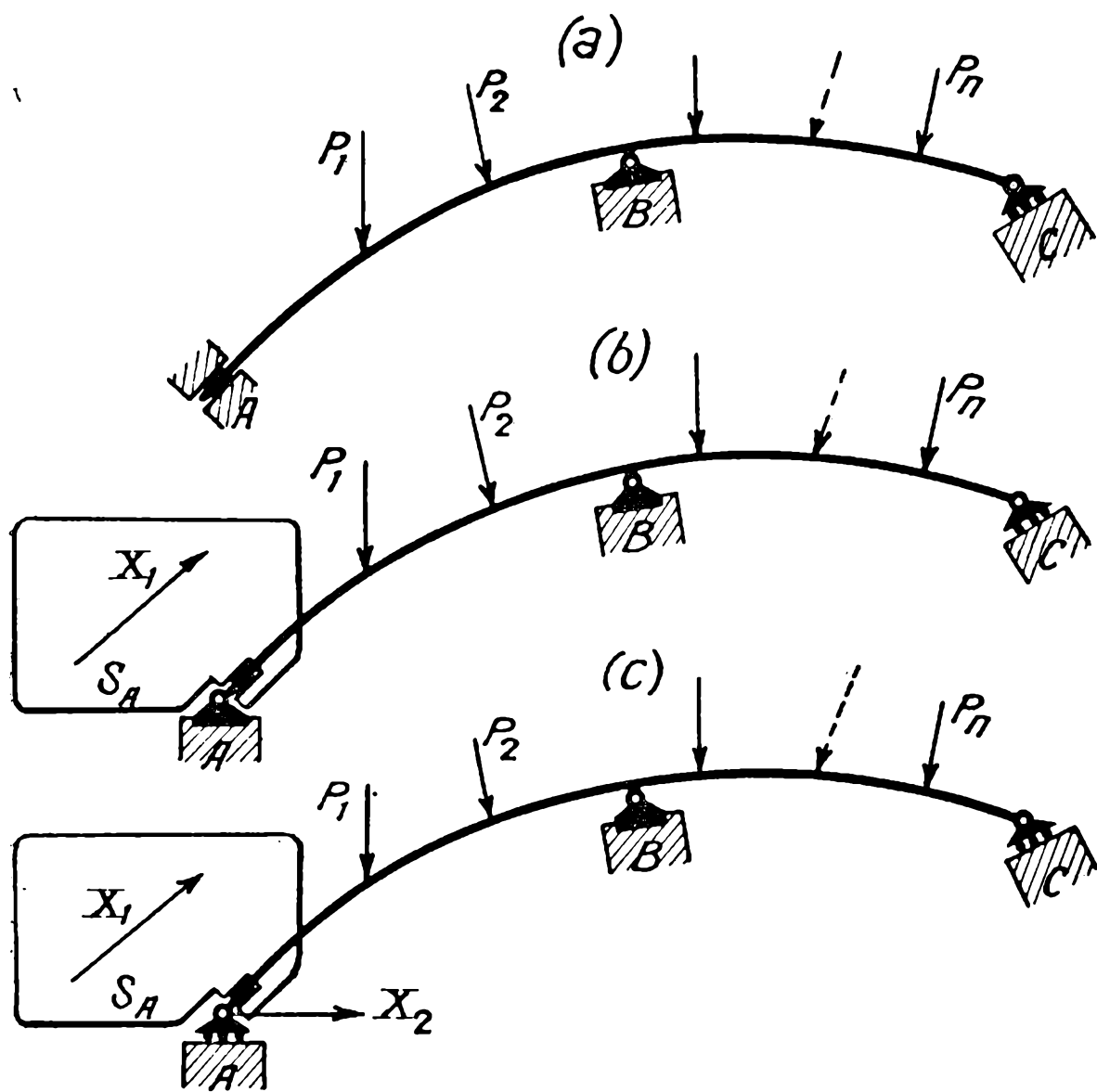


FIG. 219

Por otra parte, no es indispensable que el apoyo móvil esté ligado al punto A , pudiendo estarlo a cualquiera de la chapa S_A . En efecto; el sistema representado en la figura 220 *a*, es evidentemente equivalente al de la 219 *a*, puesto que estando sujeta la chapa S_A al vínculo del desplazamiento idéntico por causa de los tres apoyos móviles A_1, A_2 y A_3 , el primer elemento A , no puede experimentar ningún desplazamiento, o lo que es lo mismo, permanece empotrado. Ahora bien, si suprimimos los apoyos móviles A_1 y A_2 (fig. 220 *b*), poniendo en su reemplazo fuerzas

incógnitas X_1 y X_2 , capaces de impedir los desplazamientos que según sus respectivas direcciones experimentarían los puntos A_1 y A_2 de la chapa S_A durante la deformación debida a las cargas P_p , el nuevo sistema será también equivalente al de la figura 219 a.

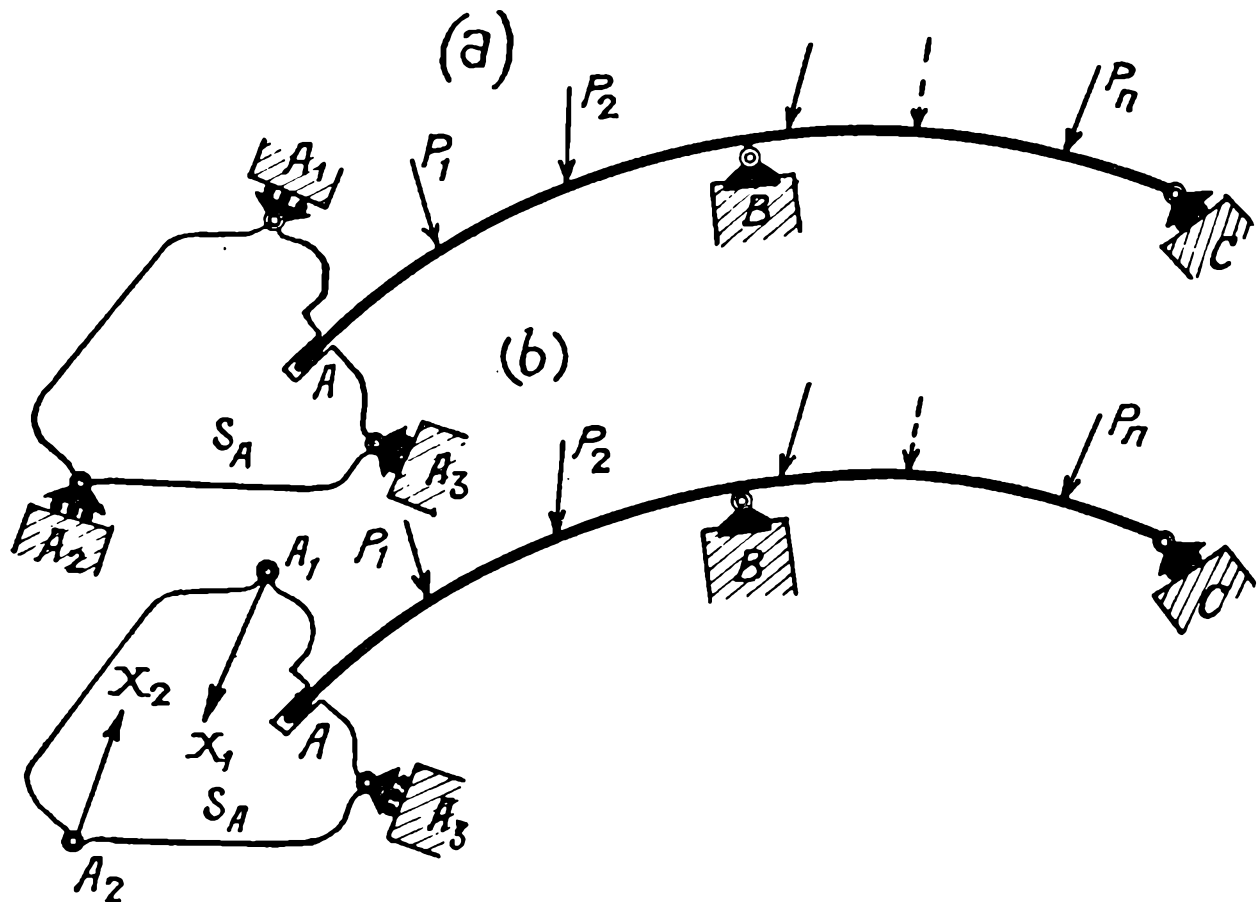


FIG. 220

362. — Consideremos, ahora, un sistema de reticulado con barras superabundantes (fig. 221 a), en equilibrio bajo un conjunto de cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$). Si cortamos una de las barras superabundantes, la $M-N$ por ejemplo, y en los extremos C y C' (fig. 221 b), aplicamos fuerzas T , iguales y de sentido contrario, equivalentes a la tensión que las cargas P_p originan en la misma, el equilibrio primitivo, evidentemente, no alterará.

Las fuerzas T , que implican una sola incógnita, desde que sus intensidades son iguales y de signo contrario, transmiten su acción al resto del reticulado por intermedio de los dos trozos de barra CM y $C'N$, y los desplazamientos que bajo las cargas P_p , experimentan sus puntos C y C' de aplicación, son iguales a los que, en virtud de la deformación propiamente dicha del sistema, corresponden a los nudos M y N compuestos respectivamente, con los alargamientos o acortamientos que experimentan dichos trozos de barra CM y $C'N$.

Por comodidad, supondremos hecho el corte en uno de los nudos, el M por ejemplo, y representaremos esquemáticamente el sistema resultante

en la forma indicada en la figura 221 c. Una de las fuerzas T actúa directamente en el nudo M y el desplazamiento de su punto de aplicación, en una deformación cualquiera, será el que experimenta directamente dicho nudo. La otra fuerza T se aplica al nudo N por intermedio de un resorte $N'N$, que posee igual deformabilidad que la barra MN , es decir,

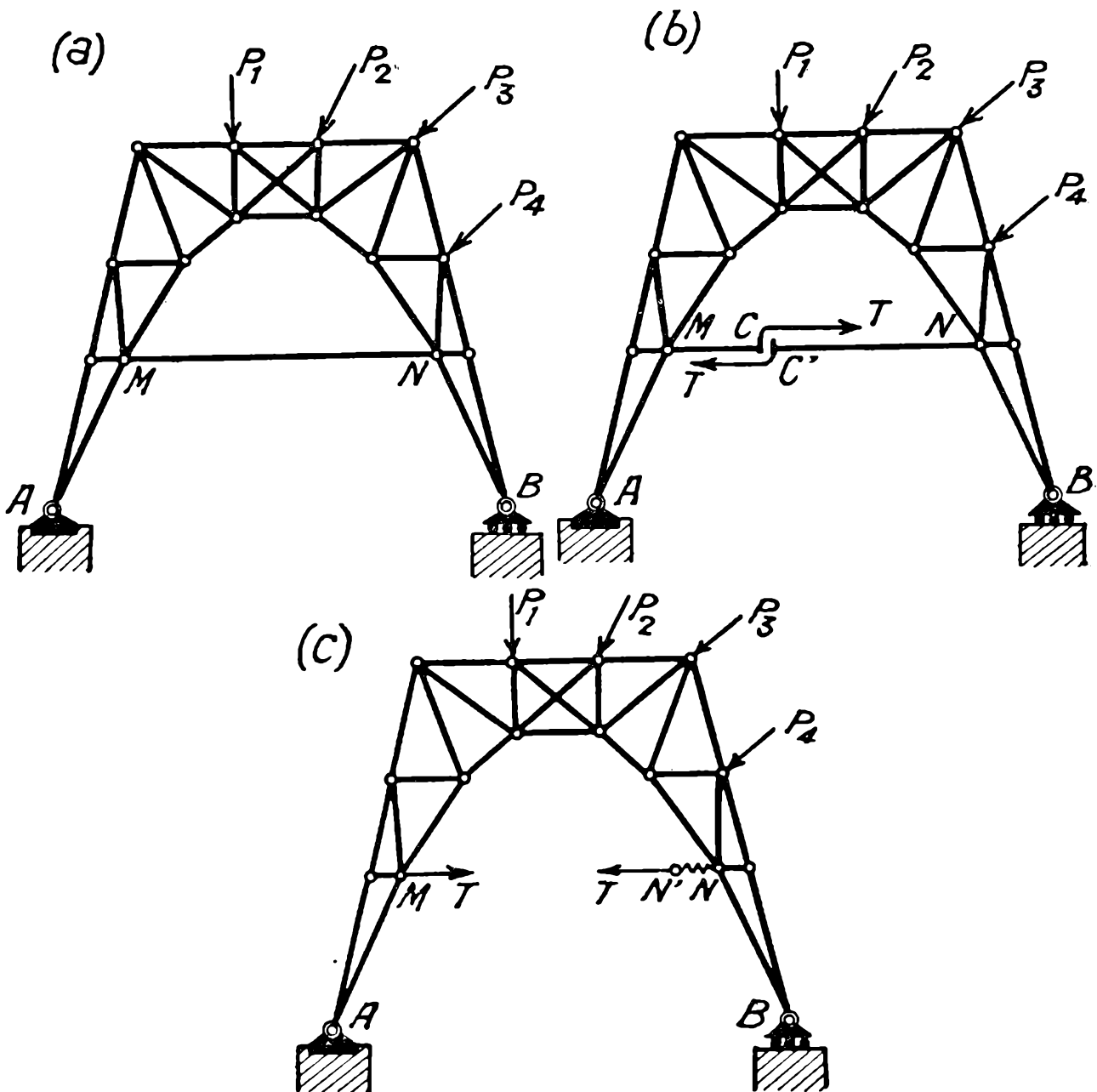


FIG. 221

que, llamando s la longitud de la barra NM y Ω su sección, bajo la acción de fuerzas T experimenta alargamientos

$$\Delta s = \frac{T \cdot s}{E \Omega} = T \epsilon,$$

iguales a los que experimentaría esta última. El desplazamiento del punto N' de aplicación de la fuerza T , será el que corresponde al nudo N compuesto con el alargamiento de dicho resorte.

Es evidente que el sistema de la figura 221 *c*, en el que se supone que las fuerzas T tienen la intensidad de la tensión que en la barra MN originan las cargas P_p , o sea la intensidad capaz de obtener que durante la deformación debida a dichas cargas la variación de la distancia MN sea igual al alargamiento o acortamiento del resorte $N'N$, es equivalente, en cuanto a sus condiciones de equilibrio, al sistema dado (fig. 221*a*).

Procediendo en igual forma para las otras barras superfluas, podríamos eliminarlas, considerando las tensiones incógnitas correspondientes como fuerzas incógnitas aplicadas al sistema isostático resultante.

363. — Sea, finalmente, un sistema de celosía rígida (fig. 222 *a*) en el que sus barras constituyen sistemas de alma llena, con tensiones internas, o características, hiperestáticas. Si le aplicamos un conjunto de cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$), la acción R , que, a través de una sección cualquiera nn , la parte de la izquierda trasmite a la de la derecha, igual y de sentido contrario a la R' , que esta última trasmite a aquélla, es estáticamente indeterminable, según sabemos.

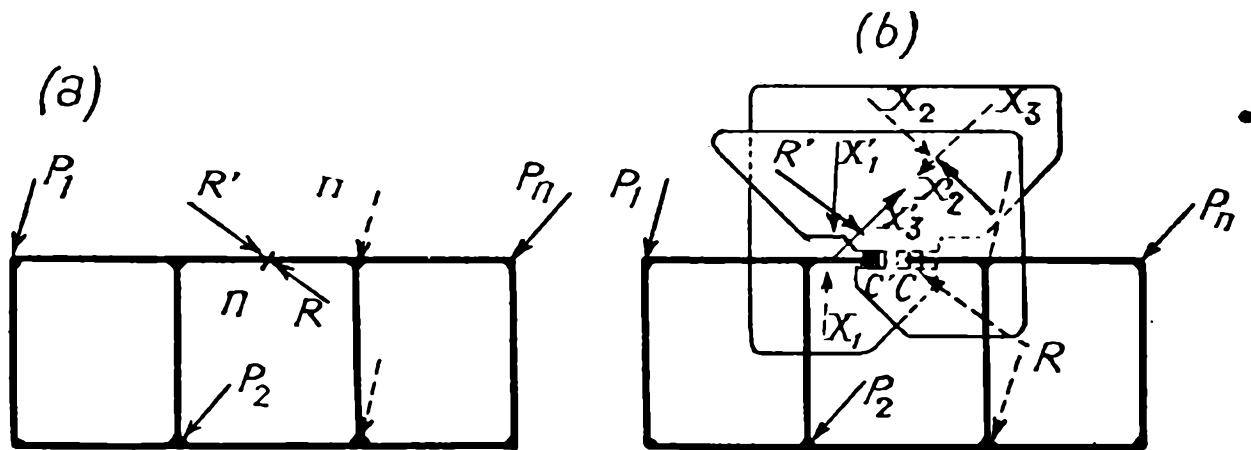


FIG. 222

Si cortamos el sistema de alma llena, que constituye la barra en cuestión, según la sección nn y sobre chapas rígidas ligadas a los extremos C y C' (fig. 222 *b*) del corte efectuado, aplicamos fuerzas opuestas, R y R' de intensidad igual a la reacción incógnita buscada, el equilibrio subsistirá. Las fuerzas R y R' tendrán la intensidad y recta de acción requeridas para impedir que durante la deformación debida a las cargas P_p , las chapas C y C' experimenten desplazamiento relativo alguno.

La fuerza R de la chapa C supone tres incógnitas hiperestáticas, que elegiremos tomando las intensidades X_1, X_2 y X_3 de sus componentes según tres direcciones cualesquiera no concurrentes. Es decir, para mantener el equilibrio, una vez efectuado el corte, sobre la chapa C tendremos que aplicar tres fuerzas, X_1, X_2 y X_3 , de intensidades iguales a las incógnitas buscadas y sobre la otra, C' , otras tres iguales y directamente opuestas. Estos tres pares de fuerzas opuestas, se podrán considerar en

el sistema que resulta al efectuar el corte, como fuerzas exteriores directamente aplicadas.

Si, como dirección de las tres componentes X_1 , X_2 y X_3 , elegimos la recta en el infinito del plano, la paralela y la normal a la fibra media en el punto de la misma correspondiente a la sección en que se ha efectuado el corte, sus intensidades incógnitas (fig. 223) corresponderán a las características en dicha sección, es decir, se vendrá a tomar como incógnitas hiperestáticas a calcularse, directamente el momento flector \mathcal{M} y los esfuerzos normal, \mathcal{N} , y tangencial, \mathcal{T} , en la sección considerada.

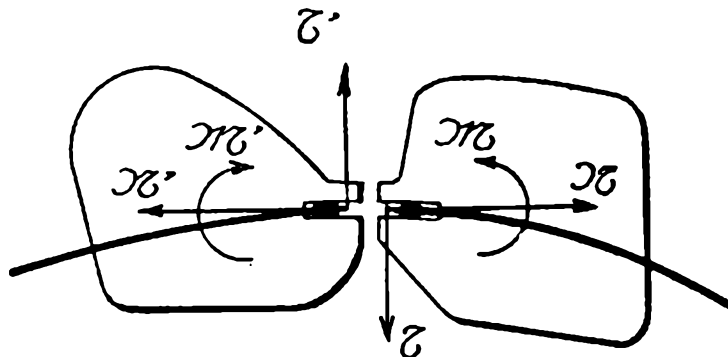


FIG. 223

• 364. — En muchos casos no será necesario tomar como fuerzas exteriores simultáneamente las tres incógnitas, \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} que supone una sección de un sistema de alma llena, sino aisladamente una cualquiera de ellas.

Para considerar un momento flector como fuerza exterior, bastará efectuar un corte al sistema de alma llena en la sección considerada, y articular

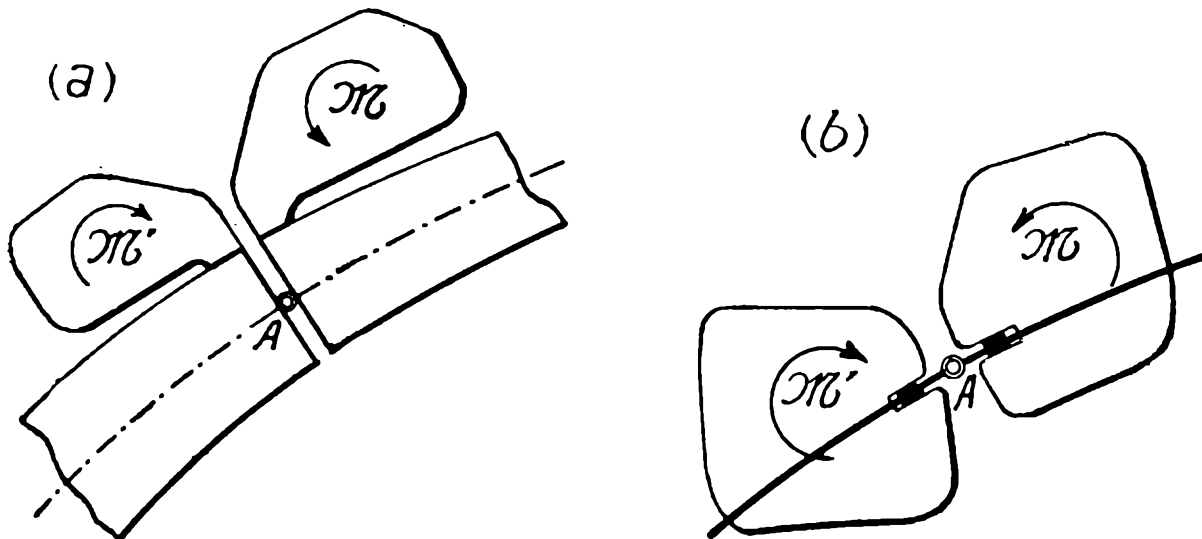


FIG. 224

lar las partes así obtenidas (fig. 224 a) en el punto A correspondiente de la fibra media, aplicando sobre chapas rígidas solidariamente ligadas con los extremos de dichas partes, dos cuplas de sentido contrario y de

intensidad absoluta igual al momento flector, \mathcal{M} , en la misma. El nuevo sistema así obtenido se mantendrá, evidentemente, en las mismas condiciones de equilibrio que el primitivo, puesto que las cuplas \mathcal{M} tendrán la intensidad requerida para impedir las rotaciones relativas de las secciones extremas, o de las chapas ligadas a las mismas, en torno a la articulación A . Esquemáticamente representaremos este corte en la forma indicada en la figura 224 *b*.

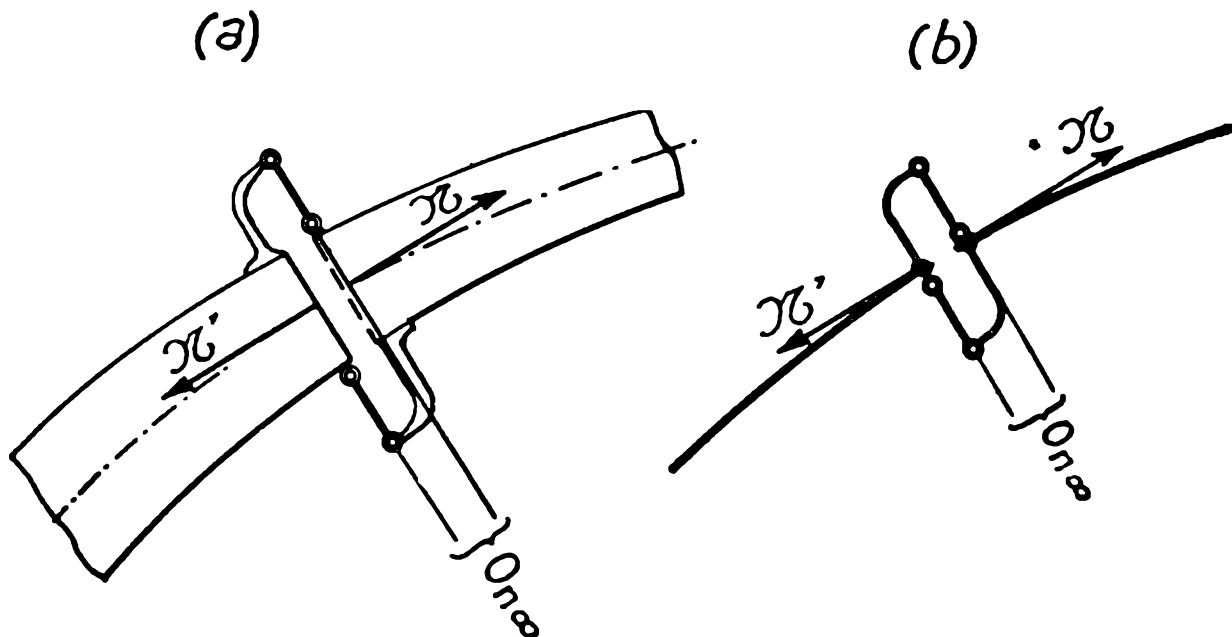


FIG. 225

Para poner en evidencia como fuerza exterior un esfuerzo normal \mathcal{N} , haremos un corte en el sistema y articularemos las secciones extremas, provenientes del mismo, en el punto en el infinito, $O_{n\infty}$, de la normal a la fibra media, correspondiente a la sección considerada (fig. 225 *a*),

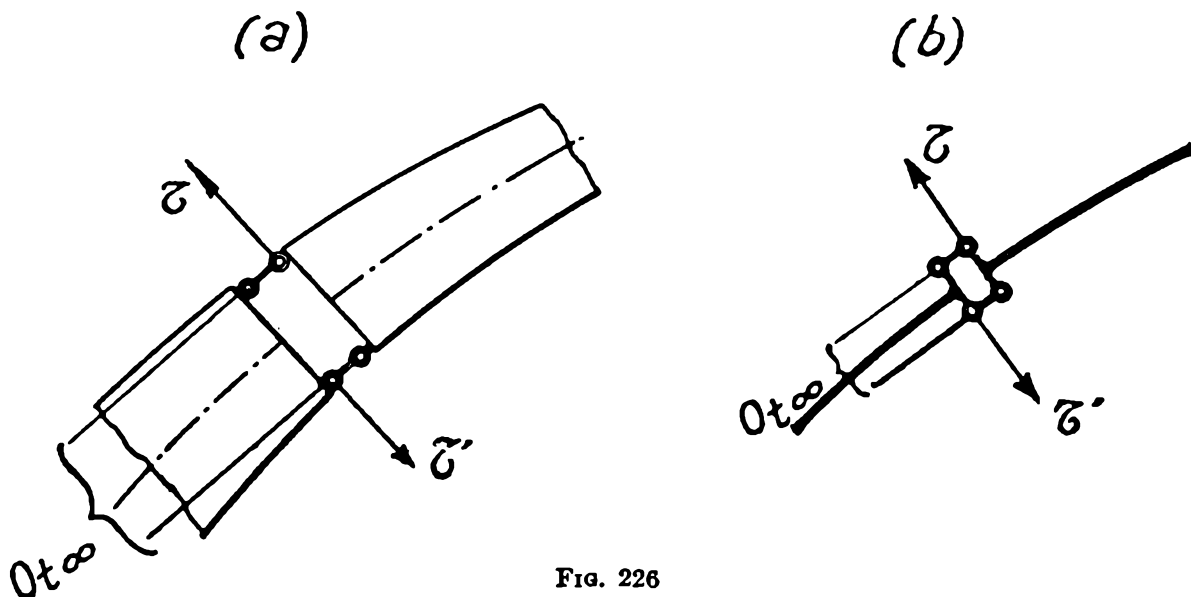


FIG. 226

impidiendo las traslaciones relativas perpendiculares a dicha normal que la articulación en cuestión permite, o, en otros términos, manteniendo el equilibrio, mediante las dos fuerzas \mathcal{N} y \mathcal{N}' , aplicadas en los centros de gravedad de las secciones extremas, como indican las figuras 225 *a* y *b*.

Finalmente, para considerar un esfuerzo tangencial como fuerza exterior, haremos, como en los casos anteriores, un corte en el sistema (fig. 226 *a* y *b*) y articularemos las secciones extremas en el punto en el infinito, $O_{t\infty}$, de la tangente a la fibra media en la sección considerada, manteniendo el equilibrio, es decir, impidiendo las traslaciones normales a dicha tangente, que la articulación permite, mediante las dos fuerzas \mathcal{C} y \mathcal{C}' , iguales y de sentido contrario.

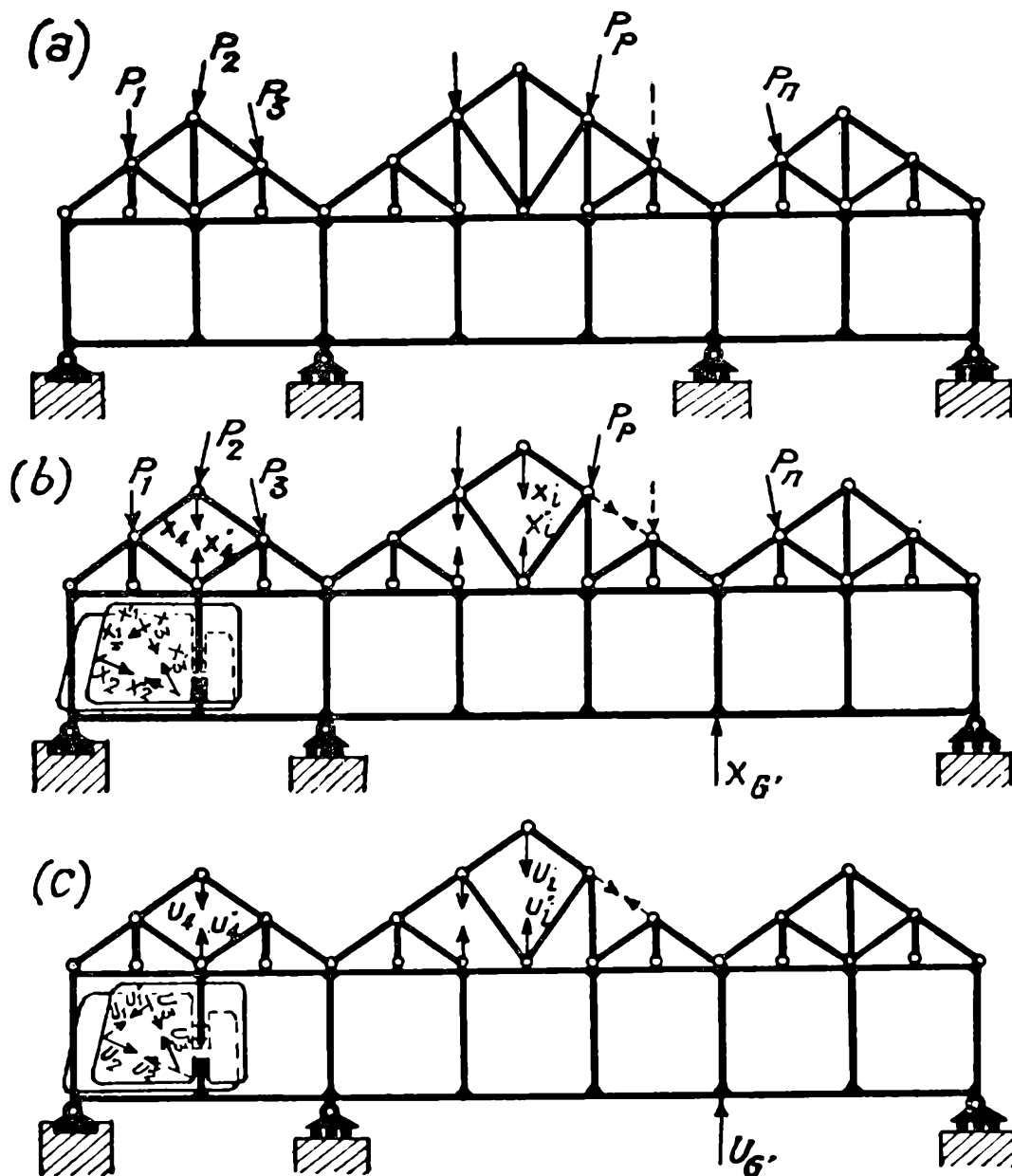


FIG. 227

365. Teorema. — Sea (fig. 227 *a*) un sistema cualquiera con G incógnitas hiperestáticas correspondientes a vínculos internos y de sustentación, no sujeto a cambios de temperatura y sometido a un conjunto de n cargas P ($p = 1, 2, \dots, n$). Suprimamos un número cualquiera G' o la totalidad de sus vínculos superabundantes, reemplazándolos por las fuerzas o cuplas incógnitas que constituyen las reacciones equivalentes, de acuerdo con el criterio establecido en los números anteriores y como

indica la figura 227 b. Designaremos, en general, por X_i , la intensidad de la fuerza, o cupla, o de una cualquiera del par de fuerzas o de cuplas, que determina sin ambigüedad, dichas reacciones correspondientes a los vínculos suprimidos, es decir, que X_i nos podrá representar según los casos:

- 1º) La intensidad de una fuerza, componente, según una dirección determinada, de la reacción debida a una sustentación;
- 2º) La intensidad de una cupla, componente según la recta en el infinito, de la reacción debida a una sustentación;
- 3º) La intensidad de una cualquiera de las fuerzas iguales y opuestas que constituye un esfuerzo normal o un esfuerzo de corte;
- 4º) La intensidad de una cualquiera de las cuplas iguales y de sentido contrario que constituyen un momento flector,
- 5º) La intensidad de la tensión en una barra de reticulado, tomada de acuerdo con la convención de signos adoptada en (136).

Suprimidos, pues, así los G' vínculos superabundantes, obtendremos un sistema en equilibrio, hiperestático o isostático (*) sujeto a las cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) directamente aplicadas y a las fuerzas o cuplas que corresponden a las G' incógnitas X_i ($i = 1, 2, \dots, G'$), considerados como fuerzas exteriores.

Consideremos, ahora, el sistema así obtenido sin carga alguna, y siendo U_i ($i = 1, 2, \dots, n$) valores completamente arbitrarios, apliquémosle el siguiente sistema de fuerzas (fig. 227 c)

$$X_1 = U_1; X_2 = U_2; \dots; X_i = U_i; X_{G'} = U_{G'}$$

$$P_1 = P_2 = \dots = P_p = \dots = P_n = 0,$$

o sea

$$X_i = U_i (i = 1, 2, \dots, G')$$

$$P_p = 0 (p = 1, 2, \dots, n),$$

es decir, demos valores arbitrarios U_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) a las intensidades de las fuerzas, cuplas, pares de fuerzas o cuplas, que constituyen las incógnitas X_i y supongamos nulas las cargas directamente aplicadas P_p . Supongamos determinada, además, la deformación que, en dicho sistema isostático, origina este estado de cargas y sean a_p y a_i los *desplazamientos correspondientes* a las fuerzas P_p e incógnitas X_i , durante dicha deformación, llamando desplazamientos correspondientes a las fuerzas P_p a las proyecciones sobre sus direcciones de los desplazamientos experimentados

(*) Isostático en el caso en que se considere como fuerzas exteriores la totalidad G de las incógnitas hiperestáticas del sistema.

por sus puntos de aplicación y desplazamientos correspondientes a las incógnitas X_i , a las proyecciones de desplazamientos absolutos o relativos, o a las rotaciones absolutas o relativas, que hay que determinar, según los casos, para formar productos escalares, con las fuerzas, pares de fuerzas opuestas, cuplas o pares de cuplas opuestas que constituyen, es decir, que a_i representará:

- 1º) Si la incógnita X_i correspondiente es una fuerza, la proyección sobre ella del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación;
- 2º) Si la incógnita X_i es una cupla, la rotación de la chapa en que está aplicada;
- 3º) Si la incógnita X_i es la intensidad de una de las dos fuerzas opuestas que constituyen un esfuerzo normal o de corte, la proyección sobre la dirección de las mismas del desplazamiento relativo experimentado por el punto de aplicación de la fuerza considerada con respecto al de la otra;
- 4º) Si la incógnita X_i es la intensidad de una de las cuplas de un par iguales y de sentido contrario, la rotación relativa de la chapa en que actúa la cupla considerada, con respecto a la otra, y
- 5º) Si la incógnita X_i es la tensión de una barra, la variación de distancia de los puntos de aplicación del par de fuerzas equivalentes, con signo contrario para tener en cuenta lo que hemos dicho en (352), con respecto al signo que resulta para el producto escalar de una tensión de acuerdo con la convención de signos por nosotros adoptada.

Calculados, pues, según lo anterior los desplazamientos a_p y a_i correspondientes a las cargas P_p y a las incógnitas X_i , durante la deformación debida al estado $X_i = U_i$ ($i = 1, 2, \dots, G$), el producto escalar resultante del sistema de cargas P_p e incógnitas X_i , por los desplazamientos debidos a dicha deformación, es

$$\sum_{i=1}^{G'} X_i \cdot a_i + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_p \quad [a]$$

Si llamamos $a_{i, (p+i)}$, el desplazamiento correspondiente a la fuerza $X_i = U_i$, en la deformación del sistema considerado, debida al conjunto de cargas P_p e incógnitas X_i , el producto escalar resultante del sistema de fuerzas correspondientes al estado de carga $X_i = U_i$ ($i = 1, 2, \dots, G'$) por los desplazamientos debidos a dicha deformación, es

$$\sum_{i=1}^{G'} U_i \cdot a_{i, (p+i)}. \quad [b]$$

En virtud de la ley de Betti, los productos escalares dados por las expresiones $[a]$ y $[b]$ deben ser iguales, es decir,

$$\sum_{i=1}^{G'} X_i \cdot a_i + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_p = \sum_{i=1}^{G'} U_i \cdot a_{i, (p+i)}.$$

Pero, si X_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) representa, como hemos supuesto, las intensidades de las incógnitas hiperestáticas correspondientes al estado de cargas P_p , los desplazamientos $a_{i, (p+i)}$, que corresponden a las incógnitas X_i , durante la deformación debida a las cargas P_p y X_i , deben ser nulos, puesto que las intensidades de dichas incógnitas X_i , son precisamente:

- 1º) Si X_i es una fuerza, las capaces de anular la proyección sobre su dirección del desplazamiento que experimenta su punto de aplicación durante la deformación debida a las cargas P_p ;
- 2º) Si X_i es una cupla, las capaces de anular la rotación que, durante dicha deformación, experimenta la chapa en que actúa ;
- 3º) Si X_i es la intensidad de una de las fuerzas de un par iguales y de sentido contrario, las capaces de anular la proyección sobre las mismas del desplazamiento relativo de sus puntos de aplicación experimentado durante la misma deformación ;
- 4º) Si X_i es la intensidad de una de las cuplas de un par iguales y de sentido contrario, las capaces de anular la rotación relativa que, durante dicha deformación, experimentan las chapas en que están aplicadas, y
- 5º) Si X_i representa la intensidad de una tensión en una barra, las capaces de anular la variación de distancia experimentada durante dicha deformación por los puntos de aplicación del par de fuerzas opuestas que la misma constituye.

Teniéndose, pues,

$$a_{i, (p+i)} = 0,$$

y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^{G'} U_i \cdot a_{i, (p+i)} = 0,$$

la anterior expresión se convierte en

$$\sum_{i=1}^{G'} X_i \cdot a_i + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_p = 0,$$

que nos dice que:

Si en un sistema hiperestático cualquiera, en equilibrio bajo un conjunto de cargas y no sujeto a variaciones de temperatura, se suprime un número también cualquiera de vínculos superfluos, reemplazándolos por las reacciones hiperestáticas correspondientes, y, al sistema resultante se da la deformación debida a valores arbitrarios atribuidos a dichas incógnitas, la suma de los productos escalares de las fuerzas exteriores aplicadas a este último (cargas y reacciones incógnitas de los vínculos suprimidos), por los desplazamientos que les corresponden durante dicha deformación, es igual a cero.

366. Resolución de sistemas hiperestáticos. — Consideremos un sistema hiperestático cualquiera de grado G , con vínculos superfluos internos y de sustentación, sometido a un conjunto de cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) y no sujeto a variaciones de temperatura. Suprimamos la totalidad G de sus vínculos superabundantes, reemplazándolos por las reacciones hiperestáticas correspondientes y propongámonos determinar las G incógnitas X_i ($i = 1, 2, \dots, G$) que éstas implican.

Apliquemos al sistema isostático resultante al suprimir en la forma dicha, los G vínculos superabundantes, el estado de cargas

$$\begin{aligned} X_1 = U_1; X_2 = X_3 = \dots = X_i = \dots = X_G = 0; \\ P_1 = P_2 = \dots = P_p = \dots = P_n = 0, \end{aligned}$$

es decir, demos un valor arbitrario U_1 a la intensidad, de la fuerza o cupla, par de fuerzas o de cuplas opuestas, que constituye la primera incógnita X_1 y supongamos nulas todas las incógnitas restantes, así como las cargas directamente aplicadas P_p . Tendremos en esta forma un estado particular de cargas que llamaremos *estado* $X_1 = U_1$, o *estado* X_1 *unitario* (*). Determinemos, además, mediante algunos de los procedimientos conocidos, elásticas o diagramas de Williot-Mohr, la deformación que, en dicho sistema isostático, origina este estado de cargas y sean respectivamente $a_{p,1}$ y $a_{i,1}$ los desplazamientos correspondientes a las cargas P_p y a las incógnitas X_i (**). En virtud del teorema que, como una consecuencia directa de la ley de Betti, acabamos de demostrar, deberá tenerse que

$$\sum_{i=1}^G X_i \cdot a_{i,1} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,1} = 0.$$

Aplicando, en igual forma, sobre el sistema hecho isostático, sucesivamente estados de carga $X_2 = U_2$, $X_3 = U_3, \dots$, es decir, en general es-

(*) Porque, por lo general, se tomará para U_1 un valor igual a 1 t ó 1 tm, con el objeto de simplificar los cálculos.

(**) Entendiendo por desplazamientos correspondientes a las incógnitas X_i lo establecido en las páginas 24 y siguientes.

estados de carga unitarios $X_j = U_j$, en los que se debe entender que se aplica solamente una fuerza $X_j = U_j$, y determinando los desplazamientos $a_{p,j}$ y $a_{i,j}$ correspondientes a las cargas P_p y a las incógnitas X_i , durante las deformaciones respectivas, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^G X_i \cdot a_{i,j} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, G),$$

o sea, desarrollando,

$$[a] \left\{ \begin{array}{l} X_1 \cdot a_{1,1} + X_2 \cdot a_{2,1} + \dots + X_G \cdot a_{G,1} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,1} = 0 \\ X_1 \cdot a_{1,2} + X_2 \cdot a_{2,2} + \dots + X_G \cdot a_{G,2} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,2} = 0 \\ \dots \\ X_1 \cdot a_{1,j} + X_2 \cdot a_{2,j} + \dots + X_G \cdot a_{G,j} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,j} = 0 \\ \dots \\ X_1 \cdot a_{1,G} + X_2 \cdot a_{2,G} + \dots + X_G \cdot a_{G,G} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,G} = 0, \end{array} \right.$$

sistema que, por ser de tantas ecuaciones, G , como incógnitas hiperestáticas X_i ($i = 1, 2, \dots, G$) nos resuelve el problema de la determinación de las mismas.

367. — Resumiendo, pues, el procedimiento que acabamos de obtener, como una aplicación directa de la ley de Betti, para la resolución de los sistemas hiperestáticos, o sea, para la determinación de sus incógnitas superfluas, consiste en lo siguiente:

Se suprimen todos los vínculos superabundantes, internos y de sustentación, convirtiendo el sistema dado en uno estáticamente determinado mediante el reemplazo de los mismos por las reacciones superfluas correspondientes a las incógnitas X_i ($i = 1, 2, \dots, G$) a calcular. Se aplican sucesivamente estados de carga $X_j = U_j$ ($j = 1, 2, \dots, G$), es decir, se supone, sucesivamente que, sobre el sistema isostático resultante, sólo

actúe una fuerza $X_j = U_j$ ($j = 1, 2, \dots, G$) de valor arbitrario, y se calculan los desplazamientos $a_{p,j}$ y $a_{i,j}$ que, en las deformaciones originadas por dichas fuerzas U_j , corresponden, respectivamente, a las cargas P_p y a las incógnitas X_i , y con ellos se forma el sistema $[a]$ de ecuaciones del número anterior, que resuelve el problema.

368. — Si, en el sistema anterior, en lugar de aplicar sucesivamente estados de carga $X_j = U_j$, aplicáramos un estado en que diéramos simultáneamente valores arbitrarios a cada una de las incógnitas, es decir, un estado

$$X_1 = U_1', X_2 = U_2' \dots, X_j = U_j', \dots, X_G = U_G',$$

y llamáramos a_p' y a_i' , los desplazamientos correspondientes a las cargas P_p e incógnitas X_i durante la deformación originada por el mismo, el teorema del número (365) nos daría

$$\sum_{i=1}^G X_i \cdot a_i' + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_p' = 0. \quad [a]$$

Aplicando otro estado de cargas $X_j = U_j''$ ($j = 1, 2, \dots, G$), obtenido dando otros valores arbitrarios U_j'' , a las incógnitas X_j , llegaríamos a otra ecuación análoga y así, a cuantos quisiéramos. Parece, pues, a primera vista, que es posible obtener un número cualquiera de ecuaciones, y que el sistema resultante, teniéndolas en mayor número que incógnitas, carece de solución determinada. No sucede así, sin embargo, siendo la solución perfectamente determinada, pues las ecuaciones análogas a la $[a]$ son una simple consecuencia de las $[a]$ del número (366), resultando de combinaciones entre éstas — que son las únicas independientes — obtenidas sumando algebraicamente sus miembros multiplicados por constantes determinadas.

En efecto; en el estado de carga anterior, la fuerza unitaria cualquiera U_j' origina desplazamientos $a'_{p,j}$, y $a'_{i,j}$, correspondientes a las cargas P_p y a las incógnitas X_i , dados, en virtud del principio de la superposición de los pequeños efectos, por las expresiones

$$a'_{p,j} = a_{p,j} \frac{U_j'}{U_j}$$

y

$$a'_{i,j} = a_{i,j} \frac{U_j'}{U_j},$$

en las que $a_{p,j}$ y $a_{i,j}$ son los desplazamientos análogos debidos a la fuerza unitaria U_j aplicada en (366).

Los desplazamientos debidos a todas las fuerzas U_j' ($j = 1, 2, \dots, G$) serán, por tanto,

$$a_p' = \sum_{j=1}^G a'_{p,j} = \sum_{j=1}^G a_{p,j} \frac{U_j'}{U_j}$$

y

$$a_i' = \sum_{j=1}^G a'_{i,j} = \sum_{j=1}^G a_{i,j} \frac{U_j'}{U_j}$$

Sustituyendo en la [a] se tiene

$$\sum_{i=1}^G X_i \sum_{j=1}^G a_{i,j} \frac{U_j'}{U_j} + \sum_{p=1}^n P_p \sum_{j=1}^G a_{p,j} \frac{U_j'}{U_j} = 0,$$

expresión que resulta de sumar los términos $X_i \cdot a_{i,j}$ y $P_p \cdot a_{p,j}$ de las [a] de (366), previa multiplicación por los factores $\frac{U_j'}{U_j}$, como queríamos demostrar.

La aplicación del procedimiento expuesto en (366) conduce, por consiguiente, a las únicas ecuaciones independientes posibles entre las incógnitas X_i , y el problema tiene solución perfectamente determinada.

369. — En el número (366) hemos dicho que, para emplear el procedimiento en él expuesto, se suprimen todos los vínculos superabundantes, convirtiendo el sistema dado en uno isostático. Ello, sin embargo, no es necesario, pudiendo emplearse el mismo método cuando sólo se supriman alguno o algunos de los vínculos, dejando hiperestático el sistema resultante, siempre que se sepa hallar las deformaciones que, en este último, originan los estados unitarios de carga, correspondientes a los vínculos suprimidos. Esto no se sabrá, por lo general, efectuar, por cuya causa, en la mayoría de los casos, será indispensable suprimir todos los vínculos superfluos, de modo a trabajar con un sistema isostático.

Suponiendo, pues, que se pueda hallar dichas deformaciones del sistema hiperestático resultante, al suprimir sólo algunos vínculos superfluos (*), veamos en qué forma aplicamos dicho procedimiento para la obtención de las incógnitas hiperestáticas correspondientes a los mismos. Sea, por ejemplo, el sistema hiperestático de la figura 229 a, sujeto a las cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$), y propongámonos determinar la incógnita T correspondiente a la tensión de la barra MN . Suprimamos dicha barra, colocando en su reemplazo, como indica la figura 228 b, mediante el resorte

(*) Caso que se presenta en el método de Mohr para la resolución de las vigas continuas y en el de reducciones sucesivas, aplicable a un sistema cualquiera.

NN' , de deformación equivalente a ella, el par de fuerzas T , que constituye la tensión en la misma, con lo que el equilibrio no quedará alterado.

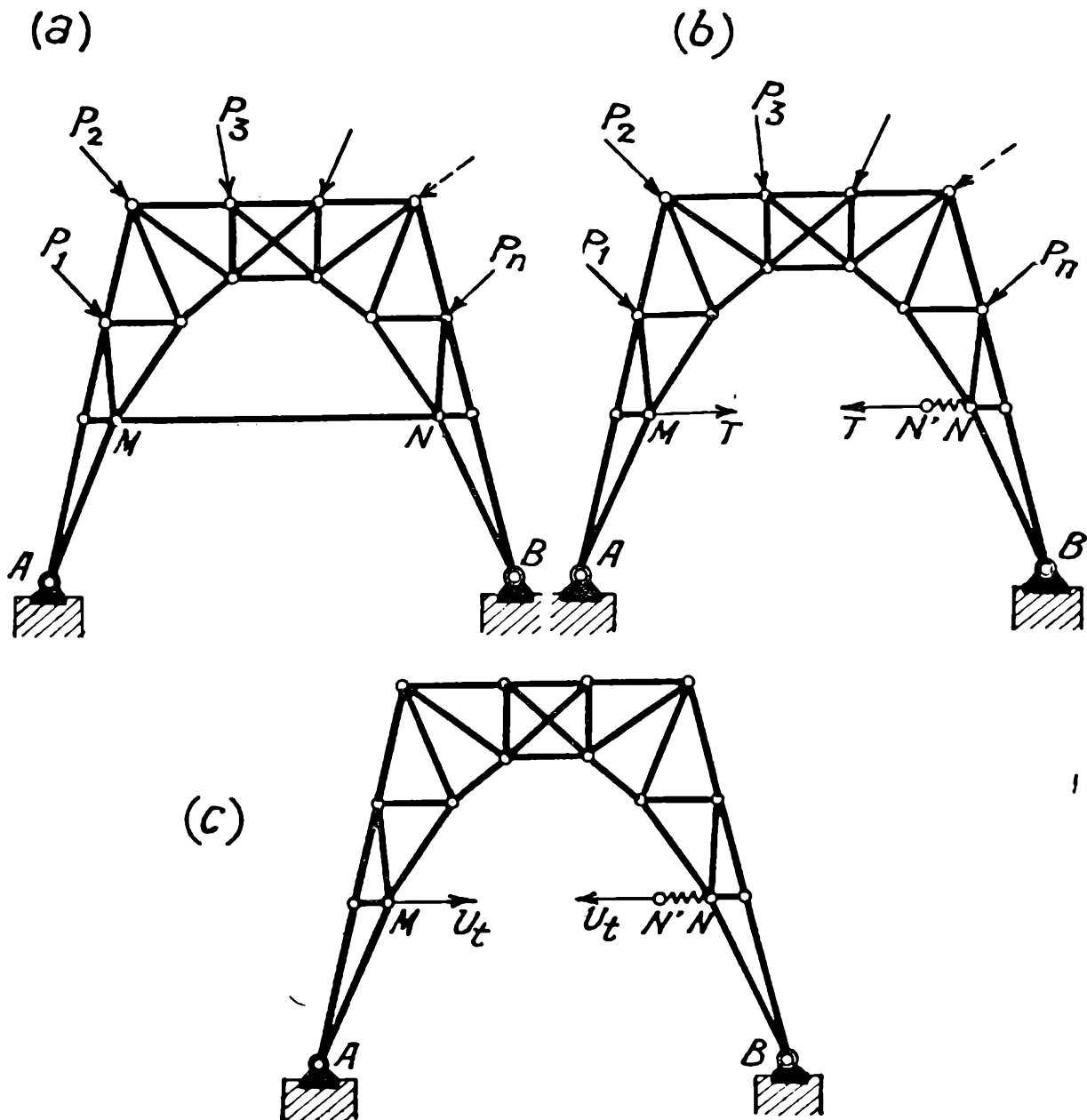


FIG. 228

Si siguiendo el procedimiento anterior, consideremos un estado de cargas en que sólo actúe un par de fuerzas opuestas (fig. 228 c)

$$T = U_t,$$

siendo U_t un valor arbitrario (**), y determinemos la deformación que el mismo origina en el sistema hiperestático resultante, cosa que supondremos que sabemos realizar; sean $a_{p,t}$ los desplazamientos correspondientes a las fuerzas P_p , o sea, las proyecciones sobre ella de los desplazamientos experimentados por los puntos de aplicación y δ el des-

(*) Que, como ya hemos dicho, por lo general y para comodidad de los cálculos, se tomará igual a la unidad.

plazamiento correspondiente a la tensión T , o sea la variación de distancia entre los puntos M y N' . El teorema del número (366), nos conduce a la ecuación

$$T \cdot (-\delta) + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_p t = 0,$$

en la que a δ precede el signo negativo de acuerdo a lo dicho en (352), con respecto a la expresión del producto escalar de una tensión. La ecuación obtenida nos permite hallar directamente el valor de la incógnita hiperestática T .

Si, procediendo en igual forma, suprimiéramos, uno a uno, los vínculos superfluos del sistema en cuestión, y suponiendo siempre que supiéramos hallar, en cada caso, en los sistemas hiperestáticos resultantes, las deformaciones debidas a valores unitarios de la incógnita correspondiente al vínculo suprimido, obtendríamos ecuaciones análogas a la anterior, que nos darían, directamente, los valores de dichas incógnitas, con lo que el problema de la resolución estática del sistema dado se efectuaría con suma comodidad.

Análogamente, si, en lugar de suprimir uno a uno los G vínculos superabundantes, suprimiéramos simultáneamente un número cualquiera G' de ellos, obtendríamos, aplicando sucesivamente G' estados unitarios de carga, $X_j = U_j$ ($j = 1, 2, \dots, G'$), al sistema hiperestático resultante, G' ecuaciones entre las incógnitas consideradas, que nos determinarían sus valores.

§ 5. — Aplicación de la ley de Betti a la obtención de desplazamientos debidos a deformaciones de sistemas planos. Teorema de Mohr

370. Esfuerzos auxiliares. — Al aplicar sobre un sistema isostático o hiperestático un conjunto cualquiera de cargas, experimenta según sabemos, antes de llegar a la posición de equilibrio, una determinada deformación, durante la que sus diversos puntos sufren desplazamientos absolutos y relativos, cuya determinación es de interés práctico en muchos casos. Entre estos desplazamientos, cuya determinación puede ser necesaria, se encuentran los siguientes:

- 1º) Proyección del desplazamiento de un punto sobre una dirección dada;
- 2º) Rotación de una sección de un sólido de alma llena, o, lo que es equivalente, de una chapa rígida solidariamente ligada al elemento correspondiente de fibra media;

- 3º) Rotación de la dirección de una barra de un reticulado. No puede hablarse de la rotación de una barra de un reticulado debida a una deformación del mismo, pues dicha barra se deforma durante ésta última. Los desplazamientos de la barra pueden descomponerse: primero en un alargamiento o acortamiento y luego en una rotación como si se tratara de una chapa rígida. Esta última rotación es lo que designaremos rotación de la dirección de la barra. Si en el nudo A (fig. 229) de una barra articulamos una chapa que se apoye moviblemente sobre su otro extremo B , es evidente que durante el alargamiento o acortamiento de la barra, esta chapa no experimentará ningún desplazamiento, y que la rotación de la misma durante una deformación del reticulado será precisamente igual a la rotación de la dirección de la barra;

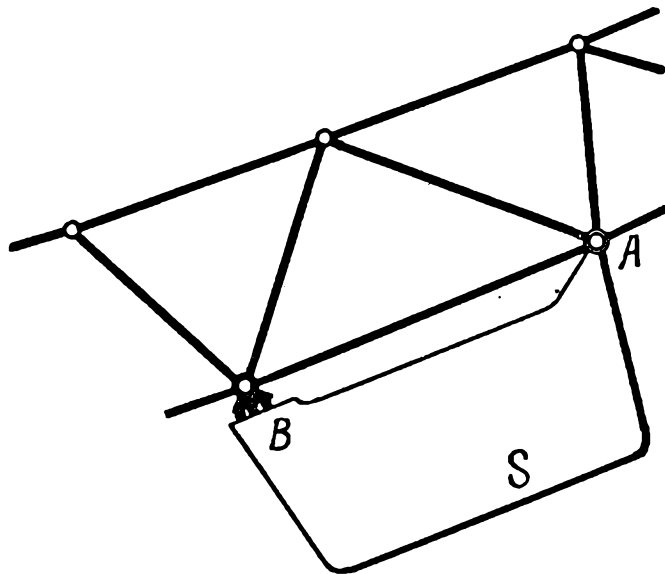


FIG. 229

- 4º) Proyección, sobre la dirección de dos puntos, del desplazamiento relativo de los mismos, que da, salvo el signo, la variación de la distancia entre ellos;
- 5º) Rotación relativa entre dos secciones de un sistema de alma llena, o, lo que es equivalente, entre dos chapas ligadas solidariamente a los elementos correspondientes de las fibras medias, y
- 6º) Rotación relativa de las direcciones de dos barras de un reticulado, o lo que es equivalente, de dos chapas análogas a las S de la figura 229, vinculadas con dichas barras.

Designaremos, en general, estos desplazamientos a calcular con la letra α , que podrá representar, por tanto ya una proyección de desplazamiento, ya una rotación de una chapa, ya la proyección de un desplazamiento relativo de un punto con respecto a otro, ya la rotación relativa de una chapa con respecto a otra.

Para la obtención de estos desplazamientos se requiere, según el teorema de Mohr, que demos-tramos en el número siguiente, hallar la deformación del sistema debida a fuerzas, o cuplas, o pares de fuerzas opuestas o pares de cuplas opuestas, según los casos, convenientemente elegidas y de intensidad arbitraria, fuerzas, cuplas, pares de fuerzas opuestas o

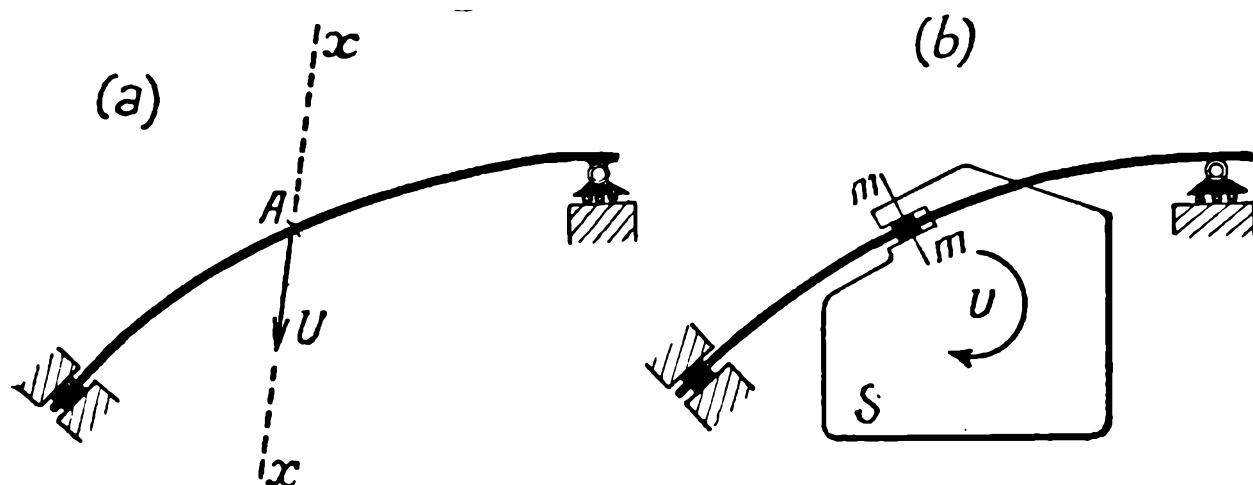


FIG. 230

pares de cuplas opuestas que designaremos con el nombre genérico de *esfuerzos auxiliares*. La elección de estos esfuerzos auxiliares se hará de acuerdo con lo que a continuación se indica:

- 1º) Si se trata de calcular la proyección sobre la dirección xx (fig. 230 *a*) del desplazamiento experimentado por un punto cualquiera A , se aplicará en el mismo una fuerza de intensidad arbitraria U y dirección xx ;

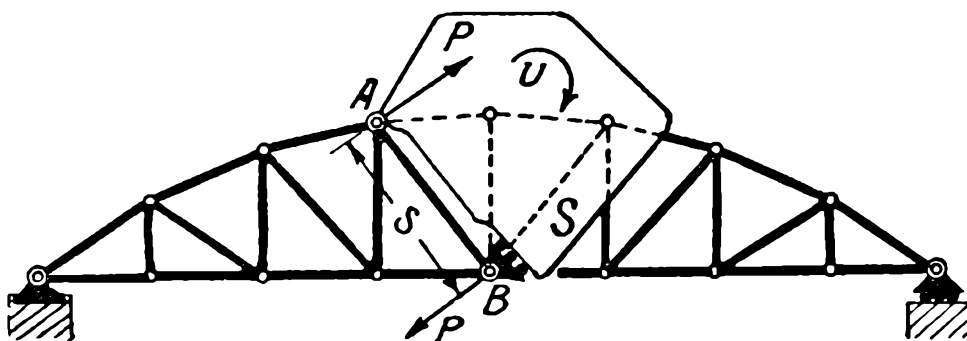


FIG. 231

- 2º) Si se trata de calcular la rotación de una sección mm (fig. 230 *b*), de un sistema de alma llena, o, lo que es lo mismo, de una chapa S ligada al elemento correspondiente de fibra media, se aplicará en esta chapa una cupla cuya intensidad arbitraria designaremos en general, también por U ;
- 3º) Si se trata de calcular la rotación experimentada por la dirección de una barra AB (fig. 231) de un reticulado, se aplicará, sobre la chapa S vinculada en la forma que indica la figura, una

cupla de intensidad arbitraria U , cupla que transmitirá a los dos nudos A y B del reticulado dos fuerzas normales a la dirección de la barra AB , de igual intensidad absoluta

$$\left| P \right| = \left| \frac{U}{s} \right|,$$

en la que s es la longitud de la barra;

- 4º) Si se trata de hallar la proyección sobre la recta xx , que une los puntos A_1 y A_2 (fig. 232 *a*), del desplazamiento relativo del primero, con respecto al segundo, se aplicará en dichos puntos fuerzas opuestas U y $-U$, de intensidad arbitraria;

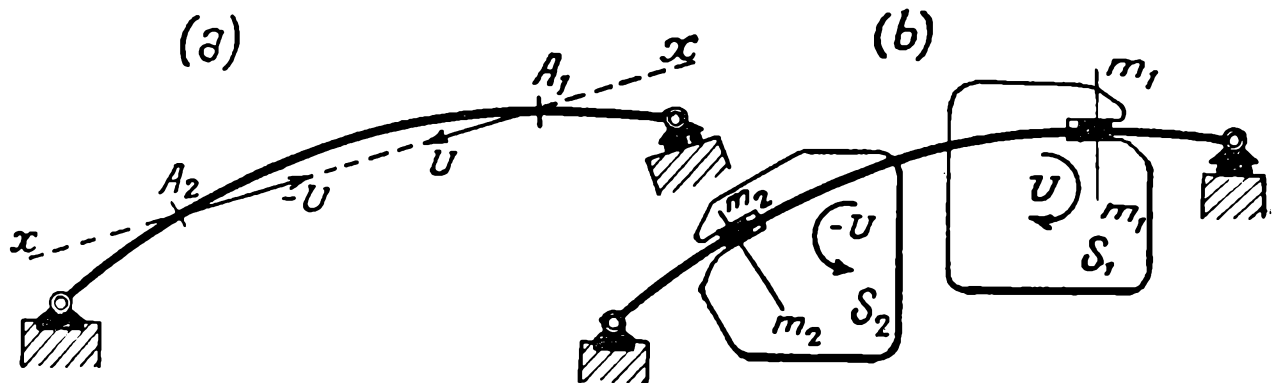


FIG. 232

- 5º) Si se trata de hallar el desplazamiento relativo de la sección m_1m_1 (fig. 232 *b*), con respecto a la m_2m_2 de un sistema de alma llena, o, lo que es lo mismo, la rotación relativa de las chapas S_1 y S_2 ligadas a los elementos de fibra media correspondientes a dichas secciones, se aplicará sobre estas últimas dos cuplas U y $-U$, iguales y de sentido contrario, de intensidad cualquiera; y
- 6º) Si se trata de determinar la rotación relativa de la dirección de la barra A_1B_1 (fig. 233), con respecto a la de la A_2B_2 de un reticulado, se aplicará en las chapas S_1 y S_2 , vinculadas a las mismas como indica la figura, dos cuplas U y $-U$, iguales y de sentido contrario.

371. — Cualquiera de estos esfuerzos auxiliares queda determinado en intensidad por un único dato, puesto que cuando están constituidos por un par de fuerzas o cuplas, éstas son iguales y de sentido contrario. Los designaremos, en general, como queda dicho, por la letra U , cualquiera que sea su naturaleza, que representará indistintamente la intensidad de la fuerza, de la cupla, o de una de las fuerzas o cuplas opuestas que los constituyen.

Representaremos, también, con una misma letra a , la intensidad del desplazamiento a calcular, debiendo entenderse que a representa la intensidad del desplazamiento de un punto o de la rotación de una chapa según que U sea una fuerza o una cupla. Análogamente, cuando a represente la proyección sobre la dirección de dos puntos del desplazamiento relativo de uno de ellos con respecto al otro, o la rotación relativa de una chapa

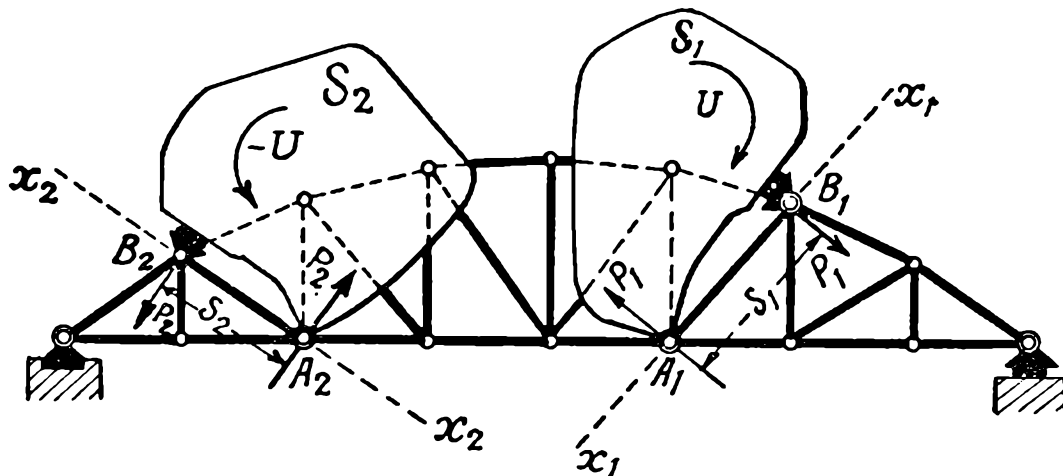


FIG. 233

con respecto a la otra, U dará la intensidad de una del par de fuerzas o de cuplas opuestas que constituye el esfuerzo auxiliar correspondiente, precisamente de la aplicada sobre el primer punto o sobre la primera chapa.

Según esto, el producto escalar de un esfuerzo auxiliar cualquiera U , por el desplazamiento a que le corresponde durante la deformación que las cargas originan en el sistema, será en valor y signo igual a $U.a$.

372. Teorema de Mohr. — Sentado lo anterior, consideremos un sistema cualquiera, isostático o hiperestático, sobre el que actúa un conjunto de n cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) y propongámonos determinar un desplazamiento, a , cualquiera, producido durante la deformación debida a las mismas, desplazamiento que podrá ser tanto la proyección sobre una dirección dada de un punto determinado o la rotación de una chapa, como la proyección sobre la dirección de dos puntos de su desplazamiento relativo, o la rotación relativa de dos chapas.

Apliquemos sobre el sistema el esfuerzo auxiliar U , correspondiente, de acuerdo con lo establecido anteriormente, al desplazamiento a calcular y sean $a_{p,u}$ ($p = 1, 2, \dots, n$) los desplazamientos que durante la deformación originada por el mismo corresponden a las cargas P_p . Si consideramos, por un lado, el estado de carga U y por el otro el P_p , como el desplazamiento que este último origina según la dirección de aquél, es,

precisamente el a a calcularse, se tendrá en virtud de la ley de Betti que

$$U \cdot a = \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,u}$$

$$a = \frac{1}{U} \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,u} \quad [a]$$

expresión del teorema de Mohr que nos dice que:

El desplazamiento absoluto o relativo, de puntos de un sistema elástico, o chapas rígidas vinculadas con el mismo, debido a un conjunto de cargas que sobre él actúa, es igual al producto escalar de estas cargas por los desplazamientos originados por el esfuerzo auxiliar correspondiente, dividido por la intensidad de este esfuerzo auxiliar.

373. — La aplicación del teorema de Mohr para el cálculo de desplazamientos fluye inmediatamente de lo anteriormente expuesto.

Es evidente, además, que la deformación debida a un esfuerzo auxiliar U , permite calcular el desplazamiento correspondiente debido a cualquier estado de cargas del sistema. Bastará, en efecto, reemplazar en la [a] del número anterior las nuevas cargas P_p del sistema de cargas que se considere, y los desplazamientos $a_{p,u}$ que les correspondan en dicha deformación.

§ 6. — Aplicación de la ley de Betti a la determinación de las reacciones de vínculo superfluo debidas a dilataciones térmicas, de fragüe, higrométricas, etc.

374. — Consideremos un sistema hiperestático, con G vínculos superfluos, que experimenta una variación cualquiera, uniforme o no, de temperatura (u otra variación de forma debida a cambios higrométricos, de fragüe, etc.). Ya hemos dicho que este cambio de forma origina reacciones de vínculo hiperestático $X_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, G$) que nos proponemos determinar.

Suprimamos los vínculos superfluos y calculemos los desplazamientos $a_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, G$) que en correspondencia a los mismos el cambio dado de temperatura originaría en el sistema isostático resultante. Si hubieran subsistido los vínculos superfluos estos desplazamientos hubieran sido nulos, originándose las reacciones $X_{i,t}$, que son, por tanto, el conjunto de fuerzas capaces de anularlos, o sea, el conjunto de fuerzas capaces de producir en el sistema isostático una deformación tal que

correspondan a los mismos desplazamientos valores precisamente iguales a los $-a_{i,t}$.

Ahora bien, si según una cualquiera de las incógnitas X_j , hacemos actuar una fuerza arbitraria U_j y determinamos los desplazamientos $a_{i,j}$ que corresponden a las G incógnitas, entre este estado U_j , de cargas y el $X_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, G$), la ley de Betti nos conduce a la expresión

$$U_j (-a_{j,t}) = \sum_{i=1}^G X_{i,t} \cdot a_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^G X_{i,t} \cdot a_{i,j} + U_j \cdot a_{j,t} = 0.$$

Haciendo actuar sucesivamente G estados de carga U_j ($j = 1, 2, \dots, G$), obtendremos, en igual forma, el siguiente sistema de G ecuaciones entre las G incógnitas $X_{i,t}$

$$\sum_{i=1}^G X_{i,t} \cdot a_{i,j} + U_j \cdot a_{j,t} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, G), \quad [a]$$

o sea,

$$[a'] \left\{ \begin{array}{l} X_{1,t} \cdot a_{1,1} + X_{2,t} a_{2,1} + \dots + X_{G,t} \cdot a_{G,1} + U_1 \cdot a_{1,t} = 0 \\ X_{1,t} \cdot a_{1,2} + X_{2,t} a_{2,2} + \dots + X_{G,t} \cdot a_{G,2} + U_2 \cdot a_{2,t} = 0 \\ \dots \\ X_{1,t} \cdot a_{1,G} + X_{2,t} \cdot a_{2,G} + \dots + X_{G,t} \cdot a_{G,G} + U_G \cdot a_{G,t} = 0, \end{array} \right.$$

que nos permite determinar sus valores.

Los coeficientes $a_{i,j}$, desplazamientos originados por los estados unitarios de carga U_j ($j = 1, 2, \dots, G$) son, por otra parte, los mismos que intervienen, según la [a] de (366) en la determinación de las incógnitas hiperestáticas debidas a un estado cualquiera de cargas.

375. — Si en un sistema hiperestático actúa un conjunto de cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$), y al mismo tiempo se produce un cambio de temperatura, se calculará independientemente las reacciones hiperestáticas X_i y $X_{i,t}$, correspondientes y las reacciones totales serán, en virtud del principio de la superposición de los pequeños efectos,

$$X_i' = X_i + X_{i,t} \quad (i = 1, 2, \dots, G). \quad [a]$$

Pero, si se quiere calcular directamente estas reacciones resultantes X_i' , nos bastará sumar miembro a miembro las ecuaciones correspondientes del sistema [a] del número anterior con los del [a] de (366).

Se tendrá así

$$\sum_{i=1}^G (X_i + X_{i,t}) a_{i,j} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,j} + U_j \cdot a_{j,t} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, G),$$

o, de acuerdo a la [a],

$$\sum_{i=1}^G X_i' a_{i,j} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,j} + U_j \cdot a_{j,t} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, G), \quad [b]$$

sistema de G ecuaciones entre las G incógnitas X_i' , que nos da, precisamente, sus valores.

EJERCICIOS DEL CAPITULO IV

I. — Aplicación de la ley de Betti a la resolución de sistemas hiperestáticos

Datos. — Se da el sistema de triangulado simple representado en la lámina VII, isostáticamente sustentado, pero con un vínculo interno superfluo, constituido por la barra $AB \equiv 0-20$. Las longitudes s_i y secciones Ω_i de sus barras, así como los coeficientes de alargamiento

$$\epsilon_i = \frac{s_i}{E \Omega_i},$$

CUADRO N° 1

Barra i,j	$s_{i,j}$ m	$\Omega_{i,j}$ m ²	$\epsilon_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{E \cdot \Omega_{i,j}}$ $10^{-6} t^{-1} m$	$T'_{i,j}$ t	$\Delta s_{i,j} = T'_{i,j} \cdot \epsilon_{i,j}$ $10^{-6} m$
0-1 ; 19-20	2,00	0,0022	45,5	+ 2,80	+ 127
0-2 ; 18-20	2,30	0,0020	57,5	— 3,27	— 188
1-2 ; 18-19	0,70	0,0010	35,0	0	0
1-3 ; 17-19	2,00	0,0022	45,5	+ 2,80	+ 127
2-3 ; 17-18	1,90	0,0010	95,0	0	0
2-4 ; 16-18	2,40	0,0020	60,0	— 3,27	— 196
3-4 ; 16-17	1,40	0,0010	70,0	0	0
3-5 ; 15-17	2,00	0,0022	45,5	+ 2,80	+ 127
4-5 ; 15-16	2,00	0,0010	100	— 0,73	— 73
4-6 ; 13-16	2,90	0,0016	90,6	— 2,93	— 265
5-6 ; 13-15	2,90	0,0010	145	+ 0,50	+ 72,5
5-7 ; 14-15	3,40	0,0015	113	+ 2,10	+ 237
6-7 ; 13-14	3,70	0,0010	185	— 2,27	— 420
6-8 ; 12-13	3,40	0,0015	113	+ 1,60	+ 181
6-9 ; 11-13	2,80	0,0010	140	— 3,67	— 514
7-8 ; 12-14	3,00	0,0015	100	— 1,80	+ 180
8-9 ; 11-12	2,60	0,0010	130	— 1,83	— 238
8-10 ; 10-12	3,00	0,0015	100	+ 3,42	+ 342
9-10 ; 10-11	2,60	0,0010	130	0	0
9-11	3,00	0,0010	150	— 4,43	+ 664
0-20	18,00	0,0010	900	+ 1,00	— 900

se consignan en el cuadro N° 1, en el que se ha adoptado para el módulo de elasticidad del acero dulce de que se supone construído el sistema, un valor

$$E = 20 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}$$

Se pide resolver los siguientes problemas:

1. — Hallar la tensión hiperestática $X_1 = T_{0-20}$, que, en la barra superflua 0-20, originan las cargas verticales P_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) representadas en la lámina.

Se ha comenzado por poner en evidencia dicha incógnita hiperestática X_1 , para lo que se ha suprimido la barra 0-20 y del par de fuerzas que constituyen la tensión equivalente, una se ha aplicado directamente al punto A , y la otra al punto B por intermedio del resorte $B'B$, de igual coeficiente de alargamiento que el ϵ_{0-20} de dicha barra.

Según lo establecido en (366), si se aplica un estado de carga unitario $X_1 = U_1 = 1 t$, es decir, si sobre el sistema hecho isostático no se aplica más que este par de fuerzas iguales en valor absoluto a U_1 , y de signo contrario, y se determinan los desplazamientos a_{pi} y $a_{1,1}$ que corresponden, en la deformación del sistema debida a dicho estado de carga, respectivamente a las fuerzas P_i y a la incógnita X_1 , deberá tenerse que

$$X_1 a_{1,1} + \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{p,i} = 0,$$

o, recordando que, según (352), el desplazamiento correspondiente a la tensión incógnita $X_1 = T_{0-20}$, está dado por la variación de distancia δ entre los puntos A y B' con signo contrario, que

$$T_{0-20} \cdot (-\delta) + \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{p,i} = 0$$

$$T_{0-20} = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{p,i} \quad [a]$$

expresión que nos da el valor de la incógnita buscada.

Para obtener los desplazamientos a_{pi} y δ que figuran en la anterior expresión, se ha calculado la deformación del sistema debida al estado unitario de cargas $X_1 = U_1$. Mediante un diagrama de Cremona, en la lámina se han obtenido las tensiones $T'_{i,j}$ en las barras del sistema, originadas por dicho estado de carga, que se consignan en el cuadro N° 1, en el que asimismo se calculan los alargamientos,

$$\Delta s_{i,j} = T'_{i,j} \cdot \epsilon_{i,j}$$

de las mismas barras.

Con estos elementos se ha construído en la lámina un diagrama de Williot-Mohr de dicha deformación, comenzando por suponer que el sistema esté empotrado en el punto C , medio de la barra 9-11, situado sobre el eje de simetría.

Llevando a partir del polo $p \equiv C_w$, vectores $p 9_w$ y $p 11_w$ iguales en valor absoluto a la mitad del alargamiento Δs_{9-11} de la barra 9-11, se han obtenido los puntos 9_w y 11_w ; trazando por ellos normales respectivamente a las barras 9-10 y 11-10, se ha hallado en su intersección el punto 10_w , y, prosiguiendo en la forma conocida, se han obtenido los puntos $8_w, 7_w, 6_w, \dots$, de la mitad izquierda del sistema. Los puntos $12_w, 13_w, \dots$ de la mitad derecha se han obtenido directamente de los anteriores por simple simetría con respecto a la vertical de $p \equiv C_w$.

Para llevar el sistema así deformado a las condiciones de sustentación, se requiere darle un desplazamiento como si se tratara de una chapa rígida, y se sabe que si se da un desplazamiento igual y de sentido contrario al mismo, los vectores que van de los puntos del nuevo Williot a los del primitivo dan los desplazamientos resultantes del sistema en sus condiciones de sustentación. En el caso de que se trata, el vector que va del punto A_w' del nuevo Williot al A_w del primitivo debe ser nulo, desde que el punto A permanece inmóvil, es decir, $A_w' \equiv A_w$. Por otra parte, como el punto B por las condiciones de sustentación debe desplazarse horizontalmente, el punto B_w' debe encontrarse en la horizontal $A_w B_w$ de B_w ; a su vez como el Williot de la recta AB , en el desplazamiento rígido que se busca, debe ser una normal a la misma, el punto B_w' deberá encontrarse a su vez sobre la vertical que pasa por A_w' . En el nuevo Williot coinciden, pues, los puntos A_w' y B_w' , es decir, que el desplazamiento rígido requerido para llevar el sistema a las condiciones de sustentación es una traslación, desde que los desplazamientos de dos de los puntos, A y B , son iguales. El nuevo Williot buscado se reducirá, por tanto, a un punto, congruente con el A_w , y los vectores que van del mismo a los puntos del Williot primitivo proporcionan los desplazamientos resultantes del sistema en las condiciones dadas de sustentación, es decir, dicho Williot primitivo referido al punto $p' \equiv A_w \equiv A_w'$

como polo, da los desplazamientos resultantes debidos a la deformación del sistema en sus condiciones de sustentación.

Obtenido así este Williot, se han proyectado sobre la dirección vertical de las fuerzas P_1, P_2, \dots los vectores $p'7_w, p'8_w, \dots$, desplazamientos de los nudos 7, 8, ... hallándose los segmentos $0p7_p, 0p8_p, \dots$, que,

leídos en la escala $\frac{100 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}$ del Williot, nos dan los desplazamientos a_{p1}, a_{p2}, \dots , correspon-

dientes a dichas fuerzas que figuran en la [a]. En el cuadro N° 2 se consignan estos segmentos directamente leídos en centímetros en la lámina, es decir, las magnitudes $a_{p1} \text{ (cm)}, a_{p2} \text{ (cm)}, \dots$. En el mismo cuadro

se calcula la sumatoria $\sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} \text{ (cm)}$. Llevando ahora, a partir de B_w , un vector $B_w B_w'$

CUADRO N° 2

i	P_i t	$a_{pi} \text{ (cm)}$ cm	$P_i \cdot a_{pi} \text{ (cm)}$ t cm
1	3,6	— 4,4	— 15,8
2	7,2	— 6,9	— 49,6
3	7,2	— 8,0	— 57,6
4	7,2	— 6,9	— 49,6
5	3,6	— 4,4	— 15,8

$\sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} \text{ (cm)} = -188,4 \text{ t cm}$

equipolente del alargamiento experimentado por el resorte $B'B$ bajo la acción de la fuerza $U_1 = 1 \text{ t}$ (alargamiento Δs_{0-20} , consignado en el cuadro N° 1), se ha obtenido el punto B_w' . La variación de distancia δ entre los puntos A y B' , que es el desplazamiento correspondiente a la incógnita X_1 , está dada por el segmento $p B_w'$, que en valor absoluto y leída directamente en centímetros en la lámina, es

$$[\delta \text{ (cm)}] = 21,3 \text{ cm.}$$

Por otra parte, moviéndose el punto B' hacia la izquierda, se aproxima al punto A fijo, es decir, se trata de un acortamiento o variación negativa de distancia, o sea

$$\delta \text{ (cm)} = -21,3 \text{ cm.}$$

Observemos, ahora, que siendo $\frac{100 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}$ la escala del Williot, la [a] se puede escribir

$$T_{0-20} = \frac{1}{\delta \text{ (cm)} \frac{100 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}} \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} \text{ (cm)} \frac{100 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} =$$

$$= \frac{1}{\delta \text{ (cm)}} \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} \text{ (cm)},$$

es decir, que para calcular el valor de T_{0-20} se puede, en lugar de utilizar los desplazamientos efectivos δ , y a_{pi} , hacer uso de los números $\delta \text{ (cm)}$ y $a_{pi} \text{ (cm)}$, que le son proporcionales y que resultan de leer directamente en centímetros los segmentos que en el Williot representan a dichas magnitudes; sustituyendo los valores obtenidos, resulta, pues,

$$T_{0-20} = \frac{1}{-21,3 \text{ cm}} \times (-188,4 \text{ t cm}) = 8,84 \text{ t,}$$

con lo que queda resuelto el problema propuesto.

2. — Hallar la tensión hiperestática T'_{0-20} que en la barra superflua 0-20 originan las cargas oblicuas F_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) representadas en la lámina.

Como en el caso anterior se tiene que el valor de T'_{0-20} es

$$T'_{0-20} = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi} = \frac{1}{\delta \text{ (cm)}} \sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi} \text{ (cm)} .$$

en la que δ (cm) y a_{fi} (cm) son, respectivamente, los segmentos leídos en centímetros que en el Williot anteriormente trazado, debido a la deformación del sistema bajo la acción del estado de cargas $X_1 = U_1$, corresponden a la incógnita T'_{0-20} y a las cargas F_i . El primero ya ha sido obtenido para la resolución

CUADRO N° 3

i	F_i t	a_{fi} (cm) cm	$F_i \cdot a_{fi}$ (cm) t cm
1	1,8	19	34
2	2,85	14	40
3	2,25	11	24
4	2,25	9	20
5	1,12	6	7

$\sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi} \text{ (cm)} = 125 \text{ t cm}$

del ejercicio anterior y los segundos se consignan en el cuadro N° 3, en el que, a su vez, se calcula la sumatoria que figura en la expresión anterior. Sustituyendo valores, resulta

$$T'_{0-20} = \frac{1}{-21,3 \text{ cm}} \times 125 \text{ t cm} = -5,85 \text{ t} .$$

Como se ve, el Williot correspondiente al estado $X_1 = U_1$, da los desplazamientos requeridos para el cálculo de la tensión superflua, T_{0-20} , correspondiente a cualquier estado de cargas.

3. — Calcular las tensiones que en las barras del sistema originan las cargas verticales P_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Si $T'_{i,j}$ es la tensión que en la barra i,j del sistema hecho isostático, origina el valor de la tensión superflua $T_{0-20} = U_1$, para la intensidad de esta última de 8,84 t toneladas calculada en el ejercicio (1), corresponderá una tensión

$$\frac{T'_{i,j}}{U_1} \cdot 8,84 \text{ t} = 8,84 T'_{i,j} .$$

Si, por otra parte, $\overline{T}_{i,j}$ es la tensión que en la misma barra originan las cargas verticales en el sistema hecho isostático, mediante la supresión de la barra superflua 0-20, las tensiones resultantes en el sistema hiperestático serán, evidentemente,

$$T^*_{i,j} = \overline{T}_{i,j} + 8,84 T'_{i,j} .$$

Las tensiones $T'_{i,j}$ ya han sido obtenidas para la resolución del ejercicio (1) y se consignan en el cuadro N° 1. Las $\overline{T}_{i,j}$ se calculan en la lámina mediante un diagrama de Cremona. En el cuadro N° 4 se agrupan ambas series de tensiones y se calculan, de acuerdo con la anterior expresión, las resultantes del sistema hiperestático, $T^*_{i,j}$, pedidas.

CUADRO N° 4

Barra i,j	$\overline{T_{i,j}}$ t	8,84 $T'_{i,j}$ t	$T^*_{i,j} = \overline{T_{i,j}} + 8,84 T'_{i,j}$ t
0-1 ; 19-20	- 29,6	+ 24,7	- 4,9
0-2 ; 18-20	+ 16,7	- 28,9	- 12,2
1-2 ; 18-19	0	0	0
1-3 ; 17-19	- 29,6	+ 24,7	- 4,9
2-3 ; 17-18	0	0	0
2-4 ; 16-18	+ 16,7	- 28,9	- 12,2
3-4 ; 16-17	0	0	0
3-5 ; 15-17	- 29,6	+ 24,7	- 4,9
4-5 ; 15-16	+ 3,80	- 6,45	- 2,65
4-6 ; 13-16	+ 15	- 25,9	- 10,9
5-6 ; 13-15	- 2,60	+ 4,42	+ 1,82
5-7 ; 14-15	- 25,8	+ 18,6	- 7,20
6-7 ; 13-14	+ 23,8	- 20,1	+ 3,70
6-8 ; 12-13	- 24,8	+ 14,1	- 10,7
6-9 ; 11-13	+ 31,2	- 32,4	- 1,20
7-8 ; 12-14	- 19,8	+ 15,9	- 3,90
8-9 ; 11-12	+ 19,6	- 16,2	+ 3,40
8-10 ; 10-12	- 40,0	+ 30,2	- 9,80
9-10 ; 10-11	- 4,40	0	- 4,40
9-11	+ 42,4	- 39,2	+ 3,20

II. — Aplicación de la ley de Betti (teorema de Mohr) a la obtención de desplazamientos debidos a deformaciones

Datos. — Se da el sistema hiperestático de reticulado tratado en los ejercicios anteriores y representado nuevamente en la lámina VIII. Se pide resolver los siguientes problemas:

1. — Calcular la proyección sobre la dirección de la recta xx del desplazamiento que el nudo 13 experimenta bajo la acción de las cargas verticales P_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

De acuerdo a lo visto en (372) se tiene que aplicar en el nudo 13 y según la dirección xx del desplazamiento a buscar, un esfuerzo auxiliar U y calcular los desplazamientos a_{pi} , que en la deformación debida al mismo, corresponden a las fuerzas P_i , y el desplazamiento pedido estará dado por la expresión

$$a = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} \quad [a]$$

Aplicado, pues, un esfuerzo auxiliar $U = 1 t$, originará en la barra 0-20 una tensión T''_{0-20} dada por la expresión

$$T''_{0-20} \cdot (-\delta \text{ (cm)}) + U \cdot a_{x,u} \text{ (cm)} = 0$$

$$T''_{0-20} = \frac{U \cdot a_{x,u} \text{ (cm)}}{\delta \text{ (cm)}}$$

siendo δ (cm) y $a_{x,u}$ (cm) los desplazamientos leídos en centímetros que durante el estado de carga $U_1 = 1$. (aplicado en la lámina VII) corresponden respectivamente a la incógnita T''_{0-20} y a la fuerza auxiliar U . El primero ya ha sido obtenido en el ejercicio anterior; en cuanto al segundo, del diagrama de Williot-Mohr de la lámina VII, se deduce que su valor es

$$a_{x,u} = 4,4 \text{ cm.}$$

Sustituyendo estos valores en la anterior se tiene que

$$T''_{0-20} = \frac{1 t \times 4,4 \text{ cm}}{- 21,3 \text{ cm}} = - 0,204 t.$$

Barra i, j	$\overline{T}_{i,j}$ t	$-0,204 T'_{i,j}$ t	$T^*_{i,j}$ t	$\epsilon_{i,j}$ $10^{-6} \cdot t^{-1} m$	$\Delta \epsilon_{i,j} = T^*_{i,j} \cdot \epsilon_{i,j}$ $10^{-6} m$	Barra i, j	$\overline{T}_{i,j}$ t	$-0,204 T'_{i,j}$ t	$T^*_{i,j}$ t	$\epsilon_{i,j}$ $10^{-6} \cdot t^{-1} m$	$\Delta \epsilon_{i,j} = T^*_{i,j} \cdot \epsilon_{i,j}$ $10^{-6} m$
0-1	+ 1,21	- 0,653	+ 0,557	45,5	+ 25,3	10-11	+ 0,53	0	+ 0,530	130,0	+ 68,9
0-2	- 1,93	+ 0,743	- 1,187	57,5	- 68,3	10-12	+ 0,314	- 0,698	- 0,384	100,0	- 38,4
1-2	0	0	0	35,0	0	11-12	- 0,814	+ 0,322	- 0,492	130,0	- 64,0
1-3	+ 1,21	- 0,653	+ 0,557	45,5	+ 25,8	12-14	- 0,400	- 0,400	- 0,800	100,0	- 80,0
2-3	0	0	0	95,0	0	11-13	- 0,614	+ 0,759	+ 0,145	140,0	+ 20,3
2-4	- 1,93	+ 0,743	- 1,187	60,0	- 71,2	12-13	+ 0,700	- 0,281	+ 0,419	113,0	+ 47,4
3-4	0	0	0	70,0	0	13-14	+ 0,514	+ 0,498	+ 1,012	185,0	+ 187,0
3-5	+ 1,21	- 0,653	+ 0,557	45,5	+ 25,3	14-15	- 0,471	- 0,449	- 0,920	113,0	- 104,0
4-5	- 0,50	+ 0,204	- 0,296	100,0	- 29,6	13-15	- 0,06	- 0,131	- 0,191	145,0	- 27,7
4-6	- 1,71	+ 0,641	- 1,069	90,6	- 96,8	13-16	+ 0,271	+ 0,641	+ 0,912	90,6	+ 82,6
5-6	+ 0,33	- 0,131	+ 0,199	145,0	- 28,8	15-16	+ 0,07	+ 0,204	+ 0,274	100,0	+ 27,4
5-7	+ 0,743	- 0,449	+ 0,294	113,0	+ 33,2	15-17	- 0,543	- 0,653	- 1,196	45,5	- 54,4
6-7	- 0,83	+ 0,498	- 0,332	185,0	- 61,4	16-17	0	0	0	70,0	0
6-8	+ 0,214	- 0,281	- 0,064	113,0	- 7,57	16-18	+ 0,300	+ 0,743	+ 1,043	60,0	+ 62,6
6-9	- 1,58	+ 0,759	- 0,821	140,0	- 114,9	17-18	0	0	0	95,0	0
7-8	+ 0,671	- 0,4	+ 0,271	100,0	- 27,1	17-19	- 0,543	- 0,653	- 1,196	45,5	- 54,4
8-9	- 0,257	+ 0,322	+ 0,065	130,0	+ 8,45	18-19	0	0	0	35,0	0
8-10	+ 0,9	- 0,698	+ 0,202	100,0	+ 20,2	18-20	+ 0,300	+ 0,743	+ 1,043	57,5	+ 60,0
9-10	- 0,5	0	- 0,50	180,0	- 65,0	19-20	- 0,543	- 0,653	- 1,196	45,5	- 54,4
9-11	- 1,84	+ 0,902	- 0,438	150,0	- 65,7						

Las tensiones $T^*_{i,j}$ que en las barras i,j del sistema hiperestático origina el esfuerzo auxiliar U serán por tanto,

$$T^*_{i,j} = \overline{T_{i,j}} + \frac{T'_{i,j}}{U_1} \cdot T'_{020} = \overline{T_{i,j}} - 0,204 T'_{i,j}.$$

en la que $T'_{i,j}$ son las tensiones obtenidas en el ejercicio anterior para el estado de carga $U_1 = 1 t$, que se consignan en el cuadro N° 1 del mismo, y $\overline{T_{i,j}}$ las tensiones que en el sistema hecho isostático mediante la supresión de la barra superflua 0-20, origina el esfuerzo auxiliar $U = 1 t$. Estas últimas se han obtenido en la lámina VIII mediante un diagrama de Cremona y se consignan en el cuadro N° 1, en el que se calculan además, las tensiones resultantes $T^*_{i,j}$, así como los alargamientos $\Delta s_{i,j}$ de las barras respectivas, que les corresponden.

Con estos elementos se ha construido en la lámina VIII un diagrama de Williot-Mohr de los desplazamientos correspondientes a la deformación debida al esfuerzo auxiliar $U = 1 t$, tomando como polo el punto $p \equiv C_w$, y suponiendo, primeramente, que el sistema esté empotrado en el punto medio C de la barra 9-11. Llegado al punto 20_w , correspondiente al nudo $B \equiv 20_w$, se ha agregado el vector $20_w 20'_w$ representativo

del alargamiento de la barra AB ; el punto $20'_w$ viene a corresponder, pues, al extremo A de dicha barra una vez efectuada la deformación (o al punto B' de la lámina VII extremo del resorte $B'B$ equivalente a la barra AB) y, si no se ha cometido error, la variación de distancia entre el mismo y el A (contada según la dirección horizontal que las une) debe ser nula, lo que se verifica, pues el punto $20'_w$ ha resultado sobre la vertical del A'_w .

Para obtener los desplazamientos del sistema ya deformado, en sus efectivas condiciones de sustentación, debemos construir, según sabemos, un Williot de un desplazamiento rígido igual y de sentido contrario al que las haga satisfacer, dando los vectores que van de los puntos de este Williot a los del primitivo dichos desplazamientos efectivos. El punto A'_w del nuevo Williot, debe coincidir con el A_w , desde que el desplazamiento de este punto, por las condiciones de sustentación, tiene que resultar nulo. El punto B'_w debe encontrarse, a su vez, sobre la horizontal de B_w , desde que el desplazamiento de B , a causa del apoyo móvil respectivo, debe ser horizontal. Por otra parte corresponde en el Williot del desplazamiento rígido buscado, a la recta AB una normal que pasa por A'_w ; trazándola, pues, y hallando su intersección con la horizontal $B_w B'_w$, se ha obtenido el punto B'_w , y con él el segmento $A'_w B'_w$ correspondiente del AB , que, tomado como base de semejanza, ha permitido construir, mediante una figura semejante y normal al sistema, el Williot buscado del desplazamiento rígido del mismo, igual y de sentido contrario al requerido para llevarlo a sus condiciones de sustentación.

CUADRO N° 2

i	P_i t	a_{pi} (cm) cm	$P_i \cdot a_{pi}$ (cm) t cm
1	3,6	- 1,87	- 6,73
2	7,2	- 1,72	- 12,38
3	7,2	- 0,28	- 2,02
4	7,2	+ 1,76	+ 12,67
5	3,6	+ 2,34	+ 8,42

$$\sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} \text{ (cm)} = - 0,04 \text{ t cm}$$

Los vectores $7_w 7'_w, 8_w 8'_w, 10_w 10'_w \dots$ dan los desplazamientos efectivos de los nudos 7, 8, 10... durante la deformación debida al esfuerzo auxiliar $U = 1 t$; y sus proyecciones verticales, los desplazamientos a_{pi} que figuran en la [a]. Leídos directamente en centímetros en el Williot, se consignan estos últimos

en el cuadro N° 2, en el que a su vez se calcula la sumatoria $\sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi}$ (cm.), que siendo $\frac{250 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}$

la escala del Williot, nos da para la sumatoria de la [a] un valor

$$\sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} = \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} \text{ (cm)} \frac{250 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = - 0,04 \text{ t cm} \frac{250 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = - 10 \times 10^{-6} \text{ t m}$$

Sustituyendo en [a] tenemos, finalmente, que el desplazamiento pedido del nudo 13, según la dirección xx , debido a la deformación del sistema originado por las cargas P_i , es

$$a = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_{pi} = \frac{1}{1t} (-10 \times 10^{-6} \text{ t m}) = -10 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

2. — Hallar el desplazamiento que el nudo 13 experimenta, según la misma dirección xx , bajo la acción de las cargas oblicuas F_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Como en el caso anterior, este desplazamiento será:

$$a' = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi}, \quad [a]$$

en la que a_{fi} son los desplazamientos correspondientes a las fuerzas F_i , durante la deformación debida al esfuerzo auxiliar U , aplicado en el nudo 13, según la dirección xx .

El diagrama de Williot-Mohr obtenido en el problema anterior para la fuerza $U = 1t$, nos da, por tanto, los desplazamientos a_{fi} . Dicho diagrama sirve, pues, para calcular los desplazamientos del nudo 13, según la dirección xx , debidos a cualquier estado de cargas que actúe sobre el sistema.

CUADRO N° 3

i	F_i t	$a_{f,i}$ (cm) cm	$F_i \cdot a_{f,i}$ (cm) t cm
1	1,12	0,7	0,78
2	2,25	4,05	9,11
3	2,25	5,66	12,73
4	2,85	6,2	17,67
5	1,8	5,0	9,00

$\sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{f,i} \text{ (cm)} = 49,29 \text{ t cm}$

Siendo los vectores $\overrightarrow{20'w'20w}$, $\overrightarrow{19w'19w}$, $\overrightarrow{17w'17w}$, ..., los desplazamientos efectivos de los nudos 20, 19, 17, ... en que actúan las fuerzas F_i , sus proyecciones sobre la dirección de las mismas nos dan los desplazamientos a_{fi} , que, leídos directamente en centímetros, se consignan en el cuadro N° 3, en el que se calcula además, la sumatoria $\sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi}$ (cm), que, siendo $\frac{250 \times 10^{-6} \text{ cm}}{\text{cm}}$ la escala de Williot, nos da

$$\sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi} = \sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi} \text{ (cm)} \cdot \frac{250 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = 12322 \times 10^{-6} \text{ t m.}$$

Sustituyendo en la [a] se tiene finalmente

$$a' = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^5 F_i \cdot a_{fi} = \frac{1}{1t} 12322 \times 10^{-6} \text{ t m} = 12322 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

III. — Aplicación de la ley de Betti a la determinación de incógnitas hiperestáticas debidas a variaciones de temperatura.

Datos. — Se da el mismo sistema considerado en los ejercicios anteriores (Lám. VIII). Se supone que el cordón exterior experimente un aumento de temperatura de 30° , mientras el interior y el tensor 0-20, no sufren cambio alguno; para las diagonales se supone un cambio de temperatura que varía linealmente desde 30° en sus extremos exteriores y 0° en los interiores. Se pide resolver los siguientes problemas:

1. — Calcular la tensión hiperestática T''_{0-20} en la barra 0-20, debida a dicho cambio de temperatura.

Los alargamientos de las barras de cordón están dados por la expresión

$$\Delta s_{i,j} = \lambda \cdot t \cdot s_{i,j},$$

siendo λ el coeficiente de dilatación lineal, que se ha fijado igual a $0,0000135 \frac{1}{1^\circ}$; t la variación de temperatura expresada en grados, igual en este caso a 30° , y $s_{i,j}$ la longitud de la barra considerada. Para las barras del cordón interior y del tensor 0-20, dichos alargamientos son nulos. Finalmente, para las dia-

CUADRO N° 1

Barra	$s_{i,j}$ m	t	$\Delta s_{i,j} = \lambda \cdot t \cdot s_{i,j}$ 10^{-6} m,
0-1 ; 19-20	2,00	30°	810
1-3 ; 19-17	2,00	30°	810
3-5 ; 17-15	3,40	30°	810
5-7 ; 15-14	3,00	30°	1377
7-8 ; 12-14	3,00	30°	1215
8-10; 10-12	3,00	30°	1215
1-2 ; 18-19	0,70	15°	142
3-2 ; 18-17	1,90	15°	385
3-4 ; 16-17	1,40	15°	283
4-5 ; 16-15	2,00	15°	405
5-6 ; 13-15	2,90	15°	587
7-6 ; 13-14	3,70	15°	749
6-8 ; 13-12	3,40	15°	688
8-9 ; 11-12	2,60	15°	526
9-10; 10-11	2,60	15°	526
0-2 ; 2-4	2,30	0°	0
16-18; 18-20	2,30	0°	0
4-6 ; 13-16	2,90	0°	0
6-9 ; 11-13	2,80	0°	0
9-11	3,00	0°	0
0-20	18,00	0°	0

gonales, a causa de su variación lineal de temperatura desde 30° a 0° , están dados por la misma expresión anterior, suponiendo una variación sólo de 15° . En el cuadro N° 1 se calculan estos alargamientos.

Con ellos, en la escala $\frac{2000 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}$, se ha construído en la lámina un diagrama de Williot-Mohr de

la deformación debida a la variación dada de temperatura en el sistema hecho isostático con la supresión de la barra 0-20. Para ello, se ha comenzado por suponer el sistema empotrado en el punto medio C de la barra 9-11. Se ha tenido, pues, $p \equiv C_w$. Además, no alargándose la barra 9-11, también ha resultado $p \equiv 9_w \equiv 11_w$. Llevando por p vectores $p10'$ y $p10''$ respectivamente equipolentes de los alargamientos

de las barras 11-10 y 9-10 y trazando por sus extremos perpendiculares a estas barras se ha hallado el punto 10_w . Llevando por 10_w y 9_w , vectores $10_w8'$ y $9_w8''$ equipolentes de los alargamientos de las barras 10-8

y 9-8, y haciendo pasar por sus extremos perpendiculares a estas últimas, se ha obtenido el punto 8_w . Trazando por 8_w un vector $8_w6'$ equipolente del alargamiento de la barra 8-6 y haciendo pasar por su extremo

$6'$ una perpendicular a esta barra y por el punto 9_w (desde que el alargamiento de la barra 9-6 es nulo) otra a la 9-6, se ha determinado el punto 6_w . Prosiguiendo en igual forma, se han hallado todos los puntos del Williot correspondientes a la mitad izquierda del sistema; por simple simetría con respecto a la vertical de p , se han determinado, finalmente, los puntos correspondientes a la mitad derecha. La variación de distancia entre los extremos de la barra 0-20, que la temperatura origina en el sistema hecho isostático mediante su supresión, está dada en valor absoluto por el segmento 0_w20_w , que, leído en la escala de Williot, nos da

$$\delta l = -14 \text{ cm} \times \frac{2000 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = -28000 \times 10^{-6} \text{ m},$$

correspondiéndole el signo menos, porque el punto 20 se ha movido hacia la izquierda con respecto al 0, es decir, porque ha habido un acortamiento de distancia.

Por otra parte, la variación de distancia originada por el estado $T_{\sigma-20} = U_1 = 1 t$, era, según se halló en el problema (1) del primer ejercicio de este capítulo,

$$\delta = \delta \text{ (cm)} \times \frac{100 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = -21,3 \text{ cm} \frac{100 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = -21300 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

De acuerdo con lo establecido en (374), la tensión $T'''_{\sigma-20}$, originada por la variación de temperatura (*), está dada por la expresión:

$$T'''_{\sigma-20} (-\delta) + U_1 (-\delta t) = 0$$

$$T'''_{\sigma-20} = -\frac{U_1 \delta t}{\delta} = -\frac{1 t (-28000 \times 10^{-6} \text{ m})}{-21300 \times 10^{-6} \text{ m}} = -1,31 t.$$

2. — Hallar las tensiones en todas las barras del reticulado debidas a la variación de temperatura.

Estas tensiones son las que en el sistema isostático origina la tensión superflua calculada $T'''_{\sigma-20}$. Siendo $T'_{i,j}$ las que originaba en el problema (1) del primer ejercicio, una tensión $U_1 = 1 t$, se tendrá evidentemente que las buscadas, $T_{i,j,t}$, serán

$$T_{i,j,t} = \frac{T'_{i,j}}{U_1} T'''_{\sigma-20} = -1,31 \times T'_{i,j}.$$

Las tensiones del Cremona para el estado $U_1 = 1 t$, trazado en la lámina VII, multiplicadas por 1,31 nos dan, pues, las tensiones debidas a la variación de temperatura, o, lo que es igual, siendo $\frac{0,5 t}{\text{cm}}$ la escala de dicho Cremona, el mismo, leída en la escala

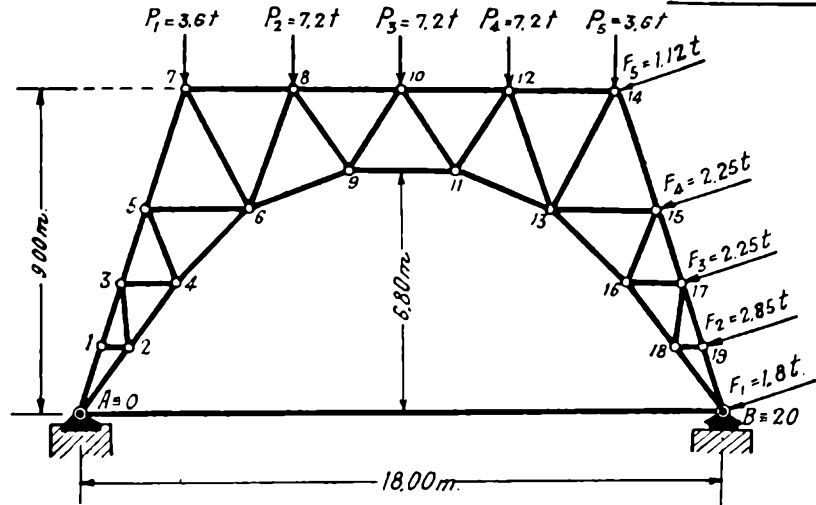
$$\frac{1,31 \times 0,5 t}{\text{cm}} = \frac{0,655 t}{\text{cm}}$$

y cambiado de signo, nos proporciona las tensiones pedidas.

(*) Los signos menos de δ y δt se presentan por lo establecido en (352), con respecto al desplazamiento, correspondiente a una tensión.

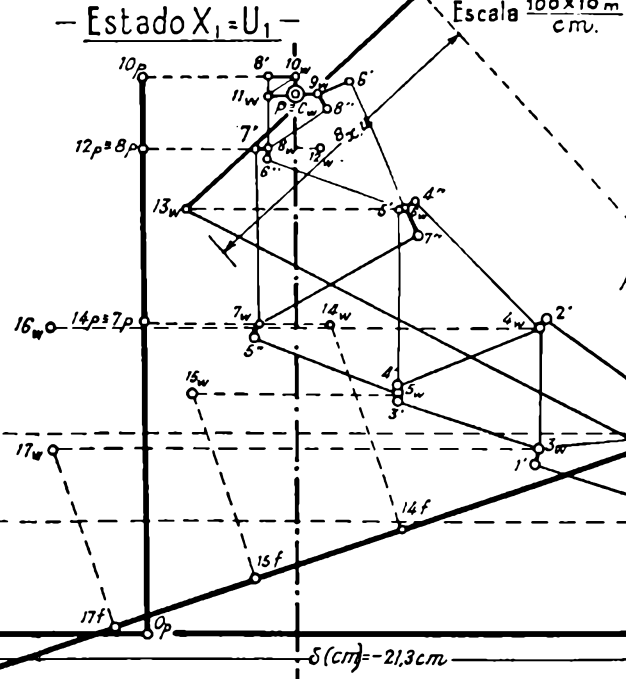
RESOLUCION ESTATICA DE SISTEMAS PLANOS

LEY DE BETTI-RESOLUCION DE SISTEMAS HIPERESTATICOS



Escala de longitudes $\frac{2m}{cm}$

Diagrama de Williot-Mohr



Estado $X = U_1$

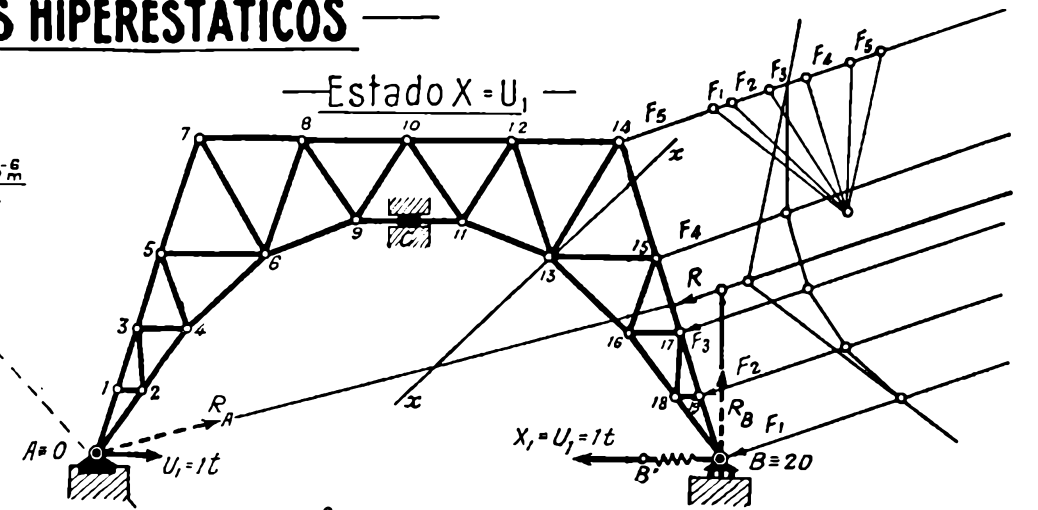


Diagrama de Cremona del sistema isostático Fuerzas oblicuas P

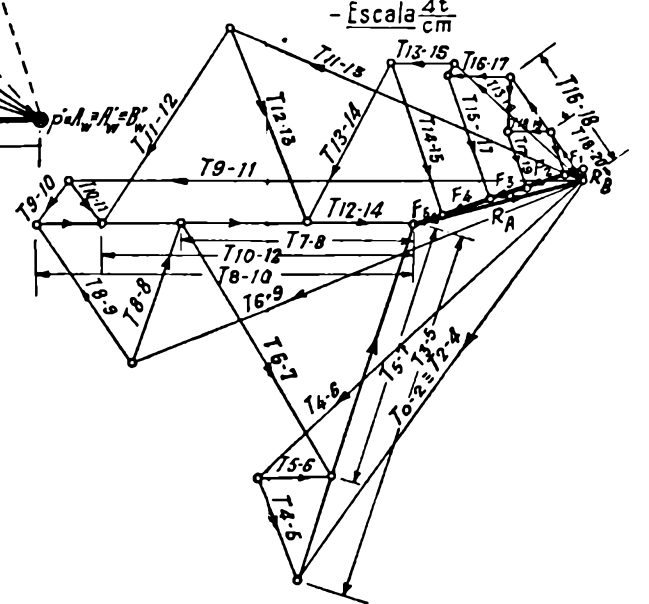


Diagrama de Cremona del sistema isostático Estado $X_1 = U_1$

Escala $\frac{0.5t}{cm}$

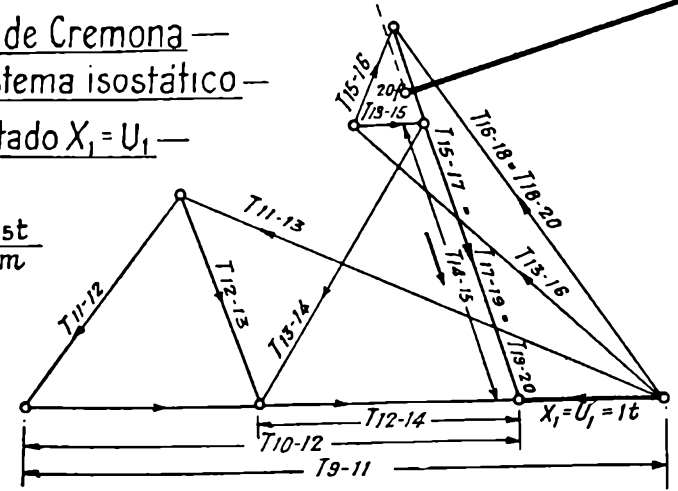
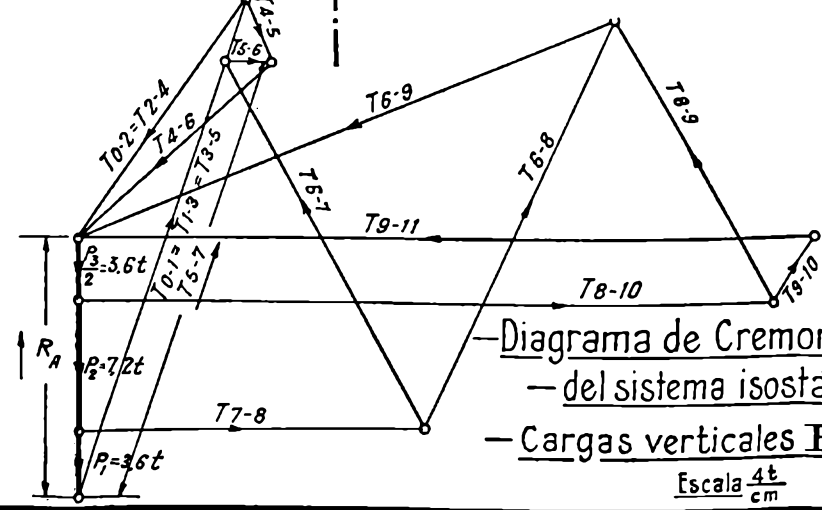


Diagrama de Cremona del sistema isostático Cargas verticales P

Escala $\frac{4t}{cm}$



CAPITULO V

TRABAJO VIRTUAL

§ 1. — Desplazamientos virtuales

376. **Definiciones.** — Hemos llamado *vínculo* de un sistema a una condición o limitación impuesta a todos sus desplazamientos posibles. Como, por otra parte, estos desplazamientos posibles del sistema vinculado quedan determinados por las fuerzas que actúen sobre el mismo, las condiciones impuestas por un vínculo, para que éste resulte tal, deben ser independientes de las sujeciones especiales que puedan corresponder a fuerzas accidentales cualesquiera.

Se llama *desplazamiento virtual* de un sistema a cualquiera de sus desplazamientos infinitésimos posibles, es decir, compatibles con sus condiciones de vínculo.

Si, a partir de una determinada posición de un sistema, le damos un desplazamiento virtual, diremos que este último es *reversible*, cuando sea posible, a partir de la misma posición inicial, otro desplazamiento igual y de sentido contrario. Si este segundo desplazamiento no es posible, diremos que el primero es *irreversible*.

Los vínculos de un sistema se llaman *bilaterales* cuando todos los desplazamientos virtuales que permiten son reversibles. En cambio, cuando alguno o algunos de estos desplazamientos sean irreversibles, los vínculos se llaman *unilaterales*.

377. — Consideremos, para aclarar las definiciones anteriores, una chapa rígida S con un punto fijo O . Los desplazamientos virtuales de este sistema, es decir, los desplazamientos infinitésimos compatibles con sus vínculos, están dados por las rotaciones infinitésimas de la chapa en torno a dicho punto O . Como, para cualquier rotación de la chapa, será siempre posible a partir de la posición inicial, otra igual y de sentido contrario, todos los desplazamientos virtuales del sistema son reversibles y sus vínculos, por tanto, bilaterales.

Sea, ahora, un punto móvil A , ligado con un punto fijo O , mediante un hilo flexible e inextensible, de longitud r . Este vínculo permite al punto A cualquier desplazamiento en la superficie esférica de centro O y radio r , y dentro del espacio encerrado por la misma. Para todo des-

plazamiento infinitésimo que mantenga el punto A sobre dicha superficie esférica, será posible siempre, a partir de la posición inicial, un desplazamiento igual y de sentido contrario; los desplazamientos virtuales sobre la superficie esférica son, por tanto, reversibles. En cambio, si damos al punto A un desplazamiento infinitésimo normal a la superficie esférica, aproximándolo al punto O , la inextensibilidad del hilo, no permitirá, a partir de la posición inicial sobre la superficie esférica, un desplazamiento opuesto que aleje el punto A del centro O ; dicho desplazamiento virtual será, por tanto, irreversible y los vínculos que sujetan el punto A , resultan unilaterales.

Un apoyo móvil que, contrariamente a lo que hemos admitido en (105), sólo impidiera los desplazamientos normales a su dirección y según el sentido que va de la chapa a que pertenece hacia la Tierra, sería, según lo anterior, un vínculo unilateral.

378. Desplazamientos virtuales equivalentes y dependientes. — Dos desplazamientos virtuales de un sistema se llaman *equivalentes* cuando se puede pasar de uno a otro multiplicando la intensidad de los desplazamientos de sus puntos por un factor constante. Así, todos los desplazamientos virtuales de la chapa rígida con un punto fijo anteriormente considerada, son equivalentes, puesto que dadas dos cualesquiera de las rotaciones en torno a dicho punto, que constituyen dichos desplazamientos, se puede pasar de una a otra, mediante el producto de la intensidad de la primera por un factor determinado que equivale a multiplicar las intensidades de los desplazamientos de los puntos de la chapa durante dicha rotación, por el mismo factor.

Un desplazamiento virtual de un sistema se llama *dependiente* de dos o más desplazamientos virtuales del mismo sistema, cuando es resultante de ellos o de desplazamientos equivalentes a ellos.

Un desplazamiento virtual de un sistema se llama *independiente* de otros del mismo sistema, cuando no es ni equivalente ni dependiente de alguno o algunos de ellos.

379. Desplazamientos virtuales de puntos libres. — Cualquier desplazamiento infinitésimo de un punto libre es un desplazamiento virtual del mismo.

Todo desplazamiento virtual $a = AA'$ (fig. 234) de un punto libre sobre el plano, según una dirección xx , es equivalente a cualquier otro desplazamiento de intensidad $a_n = AA''$, según la misma dirección. Se podrá expresar, en efecto, en función de a , en la forma.

$$a_n = \alpha \cdot a,$$

en la que α es la relación de las intensidades de ambos.

Como el desplazamiento α es resultante de sus componentes η y ζ según dos direcciones oy y oz cualesquiera, es dependiente de los mismos.

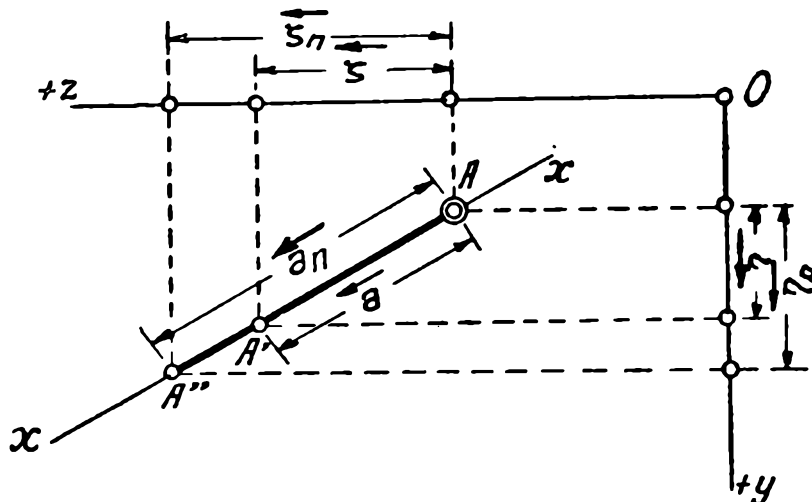


FIG. 234

A su vez el desplazamiento a_n es resultante y, por tanto, dependiente de sus componentes

$$\eta_n = \alpha \cdot \eta$$

y

$$\zeta_n = \alpha \cdot \zeta$$

según dichas direcciones, y siendo, además, estas componentes respectivamente equivalentes de las η y ζ del desplazamiento a , el a_n , resulta también dependiente de estas últimas componentes.

Cualquier otro desplazamiento del punto A es resultante de sus componentes según dichas direcciones, las que a su vez son equivalentes de las η y ζ , o, lo que es lo mismo, se tiene que:

Todo desplazamiento virtual de un punto libre en el plano es dependiente de dos desplazamientos arbitrarios, η y ζ , tomados sobre dos direcciones cualesquiera.

O, lo que es equivalente:

A un punto libre en el plano no se puede dar sino dos desplazamientos virtuales independientes.

Este número de desplazamientos virtuales independientes de un punto libre en el plano es, por otra parte, igual al de sus grados de libertad que, como se recordará, son sólo dos, desde que cualquiera de sus desplazamientos queda determinado por sus proyecciones sobre dos direcciones arbitrarias.

380. Desplazamientos virtuales de sistemas cinemáticos. — Consideremos un mecanismo cinemático cualquiera, constituido por barras y chapas rígidas articuladas entre sí y sujeto a determinadas condiciones de sustentación que le dejen n grados de libertad. Un desplazamiento de este

sistema queda precisado cuando se dé n condiciones de la posición final, o sea, cuando se dé las proyecciones, según direcciones determinadas, de los desplazamientos de n de sus puntos convenientemente elegidos.

Supongamos elegidos estos n puntos i ($i = 1, 2, \dots, n$) y las direcciones de desplazamientos correspondientes. Demos sucesivamente valores arbitrarios u_i a las proyecciones a_i de los desplazamientos de cada uno de estos puntos sobre la dirección respectiva y hagamos, a la vez, en cada caso, nulas las proyecciones de los desplazamientos de los restantes puntos, es decir, demos sucesivamente al sistema los desplazamientos que resultan de atribuir a las proyecciones de desplazamiento de los puntos i los siguientes valores:

$$a_1 = u_1; a_2 = 0; a_3 = 0; \dots; a_i = 0; \dots; a_n = 0$$

$$a_1 = 0; a_2 = u_2; a_3 = 0; \dots; a_i = 0; \dots; a_n = 0$$

$$a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = u_3; \dots; a_i = 0; \dots; a_n = 0$$

$$a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 0; \dots; a_i = u_i; \dots; a_n = 0$$

$$a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 0; \dots; a_i = 0; \dots; a_n = u_n,$$

en los que $u_1, u_2, u_3, \dots, u_i, \dots, u_n$, son proyecciones cualesquiera sobre las direcciones respectivas de los desplazamientos de los puntos 1, 2, 3, ..., i, \dots, n .

Obtendremos así n desplazamientos virtuales del sistema que serán evidentemente independientes. Cualquier otro desplazamiento, en cambio, será dependiente de los anteriores, puesto que será el resultante de los desplazamientos que se obtienen dando sucesivamente valores determinados a cada una de las proyecciones a_i , haciendo nulas las restantes, cada uno de los cuales es equivalente con uno de los anteriores.

Quiere decir, pues, que:

Un mecanismo cinemático es susceptible de un número de desplazamientos virtuales independientes igual al de sus grados de libertad.

381. — Consideremos, para aclarar lo anterior, una chapa rígida libre, que constituye un mecanismo cinemático de tres grados de libertad. Refiriéndola a un sistema cualquiera de ejes o (z, y), podremos darle sucesivamente una traslación paralela a cada uno de dichos ejes y una rotación en torno al origen o , tres desplazamientos virtuales que serán independientes, puesto que ninguno de ellos puede ser resultante de los otros o de otros equivalentes con los mismos. En cambio, cualquier otro desplazamiento de la chapa será dependiente de ellos, puesto que podrá

considerarse como resultante de dos traslaciones paralelas a los ejes y de una rotación en torno al centro de coordenadas, y cada uno de estos desplazamientos componentes es equivalente con uno de ellos.

382. — Análogamente, a una cadena cinemática libre de n chapas, que posee $n + 2$ grados de libertad, podremos darle sucesivamente rotaciones relativas arbitrarias en torno a cada una de sus $n - 1$ articulaciones intermedias, con lo que obtendremos $n - 1$ desplazamientos virtuales independientes. Además, podremos considerar el conjunto como una chapa rígida y darle sucesivamente, traslaciones según dos ejes de coordenadas y una rotación en torno al origen, con lo que obtendremos tres nuevos desplazamientos virtuales independientes, que, agregados a los $n - 1$ anteriores, nos dan los $n + 2$ que corresponden a los grados de libertad del sistema.

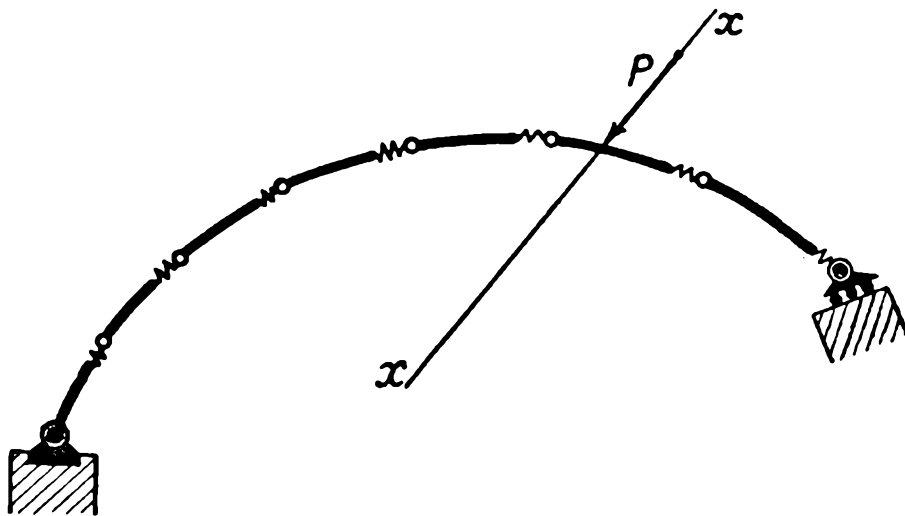


FIG. 235

Otro desplazamiento cualquiera de la cadena quedará determinado llevando una de las chapas, conjuntamente con el resto del sistema supuesto rígido, a su posición definitiva, mediante traslaciones paralelas a los ejes de coordenadas y una rotación en torno al origen, y haciendo experimentar, luego, rotaciones relativas determinadas sucesivamente en torno a cada una de las articulaciones intermedias. El desplazamiento será, por tanto, resultante de una serie de desplazamientos equivalentes con los anteriores y, por consiguiente, dependiente de los mismos.

383. Desplazamientos virtuales de cadenas elásticas. — Sea (fig. 235) una cadena elástica isostáticamente sustentada y, según una dirección xx , apliquémosle una fuerza cualquiera P , con lo que experimentará una determinada deformación, o lo que es equivalente, determinados desplazamientos de sus eslabones. Si hacemos variar la intensidad de dicha fuerza estos eslabones experimentarán, según sabemos, rotaciones absolutas proporcionales a la misma, en torno a polos fijos y determinados. Una

fuerza variable, pues, aplicada sobre una cadena elástica isostática, según una dirección determinada, sujeta los desplazamientos de la misma en forma tal que sus chapas giran en torno a puntos determinados. Esta sujeción de desplazamientos no constituye, sin embargo, un vínculo del sistema, según el concepto que hemos dado en (386). Ella no es, en efecto, previa e independiente de las cargas accidentales que, según direcciones cualesquiera, se puedan aplicar sobre el mismo, sino, en cambio, función directa de estas cargas. *El desplazamiento originado por la fuerza P , o por otra cualquiera que actúe sobre el sistema, no es, por consiguiente, un desplazamiento virtual.*

Las cadenas elásticas isostáticas, como las de la figura 235, no pueden experimentar más desplazamientos que los originados por las deformaciones debidas a cargas accidentales, es decir, no son susceptibles de desplazamientos virtuales de ninguna especie, o mejor, si se quiere, sólo puede experimentar un desplazamiento virtual nulo o idéntico.

Si en ellas se suprime alguno o algunos de los vínculos de sustentación, resultarán susceptibles de los desplazamientos virtuales del conjunto sin variación relativa de posición de sus eslabones, como si se tratara de chapas rígidas, y de ellos habrá, por consiguiente, tantos independientes cuantos grados de libertad dejen al conjunto, así considerado como rígido, los vínculos suprimidos.

384. — Sea, ahora, una cadena elástica hiperestática (fig. 236 *a*). Sus únicos desplazamientos posibles serán, también, los debidos a las deformaciones originadas por cargas accidentales y, por tanto, tampoco resulta susceptible de desplazamientos virtuales de ninguna especie.

Si en ella suprimimos un vínculo externo o interno cualquiera (fig. 236 *b* y *c*), el equilibrio, bajo la acción de un sistema dado de cargas, podrá mantenerse aplicando, en reemplazo de dicho vínculo, la reacción hiperestática X_i equivalente. Ahora bien, para cualquier sistema de cargas que apliquemos sobre la cadena elástica así considerada, siempre habrá fuerzas según las direcciones X_i y los desplazamientos, o deformaciones, de la cadena estarán sometidos a las sujeciones que, de acuerdo a lo establecido en (383), implican las fuerzas según estas direcciones. Vale decir, pues, que estas sujeciones, comunes para cualquier desplazamiento del sistema, constituyen vínculos dentro del concepto establecido en (376).

Por consiguiente, las cadenas elásticas en las que, como las de las figuras 236 *b* y *c*, se suprime algún vínculo, reemplazándolo por la reacción hiperestática X_i , quedan sujetas, además de los restantes vínculos cinemáticos, al *vínculo elástico que resulta de aplicar fuerzas cualesquiera según la dirección de dicha reacción.*

Si aplicamos, por tanto, una fuerza de intensidad *arbitraria* U_i , según la dirección X_i de la reacción correspondiente al vínculo suprimido, el sistema experimentará una deformación que constituye *un desplazamiento virtual*, toda vez que corresponde a los únicos vínculos que permanecen comunes para cualquier estado de cargas.

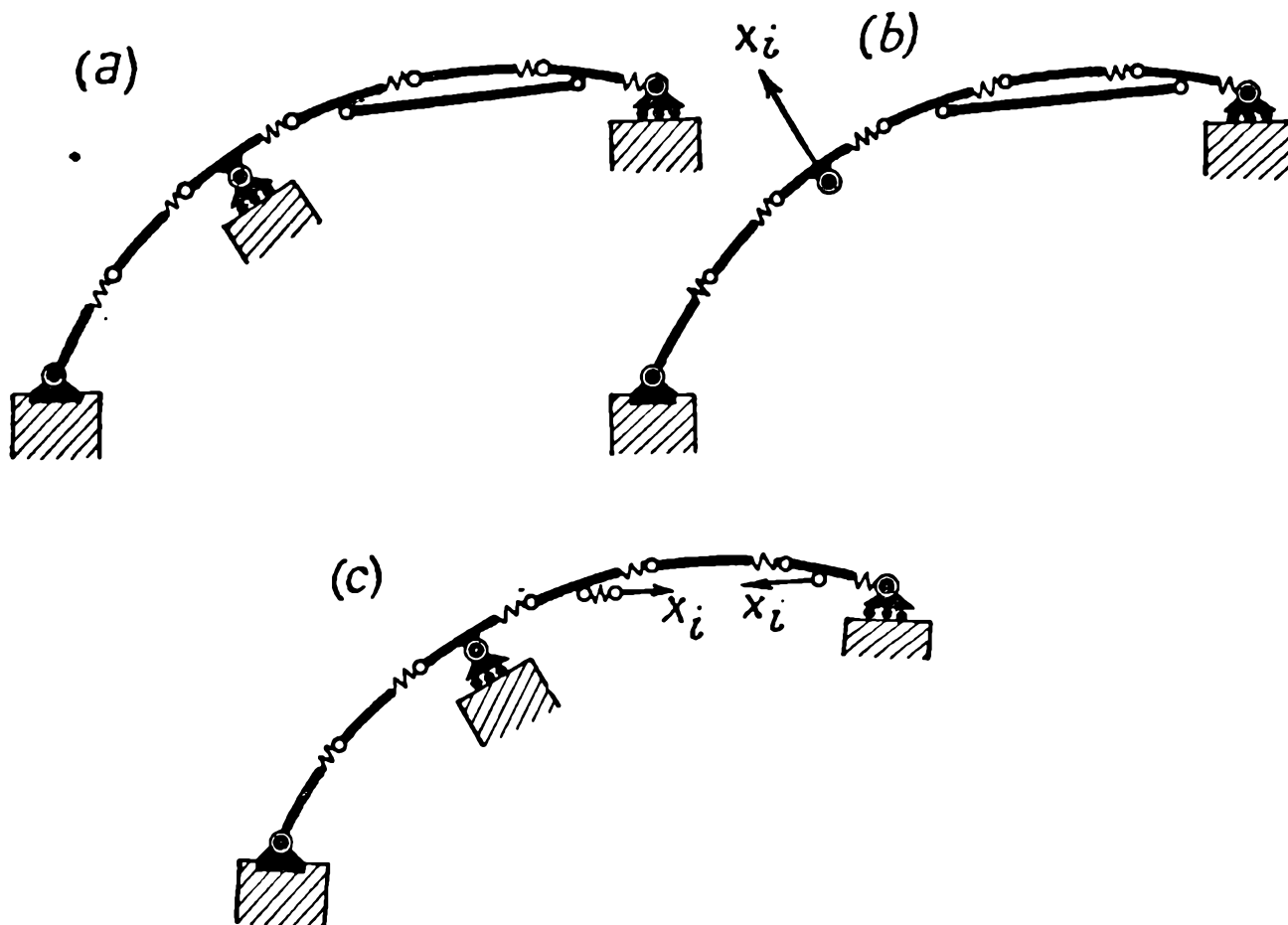


FIG. 236

Si damos a X_i otro valor arbitrario U_i' , obtendremos un nuevo desplazamiento virtual que será equivalente del anterior, desde que los desplazamientos experimentados por los puntos del sistema bajo la acción de las fuerzas U_i y U_i' de misma recta de acción, son proporcionales a sus intensidades.

385. — Si en un sistema hiperestático suprimimos lo totalidad o un número cualquiera G' de sus vínculos superfluos, de sustentación o internos, y los reemplazamos por las reacciones hiperestáticas X_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) equivalentes, obtendremos un sistema que, para cualquier estado de cargas, tendrá siempre fuerzas aplicadas según estas reacciones X_i y que por tanto, estará sometido a los vínculos elásticos que ellas implican.

Si en dicho sistema damos sucesivamente valores arbitrarios U_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) a cada una de las fuerzas X_i , suponiendo nulas las restantes, obtendremos G' deformaciones que serán desplazamientos virtuales evidentemente independientes, por tratarse de deformaciones ocasionadas por fuerzas de dirección distinta.

Por otra parte, si damos luego otra deformación al sistema, atribuyendo valores arbitrarios U_i' ($i = 1, 2, \dots, G'$) al conjunto de dichas fuerzas X_i , obtendremos un nuevo desplazamiento virtual, dependiente, como es fácil ver, de los anteriores. Este desplazamiento es, en efecto, la deformación resultante de las debidas a cada una de las fuerzas U_i' , supuesta aislada, y los desplazamientos virtuales que estas últimas implican son, a su vez, equivalentes de los debidos a las fuerzas U_i anteriormente aplicadas.

El sistema resulta, por tanto, susceptible solamente de un número de desplazamientos virtuales independientes, igual al G' de vínculos superfluos suprimidos.

En resumen, se tiene que:

Un sistema hiperestático al que se suprimen la totalidad o un número cualquiera G' de vínculos superfluos, reemplazándolos por las reacciones hiperestáticas X_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) equivalentes, es susceptible de G' desplazamientos virtuales independientes dados por las deformaciones que se obtienen al atribuir sucesivamente valores arbitrarios U_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) a cada una de las fuerzas X_i , suponiendo simultáneamente nulas las restantes.

§ 2. — Principio de los trabajos virtuales. Enunciado y aplicaciones

386. Trabajo virtual. — Definiciones. — Se llama *trabajo virtual* de un sistema sujeto a un conjunto cualquiera de fuerzas, durante un determinado desplazamiento virtual del mismo, al producto escalar resultante de dichas fuerzas por los desplazamientos experimentados por sus puntos de aplicación en virtud del referido desplazamiento virtual, o, lo que es lo mismo, al trabajo que *desarrollarían* las fuerzas aplicadas al sistema durante este desplazamiento virtual.

Por brevedad, llamaremos *desplazamiento virtual correspondiente a una fuerza*, o, simplemente, *desplazamiento virtual de una fuerza*, a la proyección sobre su dirección del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación durante un desplazamiento virtual del sistema en que actúe. Según esto, trabajo virtual de una fuerza, durante un determinado desplazamiento virtual del sistema en que está aplicada, es el producto de su intensidad por el desplazamiento virtual correspondiente.

387. Enunciado del principio de los trabajos virtuales. — El principio de los trabajos virtuales dice que:

Es condición necesaria y suficiente para que un sistema de puntos, sujeto a vínculos determinados, se mantenga en equilibrio en una posi-

ción dada, bajo la acción de un conjunto de fuerzas, que el trabajo de estas fuerzas, durante cualquier desplazamiento virtual efectuado a partir de dicha posición, sea igual o menor que cero.

Si el desplazamiento virtual es reversible, se requerirá, para que la condición anterior quede satisfecha, es decir, para que haya equilibrio, que el trabajo virtual sea nulo. Si fuera, en efecto, negativo, durante el desplazamiento virtual igual y de sentido contrario, posible por la reversibilidad supuesta, resultaría positivo y no habría equilibrio, según el enunciado anterior. De aquí el principio de los trabajos virtuales para los desplazamientos reversibles, que dice que:

El trabajo virtual resultante de un conjunto de fuerzas que mantienen un sistema de puntos en equilibrio, es nulo para cualquier desplazamiento virtual reversible de este último.

388. — Los vínculos de los sistemas planos empleados en las construcciones, tal como los hemos encontrado hasta ahora, son todos bilaterales, o, por lo menos, se mantienen tales dentro de los estados de cargas que pueden actuar sobre dichos sistemas, y todos los desplazamientos virtuales, es decir, compatibles con ellos, son, por tanto, reversibles. En adelante, pues, siempre que no hagamos indicación especial en contra, se tratará de desplazamientos virtuales reversibles y deberemos aplicar el principio de los trabajos virtuales en la segunda forma enunciada.

389. Aplicación del principio de los trabajos virtuales. — Ecuaciones de trabajos virtuales. — Aceptado, por ahora, sin mayor explicación, el principio en cuestión, sobre cuya comprobación nos ocuparemos más adelante, veamos cómo se aplica en la resolución de sistemas planos.

Consideremos al efecto, un sistema cualquiera, que debe permanecer en equilibrio, bajo la acción de n cargas conocidas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) y G fuerzas de direcciones determinadas, pero intensidades incógnitas X_i ($i = 1, 2, \dots, G$) y propongámonos hallar los valores de estas últimas.

Si damos al sistema un desplazamiento virtual j , reversible, y $a_{p,j}$ y $a_{i,j}$ son los desplazamientos correspondientes a las fuerzas P_p y X_i , el principio enunciado nos dice que para que haya equilibrio debe verificarse que

$$\sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,j} + \sum_{i=1}^G X_i \cdot a_{i,j} = 0,$$

y nos proporciona, por consiguiente, una ecuación lineal entre las intensidades incógnitas, que llamaremos *ecuación de trabajos virtuales*.

Dando otros desplazamientos virtuales al sistema, obtendremos ecuaciones análogas, y se concibe así que sea posible obtener el número G suficiente para hallar los valores de las incógnitas X_i .

En los problemas que se nos presentarán en la resolución de sistemas planos, podremos llegar siempre a tantas ecuaciones de trabajos virtuales como incógnitas, es decir, los valores de estas últimas podrán ser determinados sin ambigüedad de ninguna especie. Para probarlo, comencemos por demostrar que sólo se obtienen ecuaciones de trabajos virtuales independientes, o sea que no pueda pasarse de unas a otras mediante sumas algebraicas de sus miembros previamente multiplicados por coeficientes determinados, cuando los desplazamientos virtuales que les dan origen son, a su vez, independientes.

390. — *Dos desplazamientos virtuales equivalentes conducen a una misma ecuación de trabajos virtuales.*

Sea un sistema en equilibrio bajo la acción de n fuerzas R_i ($i = 1, 2, \dots, n$), conocidas e incógnitas. Démosle un desplazamiento virtual j y sean $a_{i,j}$ los desplazamientos correspondientes a las fuerzas R_i . En virtud del principio de los trabajos virtuales, se tiene la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n R_i \cdot a_{i,j} = 0. \quad [a]$$

Demos, ahora, un nuevo desplazamiento virtual k equivalente al anterior, cuyos desplazamientos, $a_{i,k}$, correspondientes a las fuerzas R_i , serán, por tanto, proporcionales a los anteriores, es decir,

$$a_{i,k} = \alpha \cdot a_{i,j} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad [b]$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales a este nuevo desplazamiento, se llega a la expresión

$$\sum_{i=1}^n R_i \cdot a_{i,k} = 0,$$

que, reemplazando $a_{i,k}$ por sus valores dados por las [b], se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i \cdot a_{i,k} &= \alpha \sum_{i=1}^n R_i \cdot a_{i,j} = 0 \\ \sum_{i=1}^n R_i \cdot a_{i,j} &= 0, \end{aligned}$$

ecuación igual a la [a], como queríamos demostrar.

391. — *La ecuación de trabajos virtuales que corresponde a un desplazamiento dependiente de otros, es una simple consecuencia de las que estos últimos proporcionan, es decir, una combinación lineal de las mismas.*

Sea un sistema sujeto a un conjunto de fuerzas exteriores (conocidas e incógnitas) R_i ($i = 1, 2, \dots, n$), y démosle sucesivamente m desplazamientos virtuales independientes, j , ($j = 1, 2, \dots, m$). Si $a_{i,j}$ es el desplazamiento correspondiente a la fuerza R_i durante el desplazamiento virtual j , el principio de los trabajos virtuales, aplicado a los desplazamientos dados, nos conduce a las m siguientes ecuaciones lineales entre las fuerzas R_i :

$$\sum_{i=1}^n R_i \cdot a_{i,j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad [a]$$

Si damos, ahora, al sistema un desplazamiento dependiente de los m anteriores y llamamos a_i el desplazamiento correspondiente a la fuerza R_i , tendremos, en virtud del mismo principio,

$$\sum_{i=1}^n R_i \cdot a_i = 0. \quad [b]$$

Ahora bien, por definición de desplazamiento dependiente, este último desplazamiento debe ser resultante de m desplazamientos j' ($j' = 1, 2, \dots, m$) equivalentes con los j . Si llamamos $a'_{i,j'}$ los desplazamientos correspondientes a las fuerzas R_i durante los desplazamientos virtuales j' , deberá tenerse, pues,

$$a_i = \sum_{j'=1}^m a'_{i,j'}, \quad [c]$$

desde que siendo el desplazamiento que experimenta el punto de aplicación de la fuerza R_i resultante de los que tienen lugar durante los desplazamientos virtuales j' , al proyectarlos sobre la dirección de dicha fuerza deberá resultar la proyección a_i del primero igual a la suma de las proyecciones $a'_{i,j'}$ ($j' = 1, 2, \dots, m$) de los segundos, como establece la expresión anterior.

Por otra parte, por ser los desplazamientos virtuales j' equivalentes de los j , se tendrá

$$a'_{i,j'} = \alpha_j \cdot a_{i,j},$$

en la que α_j es una constante para cada desplazamiento j .

Sustituyendo en la anterior, se tiene

$$a_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot a_{i,j},$$

y reemplazando, finalmente, en la [b] resulta

$$\sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^m \alpha_j a_{i,j} = 0,$$

ecuación en la que los coeficientes,

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot a_{i,j},$$

que multiplican a las fuerzas R_i , son, como queríamos demostrar, simples combinaciones lineales de los coeficientes análogos, $a_{i,j}$, de las m ecuaciones [a].

392. — Resulta, pues, que el principio de los trabajos virtuales nos conduce a tantas ecuaciones lineales independientes como desplazamientos virtuales, también independientes, permita el sistema.

Cuando el número de estos desplazamientos independientes sea igual al de intensidades de fuerzas incógnitas a determinar, dicho principio, dándonos tantas ecuaciones lineales como incógnitas, y sólo ellas, nos permite su determinación sin ambigüedad alguna. Es lo que sucede en los problemas relativos a la resolución estática de sistemas planos, que nos ocupan.

En efecto, dado un sistema isostático cualquiera (chapa de alma llena o de reticulado, cadena cinemática o mecanismo general formado de chapas y barras) sujeto a determinadas cargas P_p , tendrá tantas incógnitas isostáticas a calcular como condiciones cinemáticas de vínculo externo o interno. Si interesa conocer los valores de la totalidad o de un número cualquiera n de dichas incógnitas, se suprimirán las n condiciones de vínculo correspondientes, reemplazándolas por las n fuerzas incógnitas, X_i , respectivas, con lo que se obtendrá un mecanismo de n grados de libertad, que debe permanecer en equilibrio bajo la acción de las fuerzas P_p y X_i . Ahora bien, como, según lo visto en (380), este mecanismo es susceptible de sólo n desplazamientos virtuales independientes, la aplicación del principio que nos ocupa nos conducirá a sólo n ecuaciones entre las n incógnitas X_i , permitiéndonos su determinación sin ambigüedad de ninguna especie.

Análogamente, si se nos da un sistema hiperestático, sujeto a cargas P_p y en él suprimimos un número cualquiera n de vínculos superfluos, reemplazándolos por las reacciones hiperestáticas incógnitas X_i equivalentes, que se nos pide calcular, obtendremos un sistema que, según (385), es susceptible de un número de desplazamientos virtuales independientes igual al n de vínculos suprimidos, o de incógnitas a calcular, y en el que,

por consiguiente, la aplicación del principio de los trabajos virtuales nos proporciona justamente n ecuaciones lineales de las mismas, que, como en el caso anterior, nos permiten calcularlas con toda precisión.

§ 3. — Comprobación del principio de los trabajos virtuales

393. Generalidades. — El principio de los trabajos virtuales interpreta el fenómeno natural del equilibrio de los cuerpos, y como todo principio general de esta índole, no es susceptible de demostración directa. No es posible, en efecto, como dice Mach (*), demostrar por los simples recursos de la lógica matemática que *la Naturaleza debe ser lo que es*. El espíritu humano entra en conocimiento de un principio general como el que nos ocupa, por la generalización de nociones más particulares, producto directo de la experiencia, y la ciencia, cuando quiere desarrollar en forma lógica los conocimientos así adquiridos, sólo tiene dos recursos:

- 1º) Postular, sin intentar demostrar lo imposible, dichos principios generales que han entrado en contacto del espíritu humano por la obra de los siglos, deduciendo de los mismos todas sus consecuencias lógicas y admitiéndolas, conjuntamente con el principio que las involucra, mientras no estén en contra de lo que la experiencia nos indica que son los hechos naturales.
- 2º) Comprobar dichos principios, o, si se quiere, demostrarlos, en base a otros principios más instintivamente admitidos y que serán, a su vez, indemostrables.

En lo que respecta al principio de los trabajos virtuales, que es de tan amplia generalidad, que admitido el mismo quedan de hecho aceptados todos los otros postulados de la Mecánica, pueden emplearse los dos procedimientos.

El primero es el único posible cuando se estudia la Estática como ciencia independiente. Se comprueba que los diversos postulados de esta última, que conducen a las ecuaciones de equilibrio, son una consecuencia de dicho principio general, efectuando su aplicación a una serie de casos concretos, y por inducción, se generaliza, aceptándolo como condición de equilibrio para cualquier caso.

El segundo camino es el que emplea la Dinámica, demostrando el principio que nos ocupa como una consecuencia de otro principio más fácilmente aceptable *a priori*, por ser producto de una experimentación más directa, cual lo es el de las fuerzas vivas (conservación de la energía).

(*) ERNESTO MACH, *La Mécanique, exposé historique et critique de son développement*; traducción de Emilio Bertrand. París, 1904, pág 75.

Para lo que a nosotros interesa, nos bastará con comprobar que en los casos de resolución de sistemas planos isostáticos e hiperestáticos que tendremos que resolver, el principio de los trabajos virtuales nos conduce, *en tratándose* de sistemas isostáticos, exactamente a los mismos resultados a que llegaríamos con la aplicación de las leyes del equilibrio estático, ya admitidas, *y en tratándose* de sistemas hiperestáticos, a las ecuaciones de equilibrio que nos proporciona la ley de Betti, demostrada en el capítulo IV, en base al principio de la conservación de la energía.

394. Contenido experimental del principio de los trabajos virtuales. — Pero, antes de proceder a la anterior comprobación, intentemos extraer del principio en cuestión su base experimental a fin de conducir el espíritu a su aceptación directa, para lo cual nos basaremos, en buena parte, en el camino empleado por Mach en su clásica obra *La Mécanique*, ya citada.

En esencia el principio de los trabajos virtuales se reduce a admitir que la causa determinante de la ruptura del equilibrio es el trabajo de las fuerzas, el producto de sus intensidades por los caminos recorridos. *Cuando un conjunto de fuerzas aplicadas sobre un sistema cualquiera puede desarrollar trabajo (*), lo desarrolla y, por tanto, origina desplazamientos, no manteniendo el equilibrio. Este último es posible sólo cuando las fuerzas no pueden desarrollar trabajo.* A esta afirmación se reduce, como pasamos a ver, el principio que nos ocupa.

Tomemos, primeramente, como fuerzas las de la gravedad, que están más al alcance de nuestra experiencia directa. *Un cuerpo pesado desarrolla trabajo cuando cae, y cuando puede caer cae. Sólo permanece inmóvil cuando no es posible que caiga.* Esto, tan evidente, es lo que nos dice el principio de los trabajos virtuales. En efecto; supongamos vinculado el cuerpo en una forma cualquiera, que le permita determinados desplazamientos. Si entre estos posibles desplazamientos (permitidos por los vínculos, o virtuales) hay alguno para el que corresponda, a partir inmediatamente de la posición dada, un descenso del centro de gravedad, la fuerza de la gravedad lo hará efectuar, desarrollando un trabajo positivo y no habrá equilibrio en dicha posición dada. En este caso el trabajo virtual para el desplazamiento que origina el descenso del centro de gravedad es positivo, y el principio de los trabajos virtuales nos conduce al resultado indicado, desde que nos dice que sólo puede haber equilibrio cuando el trabajo durante los desplazamientos posibles no sea positivo. En cambio, si entre los desplazamientos posibles del cuerpo, o permitidos por los vínculos que lo sujetan, no hay ninguno que

(*) Por desarrollar trabajos entendemos producir un trabajo positivo, único que es capaz de dar una fuerza por su propia acción.

haga bajar su centro de gravedad, el peso, por sí solo, no tratará de efectuarlos, y el cuerpo permanecerá en equilibrio. En este caso sencillo el principio de los trabajos virtuales no hace, pues, sino expresar el hecho natural conocido que de las posiciones que un cuerpo puede ocupar, la que corresponde al reposo o equilibrio, es la que lleva su centro de gravedad a su situación más baja posible, o sea, aquélla en que, a partir de la misma, no se pueda efectuar un desplazamiento que lo haga bajar. Se entiende que nos referimos al equilibrio como un fenómeno natural, y que, por tanto, debemos descartar las posiciones de equilibrio inestable, que son sólo ficciones de la lógica, muy útiles para la generalización de conceptos, pero imposibles de realizar en la Naturaleza.

Consideremos, ahora, un conjunto de puntos vinculados entre sí en forma que constituyan un mecanismo susceptible de determinados desplazamientos. Cualquiera de estos desplazamientos, supuestos infinitésimos, constituye un desplazamiento virtual del sistema, según lo establecido. Colguemos de dichos puntos cuerpos con pesos determinados y hallemos el centro de gravedad del conjunto de los mismos. Si entre los desplazamientos posibles del sistema hay alguno en que este centro de gravedad pueda bajar, la acción de los pesos aplicados lo hará efectuar hasta llevar el centro de gravedad a la posición más baja posible, y no habrá equilibrio en la posición dada. Aplicando el principio de los trabajos virtuales obtendríamos el mismo resultado; la suma de los trabajos virtuales de los pesos durante dicho desplazamiento, igual al trabajo del peso total supuesto concentrado en su centro de gravedad, será positiva y, según dicho principio, no habrá equilibrio. En cambio, si entre dichos desplazamientos no hay ninguno en que el centro de gravedad pueda bajar, es decir, ellos dejan sobre un plano horizontal este punto o lo hacen levantar, los pesos por sí solos no tratarán de efectuarlos y habrá equilibrio. En estos casos la suma de los trabajos virtuales de los pesos sería nula o negativa.

Generalizando lo anterior para fuerzas de dirección cualquiera, se tiene el principio de los trabajos virtuales en toda su extensión. Si en los puntos del mecanismo anterior aplicamos fuerzas de dirección cualquiera y entre los desplazamientos posibles hay alguno para el que estas fuerzas puedan desarrollar un trabajo, se efectuará y no habrá equilibrio. Para dicho desplazamiento el trabajo virtual es positivo y, en concordancia con lo anterior, el principio que nos ocupa establece que no es posible el equilibrio.

En estos dos últimos casos el principio no se ve tan directamente como en el primero en que actúa un solo peso, puesto que exigen el concepto de trabajo resultante de un conjunto de fuerzas. Para salvar estas dificultades y con la intención de demostrar el principio, se han dado

ingeniosos artificios que permiten reducir el trabajo de un conjunto de fuerzas cualesquiera al de un único peso. Estas pretendidas demostraciones, muy interesantes en cuanto conducen a aclarar lo que en el fondo hay en el principio que nos ocupa, caen siempre en una repetición de principio, desde que se basan en la admisión de que la causante de la ruptura del equilibrio es el trabajo, que es, precisamente, a lo que se reduce aquél. Entre dichas pretendidas demostraciones, merece recordarse la de Lagrange, que utilizó el principio de los trabajos virtuales colocándolo como fundamento de su Mecánica analítica. He aquí en lo que consiste:

Consideremos un sistema cualquiera S (fig. 237 *a*) vinculado en forma que sea susceptible de desplazamientos infinitésimos (compatibles con los vínculos, o virtuales) y sean A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), n puntos cualesquiera del mismo sobre los que actúen fuerzas R_i de dirección arbitraria y cuyas intensidades, a las que convendremos en dar siempre el signo positivo, sean iguales a múltiplos pares de una fuerza arbitraria $\frac{P}{2}$, es decir, sean dadas por la expresión

$$R_i = 2 \alpha_i \frac{P}{2}, \quad [a]$$

en la que α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) representa números enteros y positivos.

Fijemos poleas en dichos puntos A_i (fig. 237 *b*) y hagamos otro tanto en los puntos fijos de la Tierra, B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), situados sobre las rectas de acción de las fuerzas R_i y del lado de los puntos A_i tal que las flechas de estas fuerzas aplicadas en estos últimos vayan a su encuentro. Atems un hilo en al primera polea B_1 y, haciéndolo pasar por la A_1 , démosle α_1 vueltas completas entre ambas; hagámoslo pasar luego por la polea B_2 y, llevándola a la A_2 démosle, entre las mismas, α_2 vueltas completas; procedamos en igual forma con las restantes poleas hasta que llegando a la última B_n y luego de darle α_n vueltas completas entre ella y la A_n , colguémosle en su extremo un peso $\frac{P}{2}$. Es evidente que el mecanismo así constituido transmite a los puntos A_i del sistema dado, fuerzas iguales a las R_i ; en efecto, siendo la tensión del hilo igual a $\frac{P}{2}$ en cualquier punto y habiendo α_i vueltas completas entre el par cualquiera de poleas A_i y B_i , la resultante de la acción transmitida a A_i será igual a $2 \alpha_i \frac{P}{2}$, es decir, igual a R_i , según la [a].

Ahora bien, si entre los desplazamientos posibles del sistema dado, o lo que es lo mismo, entre los que éste permite a los puntos A_i hay algunos

para el que resulte un descenso del peso $\frac{P}{2}$, este peso caerá por sí solo y no habrá equilibrio; como este descenso se verifica cuando disminuye

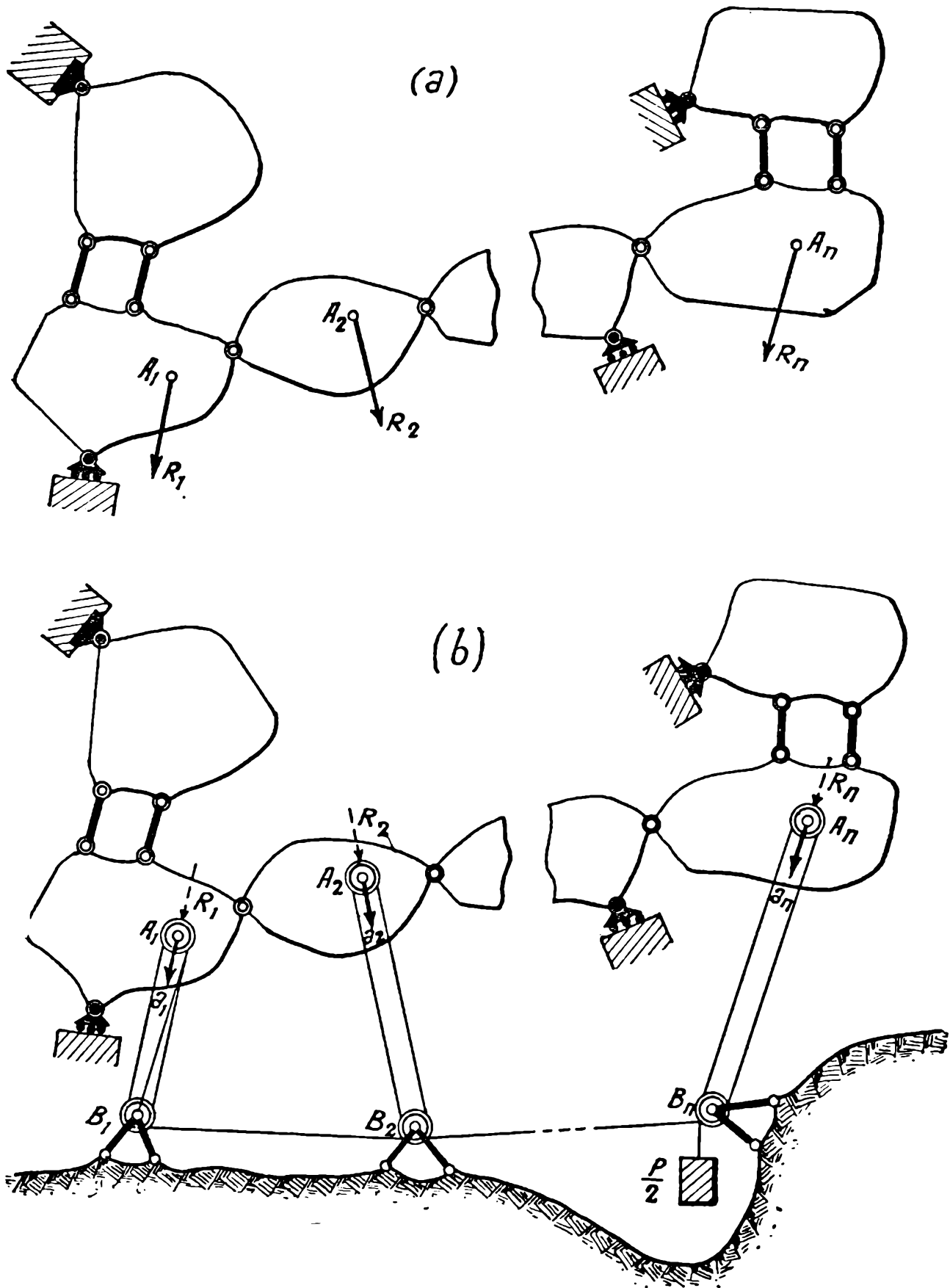


FIG. 237

la longitud total del trozo de hilo arrollado comprendido entre las poleas B_1 y B_n , la condición para que haya equilibrio es que la variación δ

de dicha longitud, para cualquiera de los desplazamientos posibles del sistema, sea igual o mayor que cero, es decir, que

$$\delta \geq 0. \quad [b]$$

Sea a_i la proyección del desplazamiento del punto A_i sobre la dirección de la fuerza R_i durante uno cualquiera de dichos desplazamientos posibles del sistema, a la que daremos el signo positivo cuando tenga el sentido de la fuerza de modo que su producto por la intensidad de ésta a que se ha dado siempre el signo positivo, nos dé directamente su trabajo. Este desplazamiento a_i será igual a la variación de distancia entre los puntos A_i y B_i con signo contrario (acortamiento cuando a_i sea positivo y a la inversa), y para el mismo corresponderá una variación de la longitud del hilo arrollado entre las poleas A_i y B_i igual a

$$- 2 \alpha_i a_i.$$

Para el desplazamiento del sistema, al que corresponden desplazamientos a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de los puntos A_i , según las direcciones de las fuerzas R_i , la variación total del trozo de hilo comprendido entre los puntos B_i y B_n , será, por tanto,

$$\delta = - \sum_{i=1}^n 2 \alpha_i a_i,$$

y, según la [b], para que haya equilibrio se requerirá que

$$- \sum_{i=1}^n 2 \alpha_i a_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n 2 \alpha_i a_i \leq 0$$

Multiplicando, finalmente, por $\frac{P}{2}$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n 2 \alpha_i \frac{P}{2} a_i \leq 0,$$

y, recordando la [a],

$$\sum_{i=1}^n R_i \cdot a_i \leq 0,$$

que es, precisamente, la ecuación de trabajos virtuales que el principio que nos ocupa exige se satisfaga, tomando en cuenta el desplazamiento

compatible con los vínculos (o virtual) considerado, para que las fuerzas R_i mantengan el sistema S en equilibrio.

Toda la demostración anterior está basada en la admisión del hecho natural consistente en que el peso $\frac{P}{2}$ caerá si los vínculos se lo permiten, pero que por sí solo, aunque por éstos sea posible, no subirá.

El principio de los trabajos virtuales en el fondo, se reduce a este solo hecho, a expresar que un cuerpo pesado si puede descender desciende, si puede desarrollar trabajo lo desarrolla, pero que, por sí solo no sube, no acumula, no gana trabajo. Como dice Mach, las ecuaciones de equilibrio proporcionadas por dicho principio pueden enunciarse vulgarmente así:

No sucede nada cuando nada puede suceder ()*.

395. — Si se trata de desplazamientos reversibles, en los dos primeros ejemplos del número anterior se comprende fácilmente que no es posible el equilibrio si el centro de gravedad puede subir, puesto que, dada la reversibilidad, serán posibles desplazamientos en que dicho centro baje, desplazamientos que serán efectuados por los pesos, rompiendo el equilibrio. Cuando los desplazamientos permitidos por los vínculos son reversibles, este último sólo puede subsistir, por tanto, en los casos en que el centro de gravedad no puede experimentar ningún desplazamiento vertical, casos para los que el trabajo de la gravedad es nulo. Esto concuerda con lo expresado en (387) para el principio de los trabajos virtuales aplicado a sistemas con vínculos bilaterales. El siguiente sencillo ejemplo acabará de aclarar estos conceptos:

Las figuras 238 a , b y c , representan un cilindro que puede girar sobre un plano desplazándose paralelamente a la hoja del dibujo, y supondremos, además, que no puede deslizarse sobre sus generatrices normalmente a dicha hoja. En los dos primeros casos (fig. 238 a y b) los vínculos que sujetan al cilindro son bilaterales; un desplazamiento cualquiera que haciendo rodar el cilindro sobre el plano lleva su centro de gravedad G hacia la derecha a las posiciones G' , es un desplazamiento virtual rever-

(*) Con respecto a esta demostración de Lagrange se expresa Mach en la forma siguiente:

« A pesar de que la ficción del tren de poleas sea algún tanto extraña al sujeto, la demostración de Lagrange tiene en realidad algo convincente, pues el movimiento de un peso único está *mucho más próximo* de nuestra experiencia y es mucho más fácil de dominar con su conjunto que los movimientos de un número cualquiera de pesos. Ello no *prueba*, sin embargo, que el *trabajo* sea la determinante de la ruptura del equilibrio, al contrario, el empleo del tren de poleas presupone este conocimiento. En realidad, cada par de poleas contiene ya el hecho que se expresa y reconoce por el principio de los desplazamientos virtuales. La sustitución de todas las fuerzas del sistema *por un peso único* que efectúa el mismo trabajo, supone ya que se conozca el significado de trabajo y no es admisible sino en esta hipótesis. El hecho de que algunos casos nos son más familiares y están más próximos de nuestra experiencia, nos arrastra a aceptarlos sin análisis y a tomarlos como base de una demostración sin habernos dado cuenta en forma perfectamente clara de su contenido ». Mach., *loc. cit.*, pág. 67 y siguiente.

sible: virtual por cuanto es compatible con los vínculos y reversible en cuanto, a partir de la misma posición inicial, es posible un desplazamiento igual en sentido opuesto, hacia la izquierda, que lleve los centros de gravedad a las posiciones G'' . Ahora bien, en estos dos casos el principio de los trabajos virtuales exige que, para que haya equilibrio, el trabajo virtual del peso P del cilindro sea nulo durante dichos desplazamientos. En el primer caso (fig. 238 *a*) así sucede desde que el desplazamiento virtual desplaza el centro de gravedad normalmente a la fuerza P , lo que está de acuerdo con la experiencia, que nos enseña que el cilindro apoyado sobre un plano horizontal se mantiene en equilibrio.

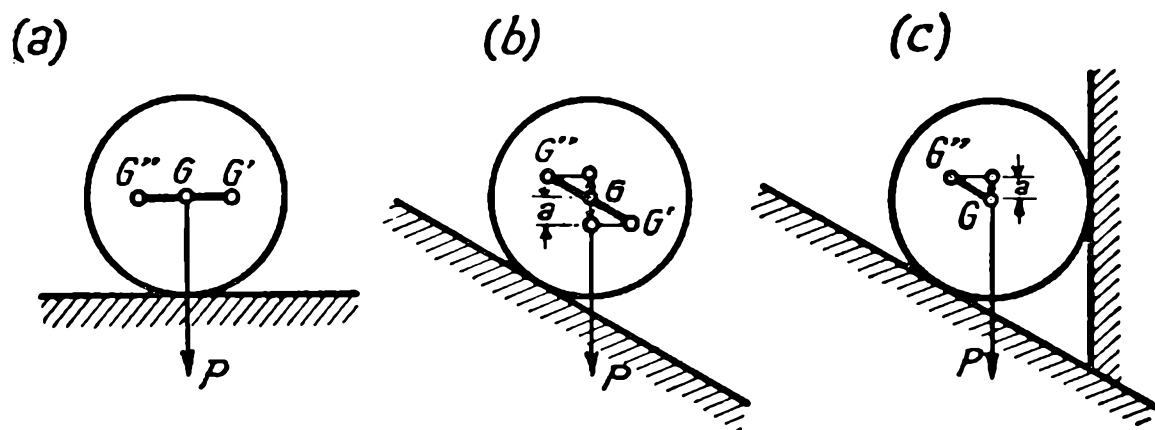


FIG. 238

En el segundo caso (fig. 238 *b*) la experiencia nos enseña que no hay equilibrio, y este hecho está bien interpretado por el principio de los trabajos virtuales, puesto que el trabajo virtual del peso P no es nulo en ninguno de los dos desplazamientos que llevan el centro de gravedad a G' y G'' . En el tercer caso (fig. 238 *c*) el cilindro, apoyado sobre un plano inclinado, está detenido por un muro vertical y el principio de los trabajos virtuales debe demostrarnos la existencia del equilibrio, como corresponde a la experiencia. Como los vínculos que sujetan al cilindro son unilaterales y el desplazamiento virtual que lleva el centro de gravedad a G'' no es reversible, desde que a partir de la posición inicial G no puede llevarse hacia la derecha a causa del muro, el principio de los trabajos virtuales nos dice que habrá equilibrio cuando el trabajo del peso P sea igual o *menor* que cero, verificándose esto último, desde que al llevar el centro G a G'' se le hace experimentar un ascenso, un desplazamiento de sentido contrario a P .

396. Comprobación del principio de los trabajos virtuales para las chapas rígidas.— Pasamos a comprobar que la aplicación del principio de los trabajos virtuales a las chapas rígidas nos conduce a las conocidas ecuaciones de equilibrio que proporciona la Estática.

Sea una chapa S (fig. 239), en equilibrio bajo la acción de n fuerzas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de argumentos φ_i con respecto a un sistema cualquiera de ejes rectangulares O (z, y). Llamemos p_i las distancias entre las fuerzas cualesquiera P_i y el origen O , consideradas como vectores dirigidos hacia este origen y φ_{pi} sus argumentos.

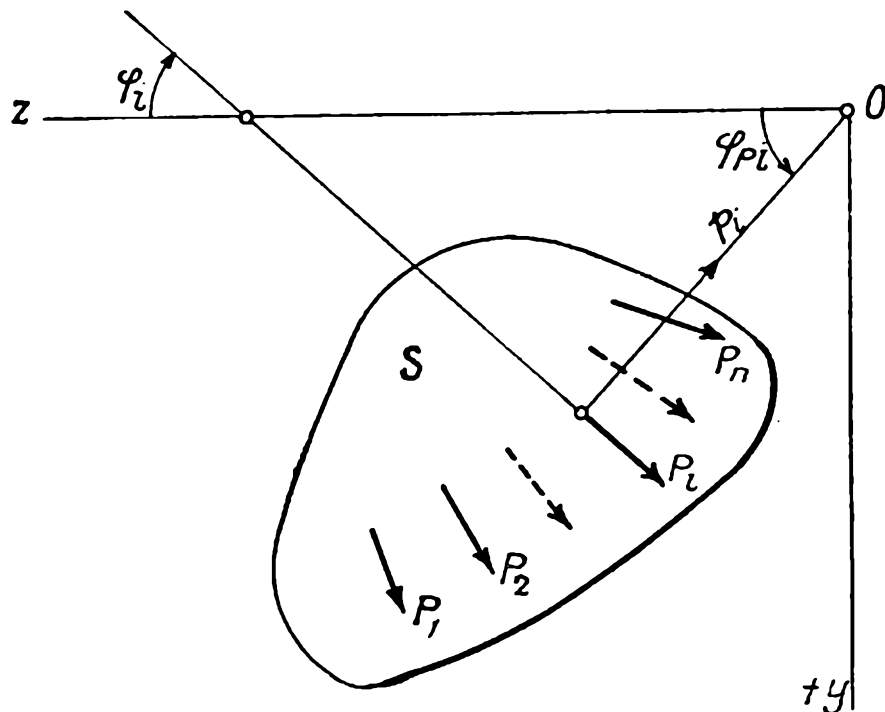


FIG. 239

Las ecuaciones de equilibrio estático nos dicen que las fuerzas P_i , desde que mantienen en equilibrio la chapa S , deben ser tales que las sumas de sus proyecciones sobre los ejes y de sus momentos estáticos con respecto al punto O resulten nulas, es decir, que

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \varphi_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_i \sin \varphi_i = 0;$$

[a]

$$\sum_{i=1}^n (\pm P_i \cdot p_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{pi} > 0 \end{array} \right. (*)$$

Ya hemos visto en (381) que la chapa rígida S es susceptible sólo de tres desplazamientos virtuales independientes, obtenidos con dos traslaciones paralelas a los ejes y una rotación en torno al origen.

Dando, pues, a la chapa una translación paralela al eje de las z de intensidad ζ , a cada una de las fuerzas P_i le corresponderá un despla-

(*) Es fácil ver que con las convenciones de signos por nosotros adoptadas, tomando los signos en la forma indicada por esta expresión, y siendo p_i , como se ha supuesto, la distancia entre la fuerza y el centro de momentos tomado como un vector dirigido hacia el centro, resultan para los productos $\pm P_i p_i$ los signos positivos cuando la fuerza gire con respecto al centro de momentos en el sentido de las agujas de un reloj y a la inversa.

zamiento igual a $\zeta \cos \varphi_i$, y su trabajo virtual será $P_i \zeta \cos \varphi_i$. El principio de los trabajos virtuales nos dice que, habiendo equilibrio, la suma de estos trabajos debe ser igual a cero, es decir, que

$$\sum_{i=1}^n P_i \zeta \cos \varphi_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_i \cos \varphi_i = 0,$$

ecuación igual a la primera de las [a] a que nos conduce la Estática.

Análogamente, dando a la chapa una traslación η paralela al eje de las y , los desplazamientos correspondientes a las fuerzas P_i serán $\eta \sin \varphi_i$, y la ecuación de trabajos virtuales, será, a su vez,

$$\sum_{i=1}^n P_i \eta \sin \varphi_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_i \sin \varphi_i = 0,$$

es decir, igual a la segunda de las [a].

Finalmente, demos a la chapa, como tercer desplazamiento virtual, una rotación infinitésima θ en torno al punto O . El desplazamiento a_i correspondiente a la fuerza cualquiera P_i será

$$a_i = \pm \theta \cdot p_i \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pi} > 0 \end{array} \right\},$$

y la ecuación de trabajos virtuales tendrá la forma

$$\sum_{i=1}^n P_i a_i = \sum_{i=1}^n P_i (\pm \theta \cdot p_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pi} > 0 \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=1}^n (\pm P_i \cdot p_i) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ » } \varphi_{pi} > 0 \end{array} \right\},$$

o sea, será, a su vez, igual a la tercera de las [a].

La aplicación del principio de los trabajos virtuales a la determinación de las condiciones a que deben satisfacer las fuerzas P_i , aplicadas sobre la chapa S , para mantenerla en equilibrio, nos ha conducido, pues, a las tres ecuaciones conocidas de equilibrio y como estas tres ecuaciones son las únicas independientes que puede dar dicho principio, resulta comprobado, que su aplicación a las chapas es equivalente, o da los mismos resultados, que la de las ecuaciones de la Estática.

397. — Sea, ahora, una chapa rígida S (fig. 240) con un punto fijo A , sujeta a un conjunto de fuerzas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) que la mantienen en equilibrio. Si llamamos p_i las distancias entre las fuerzas P_i y el punto fijo A , consideradas como vectores dirigidos hacia este último y φ_{pi} los argumentos de estos vectores distancia, la Estática nos dice que, si hay

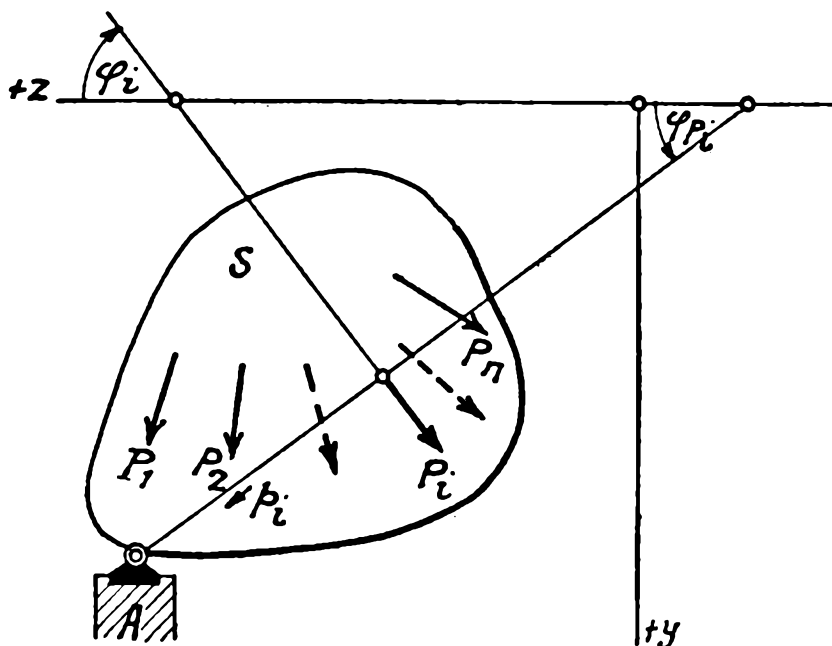


FIG. 240

equilibrio, debe verificarse que la suma de los momentos estáticos de las fuerzas P_i con respecto a A sea nula, es decir, que

$$\sum_{i=1}^n (\pm P_i \cdot p_i) = 0 \quad \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{pi} > 0 \end{cases}$$

La chapa sometida al vínculo del punto fijo A , es susceptible de un único desplazamiento virtual independiente, constituido por una cualquiera de sus rotaciones infinitésimas en torno a dicho punto. Dándole, pues, una rotación de intensidad θ , a la fuerza P_i corresponderá un desplazamiento

$$a_i = \pm \theta p_i \quad \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{pi} > 0 \end{cases},$$

y la ecuación de los trabajos virtuales será

$$\sum_{i=1}^n P_i a_i = \sum_{i=1}^n P_i (\pm \theta p_i) = 0 \quad \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{pi} > 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n (\pm P_i p_i) = 0 \quad \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{pi} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{pi} > 0 \end{cases},$$

igual, como se ve, a la que nos conduce la estática.

398. — Consideremos, finalmente, una chapa sometida al vínculo del desplazamiento idéntico sobre la que actúa un conjunto de n fuerzas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Sabemos por la Estática que siendo rígida la chapa, habrá equilibrio, cualesquiera que sean las intensidades de estas últimas.

Al mismo resultado nos conduce la aplicación del principio de los trabajos virtuales. En efecto; el único desplazamiento virtual de la chapa en dichas condiciones es el desplazamiento idéntico, en que los desplazamientos correspondientes a las fuerzas P_i son todos nulos. Cualesquiera que sean las intensidades de estas fuerzas, se tendrá siempre

$$\sum_{i=1}^n P_i \times 0 = 0,$$

es decir, se satisfará la condición necesaria y suficiente para el equilibrio.

399. **Comprobación del principio de los trabajos virtuales para las cadenas cinemáticas libres.** — Consideramos una cadena cinemática libre, de n chapas, sujeta a un conjunto de fuerzas que la mantienen en equilibrio.

La Estática nos proporciona, ante todo, las tres ecuaciones generales de equilibrio de la totalidad de estas fuerzas, es decir, las que resultan de igualar a cero sus proyecciones sobre dos ejes y sus momentos estáticos con respecto a un punto. Además, nos da, según (113), las $n - 1$ ecuaciones que se obtienen al establecer que el momento resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda o a la derecha, de cada una de las $n - 1$ articulaciones intermedias, con respecto a dichas articulaciones, debe, también, ser nula.

Tratándose de un mecanismo de $n + 2$ grados de libertad, tiene $n + 2$ desplazamientos virtuales independientes y el principio de los trabajos virtuales nos conducirá, como la Estática, a $n + 2$ ecuaciones.

Según hemos visto en (382), tres de dichos desplazamientos independientes son los que resultan de tratar el conjunto de la cadena como una chapa rígida y el principio de los trabajos virtuales, aplicado a los mismos, nos dará, de acuerdo con (396), las tres ecuaciones generales de equilibrio estático de la totalidad de las fuerzas que actúan sobre la cadena, es decir, las tres primeras ecuaciones que obtendríamos para ésta al aplicar las leyes de la Estática.

Los $n - 1$ desplazamientos virtuales restantes se obtienen, según (382), dando desplazamientos relativos en torno a cada una de las articulaciones intermedias y considerando, en cada caso, el resto de la cadena como si fuera formado por dos chapas rígidas ligadas por la articulación consi-

derada. Sea una cualquiera de las articulaciones; supongamos fijas todas las chapas que quedan a su izquierda, y demos a las de la derecha una rotación en torno a dicha articulación, sin alterar su posición relativa, como si fueran una sola chapa. La aplicación del principio de los trabajos virtuales a este desplazamiento nos conducirá, de acuerdo a lo visto en (397), a una ecuación que establecerá que la suma de los momentos estáticos de las fuerzas aplicadas sobre estas últimas chapas, con respecto a la articulación considerada, debe ser nula. Procediendo en la misma forma para las otras articulaciones, obtendríamos, pues, las mismas $n - 1$ ecuaciones restantes que nos da la Estática, con lo que queda comprobado que, también en este caso, los resultados de la aplicación del principio de los trabajos virtuales son equivalentes a los que conduce esta última ciencia.

400. Comprobación del principio de los trabajos virtuales para los mecanismos cinemáticos cualesquiera de un grado de libertad. — Consideremos un mecanismo cinemático cualquiera de un grado de libertad, formado de chapas y barras articuladas entre sí y vinculado externamente mediante un determinado número de sustentaciones. Sea m el número de sus elementos, chapas y barras, que designaremos en general por S_i ($i = 1, 2, \dots, m$) y sometámoslo a un conjunto de n cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$), que lo mantengan en equilibrio.

El sistema en cuestión es susceptible de un único desplazamiento virtual independiente, durante el cual sus diversos elementos, chapas y barras S_i , experimentarán rotaciones θ_i en torno a polos O_i , que serán puntos fijos y determinados, invariables cualquiera sea el desplazamiento elegido.

Si a_p es el desplazamiento que, durante el desplazamiento virtual adoptado, corresponde a la fuerza P_p , el principio de los trabajos virtuales nos dice que, para que subsista el equilibrio, debe verificarse que

$$\sum_{p=1}^n P_p \cdot a_p = 0.$$

Si de las fuerzas P_p designamos con $P_{p,i}$ a las que actúan sobre la chapa o barra S_i y llamamos, a su vez, $a_{p,i}$, los desplazamientos a_p que les corresponden, tendremos, desde que la chapa experimenta una rotación θ_i en torno al polo O_i y llamando $p_{p,i}$, las distancias entre las fuerzas P_i y dicho polo, consideradas como vectores dirigidos hacia este último que

$$a_{p,i} = \pm \theta_i \cdot p_{p,i} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ para } \varphi_{p,i} < 0 \\ - \quad \text{ » } \quad \varphi_{p,i} > 0, \end{array} \right.$$

siendo $\varphi_{p,i}$ los argumentos de dichos vectores distancia $p_{p,i}$.

El trabajo virtual de una cualquiera de las fuerzas $P_{p,i}$ será, por consiguiente,

$$P_{p,i} \cdot a_{p,i} = \pm P_{p,i} \cdot \theta_i p_{p,i} \quad \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{p,i} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{p,i} > 0, \end{cases}$$

y el resultante para todas las fuerzas aplicadas en la chapa S_i ,

$$\sum_{S_i} (\pm P_{p,i} \theta_i p_{p,i}) \quad \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{p,i} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{p,i} > 0, \end{cases}$$

en que la sumatoria se entiende extendida a todas ellas.

El trabajo virtual resultante del sistema, será, finalmente,

$$\sum_{p=1}^m P_p \cdot a_p = \sum_{S_i=S_1}^{S_m} \sum_{S_i} (\pm P_{p,i} \theta_i p_{p,i}) = 0 \quad \begin{cases} + \text{ para } \varphi_{p,i} < 0 \\ - \text{ para } \varphi_{p,i} > 0. \end{cases} \quad [a]$$

Hallemos, ahora, la condición de equilibrio entre las fuerzas P_p , a que nos conduce la Estática. Observemos para ello que una cualquiera de las

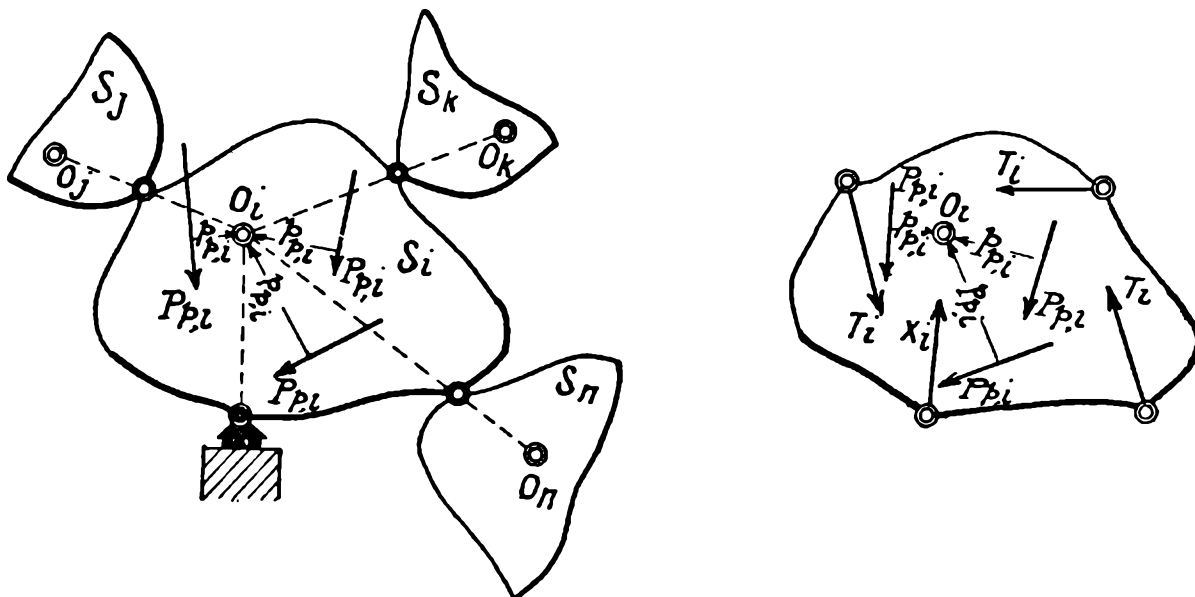


FIG. 241

chapas S_i (fig. 241), la podemos considerar aislada y en equilibrio bajo la acción de las cargas $P_{p,i}$ directamente aplicadas, de las reacciones de vínculo interno T_i que le transmiten las chapas adyacentes, aplicadas en los puntos de articulación de las mismas, y de las reacciones de vínculo externo X_i , originadas por las sustentaciones que corresponden a la misma. Como todas estas fuerzas deben estar en equilibrio, las sumas de sus momentos con respecto a un punto cualquiera y, en particular, con respecto al polo O_i del desplazamiento virtual anterior, debe ser nula, es decir, que designando por t_i los vectores distancias de las reac-

ciones de vínculo interno con respecto a dicho polo, debe tenerse para cada chapa S_i que

$$\sum_{S_i} (\pm P_{p,i} \cdot p_{p,i} \pm T_i t_i) = 0 \quad \begin{cases} + & \text{para } \varphi_{p,i} \text{ o } \varphi_{t,i} < 0 \\ - & \text{» } \varphi_{p,i} \text{ o } \varphi_{t,i} > 0, \end{cases}$$

$$(S_i = S_1, S_2, \dots, S_m)$$

desde que los momentos de las fuerzas X_i son de por sí nulos, toda vez que si el vínculo externo que las origina es una articulación fija, con ella coincide el polo O_i y por ella pasan los dos componentes X_i correspondientes, y si es un apoyo móvil, sobre la normal a su dirección, que coincide la reacción X_i respectiva, se halla situado el polo O_i , como en el caso de la figura.

Multiplicando cada una de las m ecuaciones anteriores por la rotación θ_i que la chapa correspondiente había experimentado durante el desplazamiento virtual antes considerado y sumando se tiene

$$\sum_{S_i=S_1}^{S_m} \sum_{S_i} (\pm P_{p,i} \cdot p_{p,i} \theta_i) + \quad [b]$$

$$+ \sum_{S_i=S_1}^{S_m} \sum_{S_i} (\pm T_i t_i \theta_i) = 0 \quad \begin{cases} + & \text{para } \varphi_{p,i} \text{ o } \varphi_{t,i} < 0 \\ - & \text{» } \varphi_{p,i} \text{ o } \varphi_{t,i} > 0. \end{cases}$$

Observando ahora que si llamamos $a_{t,i}$ el desplazamiento correspondiente a la fuerza T_i , experimentado por la articulación intermedia que origina esta reacción de vínculo durante el desplazamiento virtual anterior, se tiene

$$a_{t,i} = \pm t_i \theta_i \quad \begin{cases} + & \text{para } \varphi_{t,i} < 0 \\ - & \text{» } \varphi_{t,i} > 0 \end{cases}$$

y el segundo término de la expresión anterior puede escribirse así

$$\sum_{S_i=S_1}^{S_m} \sum_{S_i} T_i \cdot a_{t,i}.$$

Pero, como a su vez para cada T_i que actúa sobre la chapa S_i existe una igual y de sentido contrario que esta chapa transmite a la que lo origina, y el desplazamiento $a_{t,i}$ de la articulación que las une es el mismo para ambas, los términos $T_i a_{t,i}$ de la sumatoria anterior, son iguales y de sentido contrario dos a dos, con lo que se tiene que

$$\sum_{S_i=S_1}^{S_m} \sum_{S_i} T_i a_{t,i} = 0$$

y la [b] toma la forma de la [a] obtenida por la aplicación directa del principio de los trabajos virtuales, lo que dice que, también en este caso, este principio conduce a la misma ecuación de equilibrio que la Estática.

401. Comprobación del principio de los trabajos virtuales para los sistemas hiperestáticos. — Consideremos un sistema hiperestático sujeto a un conjunto de cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) y suprimámosle un número cualquiera G de vínculos superfluos, reemplazándolos por las incógnitas hiperestáticas X_i correspondientes.

Ya hemos visto que el sistema elástico así considerado es susceptible de G desplazamientos virtuales independientes, que están dados por las deformaciones que corresponden a estados de carga (unitarios), obtenidos dando a cada una de las reacciones X_i un valor arbitrario U_i y suponiendo nulas las restantes.

Si aplicamos, pues, al sistema, supuesto descargado, una fuerza $X_j = U_j$, obtendremos con la deformación respectiva uno de dichos desplazamientos virtuales independientes y si $a_{p,j}$ y $a_{i,j}$ son los desplazamientos que en el mismo corresponden a las fuerzas P_p y X_i que mantienen en equilibrio el sistema, debe verificarse, según el principio de los trabajos virtuales, que

$$\sum_{i=1}^G X_i \cdot a_{i,j} + \sum_{p=1}^n P_p \cdot a_{p,j} = 0.$$

Haciendo en esta expresión sucesivamente $j = 1, 2, \dots, G$, es decir, dando deformaciones virtuales sucesivas mediante estados de cargas $X_1 = U_1$, $X_2 = U_2, \dots, X_G = U_G$, obtendremos un sistema de G ecuaciones lineales entre las G incógnitas hiperestáticas X_i que nos determinará sus valores.

Ahora bien, estas ecuaciones son exactamente las que hubiéramos obtenido aplicando la ley de Betti, de acuerdo con lo demostrado en (366), puesto que ellas no expresan sino que es nula la suma de los productos escalares de las fuerzas exteriores que mantienen en equilibrio el sistema elástico (cargas e incógnitas hiperestáticas) por los desplazamientos debidos a estados de carga $X_j = U_j$, correspondientes a valores arbitrarios atribuidos a las incógnitas X_j .

La aplicación del principio de los trabajos virtuales a las cadenas elásticas hiperestáticas, conduce, pues, al mismo resultado que la aplicación de la ley de Betti, y dicho principio es, por tanto, a este respecto, equivalente a esta última.

402. Algunos datos históricos. — El principio de los trabajos virtuales, cuyas primeras insinuaciones vienen de la antigüedad con los escritos de *Aristóteles* y *Eron*, fué aplicado por *Stévin* a fines del siglo XVI,

para desplazamientos finitos y pesos, en el cálculo de poleas y aparejos, quien lo enunciaba en la forma siguiente: *El espacio pasivo es al espacio activo como la potencia activa es a la potencia pasiva.*

Galileo y su discípulo *Torricelli* lo aplicaron, más tarde, a la determinación del equilibrio de diversos mecanismos sencillos, sujetos siempre sólo a la acción de fuerzas verticales debidas a la gravedad.

Pero, el primer enunciado general del principio, en la forma en que hoy lo concebimos, para fuerzas cualesquiera, es debido a *Juan Bernouilli*, quien comunicó su descubrimiento en carta dirigida a *Varignon* en 1717. *Bernouilli* enunciaba el principio de la manera siguiente, en que se designa el trabajo de una fuerza con la palabra energía: *En todo equilibrio de fuerzas cualesquiera, de cualquier modo que sean aplicadas, siguiendo direcciones diferentes, obrando unas sobre otras, mediata e inmediatamente, la suma de las energías afirmativas será igual a la de las energías negativas, tomadas afirmativamente.*

Varignon intentó una demostración del principio y lo verificó en algunos casos simples en su obra *Nouvelle Mécanique ou Statique* (1725). Posteriormente *Lagrange*, admitiéndolo como postulado, lo puso como fundamento de su *Mécanique Analytique* (1788). En las siguientes ediciones de esta obra intentó dos demostraciones, a una de las cuales ya nos hemos referido.

El concepto de que el trabajo virtual puede ser negativo en caso de desplazamientos irreversibles es debido a *Fourier* (*).

403. — El principio que nos ocupa ha recibido y recibe aún diversas designaciones, llamándosele *principio de las velocidades virtuales*, de los *desplazamientos virtuales*, de los *momentos virtuales* y de los *trabajos virtuales*.

En la actualidad prima esta última designación, *de trabajos virtuales*, dada por *Ostwald* en 1872 (**), que es la que más se aproxima al concepto de lo que encierra en sí el principio, ligado exclusivamente con la noción de los trabajos posibles de las fuerzas aplicadas a los sistemas, como hemos visto en (394).

En la designación de *momentos virtuales*, la palabra momento se emplea en su acepción etimológica de producto, queriendo indicar el producto de la fuerza por el desplazamiento virtual correspondiente. Aparte de no recordarnos la noción del trabajo, tan íntimamente vinculada con el principio que decimos, tiene, además, el inconveniente de no concordar con la acepción común que hoy se da al término momento, que

(*) Sobre estos antecedentes históricos véase *MACH*, *loc. cit.*, y *DUHEM*, *Les origines de la Statique*.

(**) Véase *W. OSTWALD*, *La energía*; versión española de *J. R. Ferreruela*, Madrid, 1911. Pág. 27.

se reserva especialmente para los productos vectoriales o exteriores de vectores, como los momentos estáticos de las fuerzas, mientras la palabra trabajo se aplica a los productos escalares, o interiores, que figuran en la aplicación del principio.

§ 4. — Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la resolución de sistemas planos

404. Consideraciones generales. — Como se ve por lo que antecede, el principio de los trabajos virtuales no nos conduce, en lo que respecta a los problemas que nos ocupan, a nada nuevo, sino que nos plantea las ecuaciones conocidas de equilibrio estático, para los sistemas isostáticos y las que proporciona la ley de Betti, para los hiperestáticos. « Como todo principio general, el de los desplazamientos virtuales produce — dice Mach — a la vez *desilusión* y *claridad*: desilusión en tanto que no reconocemos en él sino hechos conocidos desde mucho tiempo e instintivamente descubiertos; claridad en cuanto nos permite encontrar en todas partes los mismos hechos simples, a través de las relaciones más complicadas ».

En este último hecho estriban su fecundidad y su alto valor científico: en la generalización que implica y en la economía de pensamiento que representa al permitir, con prescindencia de detalles particulares, la resolución de los problemas más diversos, con un único y simple criterio.

En lo que a nosotros particularmente respecta, nos permite generalizar el problema de la resolución de los sistemas planos, convirtiéndolo en uno único ya se trate de sistemas isostáticos, ya de hiperestáticos. En cualquier caso el problema se reducirá a hallar desplazamientos virtuales y a igualar a cero la suma de los trabajos correspondientes.

En cuanto a la economía de pensamiento, salta a la vista palpablemente de su aplicación a la obtención de la condición de equilibrio de un sistema de fuerzas aplicadas a un mecanismo cinemático cualquiera de un grado de libertad, hecha en (400). Mediante el principio que nos ocupa el problema tuvo la misma sencillez que en cualquier otro caso. En cambio, para obtener dicha ecuación de equilibrio mediante los simples recursos de la Estática, nos fué preciso suponer aislados cada uno de los elementos, barras y chapas, mediante la introducción de las reacciones de vínculo, hallar las ecuaciones de equilibrio correspondientes a cada uno de dichos elementos y deducir, después, de las mismas, mediante artificios adecuados, una ecuación equivalente, en la que se eliminan dichas reacciones de vínculo.

No queremos terminar estas consideraciones generales sin volver otra vez a Mach, mencionando un clásico ejemplo con el que hace resaltar la economía de pensamiento que reporta la aplicación del principio que nos ocupa. « En posesión de este principio — dice — podremos dejar completamente de costado el detalle del mecanismo de una máquina. Supongamos que una máquina desconocida sea colocada en una caja cerrada de la que no salen sino dos brazos de palanca que sirven de punto de aplicación a la potencia P y a la carga P' . Observando los desplazamientos simultáneos h y h' de estos dos brazos se deducirá, inmediatamente, la condición de equilibrio, $Ph + P'h' = 0$, cualesquiera que sean las disposiciones del mecanismo ».

405. Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la resolución de sistemas isostáticos. — Los sistemas isostáticos, chapas, cadenas cinemáticas, o sistemas generales, pueden tener gran número de incógnitas estáticas; así para cada chapa corresponden tantas como vínculos externos o internos la ligan con la Tierra o con el resto del sistema y, si es de reticulado, además, tantas como barras.

Prácticamente, para proceder a su determinación mediante el principio de los trabajos virtuales, lo haremos considerando sucesivamente mecanismos de un grado de libertad, obtenidos suprimiendo una de dichas condiciones de vínculo y haciendo actuar, en su reemplazo, la reacción incógnita, externa o interna, correspondiente. Dando el único desplazamiento virtual de que es susceptible uno cualquiera de los sistemas de un grado de libertad así obtenidos, llegaremos a una ecuación de trabajos virtuales entre las cargas exteriores conocidas y la reacción incógnita correspondiente al mismo, ecuación que nos dará directamente su valor.

Procediendo análogamente para cada uno de dichos sistemas, obtendremos, pues, ecuaciones análogas con una sola incógnita cada una, que nos resolverán el problema.

406. Aplicación del principio de los trabajos virtuales para la resolución de sistemas hiperestáticos. — Si se trata de hallar las incógnitas superfluas de sistemas hiperestáticos, el procedimiento más cómodo sería también el que acabamos de exponer, es decir, el que consistiera en suprimir uno a uno los vínculos superfluos, reemplazándolos por las reacciones incógnitas correspondientes y obteniendo sistemas de un solo desplazamiento virtual independiente, que nos conducirían a una sola ecuación lineal de la incógnita respectiva.

Pero, prácticamente, ello no será posible por lo general, por cuanto el desplazamiento, o deformación, virtual del sistema resultante al reem-

plazar el vínculo superfluo por la incógnita a calcular, que será, por lo común, también un sistema hiperestático, no se podrá hallar sin la previa resolución del mismo, análogamente a lo que se dijo en (369), con respecto a la aplicación de la ley de Betti.

Por esta causa, en la mayoría de los casos será indispensable suprimir todos los vínculos superfluos, reemplazándolos por las incógnitas correspondientes, que, conjuntamente con las cargas directamente aplicadas, actuarán sobre el sistema isostático resultante, cuyas deformaciones virtuales será posible determinar. En estos casos se obtendrán no ya ecuaciones con una sola incógnita, sino sistemas de tantas ecuaciones lineales como incógnitas, que habrá que resolver para hallar sus valores.

Aparte del trabajo que implica la resolución de estos sistemas de ecuaciones, ellos no permiten el empleo de los métodos gráficos para la determinación de los desplazamientos debidos a las deformaciones virtuales, pues, como los coeficientes de estas ecuaciones son, por lo general, números que difieren poco entre sí, se requiere, como veremos más adelante, trabajar con gran cantidad de cifras significativas, cinco, ocho o más según los casos, que sólo pueden despreciarse al finalizar el problema, para obtener la solución con un grado de aproximación de sólo dos o tres cifras.

Por estas razones, se trata de evitar los sistemas de ecuaciones lineales aun cuando se requiera suprimir simultáneamente varias incógnitas hiperestáticas, lo que se consigue, empleando los procedimientos que exponemos en la tercera parte de esta obra, mediante una adecuada elección de estas incógnitas.

407. Aplicación del principio de los trabajos virtuales a los sistemas con vínculos unilaterales.— Sabemos que cuando un sistema tiene vínculos unilaterales alguno o algunos de sus desplazamientos virtuales no son reversibles y que para ellos el equilibrio puede subsistir cuando la suma de los trabajos correspondientes sea negativo.

Aclaremos la aplicación del principio de los trabajos virtuales para estos casos, tomando como ejemplo de sistema con vínculos unilaterales el ya dado en (377). Sea (fig. 242 *a*) el punto material A , ligado con un punto fijo O mediante un hilo flexible e inextensible OA . Apliquémosle una fuerza P , que forme un ángulo φ con la dirección OA del hilo y busquemos cuáles son las condiciones a que debe satisfacer esta última para que mantenga el punto A en equilibrio. Démosle al punto un primer desplazamiento virtual $\zeta = AA'$ sobre la circunferencia de radio OA . Como este desplazamiento virtual es reversible, puesto que es posible llevar el punto A a la posición opuesta A'' , deberá ser para que haya

equilibrio, nula la suma de los trabajos virtuales, es decir, dado que la única fuerza que actúa sobre el sistema es la P , deberá verificar que

$$P \zeta \operatorname{sen} \varphi = 0,$$

expresión que, no siendo ni P ni ζ nulas, nos exige que

$$\operatorname{sen} \varphi = 0.$$

Vale decir, pues, que como primera condición de equilibrio se deduce que el ángulo φ sea nulo, o sea, que la fuerza P tenga la misma dirección que el hilo OA .

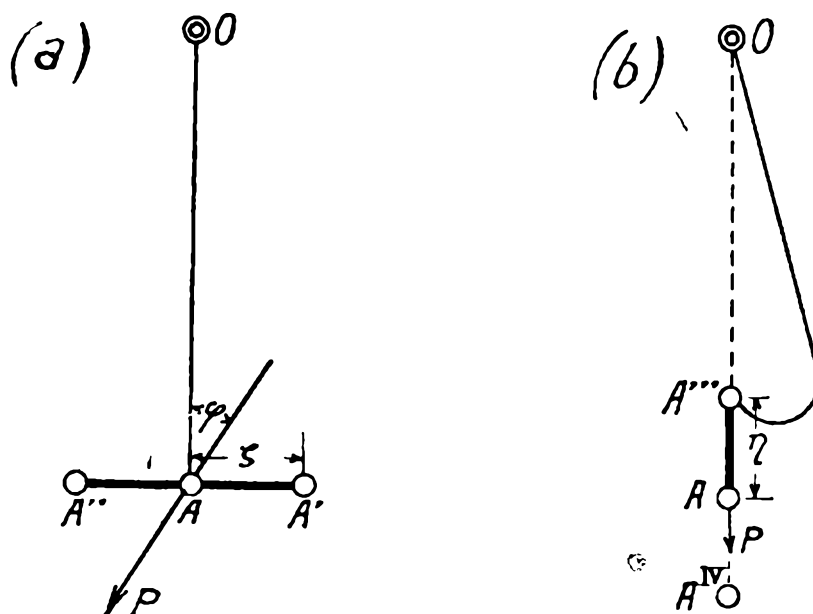


FIG. 242

Pongamos, pues, dicha fuerza P (fig. 242 *b*) según la dirección OA , y demos al punto A un nuevo desplazamiento virtual $\eta = AA'''$, normal a la circunferencia de radio OA , llevándolo a una posición A''' situada dentro del espacio encerrado por la misma. Desde que se trata, ahora, de un desplazamiento irreversible, puesto que la inextensibilidad del hilo no permite llevar el punto A a la posición A'''' opuesta de la A''' , para que haya equilibrio sólo se requerirá que la suma de los trabajos virtuales no sea positiva, es decir, que

$$P \eta \geq 0.$$

Ahora bien, no siendo nulos, ni P ni η , el primer signo no es posible y la anterior se reduce a

$$P \eta < 0,$$

es decir, a establecer que P debe tener signo distinto de η y, como este último está dirigido hacia el interior del círculo, P para que haya equi-

librio debe estarlo hacia el exterior, o sea, debe coincidir con la normal externa al mismo en el punto A .

Por otra parte, como el punto A no tiene más que los dos desplazamientos virtuales independientes a que ha sido sometido, el principio de los trabajos virtuales no nos dará nuevas ecuaciones. Esto nos dice que las condiciones obtenidas son las necesarias y suficientes para el equilibrio, y, por tanto, como ellas nada nos señalan con respecto a la intensidad de la fuerza P , dirigida según la normal exterior a la circunferencia en el punto A , que dicha intensidad puede ser cualquiera.

408. — Ya hemos dicho que los vínculos a que se sujetan los sistemas planos equivalentes a las estructuras constructivas son siempre bilaterales o que, por lo menos, se comportan como tales dentro del campo de variabilidad de las cargas a que están sometidas.

Un apoyo móvil constructivamente se realiza con un carro de rodillos, que sólo impide los desplazamientos normales a su plano de deslizamiento que estén dirigidos hacia la Tierra. Los desplazamientos normales de dirección opuesta, dirigidos de la Tierra hacia el sistema, no quedan físicamente impedidos. En realidad, pues, se trata de un vínculo unilateral. Pero, al variar las fuerzas que actúan sobre la estructura a que pertenece, la resultante de las que se transmiten a dicho carro de rodillos, nunca está dirigida hacia arriba. Algunas de las fuerzas parciales de un sistema de cargas pueden transmitirle fuerzas dirigidas desde la Tierra hacia la estructura constructiva, pero las restantes transmitirán siempre otras, dirigidas en sentido opuesto, que, al componerlas con las anteriores, predominarán. Dentro de este criterio podemos, pues, suponer el apoyo móvil como susceptible de originar reacciones parciales en los dos sentidos, sabiendo que, para las cargas efectivas que actuarán sobre el sistema, la resultante total de las acciones que originan a las mismas, estará dirigida siempre hacia la Tierra. En esta forma consideraremos, como lo hemos venido haciendo, el apoyo móvil como un efectivo vínculo bilateral, lo que podremos efectuar con todo rigor, siempre que se cumplan las limitaciones estipuladas, y entendiendo que, si para un determinado estado efectivo de cargas, es posible una acción sobre el apoyo dirigida desde la Tierra hacia el sistema, los cálculos, efectuados en las hipótesis anteriores, pierden todo valor.

En algunas construcciones, como, por ejemplo, en ciertos tipos de puentes Cantilever, los apoyos móviles deben ser susceptibles de resistir, en ciertas circunstancias, acciones efectivas en sentido opuesto a la Tierra. En estos casos se recurre a dispositivos constructivos especiales para impedir los desplazamientos según dicho sentido y el apoyo móvil resulta, entonces, un vínculo bilateral en toda la acepción de la palabra.

EJERCICIOS DEL CAPITULO V

Resolución de un sistema isostático

Datos. — Se da el sistema isostático de reticulado representado en la lámina IX, que consiste en un arco con tres articulaciones, formado con chapas exagonales rígidas, y las tensiones de cuyas barras no pueden determinarse por los procedimientos directos que proporciona la Estática gráfica. No es posible, en efecto, emplear el método de los nudos (Cremona) por cuanto no existe ninguno al que sólo concurren dos barras; tampoco pueden utilizarse los métodos de Culmann y de Ritter, pues no es factible la realización de ningún corte que afecte solamente a tres barras no concurrentes.

Se pide resolver los siguientes problemas:

1. — *Determinar mediante el principio de los trabajos virtuales, la tensión T_{0-1} , que en la barra 0-1 originan las cargas P_i . ($i = 0, 1, \dots, 8$) representadas en la lámina.*

Suprimida la barra 0-1 y haciendo actuar, en su reemplazo, en los nudos 0 y 1 las dos fuerzas opuestas iguales a la tensión buscada T_{0-1} que le son equivalentes, el sistema resultante, de un grado de libertad, se mantiene en equilibrio bajo la acción de dichas fuerzas incógnitas T_{0-1} y de las cargas P_i . Dando, por tanto, un desplazamiento virtual a este sistema de un grado de libertad y llamando $a_{p,i}$ los desplazamientos que por el mismo corresponden a las fuerzas P_i y δ_{0-1} la variación de distancia entre los nudos 0 y 1, debe tenerse, en virtud del principio de los trabajos virtuales, que

$$T_{0-1} (-\delta_{0-1}) + \sum_{i=0}^8 P_i \cdot a_{p,i} = 0$$

$$T_{0-1} = \frac{1}{\delta_{0-1}} \sum_{i=0}^8 P_i \cdot a_{p,i} \quad [a]$$

Para representar el desplazamiento virtual y calcular, por consiguiente, los desplazamientos $a_{p,i}$ y δ_{0-1} se ha recurrido a un diagrama de Williot-Mohr, comenzando, a los efectos de obtenerlo, por suponer el sistema con la chapa de la derecha fija, con la barra 3-4 empotrada y con el punto A libre. Tomando el punto p como polo, con él deben coincidir los correspondientes a todos los puntos de la chapa de la derecha, y, además, el $3w$. El punto 1 se desplaza en esta hipótesis normalmente a la barra 4-1 y se le ha dado un desplazamiento arbitrario (compatible con los vínculos y de intensidad cualquiera, o virtual) $p1w$ (*).

Trazando por $p \equiv 3w$ una normal a 2-3 y por $1w$ otra a 2-3 se ha obtenido, con su intersección, el punto $2w$, que por ser la primera normal paralela a la $p1w$, ha resultado coincidente con el $1w$. Prosiguiendo en la forma conocida, se han hallado, después, como se ve en la lámina, los restantes puntos del diagrama de Williot-Mohr del desplazamiento del sistema en las condiciones previas de sustentación supuestas.

Para llevarlo, luego, a las efectivas condiciones de sustentación, se requiere, como se sabe, dar al sistema un nuevo desplazamiento considerándolo como formado solamente de sus dos chapas; por otra parte sabemos que dándole uno igual y de sentido contrario al así requerido, los vectores que van de los puntos del Williot correspondiente a este nuevo desplazamiento a los del primitivo, proporcionan los desplazamientos resultantes del sistema vinculado en la forma dada. Los puntos $A'w$ y $B'w$ del nuevo Williot, deben, por tanto, coincidir con Aw y Bw , toda vez que los vectores $A'wAw$ y $B'wBw$, que darían los despla-

mientos resultantes de los puntos A y B , deben ser nulos por las condiciones de sustentación. Hallado el punto Cw , como intersección de las normales $A'wC'w$ y $B'wC'w$ a AC y BC , y construídas sobre $A'wC'w$ y $B'wC'w$, dos figuras semejantes y normales a las chapas respectivamente izquierda y derecha del sistema, se ha completado el nuevo Williot. Los vectores $1'w1w, 2'w2w, \dots, 7'w7w$ dan los desplazamientos

resultantes de los puntos 1, 2, ..., 7 del sistema de un grado de libertad en sus efectivas condiciones de sustentación, durante el desplazamiento virtual considerado. Proyectados estos vectores sobre una vertical (paralela a la dirección común de las fuerzas P_i) se han obtenido, finalmente, los desplazamientos $a_{p,i}$ que

(*) Desplazamiento que, por otra parte, se ha llevado en una escala cualquiera, no determinada, dado que en la [a] pueden reemplazarse los desplazamientos $a_{p,i}$ y δ_{0-1} por las longitudes de los segmentos $a_{p,i}$ (cm) y δ_{0-1} (cm) que, directamente leídos en centímetros, los representan en una escala cualquiera.

leídos directamente en centímetros, se consignan en el cuadro N° 1, en el que, a la vez, se calcula la sumatoria

$$\sum_{i=0}^8 P_i \cdot a_{p,i} \text{ (cm)}.$$

CUADRO N° 1

i	P_i t	$a_{p,i}$ (cm) cm	$P_i \cdot a_{p,i}$ (cm) t cm
0	0,5	0	0
1	1	+ 9,43	+ 9,43
2	1	+ 8,30	+ 8,30
3	1	+ 0,9	+ 0,9
4	1	- 1	- 1
5	1	- 0,66	- 0,66
6	1	- 0,3	- 0,3
7	1	- 0,05	- 0,05
8	0,5	0	0

$$\sum_{i=0}^8 P_i \cdot a_{p,i} \text{ (cm)} = + 16,6 \text{ t cm}$$

En cuanto a la variación de distancia δ_{0-1} (cm), está dada por la proyección del vector $A'w \rightarrow w \equiv Ow \rightarrow w$ sobre la dirección de la barra 0-1 (*) y su signo es negativo, desde que 1 se desplaza hacia abajo con respecto a 0, es decir, se acerca a este último.

Midiendo en la lámina se tiene

$$\delta_{0-1} \text{ (cm)} = - 7,65 \text{ cm},$$

y, sustituyendo en la [a],

$$T_{0-1} = \frac{1}{\delta_{0-1}} \sum_{i=0}^8 P_i \cdot a_{p,i} = \frac{1}{\delta_{0-1} \text{ (cm)}} \sum_{i=0}^8 P_i \cdot a_{p,i} \text{ (cm)} = \frac{16,6 \text{ t cm}}{- 7,65 \text{ cm}} = - 2,18 \text{ t}.$$

2. — Hallar las tensiones que las cargas dadas originan en todas las barras del reticulado.

Calculada la tensión T_{0-1} , como se acaba de efectuar, y las reacciones R_A y R_B que las cargas originan en las articulaciones fijas A y B, como se ha hecho en la lámina, se pueden determinar las tensiones en las restantes barras, por el método de los nudos (**), partiendo del A o del 1, a los que concurren solamente dos barras de tensiones desconocidas. Es lo que se ha efectuado en el diagrama de tensiones representado en la referida lámina.

3. — Hallar la tensión T_{0-1} originada por las cargas P_i , valiéndose sólo de los desplazamientos del primitivo diagrama de Williot-Mohr obtenido en el ejercicio (1) (sin llevar el sistema a las efectivas condiciones de sustentación).

Conocidas las reacciones R_A y R_B , el sistema se puede considerar como una cadena cinemática libre de dos chapas en equilibrio bajo la acción de dichas reacciones y de las cargas P_i ($i = 0, 1, \dots, 8$) directamente aplicadas. Suprimida la barra 0-1, y colocadas en los nudos 0 y 1, en su reemplazo, las dos fuerzas opuestas e incógnitas T_{0-1} , que le son equivalentes, el sistema resultante, de 5 grados de libertad, continuará en equilibrio.

Si en él dejamos fija la chapa de la derecha y la barra 3-4, y damos un desplazamiento cualquiera a la parte restante como el representado por el primitivo diagrama de Williot-Mohr, habremos efectuado uno de los desplazamientos virtuales que corresponden al mismo, desde que es uno de sus desplazamientos posibles.

(*) La variación de distancia se mide directamente por la que acusa el primitivo Williot, dado que en el desplazamiento representado por el segundo Williot se supone toda la parte de la izquierda como una sola chapa rígida y, por tanto, no se altera la distancia entre los puntos 0 y 1.

(**) No propiamente por un Cremona, pues el sistema no tiene figura recíproca.

Las únicas fuerzas cuyos puntos de aplicación experimentan desplazamientos durante este desplazamiento virtual, son las R_A , T_{0-1} y P_i , ($i = 0, 1, 2$). Llamando, por consiguiente, respectivamente, $a_{r,a}$, δ_{0-1} y $a'_{p,i}$ ($i = 0, 1, 2$) los desplazamientos correspondientes, que se determinan en la lámina, debe tenerse, en virtud del principio de los trabajos virtuales, que

$$T_{0-1} (-\delta_{0-1}) + R_A a_{r,a} + \sum_{i=0}^2 P_i \cdot a'_{p,i} = 0$$

$$T_{0-1} = \frac{R_A \cdot a_{r,a} + \sum_{i=0}^2 P_i \cdot a'_{p,i}}{\delta_{0-1}}$$

En el cuadro N° 2 se consignan los valores de $a'_{p,i}$ (cm) tomados de la lámina, y se calcula la sumatoria

$$\sum_{i=0}^2 P_i a'_{p,i} \text{ (cm).}$$

CUADRO N° 2

i	P_i t.	$a'_{p,i}$ (cm.) cm.	$P_i \cdot a'_{p,i}$ (cm.) t. cm.
0	0,5	- 4,10	- 2,05
1	1	+ 5,70	+ 5,70
2	1	+ 5,70	+ 5,70

$$\sum_{i=0}^2 P_i a'_{p,i} \text{ (cm)} = + 9,35 \text{ t cm}$$

De la lámina se obtiene, además, que

$$a_{r,a} \text{ (cm)} = - 1,8 \text{ cm.}$$

Recordando, finalmente, el valor de δ_{0-1} (cm), obtenido al resolver el problema (1), sustituyendo en la anterior y observando que los resultados no alteran si en lugar de los efectivos desplazamientos se introducen los valores en centímetros de los segmentos que los representan en el dibujo, se tiene

$$T_{0-1} = \frac{- 4,31 \text{ t} \times (- 1,8 \text{ cm}) + 9,35 \text{ t cm}}{- 7,65 \text{ cm}} = - 2,23 \text{ t.}$$

resultado, igual, dentro del grado de aproximación de los cálculos gráficos efectuados, al obtenido en (1).

RESOLUCION ESTATICA DE SISTEMAS PLANOS

— PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES —

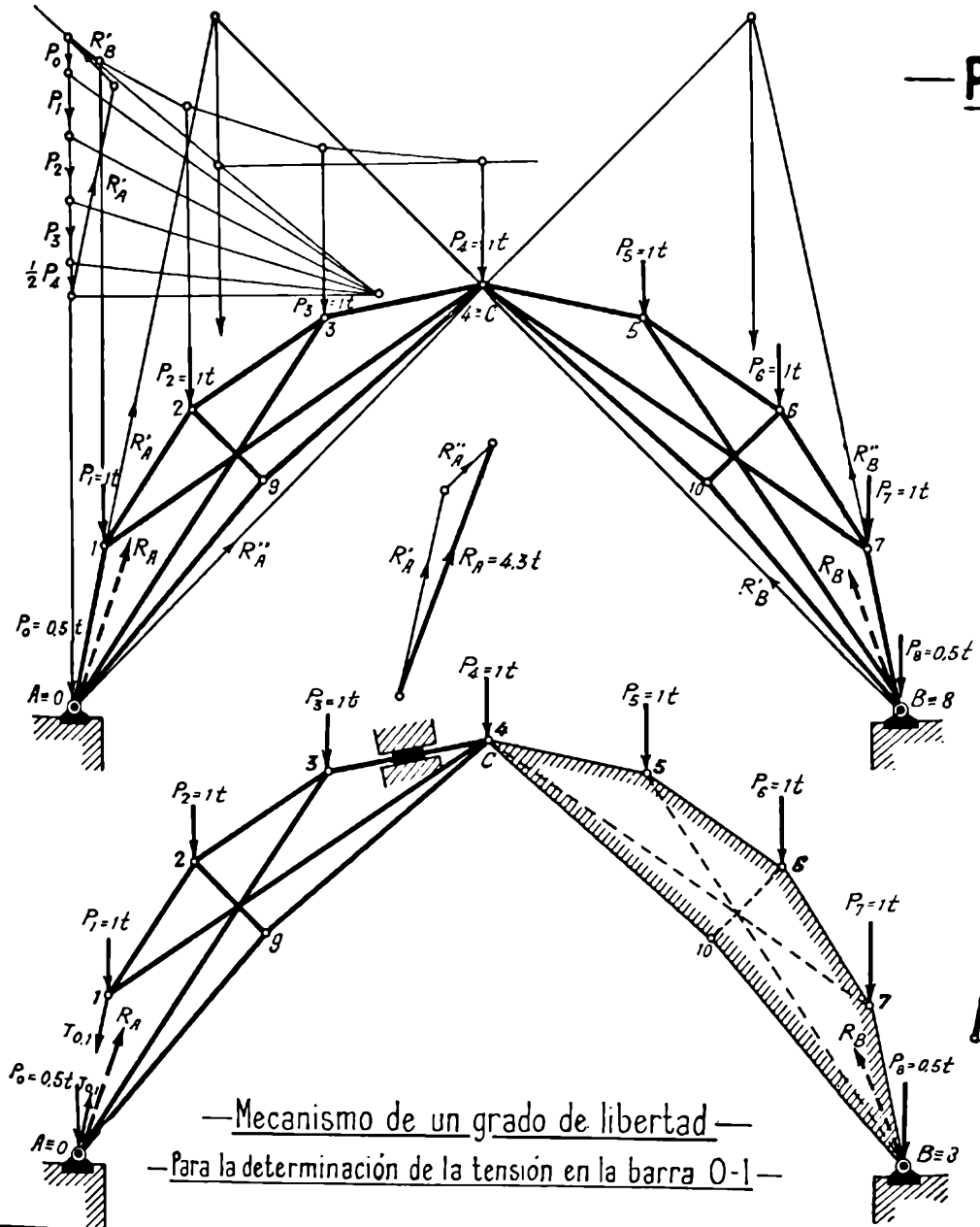
— RESOLUCION DE UN SISTEMA ISOSTATICO —

Escala $\frac{2\text{ m}}{\text{cm}}$

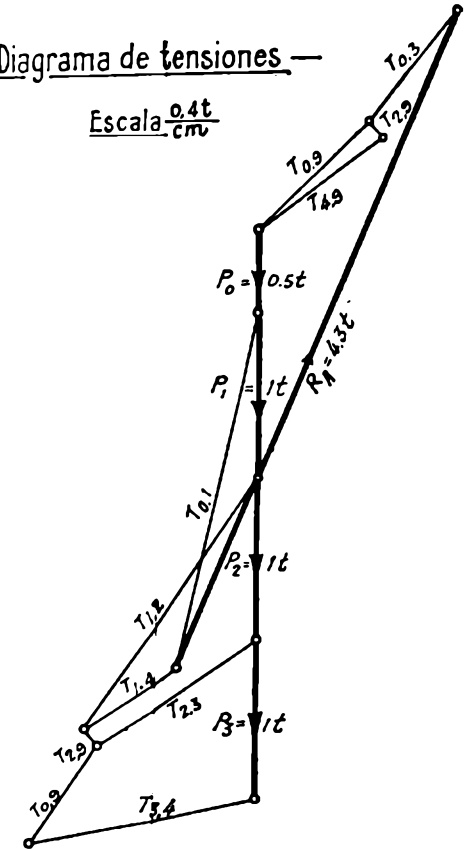
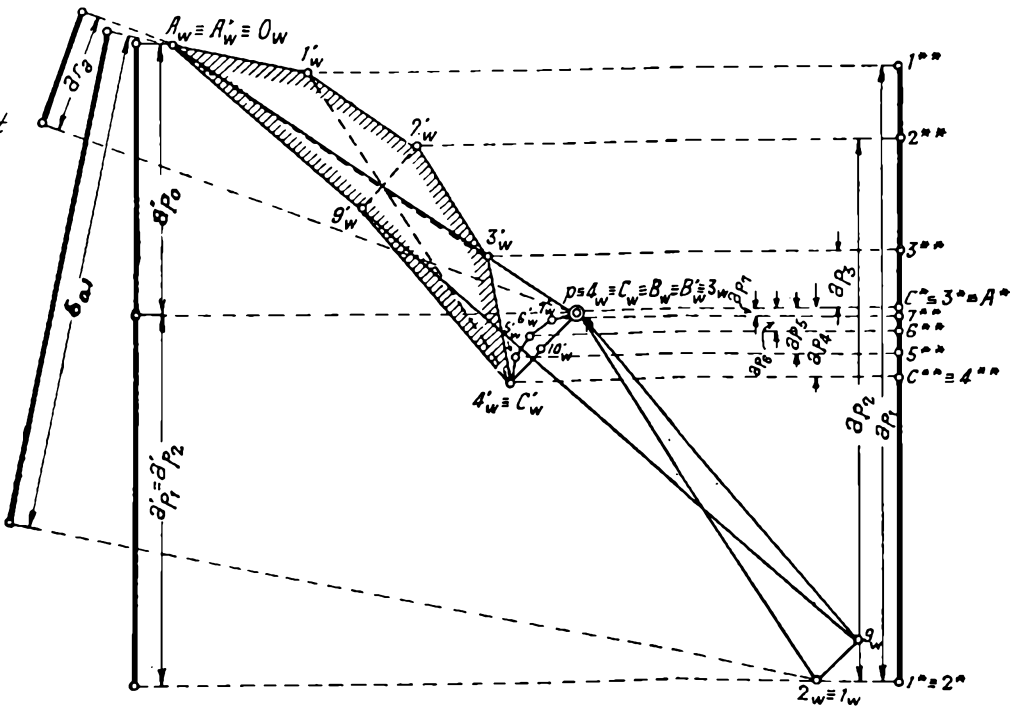
— Diagrama de tensiones —

Escala $\frac{0.4\text{ t}}{\text{cm}}$

— Diagrama de Williot-Mohr —



— Mecanismo de un grado de libertad —
— Para la determinación de la tensión en la barra 0-1 —



CAPITULO VI

TRABAJO INTERNO DE DEFORMACION

§ 1. — Expresión del trabajo interno de deformación

409. Definiciones.— Si sobre un sistema cualquiera, isostático o hiperestático, se aplica gradualmente, desde cero hasta su valor final, un conjunto de m cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, m$), éstas desarrollarán, en virtud de la ley de Clapeyron y según hemos visto en (356), antes de llegar a una nueva posición de equilibrio, un trabajo de deformación dado por la expresión

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m P_p a_p, \quad [a]$$

en la que a_p representa los desplazamientos que durante dicha deformación corresponden a las fuerzas P_p . Este trabajo, desarrollado por las cargas directamente aplicadas, se acumulará en el sistema íntegramente en forma de energía potencial interna, y será devuelto, como sabemos, en su totalidad, al suprimir, también lenta y gradualmente dichas cargas P_p .

La expresión anterior da el trabajo de deformación en función de las cargas exteriores, que hemos llamado *trabajo externo de deformación*. Vamos a buscar, ahora, otras expresiones que nos proporcionen la misma cantidad para los diversos sistemas, en función de las tensiones internas originadas por dichas cargas exteriores, expresiones que nos darán lo que llamaremos *trabajo interno de deformación*, o *energía potencial del sistema*.

410. Trabajo interno de deformación de las cadenas de eslabones finitos de primera especie.— Sea un sistema isostático o hiperestático constituido por una o varias cadenas elásticas de eslabones finitos, vinculadas entre sí, que en conjunto tengan n uniones elásticas i ($i = 1, 2, \dots, n$) de masas ρ_i y coeficientes de traslación ϵ_i y γ_i . Sometámoslo en forma lenta y gradual a la acción de m cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, m$)

y sean \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i y \mathcal{T}_i las características correspondientes a la unión genérica i , que son las componentes, como sabemos, de la resultante R_i de las fuerzas exteriores que quedan a su derecha. Al actuar las cargas, y, por tanto, las características, en la forma gradual supuesta, se originarán desplazamientos relativos, en torno a cada una de las uniones i , de los eslabones s_i y s_{i+1} (fig. 243 a) que ligan, efectuados los cuales, el sistema entrará en una nueva posición de equilibrio, lo que hemos interpretado, en (184), diciendo que estas uniones elásticas se comportaban, mediante dichos desplazamientos relativos, como si originaran fuerzas $-\mathcal{M}_i$, $-\mathcal{N}_i$ y $-\mathcal{T}_i$, directamente opuestas a las características y que equilibran sus efectos, fuerzas que llamaremos *tensiones internas en las uniones i* .

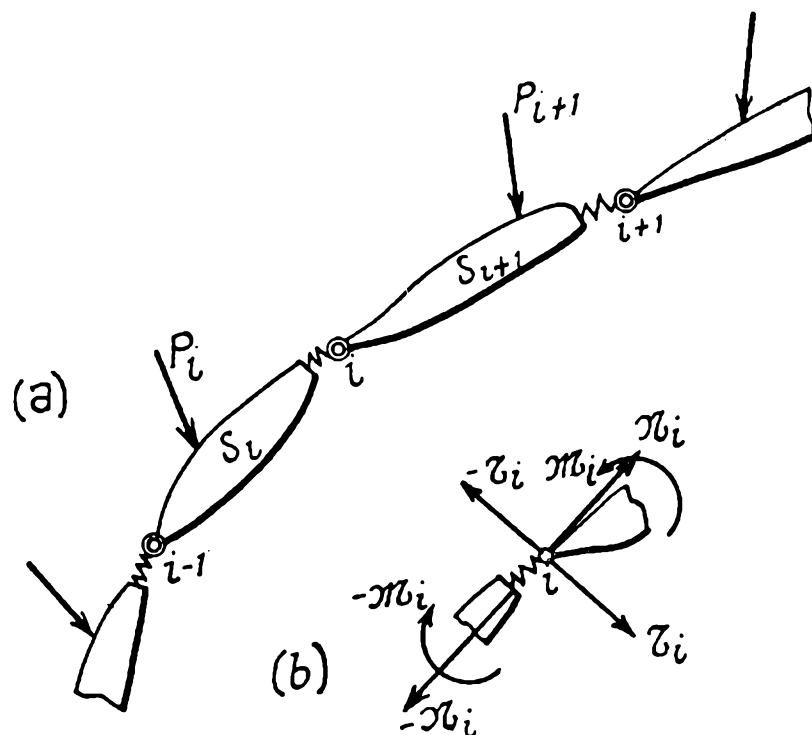


FIG. 243

Supuestos cortados los eslabones s_i y s_{i+1} (fig. 243 b) que están ligados por una unión i cualquiera, y aplicadas en este último las características y en aquél las tensiones directamente opuestas, la unión elástica se mantendrá en las mismas condiciones de equilibrio que en el sistema dado. Estando en equilibrio todas las fuerzas que actúan en torno a cada una de las uniones elásticas hechas en esta forma independientes, no originarán ningún trabajo en cualquier desplazamiento rígido del conjunto. El trabajo de las características y de las tensiones internas se reducirá, pues, al debido a los desplazamientos relativos de los eslabones s_i y s_{i+1} , que sabemos que consisten en una rotación

$$\theta_i = \mathcal{M}_i \cdot \rho_i$$

aplicada en la unión i , y en dos traslaciones

$$n_i = \mathcal{N}_i \cdot \varepsilon$$

y

$$c_i = \mathcal{T}_i \cdot \gamma_i,$$

según las direcciones respectivamente de los esfuerzos normal \mathcal{N}_i y tangencial \mathcal{T}_i .

En virtud de la rotación relativa θ_i de la chapa s_{i+1} con respecto a s_i , el par de cuplas opuestas $\mathcal{M}_i, -\mathcal{M}_i$, desarrollará desde que ellas actúan gradualmente desde cero hasta su valor final, un trabajo igual a

$$\frac{1}{2} \mathcal{M}_i \cdot \theta_i;$$

análogamente, por las traslaciones relativas n_i y c_i los pares de fuerzas opuestas \mathcal{N}_i y \mathcal{T}_i originarán trabajos, respectivamente iguales a

$$\frac{1}{2} \mathcal{N}_i \cdot n_i$$

y

$$\frac{1}{2} \mathcal{T}_i \cdot c_i,$$

y el trabajo total desarrollado por las tensiones internas en torno a la unión i será

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \left(\mathcal{M}_i \theta_i + \mathcal{N}_i n_i + \mathcal{T}_i c_i \right).$$

o, recordando los valores de θ_i , n_i y c_i dados anteriormente,

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \left(\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma_i \right)$$

Sumando las expresiones análogas para todas las uniones i ($i = 1, 2, \dots, n$) obtendremos el trabajo total Φ desarrollado por las tensiones internas que buscamos, o trabajo interno de deformación, que, por ser el trabajo acumulado en forma de energía potencial en el interior del sistema, resultará igual, además, al trabajo de las fuerzas exteriores dado por la [a] de (409) es decir, se tendrá

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m P_p a_p. \quad [a]$$

411. Trabajo interno de deformación de las cadenas elásticas de eslabones infinitésimos.— Sea un sistema de alma llena, isostático o hiperestático, cuya fibra media, momento de inercia, I , área de la sección transversal, Ω , así como las características, \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} , sean susceptibles de representarse por las siguientes funciones continuas y regulares de la variable z :

$$y = f(z); \quad I = I(z); \quad \Omega = \Omega(z);$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(z); \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(z); \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(z),$$

es decir, sea un sistema de alma llena representable por una cadena elástica de eslabones infinitésimos.

Si tomamos una cualquiera de las cadenas de eslabones finitos, de n uniones $i(\rho_i, \varepsilon_i, \gamma_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), equivalentes a dicho sistema, el trabajo de deformación de la misma, según lo establecido en el número anterior y dentro del grado de aproximación que resulte de la longitud Δs_i de los elementos considerados, será

$$\Phi' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma_i \right).$$

Haciendo tender a cero la longitud de dichos elementos, en el límite se tendrá que el valor exacto del trabajo en cuestión, está dado por la expresión:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mathcal{M}^2 \rho' ds + \mathcal{N}^2 \varepsilon' ds + \mathcal{T}^2 \gamma' ds \right), \quad [a]$$

siendo l la longitud de la fibra media del sistema, \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} las características en un punto cualquiera de abscisa z , dadas por las funciones anteriores y ρ' , ε' y γ' , respectivamente, la masa elástica y los coeficientes de traslación normal y tangencial por unidad de longitud de fibra media, o específico, dados como se recordará, por las funciones

$$\rho' = \rho'(z) = \frac{1}{EI(z)},$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'(z) = \frac{1}{E\Omega(z)}$$

y

$$\gamma' = \gamma'(z) = \chi \frac{1}{G\Omega(z)}.$$

Sustituyendo, la [a] nos da, pues, como expresión del trabajo interno de deformación de las cadenas elásticas de eslabones infinitésimos, la siguiente:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}^2(z)}{EI(z)} + \frac{\mathcal{N}^2(z)}{E\Omega(z)} + \chi \frac{\mathcal{T}^2(z)}{G\Omega(z)} \right) ds. \quad [b]$$

412. — El establecimiento de la anterior expresión parte de la hipótesis de que tanto la fibra media, como las cantidades I , Ω , \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} sean susceptibles de expresarse por funciones continuas de la variable z y regulares en toda la longitud l de la fibra media del sistema de alma llena considerado. Si ello no sucede en todo el sistema, pero éste puede dividirse en partes en que se verifique, dicha expresión será aplicable a cada una de éstas, dándonos el trabajo de deformación correspondiente, y el trabajo total del sistema será la suma de los así obtenidos. Es decir, si un sistema de alma llena es susceptible de dividirse en n partes de longitud de fibra media l_i ($i = 1, 2, \dots, n$), para cada una de las cuales existan las funciones continuas y regulares

$$\begin{aligned} y &= f_i(z), & I_i &= I_i(z), & \Omega_i &= \Omega_i(z), \\ \mathcal{M}_i &= \mathcal{M}_i(z) & \mathcal{N}_i &= \mathcal{N}_i(z) & \text{y} & \mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i(z), \\ & & & & & (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

se tendrá, para una cualquiera i de ellas, como expresión del trabajo respectivo de deformación,

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\mathcal{M}_i^2 \rho'_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon'_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma'_i \right) ds_i,$$

siendo

$$\begin{aligned} \rho'_i &= \rho'_i(z) = \frac{1}{EI_i(z)}, \\ \varepsilon'_i &= \varepsilon'_i(z) = \frac{1}{E\Omega_i(z)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

y

$$\gamma'_i = \gamma'_i(z) = \chi \frac{1}{G\Omega_i(z)},$$

la masa elástica y coeficientes de traslación específicos correspondientes.

Y el trabajo total del sistema será, por tanto,

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left(\mathcal{M}_i^2 \rho'_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon'_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma'_i \right) ds_i.$$

413. Trabajo interno de deformación de los sistemas cualesquiera de reticulado. — Sea un sistema cualquiera de reticulado, isostático o hiperestático, sujeto a un conjunto de cargas P_p , que originarán en sus n barras i , tensiones internas T_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Si suponemos desarticuladas las barras i en sus extremos y aplicado en los mismos el par de fuerzas opuestas que constituye la tensión T_i respectiva, el equilibrio subsistirá. El trabajo de una cualquiera de estas tensiones internas es nulo en un desplazamiento rígido de la barra y sólo depende del alargamiento de la misma.

Si s_i y Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son respectivamente la longitud y el área de la sección de la barra genérica i , el alargamiento experimentado bajo la acción de la tensión T_i , será

$$\Delta s_i = \frac{T_i s_i}{E \Omega_i},$$

o, siendo

$$\varepsilon_i = \frac{s_i}{E \Omega_i}$$

el *coeficiente de alargamiento* de la barra,

$$\Delta s_i = T_i \varepsilon_i.$$

Como el par de fuerzas T_i aplicadas en el extremo de la barra, crece lenta y gradualmente desde cero hasta su valor final, por actuar en igual forma las cargas que lo producen, el trabajo del mismo durante el alargamiento Δs_i será (*)

$$\Phi_i = \frac{1}{2} T_i \Delta s_i = \frac{1}{2} T_i^2 \varepsilon_i,$$

y el trabajo total para las n barras del reticulado, o sea, el trabajo interno de deformación del sistema considerado, estará dado, por consiguiente, por la expresión

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i^2 \varepsilon_i.$$

414. Trabajo interno de deformación de las cadenas de segunda especie. — Si se trata de un sistema de triangulado simple, la forma más ventajosa, por lo general, para obtener su trabajo interno de deforma-

(*) El trabajo de la tensión no va en este caso afectado del signo negativo de que se habló en (352), puesto que en él no se consideran las reacciones que la barra transmite al reticulado, sino, a la inversa, las acciones, de sentido contrario, que este último transmite a aquélla.

ción, será la que acabamos de dar para los sistemas reticulados cualesquiera. Pero, en algunos casos convendrá considerar la cadena elástica de segunda especie a que es equivalente el triangulado. Si esta cadena elástica tiene $n + 1$ uniones i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$) y llamamos s_i , Ω_i y T_i , respectivamente las longitudes, las áreas de las secciones transversales y las tensiones de las barras de diagonal anteriores a los nudos i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$), que la constituyen, y si, además, designamos por $s_{o,i}$, $\Omega_{o,i}$ y $T_{o,i}$ los mismos elementos de las n barras de cordón opuestas a dichos nudos, la expresión [a] del número anterior, podrá escribirse

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_{o,i}^2 \varepsilon_{o,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} T_i^2 \varepsilon_i,$$

siendo

$$\varepsilon_{o,i} = \frac{s_{o,i}}{E \Omega_{o,i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

y

$$\varepsilon_i = \frac{s_i}{E \Omega_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1),$$

los coeficientes de alargamiento de las barras de cordón y de diagonal.

Ahora bien, si $t_{o,i}$ es la distancia entre el nudo i y barra de cordón opuesta $s_{o,i}$, y \mathcal{M}_i el momento flector en el nudo i , se tiene según sabemos,

$$T_{o,i} = \frac{\mathcal{M}_i}{t_{o,i}},$$

y sustituyendo este valor y el de $\varepsilon_{o,i}$ en la anterior, resulta

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{M}_i^2 \cdot s_{o,i}}{E \Omega_{o,i} t_{o,i}^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} T_i^2 \varepsilon_i. \quad [a]$$

Recordemos, ahora, que, según lo establecido en (194), la masa elástica de la cadena de segunda especie en la unión i es

$$\varphi_i = \frac{s_{o,i}}{E \Omega_{o,i} t_{o,i}^2},$$

y que, de acuerdo con (202), en valor absoluto, el esfuerzo normal en la misma \mathcal{N}_i es igual a T_i , es decir, que

$$|\mathcal{N}_i| = |T_i|$$

$$\mathcal{N}_i^2 = T_i^2.$$

Substituyendo, finalmente, en la $[a]$, se obtiene la siguiente expresión del trabajo interno de deformación de las cadenas elásticas de segunda especie

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i^2 \rho_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{N}_i^2 \varepsilon_i,$$

o, más sencillamente, considerando que la unión $n+1$, extremo derecho de la cadena, tenga una masa elástica $\rho_{n+1} = 0$,

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \left(\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon_i \right).$$

415. Trabajo interno de deformación de los sistemas generales. — Consideremos, finalmente, un sistema general constituido por barras, chapas de reticulado y chapas de alma llena, vinculadas entre sí y con la Tierra en forma cualquiera. Formemos las cadenas elásticas de eslabones finitos equivalentes a las chapas de alma llena y supongamos que en total resulten n uniones i ($\rho_i, \varepsilon_i, \gamma_i$) ($i = 1, 2, \dots, n$); supongamos, además, que entre las barras de las chapas de reticulado y las barras de unión, que designaremos en general por k , exista un total de n' , con coeficientes de alargamiento ε_k ($k = 1, 2, \dots, n'$).

El trabajo interno de deformación total de las cadenas elásticas, que reemplazan a las chapas de alma llena, será igual a

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma_i \right),$$

y el desarrollado por todas las barras,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n'} T_k^2 \varepsilon_k.$$

Por consiguiente, el trabajo total del sistema dado resultará

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n'} T_k^2 \varepsilon_k$$

416. — Si las chapas de alma llena del sistema anterior fueran susceptibles de considerarse como cadenas elásticas de eslabones infinitesimos, o, por lo menos, pudieran dividirse en partes que así lo fueran, y si en total resultaran n partes de cadena, o cadenas, de longitudes de fibra.

media l_i y masas elásticas y coeficientes de traslación específicos ρ'_i , ε'_i y γ'_i ($i = 1, 2, \dots, n$), el trabajo total interno de deformación sería.

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left(\mathcal{M}_i^2 \rho'_i + \mathcal{N}_i^2 \varepsilon'_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma'_i \right) ds_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n'} T_k^2 \varepsilon_k.$$

417. Observación.— En la mayoría de los casos prácticos los trabajos de deformación originados por los esfuerzos normales y tangenciales en los sistemas de alma llena, o cadenas de eslabones finitos o infinitésimos equivalentes, son muy pequeños en comparación a los debidos a los momentos flectores, y pueden considerarse, dentro del grado de aproximación de los cálculos, como infinitamente pequeños despreciables.

En estos casos, en los que equivale a suponer que los coeficientes de traslación sean nulos, las expresiones anteriormente obtenidas para los sistemas de alma llena se simplifican notablemente, desapareciendo todos los términos en que entran estos coeficientes de traslación.

§ 2. — Principio de Menabrea-Castigliano o del trabajo mínimo de deformación

418. Consideraciones generales sobre el trabajo de deformación. —

Las expresiones que acabamos de hallar para el trabajo interno de deformación, dan su valor Φ en función de las características \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} en las uniones elásticas de las cadenas provenientes de sistemas de alma llena o de las tensiones T en las barras de los sistemas de reticulado. Siendo, por otra parte, tanto aquellas características como estas tensiones, funciones lineales de las fuerzas exteriores del sistema hecho isostático y libre, es decir, de las cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, m$) directamente aplicadas, de las reacciones hiperestáticas de vínculo interno y externo, X'_i ($i = 1, 2, \dots, G$) y de las reacciones isostáticas de sustentación, R_j ($j = 1, 2, \dots, n'$), dicho trabajo de deformación resultará por consiguiente una función de estas fuerzas, es decir, podrá escribirse

$$\Phi = \Phi_1 (P_p, X'_i, R_j).$$

Pero, para un conjunto cualquiera de cargas P_p , los valores de las incógnitas hiperestáticas X'_i y de las reacciones isostáticas R_j están perfectamente determinados, o sea, estas incógnitas y reacciones son, a su vez, funciones de las cargas P_p , que constituyen, en la expresión anterior, las únicas variables independientes. Reemplazándolas, pues, por sus valores en función de P_p , la expresión anterior tomará la forma

$$\Phi = \Phi_2 (P_p).$$

Supongamos, ahora, dado un sistema cualquiera hiperestático de grado G , sometido a un conjunto de cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, m$), al que corresponderá un determinado trabajo de deformación. Si suprimimos un número cualquiera G' de vínculos superabundantes, reemplazándolos por las incógnitas hiperestáticas X'_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) respectivas, nos quedará un sistema hiperestático de grado $G - G'$ (isostático cuando $G' = G$) sujeto a las cargas P_p y a las incógnitas X'_i . Si damos, ahora, a estas fuerzas incógnitas puestas en evidencia valores cualesquiera X_i , distintos de los que corresponden a las efectivas reacciones X'_i , el trabajo de deformación del sistema resultante, será una función de las cargas P_p y de estas fuerzas X_i toda vez que las reacciones hiperestáticas restantes $X'_{G'+1}, X'_{G'+2}, \dots, X'_{G'}$, así como las reacciones R_j isostáticas de vínculo externo, son, a su vez, funciones de dichas mismas fuerzas. En este caso, pues, podremos poner

$$\Phi = \Phi (P_p, X_i) \quad \begin{cases} p = 1, 2, \dots, m \\ i = 1, 2, \dots, G' \end{cases} \quad [a]$$

y, para un dado sistema de cargas, siendo invariables las P_p , más simplemente

$$\Phi = \Phi (X_i) \quad (i = 1, 2, \dots, G') \quad [b]$$

La función anterior no dará el trabajo de deformación que en el sistema considerado originan las cargas P_p , sino trabajos hipotéticos del sistema hiperestático resultante al suprimir los G' vínculos superfluos (o isostático si $G' = G$), originados por dichas cargas y valores cualesquiera atribuidos a las fuerzas X_i ($i = 1, 2, \dots, G'$), trabajos que no corresponderán, en general, a deformaciones compatibles con las condiciones de vínculo del sistema primitivo. Entre los G' infinitos conjuntos de valores atribuibles a las fuerzas X_i , solamente el concordante con las efectivas reacciones hiperestáticas $X_i = X'_i$ ($i = 1, 2, \dots, G'$) dará el trabajo de la deformación del sistema primitivo correspondiente a sus verdaderas condiciones de vínculo.

Con este nuevo criterio podremos considerar, pues, para un dado sistema de cargas P_p , a Φ como una función de las fuerzas X_i , entendiéndose, repetimos, que deja entonces de representar el efectivo trabajo de deformación del sistema dado, sino trabajos de deformaciones no compatibles con sus condiciones de vínculo, originados, en el sistema resultante al suprimir los G' vínculos superfluos, por dichas cargas y por conjuntos cualesquiera de valores X_i atribuibles a reacciones hiperestáticas correspondientes, que lo mantengan en equilibrio.

419. Demostración del principio de Menabrea-Castigliano.— Sentado lo anterior, consideremos un sistema cualquiera hiperestático de grado G , sujeto a un conjunto de m cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, m$). Suprimamos un número cualquiera G' o la totalidad, de sus vínculos superfluos y apliquemos, en correspondencia de las reacciones respectivas, fuerzas X_i ($i = 1, 2, \dots, G'$) de valores variables cualesquiera, que conjuntamente con las cargas P_p , originarán en el sistema hiperestático de grado $G - G'$ resultante, deformaciones no compatibles con las condiciones de vínculo del sistema primitivo, a las cuales corresponderán trabajos internos Φ dados, según el número anterior, por la función

$$\Phi = \Phi (P_p, X_i) \quad \begin{cases} (p = 1, 2, \dots, m) \\ (i = 1, 2, \dots, G') \end{cases}$$

Suponiendo el sistema así formado en equilibrio bajo la acción de las cargas P_p y de un conjunto arbitrario de fuerzas X_i , demos a una cualquiera de éstas, la X_j , un incremento ΔX_j , y calculemos el incremento $\Delta \Phi_j$, que corresponde a la función anterior, es decir, el incremento correspondiente del trabajo de deformación. Los puntos de aplicación de las fuerzas P_p y X_i , bajo la acción de la ΔX_j agregada, experimentarán desplazamientos, cuyas proyecciones sobre las mismas designaremos, respectivamente, $\Delta a_{p,j}$ y $\Delta a_{i,j}$, y como dichas fuerzas ya actúan con toda su intensidad al aplicar la ΔX_j , el trabajo desarrollado por ellas será igual a

$$\sum_{i=1}^{G'} X_i \Delta a_{i,j} + \sum_{p=1}^m P_p \Delta a_{p,j}.$$

A su vez, la fuerza ΔX_j , que se supone aplicada gradualmente desde cero hasta su valor definitivo, origina un trabajo igual a

$$\frac{1}{2} \Delta X_j \Delta a_{j,j},$$

siendo, de acuerdo con lo anterior, $\Delta a_{j,j}$ la proyección sobre su dirección del desplazamiento experimentado por su punto de aplicación.

El trabajo total desarrollado por la fuerza ΔX_j , o, lo que es lo mismo, el incremento buscado $\Delta \Phi_j$ de la función Φ , originado por ella, será igual a la suma de los anteriormente obtenidos, es decir,

$$\Delta \Phi_j = \sum_{i=1}^{G'} X_i \Delta a_{i,j} + \sum_{p=1}^m P_p \Delta a_{p,j} + \frac{1}{2} \Delta X_j \Delta a_{j,j}. \quad [a]$$

Pero si los valores X_i son iguales a los X'_i de las efectivas incógnitas hiperestáticas del sistema dado, o sea, son los compatibles con las condi-

ciones de vínculo de este último, debe tenerse, en virtud de la ley de Betti, que

$$\sum_{i=1}^{G'} X'_i \cdot \Delta a_{i,j} + \sum_{p=1}^m P_p \cdot \Delta a_{p,j} = 0, \quad [b]$$

puesto que dicha expresión no da otra cosa que la suma de los productos escalares de las fuerzas exteriores X'_i y P_p por los desplazamientos $\Delta a_{i,j}$ y $\Delta a_{p,j}$, originados en la deformación debida al estado arbitrario de cargas $X_j = U_j = \Delta X_j$.

Por otra parte, $\Delta a_{j,j}$, desplazamiento según la dirección de la fuerza ΔX_j , originado por la misma, es, en virtud del principio de la superposición de los pequeños efectos, proporcional a su intensidad y, además, de su propio sentido, es decir, que podemos poner

$$\Delta a_{j,j} = \alpha \Delta X_j,$$

siendo α una constante positiva.

Se tiene, por consiguiente que

$$\frac{1}{2} \Delta X_j \Delta a_{j,j} = \frac{1}{2} \alpha \Delta X_j^2. \quad [c]$$

Sustituyendo los valores de las [b] y [c] en la [a], resulta que para el conjunto de valores $X_i = X'_i$ ($i = 1, 2, \dots, G'$), que corresponde a la deformación compatible con los vínculos, se tiene

$$\left(\Delta \Phi_j \right)_{X_i = X'_i} = \frac{1}{2} \alpha \Delta X_j^2$$

$$\left(\frac{\Delta \Phi_j}{\Delta X_j} \right)_{X_i = X'_i} = \frac{1}{2} \alpha \Delta X_j.$$

Haciendo tender ΔX_j a cero y tomando límites, resulta, finalmente,

$$\lim_{\Delta X_j \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Phi_j}{\Delta X_j} \right)_{X_i = X'_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right)_{X_i = X'_i} = \lim_{\Delta X_j \rightarrow 0} \alpha \Delta X_j = 0.$$

Como al mismo resultado hubiéramos llegado incrementando cualquiera otra incógnita X_j , resulta que para los valores $X_i = X'_i$ correspondientes con la deformación compatible con los vínculos, o sea, para los valores de las efectivas incógnitas hiperestáticas, las derivadas parciales de la función Φ con respecto a las variables X_i , son nulas, es decir, que

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right)_{X_i = X'_i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, G').$$

Siendo nulas las derivadas parciales para dichos valores de las variables X_i , es posible que la función Φ pase, para los mismos, por un máximo o un mínimo. Es fácil ver que, efectivamente, pasa por un mínimo. En efecto, el incremento de la función Φ dado por la $[a]$, está formado, en el caso de ser ΔX_j un incremento infinitésimo, por una parte constituida por las sumatorias de los primeros términos que es un infinitamente pequeño del primer orden, seguida de una segunda parte,

$$\frac{1}{2} \Delta X_j \cdot \Delta a_{j,j},$$

infinitamente pequeña de segundo orden, y que da, por tanto, el incremento segundo de dicha función, correspondiente al incremento de la variable X_j . Ahora bien, este incremento segundo es esencialmente positivo, cualquiera que sea el signo de ΔX_j , por ser el producto de dicha fuerza por el desplazamiento $\Delta a_{j,j}$ que ella misma origina según su propia dirección, desplazamiento que debe tener siempre su mismo sentido, lo que, por otra parte, ya hemos establecido anteriormente al sentar que la constante α de la $[c]$ era siempre positiva. Al incrementar una cualquiera de las variables X_j , el incremento segundo de la función Φ es, pues, positivo; al incrementar todas las variables X_j , el incremento segundo total de la función, suma de los incrementos positivos debidos a cada una de las variables, será también positivo, y la función pasa, por tanto, por un mínimo, como decíamos.

Queda con esto demostrado el *principio de Menabrea-Castigliano*, o del *trabajo mínimo de deformación*, que dice:

Si en un sistema hiperestático se suprimen un número cualquiera (o la totalidad) de los vínculos superfluos, entre los infinitos valores de las reacciones respectivas que en el sistema hiperestático (o isostático) resultante equilibran a las cargas, corresponden a las incógnitas hiperestáticas y a la deformación compatibles con los vínculos suprimidos, los que hacen pasar por un mínimo la función Φ ; este valor mínimo de dicha función constituye el efectivo trabajo de deformación del sistema dado.

Generalmente, por brevedad, se acostumbra enunciar este principio diciendo que:

*Los valores de las incógnitas hiperestáticas de un sistema elástico sujeto a un conjunto cualquiera de cargas, son los que corresponden a un *mínimum del trabajo de deformación*.*

Esta forma de expresión ha originado, como hace notar Colonnetti (*), las más extrañas controversias, debidas a la impropiedad que implica el

(*) Véase G. COLONNETTI, *Principi di statica dei solidi elastici*; pág. 222 y siguientes.

suponer, como ella hace, el trabajo de deformación como una función susceptible de tener un mínimo, siendo así, según ya lo hemos establecido, que, para un sistema dado de cargas exteriores, tiene un valor único, perfectamente determinado.

420. — Como para la demostración anterior se ha supuesto que el sistema está cargado con las cargas concentradas P_p , podría suponerse que el principio demostrado no es aplicable cuando actúen cargas continuas. Es fácil ver, sin embargo, que también es extensible a este caso.

Supongamos que sobre una curva continua y regular, trazada sobre el sistema, de longitud l_k y de ecuación

$$y = \varphi_k(z)$$

actúe una carga continua p_k , cuya dirección pueda variar de punto a punto y cuya intensidad esté dada por la función

$$p_k = p_k(z),$$

también continua y regular de la variable z .

En un elemento ds_k de la curva en cuestión actuará una fuerza elemental $p_k \cdot ds_k$, y si $\Delta a_{k,j}$ es el desplazamiento según la misma originado por la fuerza ΔX_j , aplicada en la demostración anterior a los efectos de calcular el incremento $\Delta \Phi_j$, correspondiente del trabajo de deformación, el trabajo desarrollado por dicha fuerza elemental será

$$p_k \cdot \Delta a_{k,j} ds_k,$$

y el total de la carga continua que actúa sobre el trozo de curva de longitud l_k ,

$$\int_0^{l_k} p_k \cdot \Delta a_{k,j} \cdot ds_k,$$

entendiéndose que los valores de $\Delta a_{k,j}$, a lo largo de la curva considerada, están a su vez, dados por una función continua y regular de la variable z .

Según esto, si además de las cargas P_p , actúan en el sistema tratado en el número anterior, n cargas continuas

$$p_k = p_k(z)$$

sobre curvas

$$y = \varphi_k(z)$$

de longitudes l_k , la expresión [a] de dicho número, que da el incremento $\Delta\Phi_j$ del trabajo de deformación originado por el incremento ΔX_j de la fuerza X_j , tomará la forma

$$\Delta\Phi_j = \sum_{i=1}^G X_i \cdot \Delta a_{i,j} + \sum_{p=1}^m P_p \cdot \Delta a_{p,j} + \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} p_k \cdot \Delta a_{k,j} \cdot ds_k + \frac{1}{2} \Delta X_j \cdot \Delta a_{j,j},$$

y, para los valores $X_i = X'_i$ de las efectivas incógnitas hiperestáticas, la suma de las tres sumatorias del segundo miembro será nula en virtud de la ley de Betti, toda vez que ésta es aplicable también a las cargas elementales $p_k ds_k$, dado que al obtenerla nada hemos establecido con respecto a la magnitud de las fuerzas a que se aplica.

Quedará, pues, como en la demostración del número anterior.

$$\left(\Delta\Phi_j \right)_{X_i = X'_i} = \frac{1}{2} \Delta X_j \cdot \Delta a_{j,j},$$

y siguiendo el camino de la misma llegaríamos a análogo resultado. Vale decir, pues, que, como anunciábamos, el principio de Menabrea-Castigliano es aplicable también a sistemas sujetos a cargas continuas.

421. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano a la resolución de cadenas hiperestáticas de eslabones infinitésimos. — Sea una cadena elástica de eslabones infinitésimos, hiperestática de grado G , sujeta a un conjunto de cargas continuas o concentradas. Suprimamos la totalidad de los vínculos superfluos y pongamos en las direcciones de las incógnitas hiperestáticas correspondientes, fuerzas de intensidades variables X_i ($i = 1, 2, \dots, G$), entendiéndose que X_i puede representar tanto una fuerza o una cupla, componentes de una reacción de vínculo externo, como una de un par de las fuerzas o cuplas opuestas que constituyen una reacción de vínculo interno.

La expresión del trabajo interno de deformación es, según la [a] de (410),

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}^2}{EI} + \frac{\mathcal{N}^2}{E\Omega} + \chi \frac{\mathcal{T}^2}{G\Omega} \right) ds = \Phi(X_i),$$

en la que se supone que se ha eliminado de la función $\Phi(X_i)$, tomada en el concepto dado en (418), las reacciones de vínculo isostático, expre-

sándolas, mediante las ecuaciones de la estática, en función de las cargas y de las fuerzas X_i .

Según el principio de Menabrea-Castigliano los valores $X_i = X_i'$ de las reacciones hiperestáticas buscadas son los que hacen pasar por un mínimo la función Φ , o, lo que es consecuencia, las derivadas parciales primeras de esta función deben ser nulas para dichos valores. Formando, pues, estas derivadas e igualándolas a cero, obtendremos las siguientes expresiones

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j}\right)_{X_i = X_i'} = \left[\int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}}{EI} \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X_j} + \frac{\mathcal{N}}{E\Omega} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial X_j} + \chi \frac{\mathcal{T}}{G\Omega} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial X_j} \right) ds \right]_{X_i = X_i'} = 0 \quad [a]$$

$$(j = 1, 2, \dots, G)$$

que constituyen un sistema de G ecuaciones lineales entre las G incógnitas X_i' , que nos permitirá determinar sus valores sin ambigüedad de ninguna especie. Las ecuaciones obtenidas, dadas por las derivadas primeras de la función Φ , son, en efecto, lineales con respecto a las variables X_i , por ser esta función de segundo grado con respecto a las mismas, toda vez que en ellas las características \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} , funciones lineales de dichas variables, entran elevadas al cuadrado.

422. — Las ecuaciones [a] del número anterior son susceptibles de tomar otra forma que, en algunos casos, puede ser más conveniente. Observemos, al efecto, que si \mathcal{M}_0 , \mathcal{N}_0 y \mathcal{T}_0 son las funciones que dan las características que en el sistema hecho insostático originan las cargas directamente aplicadas P_p , y \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i y \mathcal{T}_i ($i = 1, 2, \dots, G$) las que dan las mismas características debidas a cada una de las fuerzas variables X_i ($i = 1, 2, \dots, G$), las características totales \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} resultan

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^G \mathcal{M}_i$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \sum_{i=1}^G \mathcal{N}_i \quad [a]$$

y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \sum_{i=1}^G \mathcal{T}_i.$$

Por otra parte, siendo \mathcal{M}'_i , \mathcal{N}'_i y \mathcal{T}'_i las funciones que dan las características debidas al estado de cargas $X_i = U_i$, es decir, las características que en el sistema isostático origina una fuerza de intensidad arbitraria

U_i dirigida según la X_i , se tendrá, en virtud del principio de la superposición de los pequeños efectos, que

$$\frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}'_i} = \frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}'_i} = \frac{\mathcal{T}_i}{\mathcal{T}'_i} = \frac{X_i}{U_i}$$

$$\mathcal{M}_i = \frac{\mathcal{M}'_i}{U_i} \cdot X_i$$

$$\mathcal{N}_i = \frac{\mathcal{N}'_i}{U_i} \cdot X_i$$

y

$$\mathcal{T}_i = \frac{\mathcal{T}'_i}{U_i} \cdot X_i$$

y, sustituyendo en las [a], se obtiene para las funciones \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} las expresiones

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^G \frac{\mathcal{M}'_i}{U_i} X_i$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \sum_{i=1}^G \frac{\mathcal{N}'_i}{U_i} X_i$$

y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \sum_{i=1}^G \frac{\mathcal{T}'_i}{U_i} X_i$$

Diferenciando, ahora, estas funciones con respecto a una cualquiera X_j de las variables X_i , se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X_j} = \frac{\mathcal{M}'_j}{U_j}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial X_j} = \frac{\mathcal{N}'_j}{U_j}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial X_j} = \frac{\mathcal{T}'_j}{U_j},$$

desde que en ellas sólo dependen de X_j los términos

$$\frac{\mathcal{M}'_j}{U_j} X_j, \frac{\mathcal{N}'_j}{U_j} X_j \text{ y } \frac{\mathcal{T}'_j}{U_j} X_j$$

de las sumatorias respectivas.

Reemplazando estas derivadas en las [a] del número anterior, se tiene, finalmente, como sistema de ecuaciones a que conduce el principio de Menabrea-Castigliano, el siguiente:

$$\left[\int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{\mathcal{M}'_j}{U_j} + \frac{\mathcal{N}}{E\Omega} \frac{\mathcal{N}'_j}{U_j} + \chi \frac{\mathcal{T}}{G\Omega} \frac{\mathcal{T}'_j}{U_j} \right) ds \right]_{X_i = X'_i} = 0,$$

(j = 1, 2, ..., G)

o, multiplicando por U_j y recordando las expresiones que dan la masa elástica y los coeficientes de traslación específicas, ρ' , ε' y γ' ,

$$\left[\int_0^l \left(\mathcal{M} \mathcal{M}'_j \rho' + \mathcal{N} \mathcal{N}'_j \varepsilon' + \mathcal{T} \mathcal{T}'_j \gamma' \right) ds \right]_{X_i = X'_i} = 0, \quad [b]$$

(j = 1, 2, ..., G)

siendo, como queda dicho, \mathcal{M}'_j , \mathcal{N}'_j y \mathcal{T}'_j (j = 1, 2, ..., G) las funciones que dan las características en los puntos de la fibra media debidas a valores arbitrarios U_j atribuidos a cada una de las variables X_j , y, en particular, por consiguiente, a valores de estas últimas iguales a la unidad.

423. — Si el sistema resultante al suprimir los vínculos superabundantes no pudiera tratarse como una cadena elástica de eslabones infinitesimos, pero, según lo establecido en (212), se pudiera considerar dividido en n partes de longitudes l_k (k = 1, 2, ..., n) que fueran susceptibles de tratarse como tales, tendríamos, como expresión del trabajo de deformación,

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{\mathcal{M}_k^2}{EI_k} + \frac{\mathcal{N}_k^2}{E\Omega_k} + \chi \frac{\mathcal{T}_k^2}{G\Omega_k} \right) ds_k,$$

y, aplicando, como antes, el principio de Menabrea-Castigliano, llegaríamos al sistema de G ecuaciones lineales,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right)_{X_i = X'_i} = \left[\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{\mathcal{M}_k}{EI_k} \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial X_j} + \frac{\mathcal{N}_k}{E\Omega_k} \frac{\partial \mathcal{N}_k}{\partial X_j} + \chi \frac{\mathcal{T}_k}{G\Omega_k} \frac{\partial \mathcal{T}_k}{\partial X_j} \right) ds_k \right]_{X_i = X'_i} = 0 \quad [a]$$

(j = 1, 2, ..., G),

que nos daría los valores buscados de las incógnitas X'_i .

Este sistema, a su vez, y de acuerdo a lo establecido en el número anterior, puede, como es fácil deducir, tomar la forma

$$\left[\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\mathcal{M}_k \mathcal{M}'_{k,j} \rho'_k + \mathcal{N}_k \mathcal{N}'_{k,j} \varepsilon'_k + \mathcal{T}_k \mathcal{T}'_{k,j} \gamma'_k \right) ds_k \right]_{\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i} = 0,$$

$$(j = 1, 2, \dots, G)$$

en la que ρ'_k , ε'_k y γ'_k ($k = 1, 2, \dots, n$) representan la masa elástica y coeficientes de traslación específicos de la cadena, o parte de cadena, k , y $\mathcal{M}'_{k,j}$, $\mathcal{N}'_{k,j}$ y $\mathcal{T}'_{k,j}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ($j = 1, 2, \dots, G$) las funciones que dan las características en la misma, debidas a un valor arbitrario (y en particular igual a la unidad) U_k atribuído a cada una de las fuerzas variables X_j .

424. — El principio de Menabrea-Castigliano permite, en la forma expuesta, la resolución analítica de sistemas hiperestáticos, siendo muy cómoda su aplicación, por cuanto implica un único camino, común cualquiera que sea la complejidad del sistema a resolverse. Nosotros lo utilizaremos por ello, con preferencia, en la obtención de fórmulas para el cálculo de tipos comunes de estructuras constructivas, a pesar de que, por lo general, conduzca a desarrollos y cálculos un tanto largos, aunque siempre sumamente elementales.

La obtención de dichas fórmulas puede hacerse también mediante el cálculo analítico de elásticas, interpretando analíticamente los procedimientos gráficos que estudiaremos para las cadenas comunes de eslabones finitos. Si bien este último procedimiento no conduce, a veces, a cálculos tan largos, no es de tanta sencillez como el que nos ocupa en cuanto a la concepción del problema, complicándose, además, por lo común, con la determinación de constantes de integración que lleven las elásticas a las condiciones de sustentación, determinación de constantes que no entra para nada, como veremos, en la aplicación del principio de Menabrea-Castigliano.

Pasamos a aclarar los conceptos sobre la aplicación de este principio, efectuándola, a continuación, para algunos casos sencillos.

425. Ejemplos. — Sea el sistema hiperestático de primer grado representado en la figura 244 *a*, consistente en una viga recta de momento de inercia constante I , de luz l , empotrada en A , con un apoyo móvil horizontalmente en B y sometida a una carga uniformemente repartida de intensidad específica p . Propongámonos hallar la intensidad X' de la reacción vertical en el apoyo B , única incógnita hiperestática del sistema.

Suprimamos el apoyo móvil B y apliquemos en su reemplazo una fuerza variable X de la dirección de la incógnita hiperestática correspondiente, X' . Obtendremos la viga isostática de la figura 224 b , que referiremos a un sistema de ejes rectangulares $B(z, y)$.

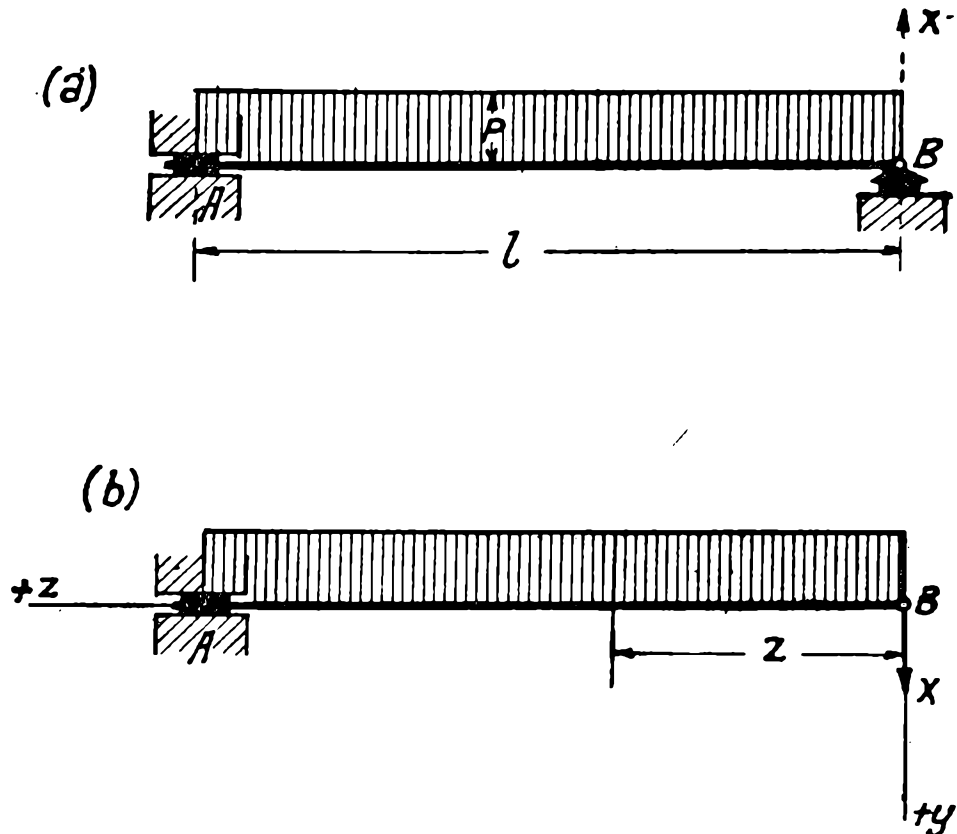


FIG. 244

El momento \mathcal{M} , de las fuerzas que quedan a la derecha, en una sección de abscisa z , es

$$\mathcal{M} = Xz + p \frac{z^2}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} = z.$$

Siendo en este caso $\mathcal{N} = 0$ y despreciando la influencia de los esfuerzos tangenciales \mathcal{T} , el principio de Menabrea-Castigliano, según lo establecido en (421) y desde que existe una sola incógnita, nos conduce a la ecuación

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{X=X'} = \left[\int_0^l \frac{\mathcal{M}}{EI} \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} ds \right]_{X=X'} = 0.$$

Sustituyendo en esta expresión \mathcal{M} y $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}$, por los valores arriba obtenidos y notando que

$$ds = dz,$$

se tiene

$$\left[\int_0^l \frac{Xz + p \frac{z^2}{2}}{EI} z dz \right]_{x = x'} = \int_0^l \frac{X'z + p \frac{z^2}{2}}{EI} z dz = 0,$$

y, siendo E e I constantes,

$$\int_0^l \left(X'z + p \frac{z^2}{2} \right) z dz = 0.$$

Desarrollando e integrando resulta

$$X' \frac{l^3}{3} + \frac{pl^4}{8} = 0$$

$$X' = -\frac{3}{8} pl,$$

expresión que da el valor buscado de la reacción hiperestática X' .

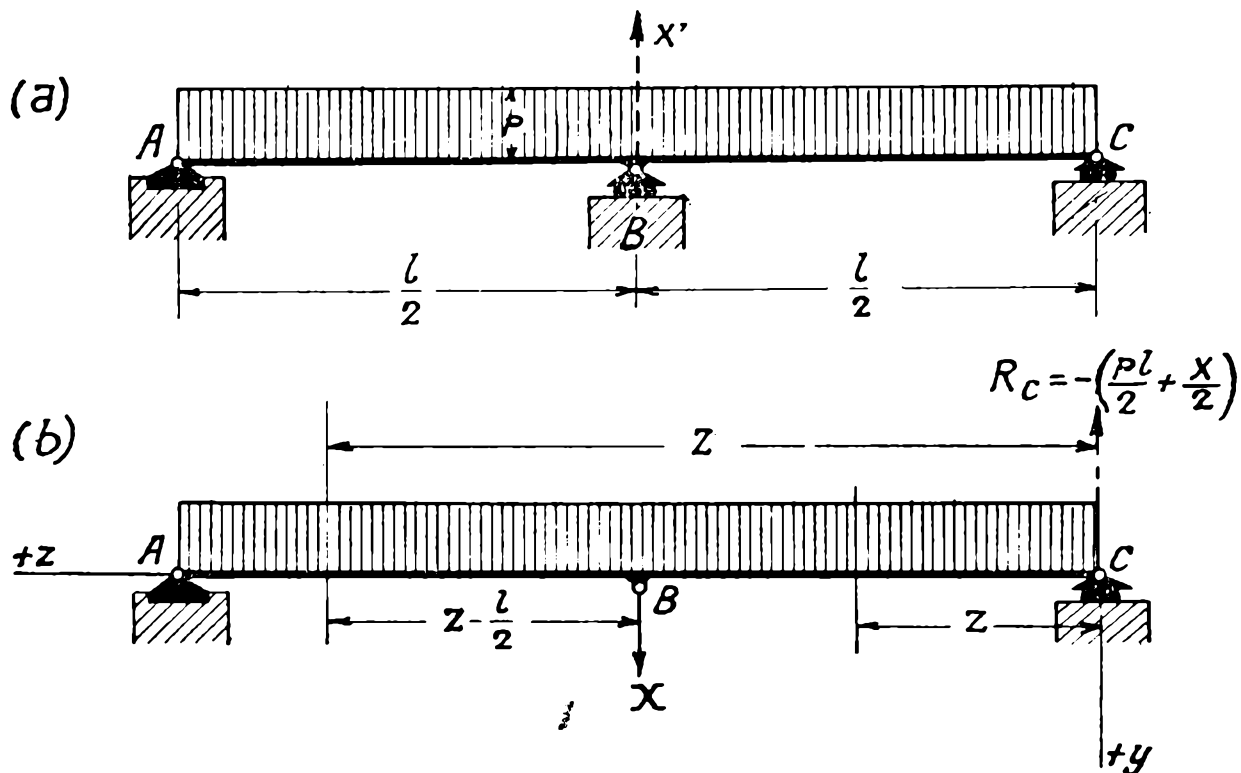


FIG. 245

426. — Sea (fig. 245 a) la viga continua de momento de inercia constante de dos tramos iguales de luz $\frac{l}{2}$, sometida a una carga uniformemente repartida de intensidad específica p . El sistema es hiperestático de primer grado; consideremos como incógnita hiperestática la reacción X' en el apoyo B y propongámonos calcular su valor.

Suprimamos el apoyo superfluo B y hagamos actuar según la dirección de la incógnita X' a calcular, una fuerza de intensidad variable X ; resultará la viga isostática de la figura 245 b , cuya reacción isostática en C es

$$R_c = -\left(\frac{pl}{2} + \frac{X}{2}\right).$$

Refiramos la viga a un sistema de ejes rectangulares C (z, y) y tendremos, ante todo, que

$$ds = dz. \quad /$$

La función que da el momento flector \mathcal{M} es distinta según que se considere el tramo AB o BC y estamos, por tanto, en el caso tratado en (412), en que el sistema hay que dividirlo en dos trozos a considerar, aisladamente, como cadenas elásticas de eslabones infinitésimos. Tendremos, pues:

Desde $z = 0$ hasta $z = \frac{l}{2}$,

$$\mathcal{M}_1 = R_c z + \frac{pz^2}{2} = -\left(\frac{pl}{2} + \frac{X}{2}\right)z + \frac{pz^2}{2}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} = -\frac{z}{2};$$

desde $z = \frac{l}{2}$ hasta $z = l$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= R_c z + X\left(z - \frac{l}{2}\right) + \frac{pz^2}{2} = \\ &= -\left(\frac{pl}{2} + \frac{X}{2}\right)z + X\left(z - \frac{l}{2}\right) + \frac{pz^2}{2} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} = -\frac{z}{2} + z - \frac{l}{2} = \frac{1}{2}(z - l).$$

La expresión encontrada en (423) como consecuencia del principio de Menabrea-Castigliano, aplicada a nuestro caso y despreciando siempre la influencia de los esfuerzos tangenciales \mathcal{T} , es

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)_{X=X'} = \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathcal{M}_1}{EI} \cdot \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} dz + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{\mathcal{M}_2}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} dz \right]_{X=X'} = 0 \quad [a].$$

de la que, sustituyendo los valores arriba encontrados, efectuando la integración y simplificando, se deduce que

$$X' = -\frac{5}{8} pl.$$

427. — El problema anterior se simplifica notablemente observando que por la simetría del sistema y de las cargas, los momentos flectores en dos puntos simétricos con respecto a la vertical de B son iguales entre sí para cualquier valor de la variable X , y que, por tanto, el trabajo de deformación originado por la carga uniformemente repartida y un valor cualquiera de esta variable es igual en ambas mitades AB y BC del sistema. Como otro tanto sucederá, por consiguiente, para la derivada de este trabajo con respecto a X y como esta derivada del trabajo de deformación para la mitad derecha está dada por la primera de las integrales de la [a] del número anterior, el valor total de la derivada para el sistema será

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{X=X'} = 2 \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathcal{M}_1}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} dz \right]_{X=X'} = 0,$$

expresión de la que se deduce, como antes, que

$$X' = -\frac{5}{8} pl.$$

428. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano a la resolución de cadenas elásticas hiperestáticas de eslabones finitos y de los sistemas hiperestáticos de reticulado cualesquiera. — Sea un sistema hiperestático de grado G , susceptible de representarse por una o varias cadenas elásticas de eslabones finitos que en total tengan n uniones i ($\rho_i, \epsilon_i, \gamma_i$). Supongámoslo sometido a la acción de cargas P_p y suprimamos los G vínculos superfluos, aplicando según las direcciones de las incógnitas hiperestáticas correspondientes fuerzas X_j ($j = 1, 2, \dots, G$) de intensidades variables. Obtendremos así un sistema isostático sujeto a las cargas P_p y a estas G fuerzas X_j y su trabajo de deformación, para un sistema cualquiera de valores de estas últimas, estará dado, según sabemos, por la expresión

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \epsilon_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma_i) = \Phi(X_j), \quad [a]$$

en la que las características $\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$ y \mathcal{T}_i en una unión i cualquiera estarán dadas por funciones lineales de las variables X_j . En efecto, para

el momento flector \mathcal{M}_i , por ejemplo, se tendrá, en forma análoga a la expuesta en (422),

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \mathcal{M}_{i,j},$$

siendo $\mathcal{M}_{i,0}$ el momento flector que en la unión i del sistema hecho isostático originan las cargas P_p , y $\mathcal{M}_{i,j}$ el momento flector que, en la misma, produce una cualquiera de las fuerzas X_j . Ahora bien, si sobre la dirección de X_j hacemos actuar una fuerza de intensidad cualquiera U_j y $\mathcal{M}'_{i,j}$ es el momento flector que ella origina en la unión i , debe tenerse, en virtud del principio de superposición de los pequeños efectos, que

$$\frac{\mathcal{M}_{i,j}}{\mathcal{M}'_{i,j}} = \frac{X_j}{U_j}$$

$$\mathcal{M}_{i,j} = \frac{\mathcal{M}'_{i,j}}{U_j} X_j.$$

Sustituyendo en la anterior expresión se tiene, finalmente, que

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{M}'_{i,j}}{U_j} X_j, \quad [b].$$

o, desarrollando, que

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{i,0} + \frac{\mathcal{M}'_{i,1}}{U_1} X_1 + \frac{\mathcal{M}'_{i,2}}{U_2} X_2 + \dots + \frac{\mathcal{M}'_{i,G}}{U_G} X_G,$$

siendo, como queda dicho, $\mathcal{M}'_{i,0}$, $\mathcal{M}'_{i,1}$, $\mathcal{M}'_{i,2}, \dots$, $\mathcal{M}'_{i,G}$ los momentos flectores que en la unión i del sistema hecho isostático originan respectivamente las cargas P_p y fuerzas según las direcciones de las incógnitas de intensidades arbitrarias $X_1 = U_1$, $X_2 = U_2, \dots$, $X_G = U_G$.

Por razones completamente análogas, obtendríamos que los esfuerzos normales y tangenciales \mathcal{N}_i y \mathcal{T}_i , están dados por las siguientes funciones lineales de las fuerzas variables X_j ,

$$\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{N}'_{i,j}}{U_j} X_j,$$

y

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{T}'_{i,j}}{U_j} X_j, \quad [b'].$$

siendo, como antes, $\mathcal{N}_{i,0}$ y $\mathcal{T}_{i,0}$ los esfuerzos normal y tangencial que en la unión i del sistema hecho isostático originan las cargas P_p y $\mathcal{N}'_{i,j}$ y

$\mathcal{T}'_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, G$) las mismas características en dicha unión debidas a valores arbitrarios $X_j = U_j$ ($j = 1, 2, \dots, G$) atribuidos a cada una de las fuerzas X_j .

429. — Análogamente, si se da un sistema cualquiera de reticulado de n barras i con coeficientes de alargamientos ϵ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), hiperestático de grado G y sujeto a cargas P_p y si se suprimen todos los vínculos superfluos, haciendo actuar, según las direcciones de las incógnitas correspondientes, fuerzas X_j de intensidades variables, el trabajo de deformación, para valores cualesquiera de estas últimas, estará dado por la expresión

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i^2 \epsilon_i, \quad [a]$$

siendo T_i la función lineal

$$T_i = T_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{T'_{i,j}}{U_j} X_j \quad [b]$$

de estas variables, en la que, como antes, $T_{i,0}$ y $T'_{i,j}$, representan respectivamente la tensión en la barra i del sistema hecho isostático, originada por las cargas P_p y por una fuerza de intensidad arbitraria $X_j = U_j$ actuando según la dirección X_j .

430. — El principio de Menabrea-Castigliano aplicado a los dos sistemas hiperestáticos de grado G considerados en los números anteriores, siendo X'_j ($j = 1, 2, \dots, G$) los efectivos valores de las incógnitas hiperestáticas correspondientes a las condiciones de vínculo, igualando a cero las derivadas con respecto a las fuerzas X_k cualesquiera ($k = 1, 2, \dots, G$) nos conduce a los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_k} \right)_{X_j = X'_j} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \epsilon_i + \mathcal{T}_i^2 \gamma_i) \right]_{X_j = X'_j} = 0, \\ (k = 1, 2, \dots, G)$$

o sea

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_i \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial X_k} \rho_i + \mathcal{N}_i \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial X_k} \epsilon_i + \mathcal{T}_i \frac{\partial \mathcal{T}_i}{\partial X_k} \gamma_i \right) \right]_{X_j = X'_j} = 0 \quad [a] \\ (k = 1, 2, \dots, G),$$

para la cadena elástica, y

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{X_j = X'_j} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i^2 \epsilon_i \right)_{X_j = X'_j} = 0,$$

o sea

$$\left(\sum_{i=1}^n T_i \frac{\partial T_i}{\partial X_k} \varepsilon_i \right)_{X_j = X'_j} = 0, \quad [b]$$

para el sistema de reticulado.

Por otra parte, de las [b] y [b'] de (428) y de la [b] de (429), se deduce que

$$\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\mathcal{M}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{M}'_{i,j}}{U_j} X_j \right) = \frac{\mathcal{M}'_{i,k}}{U_k}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\mathcal{N}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{N}'_{i,j}}{U_j} X_j \right) = \frac{\mathcal{N}'_{i,k}}{U_k}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_i}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\mathcal{T}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{T}'_{i,j}}{U_j} X_j \right) = \frac{\mathcal{T}'_{i,k}}{U_k}$$

y

$$\frac{\partial T_i}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(T_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{T'_{i,j}}{U_j} X_j \right) = \frac{T'_{i,k}}{U_k},$$

toda vez que en dichas expresiones sólo dependen de X_k los términos

$\frac{\mathcal{M}'_{i,j}}{U_k} X_k, \frac{\mathcal{N}'_{i,k}}{U_k} X_k, \dots$ de las sumatorias respectivas.

Sustituyendo en las [a] tenemos, finalmente, que la aplicación del principio de Menabrea-Castigliano para las cadenas elásticas de eslabones finitos, nos conduce al siguiente sistema de G ecuaciones finales entre las G incógnitas X'_j ($j = 1, 2, \dots, G$),

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_i \frac{\mathcal{M}'_{i,k}}{U_k} \rho_i + \mathcal{N}_i \frac{\mathcal{N}'_{i,k}}{U_k} \varepsilon_i + \mathcal{T}_i \frac{\mathcal{T}'_{i,k}}{U_k} \gamma_i \right) \right]_{X_j = X'_j} = 0$$

($k = 1, 2, \dots, G$),

o, multiplicando por U_k

$$\left[\sum_{i=1}^n (\mathcal{M}_i \mathcal{M}'_{i,k} \cdot \rho_i + \mathcal{N}_i \mathcal{N}'_{i,k} \cdot \varepsilon_i + \mathcal{T}_i \mathcal{T}'_{i,k} \cdot \gamma_i) \right]_{X_j = X'_j} = 0 \quad [c]$$

sistema de ecuaciones que nos permite hallar los G valores X'_j sin ambigüedad alguna.

Análogamente, sustituyendo en la [b] el valor hallado de $\frac{\partial T}{\partial X_k}$, tendremos que el principio de Menabrea-Castigliano nos conduce para un

sistema de reticulado al sistema de G ecuaciones lineales entre las incógnitas X_j' ,

$$\left(\sum_{i=1}^n T_i \frac{T'_{i,k}}{U_k} \epsilon_i \right)_{X_j=X_j'} = 0,$$

o, multiplicando por U_k

$$\left(\sum_{i=1}^n T_i T'_{i,k} \epsilon_i \right)_{X_j=X_j'} = 0 \quad [d]$$

$$(k = 1, 2, \dots, G),$$

que nos permite, también, calcular los G valores X_j' .

431. — Prácticamente, pues, para resolver, mediante el principio de Menabrea-Castigliano, un sistema hiperestático constituido por una o varias cadenas elásticas de eslabones finitos (o un sistema hiperestático de reticulado) se procede como sigue:

Se suprimen todos los vínculos superabundantes, se somete el sistema isostático resultante a las cargas exteriores P_p y se calculan por cualquiera de los procedimientos que proporciona la estática (*) las características $\mathcal{M}_{o,i}$, $\mathcal{N}_{o,i}$ y $\mathcal{T}_{o,i}$ que en las uniones i (o las tensiones $T_{o,i}$ que en las barras i), originan las mismas.

Se aplica, luego, en el sistema isostático sucesivamente estados de carga $X_k = U_k$ ($k = 1, 2, \dots, G$), es decir, G estados de carga en cada uno de los cuales se supone que sobre el sistema isostático sólo actúe una fuerza de intensidad cualquiera U_k dirigida según la incógnita hiperestática X'_k , y se determina, también, las características $\mathcal{M}'_{i,k}$, $\mathcal{N}'_{i,k}$ y $\mathcal{T}'_{i,k}$ en las uniones i (o las tensiones $T'_{i,k}$ en las barras i) debidas a los mismos.

Con los elementos así obtenidos se forman, luego, las expresiones $[b]$ y $[b']$ de (428) que dan a \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i y \mathcal{T}_i (o la expresión $[b]$ de (429) que da a T_i) y se sustituyen éstos y los $\mathcal{M}'_{i,k}$, $\mathcal{N}'_{i,k}$ y $\mathcal{T}'_{i,k}$ ($k = 1, 2, \dots, G$) (o $T'_{i,k}$) en las $[c]$ (o $[d]$) de (430) formando los sistemas de G ecuaciones lineales entre las G incógnitas X'_j ($j = 1, 2, \dots, G$), que resuelven el problema.

432. Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano para la resolución de sistemas hiperestáticos generales. — Sea por último, un sistema general formado por barras, chapas de reticulado y chapas de alma llena, vinculadas entre sí y con la Tierra de modo a resultar hiperestático de grado G . Supongámoslo sujeto a cargas P_p y suprimamos todos sus

(*) Si el sistema posee más de una incógnita hiperestática se requerirá, por lo general, obtener estos valores, así como los restantes que a continuación se indican, analíticamente con muchas cifras, que se conservarán en sucesivos cálculos para poder llegar a los resultados con la aproximación deseada de sólo dos o tres cifras.

vínculos superfluos, poniendo, según las direcciones de las incógnitas hiperestáticas respectivas, G fuerzas X_j de intensidad variable.

Supongamos que una parte de las chapas de alma llena pueda considerarse como cadenas elásticas de eslabones infinitésimos y haya en total n' cadenas r , o partes de cadena, de longitudes de fibra media l_r y masas elásticas y coeficientes de traslación específicos ρ'_r , ϵ'_r y γ'_r . Supongamos, además, que las restantes chapas de alma llena, que trataremos como cadenas elásticas de eslabones finitos, tengan en conjunto n uniones i (ρ_i , ϵ_i y γ_i). Admitamos, finalmente, que existan m barras l en total entre las de unión y de las chapas de reticulado, de coeficientes de alargamiento ϵ_l .

El trabajo de deformación del sistema hecho isostático, para valores cualesquiera de las fuerzas X_j , estará dado por la expresión

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n'} \int_0^{l_r} (\mathcal{M}_r^2 \rho'_r + \mathcal{N}_r^2 \epsilon'_r + \mathcal{T}_r \gamma'_r) ds_r + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathcal{M}_i^2 \rho_i + \mathcal{N}_i^2 \epsilon_i + \mathcal{T}_i \gamma_i) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m T_l^2 \epsilon_l,$$

y el principio de Menabrea-Castigliano nos conducirá al sistema de G ecuaciones lineales entre las incógnitas X'_j ,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_k} \right)_{X_j = X'_j} = \left[\sum_{r=1}^{n'} \int_0^{l_r} \left(\mathcal{M}_r \frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial X_k} \rho'_r + \mathcal{N}_r \frac{\partial \mathcal{N}_r}{\partial X_k} \epsilon'_r + \mathcal{T}_r \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial X_k} \gamma'_r \right) ds_r + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_i \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial X_k} \rho_i + \mathcal{N}_i \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial X_k} \epsilon_i + \mathcal{T}_i \frac{\partial \mathcal{T}_i}{\partial X_k} \gamma_i \right) + \sum_{l=1}^m T_l \frac{\partial T_l}{\partial X_k} \epsilon_l \right]_{X_j = X'_j} = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, G).$$

que, recordando lo establecido en los números anteriores con respecto a los valores de las derivadas que figuran dentro de las sumatorias y designados por $\mathcal{M}'_{x,k}$, $\mathcal{N}'_{x,k}$ y $\mathcal{T}'_{x,k}$ ($x = r, i$), los valores de las características \mathcal{M}_x , \mathcal{N}_x y \mathcal{T}_x ($x = r, i$) debidas a valores arbitrarios U_k atribuidos sucesivamente a cada una de las fuerzas X_k ($k = 1, 2, \dots, G$) y llamando, además, $T'_{l,k}$ las tensiones en la barra l debidas a las mismas fuerzas U_k , se convierte en

$$\left[\sum_{r=1}^{n'} \int_0^{l_r} (\mathcal{M}_r \mathcal{M}'_{r,k} \rho'_r + \mathcal{N}_r \mathcal{N}'_{r,k} \epsilon'_r + \mathcal{T}_r \mathcal{T}'_{r,k} \gamma'_r) ds_r + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n (\mathcal{M}_i \mathcal{M}'_{i,k} \rho_i + \mathcal{N}_i \mathcal{N}'_{i,k} \epsilon_i + \mathcal{T}_i \mathcal{T}'_{i,k} \gamma_i) + \sum_{l=1}^m T_l T'_{l,k} \epsilon_l \right]_{X_j = X'_j} = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, G).$$

433. **Obervación.** — En todas las aplicaciones del principio de Menabrea-Castigliano que se exponen en los números anteriores, se han suprimido la totalidad de los vínculos superfluos, a fin de que el cálculo del trabajo de deformación — de las cargas P_p y de las fuerzas variables X_i , dirigidas según todas las incógnitas hiperestáticas — se realice sobre el sistema isostático resultante. Ello, sin embargo, no es indispensable, pues, dicho principio lo hemos demostrado en (419) para el trabajo de deformación de los sistemas en que sólo se suprimen una parte de los vínculos superfluos. Sólo que, para poder trabajar en el sistema hiperestático que en esta última forma quedaría, se requerirá haberlo resuelto previamente, a fin de poder expresar sus reacciones de vínculo en función de las que se ponen en evidencia, que actuarán sobre el mismo como cargas exteriores.

Este último es el camino que se sigue en algunos casos con el objeto de simplificar los sistemas de ecuaciones lineales y, en particular, en el método de reducciones sucesivas del autor, en el que se obtiene ecuaciones independientes, de una sola incógnita cada una, eliminándose así el trabajo de la resolución de sistemas con numerosas incógnitas.

§ 3. — Teorema de Castigliano o de la derivada del trabajo de deformación

434. **Preliminar.** — El teorema de Castigliano que pasamos a tratar, al igual que el de Mohr demostrado en (372), permite obtener los desplazamientos absolutos o relativos correspondientes a la deformación que en un sistema, isostático o hiperestático, origina un estado cualquiera de cargas.

Según lo convenido en (371), designaremos en general por a el desplazamiento a calcular es decir, a podrá ser, según los casos, la proyección sobre una recta del desplazamiento de un punto, la rotación absoluta de una sección de un sistema de alma llena o de la dirección de una barra de un reticulado, la proyección sobre la dirección de dos puntos de su desplazamiento relativo y la rotación relativa de dos secciones de un sistema de alma llena o de la dirección de dos barras de un reticulado.

Para obtener estos desplazamientos con el teorema que nos ocupa, será necesario aplicar sobre el sistema, además de las cargas que los originan, un *esfuerzo auxiliar* U , determinado en forma análoga a la establecida en (370) al tratar del teorema de Mohr, pero con la diferencia que en lugar de tener un valor arbitrario y constante, como allí se estableció, tendrá uno que se supondrá variable. Es decir, U podrá representar, según la naturaleza del desplazamiento a calcular, ya una fuerza, ya una

de un par de fuerzas opuestas, ya una cupla, ya una de un par de cuplas opuestas, todas de intensidad variable.

Elegido, en esta forma el esfuerzo auxiliar U , el producto escalar resultante del desplazamiento absoluto o relativo a a calcular por el mismo, estará dado, como se estableció en (371), directamente en valor y signo por la expresión $U \cdot a$.

435. — Sentado lo anterior, consideremos la función

$$\Phi = \Phi (P_p, X_i),$$

que, como hemos establecido en (418), nos da trabajos de deformación hipotéticos correspondientes a valores cualesquiera X_i de fuerzas dirigidas según las reacciones hiperestáticas, actuando en el sistema en que se han suprimido los vínculos superfluos respectivos y que lo mantienen en equilibrio conjuntamente con las cargas P_p , aunque no correspondiendo con la deformación compatible con dichos vínculos suprimidos.

Si al sistema isostático sujeto a las cargas P_p y X_i agregamos un esfuerzo auxiliar U , a los efectos de calcular el desplazamiento a que le corresponde, originado en el sistema hiperestático dado por las cargas P_p , podremos formar una nueva función.

$$\Phi = \Phi (P_p, X_i, U), \quad [a]$$

que, de acuerdo con el mismo criterio, nos dará trabajos hipotéticos para valores arbitrarios X_i y U equilibrados con las cargas P_p . Si en dicha función damos a X_i ($i = 1, 2, \dots, G$) los valores efectivos X'_i ($i = 1, 2, \dots, G$) de las reacciones hiperestáticas originadas por las cargas P_p , que supondremos conocidas, y hacemos, además, $U = 0$, nos dará el efectivo trabajo de deformación que en el sistema hiperestático originan dichas cargas P_p . Si el sistema dado fuera isostático se tendría ya $X'_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, G$) y bastaría hacer $U = 0$ en la función anterior, para tener el trabajo de deformación.

Hechas estas consideraciones previas estamos ya en condiciones de pasar a la demostración del teorema de Castigliano.

436. **Demostración del teorema de Castigliano.** — Sea un sistema isostático o hiperestático al que se aplica un conjunto de cargas P_p ($p = 1, 2, \dots, n$) y sea, además, a un desplazamiento que se desea conocer, originado durante la deformación debida a las mismas, entendiéndose, según acabamos de establecer, que a puede representar indistintamente, la proyección del desplazamiento de un punto, la rotación de una sección o de la dirección de una barra, la proyección sobre dos puntos de su des-

plazamiento relativo, o la rotación relativa de dos secciones o de las direcciones de dos barras.

Si el sistema es hiperestático supondremos conocidos los valores X'_i , ($i = 1, 2, \dots, G$) de sus incógnitas superfluas.

Apliquemos un esfuerzo auxiliar U , de intensidad variable, que corresponda al desplazamiento a que se desea determinar (una fuerza, una cupla, o un par de fuerzas o cuplas opuestas, según el caso), y una vez suprimidos, si se trata de un sistema hiperestático, los vínculos superfluos, y puestos, según las direcciones de las reacciones respectivas, fuerza de intensidades variables X_i , formemos la función

$$\Phi = \Phi (P_p, X_i, U). \quad [a]$$

Supuesto el sistema en equilibrio bajo la acción de un conjunto cualquiera de valores de las fuerzas X_i y U , demos a esta última un incremento cualquiera ΔU y calculemos el incremento $\Delta\Phi_u$ correspondiente de dicha función. Si llamamos $\Delta a_{p,u}$, $\Delta a_{i,u}$ y $\Delta a_{u,u}$, los desplazamientos correspondientes a las fuerzas P_p , X_i y U , durante la deformación debida a la fuerza ΔU , el trabajo desarrollado por la misma será

$$\Delta\Phi_u = \sum_{p=1}^n P_p \cdot \Delta a_{p,u} + \sum_{i=1}^G X_i \cdot \Delta a_{i,u} + U \Delta a_{u,u} + \frac{1}{2} \Delta U \cdot \Delta a_{u,u}, \quad [b]$$

desde que las fuerzas P_p , X_i y U actúan con toda su intensidad durante la deformación, mientras ΔU va creciendo gradualmente desde cero hasta su valor.

Para valores de las variables X_i y U , correspondientes a los originados por las cargas P_p en el sistema hiperestático dado, en sus efectivas condiciones de vínculo, es decir, para $X_i = X'_i$ ($i = 1, 2, \dots, G$) y $U = 0$, se tiene, en virtud de la ley de Betti, que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{p=1}^n P_p \cdot \Delta a_{p,u} + \sum_{i=1}^G X_i \cdot \Delta a_{i,u} + U \Delta a_{u,u} \right)_{\substack{X_i = X'_i \\ U = 0}} = \quad [c] \\ & = \sum_{p=1}^{\hat{n}} P_p \cdot \Delta a_{p,u} + \sum_{i=1}^G X'_i \cdot \Delta a_{i,u} = \Delta U \cdot a, \end{aligned}$$

desde que a es, por hipótesis, el desplazamiento originado según la dirección del esfuerzo ΔU , por las cargas P_p y X'_i , mientras $\Delta a_{p,u}$ y $\Delta a_{i,u}$ son los desplazamientos que a estas últimas fuerzas corresponden durante la deformación debida a la ΔU .

Por otra parte, $\Delta a_{u,u}$, desplazamiento en la dirección del esfuerzo

ΔU , originado por el mismo, es proporcional a su intensidad, y, por tanto, siendo α una constante, se tiene

$$\Delta a_{u,u} = \alpha \cdot \Delta U. \quad [d]$$

Sustituyendo en la [b] los valores dados por las [c] y [d], resulta

$$\left(\Delta \Phi_u \right)_{\substack{X_i = X'_i \\ U=0}} = \Delta U \cdot a + \frac{1}{2} \alpha \cdot \overline{\Delta U^2}.$$

Dividiendo por ΔU , haciendo tender esta última a cero y tomando límites, se tiene, finalmente,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\left(\Delta \Phi_u \right)_{\substack{X_i = X'_i \\ U=0}}}{\Delta U} &= \lim_{\Delta U \rightarrow 0} a + \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{1}{2} \alpha \overline{\Delta U} \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)_{\substack{X_i = X'_i \\ U=0}} &= a, \end{aligned}$$

expresión del *teorema de Castigliano*, o de la *derivada del trabajo de deformación*, que nos dice que:

El desplazamiento absoluto o relativo, a, experimentado en un sistema bajo la acción de un conjunto de cargas P_p y según una dirección determinada, está dado por el valor de la derivada con respecto a U de la función [a], para valores X_i iguales a las efectivas reacciones de vínculo X'_i y para $U = 0$, siendo U el esfuerzo auxiliar correspondiente al desplazamiento considerado.

437. Aplicación del teorema de Castigliano a las cadenas elásticas de eslabones infinitésimos. — La función [a] del número anterior es, tratándose de cadenas elásticas de eslabones infinitésimos,

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}^2}{EI} + \frac{\mathcal{N}^2}{E\Omega} + \chi \frac{\mathcal{T}^2}{G\Omega} \right) ds,$$

en la que \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} , son funciones lineales de las cargas P_p , de las fuerzas X_i dirigidas según las incógnitas hiperestáticas y del esfuerzo auxiliar U aplicado según el desplazamiento a que se trata de determinar.

Este desplazamiento, de acuerdo con el teorema que acabamos de demostrar, será, por consiguiente

$$a = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)_{\substack{X_i = X'_i \\ U=0}} = \left[\int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial U} + \frac{\mathcal{N}}{E\Omega} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial U} + \chi \frac{\mathcal{T}}{G\Omega} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial U} \right) ds \right]_{\substack{X_i = X'_i \\ U=0}}$$

Pasamos a aclarar el empleo de esta expresión, desarrollando algunos ejemplos concretos.

438. — Sea (fig. 246 *a*) la viga recta de momento de inercia constante I , empotrada en A y con un apoyo movable horizontalmente en B , sometida a una carga uniformemente repartida de intensidad específica p , que hemos resuelto en (425), encontrando para la reacción hiperestática en B un valor

$$X' = -\frac{3}{8} pl.$$

Propongámonos determinar el desplazamiento vertical η que el punto M , distante α del apoyo B , experimenta en la deformación debida a dicho estado de carga.

En este estado de carga se tiene para el esfuerzo normal un valor $\mathcal{N} = 0$ y supondremos, también, que $\mathcal{T} = 0$ es decir, despreciaremos la influencia de los esfuerzos tangenciales.

Refiramos la viga a un sistema de ejes $B (z, y)$ y tendremos

$$ds = dz.$$

Aplicando en el punto M de la viga isostática (fig. 246 *b*) que resulta al suprimir el apoyo B , reemplazándolo por la reacción incógnita X , un esfuerzo auxiliar vertical U , que es el que corresponde al desplazamiento

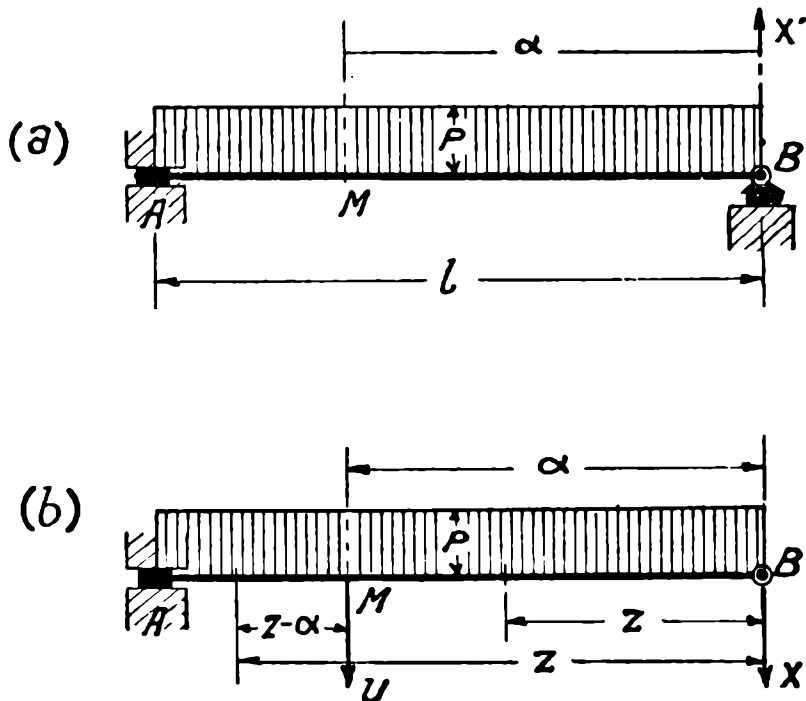


FIG. 246

η a calcular, tendremos que el momento flector en un punto cualquiera de abscisa z es:

Desde $z = 0$ hasta $z = \alpha$,

$$\mathcal{M}_1 = Xz + \frac{pz^2}{2},$$

y desde $z = \alpha$ hasta $z = l$

$$\mathcal{M}_2 = Xz + \frac{pz^2}{2} + U(z - \alpha).$$

Por tanto, para $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial U}$ se tiene:

Desde $z = 0$ hasta $z = \alpha$,

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} = 0,$$

y desde $z = \alpha$ hasta $z = l$,

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} = z - \alpha.$$

Resulta, pues,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} = \int_0^\alpha \frac{\mathcal{M}_1}{EI} \cdot \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} dz + \int_\alpha^l \frac{\mathcal{M}_2}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} dz,$$

o sea, sustituyendo,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} = \frac{1}{EI} \int_\alpha^l \left[Xz + \frac{pz^2}{2} + U(z - \alpha) \right] (z - \alpha) dz,$$

y, por tanto,

$$\eta = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)_{\substack{X=X' \\ U=0}} = -\frac{3}{8} pl = \int_\alpha^l \left(-\frac{3}{8} plz + \frac{pz^2}{2} \right) (z - \alpha) dz.$$

Integrando y simplificando se llega, finalmente, a

$$\eta = \frac{p}{48 EI} (2 \alpha^4 - 3 l \alpha^3 + l^3 \alpha).$$

439. — Consideremos la viga simplemente apoyada AB (fig. 247 a) de momento de inercia constante I y sujeta a una carga uniformemente repartida de intensidad específica p . Refirámosla a un sistema de ejes B (z, y) y propongámonos determinar, también, el desplazamiento vertical experimentado por el punto M de abscisa α .

Tendremos $ds = dz$ y $\mathcal{N} = 0$, y despreciaremos, como antes, la influencia de los esfuerzos tangenciales \mathcal{T}

Aplicando en M un esfuerzo auxiliar vertical U , la reacción en B es (fig. 247 b)

$$R_B = -\frac{pl}{2} - U \frac{l - \alpha}{l},$$

y los valores de \mathcal{M} y $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial U}$ en un punto cualquiera z , serán:

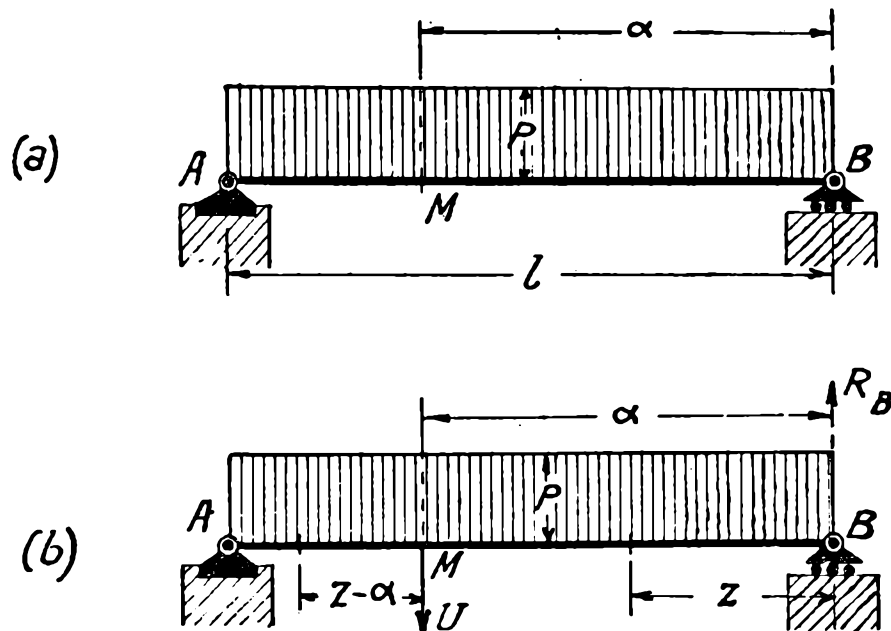


FIG. 247

Desde $z = 0$ hasta $z = \alpha$,

$$\mathcal{M}_1 = R_B \cdot z + \frac{pz^2}{2} = -\frac{pl}{2}z - U \frac{l-\alpha}{l} \cdot z + \frac{pz^2}{2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} = -\frac{l-\alpha}{l} \cdot z,$$

y, desde $z = \alpha$ hasta $z = l$,

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{pl}{2}z - U \frac{l-\alpha}{l}z + \frac{pz^2}{2} + U(z-\alpha),$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} = -\frac{l-\alpha}{l}z + z - \alpha.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial U} &= \frac{1}{EI} \int_0^\alpha \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} dz + \frac{1}{EI} \int_\alpha^l \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} dz = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\alpha \left(-\frac{pl}{2}z - U \frac{l-\alpha}{l}z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{l-\alpha}{l}z \right) dz + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_\alpha^l \left[-\frac{pl}{2}z - U \frac{l-\alpha}{l}z + \frac{pz^2}{2} + U(z-\alpha) \right] \left(-\frac{l-\alpha}{l}z + z - \alpha \right) dz \\ \eta &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)_{U=0} = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha \left(\frac{pl}{2}z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{l-\alpha}{l}z \right) dz + \\ &+ \int_\alpha^l \left(-\frac{pl}{2}z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{l-\alpha}{l}z + z - \alpha \right) dz. \end{aligned}$$

Integrando y simplificando resulta, finalmente,

$$\eta = \frac{p}{24 EI} (\alpha^4 - 2 l \alpha^3 + l^3 \alpha).$$

440. Aplicación del teorema de Castigliano a las cadenas elásticas de eslabones finitos y sistemas de reticulado. — La aplicación del teorema de Castigliano a las cadenas elásticas de eslabones finitos y a los sistemas de reticulado, nos conduce, respectivamente, a las expresiones

$$a = \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial U} \rho_i + \mathcal{N}_i \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial U} \varepsilon_i + \mathcal{T}_i \frac{\partial \mathcal{T}_i}{\partial U} \gamma_i \right)_{\substack{X_j=X'_j \\ U=0}} \quad [a]$$

y

$$a = \left(\sum_{i=1}^n T_i \frac{\partial T_i}{\partial U} \varepsilon_i \right)_{\substack{X_j=X'_j \\ U=0}}$$

en las que a representa el desplazamiento experimentado según la dirección del esfuerzo auxiliar U , durante la deformación debida al estado de cargas que origina las reacciones $X_j = X'_j$ ($j = 1, 2, \dots, G$).

En estas expresiones las características \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i y \mathcal{T}_i , así como las tensiones, T_i , están dadas por funciones análogas a las $[b]$ y $[b']$ de (428) y a la $[b]$ de (429), a las que se agrega nuevos términos que dan la parte de dichas características, o tensiones, debida al esfuerzo auxiliar U , términos que si $\mathcal{M}'_{i,U}$, $\mathcal{N}'_{i,U}$, $\mathcal{T}'_{i,U}$ y $T'_{i,U}$ son dichas características, o tensiones, en la unión i , o en la barra i , originadas por un valor cualquiera U_1 del esfuerzo U , están dados por

$$\frac{\mathcal{M}'_{i,U}}{U_1} U; \frac{\mathcal{N}'_{i,U}}{U_1} U; \frac{\mathcal{T}'_{i,U}}{U_1} U$$

y

$$\frac{T'_{i,U}}{U_1} U.$$

Por consiguiente, se tendrá que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= \mathcal{M}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{M}'_{i,j}}{U_j} X_j + \frac{\mathcal{M}'_{i,U}}{U_1} \cdot U \\ \mathcal{N}_i &= \mathcal{N}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{N}'_{i,j}}{U_j} X_j + \frac{\mathcal{N}'_{i,U}}{U_1} \cdot U \\ \mathcal{T}_i &= \mathcal{T}_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{\mathcal{T}'_{i,j}}{U_j} X_j + \frac{\mathcal{T}'_{i,U}}{U_1} \cdot U \end{aligned}$$

y

$$T_i = T_{i,0} + \sum_{j=1}^G \frac{T'_{i,j}}{U_j} X_j + \frac{T'_{i,U}}{U_1} \cdot U,$$

de las que se deduce que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial U} \right)_{\substack{X_j = X'_j \\ U=0}} = \frac{\mathcal{M}'_{i,U}}{U_1}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial U} \right)_{\substack{X_j = X'_j \\ U=0}} = \frac{\mathcal{N}'_{i,U}}{U_1}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{T}_i}{\partial U} \right)_{\substack{X_j = X'_j \\ U=0}} = \frac{\mathcal{T}'_{i,U}}{U_1}$$

y

$$\left(\frac{\partial T_i}{\partial T} \right)_{\substack{X_j = X'_j \\ U=0}} = \frac{T'_{i,U}}{U_1},$$

Por otra parte, \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i , \mathcal{T}_i y T_i para $X_j = X'_j$ ($j = 1, 2, \dots, G$) y $U = 0$ son los valores de dichas características, o tensiones, que, en el sistema dado, hiperestático o isostático, supuesto resuelto, originan las cargas exteriores. Llamando, pues, $\overline{\mathcal{M}}_i$, $\overline{\mathcal{N}}_i$, $\overline{\mathcal{T}}_i$ y \overline{T}_i estas características, o tensiones, que las cargas originan en el sistema dado y sustituyendo en las [a], tendremos que los desplazamientos experimentados por el sistema en la dirección del esfuerzo auxiliar U , son

$$a = \frac{1}{U_1} \sum_{i=1}^n (\overline{\mathcal{M}}_i \mathcal{M}'_{i,U} \rho_i + \overline{\mathcal{N}}_i \mathcal{N}'_{i,U} \varepsilon_i + \overline{\mathcal{T}}_i \mathcal{T}'_{i,U} \gamma_i)$$

y

$$a = \frac{1}{U_1} \sum_{i=1}^n \overline{T}_i \cdot T'_{i,U} \varepsilon_i \quad [b]$$

respectivamente para una cadena de eslabones finitos y un reticulado.

441. — Prácticamente, pues, para calcular el desplazamiento absoluto o relativo, según una dada dirección, experimentado por una cadena elástica de eslabones finitos (o sistema de reticulado), en la deformación debida a un conjunto cualquiera de cargas, se procede como sigue:

Se calculan las características $\overline{\mathcal{M}}_i$, $\overline{\mathcal{N}}_i$ y $\overline{\mathcal{T}}_i$ que en las uniones i (o las tensiones \overline{T}_i que en las barras s_i) del sistema isostático o hiperestático tratado originan dichas cargas.

Se aplica luego, según la dirección del desplazamiento a calcular, un esfuerzo auxiliar de un valor arbitrario U_1 , y se calculan las características $\mathcal{M}'_{i,U}$, $\mathcal{N}'_{i,U}$ y $\mathcal{T}'_{i,U}$ (o tensiones $T'_{i,U}$) que en el sistema hecho isostático, mediante la supresión de todos los vínculos superfluos origina esta fuerza.

Se sustituye, finalmente, las cantidades así obtenidas, conjuntamente con el valor de la fuerza U_1 empleada, en las expresiones [b] del número anterior, y se tendrá el desplazamiento a buscado.

§ 4. — Extensión del principio de Menabrea-Castigliano y del teorema de Castigliano para la obtención de incógnitas hiperestáticas y desplazamientos debidos a dilataciones térmicas, de frague, higrométricas, etc.

442. Expresión del trabajo de deformación debido a dilataciones térmicas. — Un sistema hiperestático descargado que experimenta una variación de temperatura o una modificación de forma debida a cualquiera otra causa física, entra, en general, según sabemos, en un estado de tensión interna originado por las reacciones de vínculo superfluo debidas a la misma; pero, el trabajo de deformación producido por dichas tensiones internas es nulo. El es, en efecto, igual al de las fuerzas exteriores del sistema, que, por estar descargado, se reducen a las solas reacciones hiperestáticas, las que no efectúan trabajo alguno, por impedir los vínculos que las originan todo desplazamiento según sus direcciones.

No podrá, pues, hablarse del trabajo de deformación originado por la temperatura en un sistema hiperestático. Sin embargo, si en el sistema suprimimos los vínculos superfluos y aplicamos, primeramente, fuerzas de intensidad variable X_j según las direcciones de las reacciones hiperestáticas y luego hacemos actuar la deformación debida a la temperatura, u otra causa cualquiera, se tendrá, para el sistema hecho así isostático, un trabajo de deformación Φ , función de las fuerzas variables X_j ,

$$\Phi = \Phi (X_j),$$

cuya determinación es de utilidad, para lo que veremos más adelante.

Pasamos, pues, a ocuparnos del cálculo de estas funciones Φ .

443. — Consideremos una cadena hiperestática de n uniones i ($\rho_i, \varepsilon_i, \gamma_i$) ($i = 1, 2, \dots, n$), que experimenta una variación de temperatura, u otra modificación cualquiera de forma, para la cual, en el sistema hecho isostático por la supresión de los vínculos superfluos, correspondería, en torno a las uniones i , desplazamientos relativos $\theta_{i,t}$, $n_{i,t}$ y $c_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Si sobre el sistema isostático aplicamos, según lo establecido en el número anterior, gradualmente, fuerzas X_j ($j = 1, 2, \dots, G$) de intensidad variable, dirigidas según G reacciones hiperestáticas respectivas, ellas producirán, en torno a las uniones i , caractêrísticas que designaremos

$\mathcal{M}_{i,t}$, $\mathcal{N}_{i,t}$ y $\mathcal{T}_{i,t}$ y un trabajo de deformación, dado, para cada unión, según sabemos, por la expresión

$$\frac{1}{2} (\mathcal{M}_{i,t}^2 \rho_i + \mathcal{N}_{i,t}^2 \varepsilon_i + \mathcal{T}_{i,t}^2 \gamma_i).$$

Haciendo experimentar, luego, el cambio de temperatura dado, como durante la deformación respectiva las características $\mathcal{M}_{i,t}$, $\mathcal{N}_{i,t}$ y $\mathcal{T}_{i,t}$ ya actúan con toda su intensidad, se originará, en torno a la unión i , un nuevo trabajo igual a

$$\mathcal{M}_{i,t} \theta_{i,t} + \mathcal{N}_{i,t} n_{i,t} + \mathcal{T}_{i,t} c_{i,t}.$$

El trabajo total, en torno a dicha unión, será, por tanto,

$$\mathcal{M}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t} \rho_i + \theta_{i,t} \right) + \mathcal{N}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t} \varepsilon_i + n_{i,t} \right) + \mathcal{T}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{T}_{i,t} \gamma_i + c_{i,t} \right)$$

y, para toda la cadena,

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{i=1}^n \left[\mathcal{M}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t} \rho_i + \theta_{i,t} \right) + \mathcal{N}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t} \varepsilon_i + n_{i,t} \right) + \right. \\ \left. + \mathcal{T}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{T}_{i,t} \gamma_i + c_{i,t} \right) \right], \end{aligned} \quad [a]$$

expresión que nos proporciona de acuerdo a lo establecido en (442), la función Φ correspondiente al cambio de forma dado.

444. — En el caso de una variación uniforme de temperatura, que es el que más frecuentemente se presenta en las aplicaciones, las rotaciones y las traslaciones tangenciales originadas en el sistema hecho isostático son nulas, es decir,

$$\theta_{i,t} = c_{i,t} = 0.$$

Además, si λ es el coeficiente de dilatación lineal y t la variación de temperatura, las traslaciones normales, según la [a] de (339), están dadas por la expresión

$$n_{i,t} = -s_i^* \lambda t,$$

en la que s_i^* representa la longitud del eslabón anterior a la unión i , considerada como un vector dirigido en el sentido que se obtiene al recorrer la cadena de derecha a izquierda.

Sustituyendo, pues, en la [a] del número anterior, para este caso particular se tiene, como expresión del trabajo de deformación,

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t}^2 \rho_i + \mathcal{N}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t} \varepsilon_i - s_i^* \lambda t \right) + \frac{1}{2} \mathcal{T}_{i,t}^2 \gamma_i \right] \quad [a]$$

Por otra parte, si $\mathcal{N}_{i,t}$ representa el esfuerzo normal en la unión i con signo positivo cuando corresponda a un esfuerzo de tracción, y a la inversa, y s_i la longitud del elemento con signo positivo, la expresión anterior, como es fácil ver, toma la forma, más cómoda (*),

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t}^2 \rho_i + \mathcal{N}_{i,t}^* \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t}^* \varepsilon_i + s_i \lambda t \right) + \frac{1}{2} \mathcal{T}_{i,t}^2 \gamma_i \right] \quad [a']$$

Para el caso, general en la práctica, en que las deformaciones debidas a los esfuerzos normales y tangenciales sean despreciables, es decir, en que, con suficiente aproximación, pueda hacerse

$$\varepsilon_i = \gamma_i = 0,$$

la anterior se simplifica en la forma siguiente:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t}^2 \rho_i + \mathcal{N}_{i,t}^* s_i \lambda t \right). \quad [b]$$

445. — Consideremos, ahora, una cadena elástica hiperestática de eslabones infinitésimos, que experimenta una variación uniforme de temperatura de t° . Sean ρ' , ε' y γ' sus masas elásticas y coeficientes de traslación específicos y l la longitud de su fibra media. Si llamamos \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i^* y \mathcal{T}_i , las características en un punto cualquiera debidos a fuerzas X_j de intensidad variable aplicadas según las direcciones de las reacciones hiperestáticas (\mathcal{N}_i^* con signo positivo cuando corresponda a un esfuerzo de tracción), la [a'] del número anterior, tomando límites, nos da para este caso, como expresión del trabajo de deformación

$$\Phi = \int_0^l \left[\frac{1}{2} \mathcal{M}_i^2 \rho' + \mathcal{N}_i^* \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_i^* \varepsilon' + \lambda t \right) + \frac{1}{2} \mathcal{T}_i^2 \gamma' \right] ds, \quad [a]$$

que, cuando sean despreciables las deformaciones debidas a los esfuerzos normales y tangenciales, es decir, cuando con suficiente aproximación pueda hacerse

$$\varepsilon' = \gamma' = 0,$$

se convierte en

$$\Phi = \int_0^l \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_i^2 \rho' + \mathcal{N}_i^* \lambda t \right) ds. \quad [b]$$

446. — Consideremos, finalmente, un sistema hiperestático de reticulado con n barras i , de coeficientes de alargamiento ε_i ($i = 1, 2, \dots, n$),

(*) En efecto; $s_i \lambda t$ da la variación de longitud del elemento, con su signo si se atribuye signo a t , y el trabajo del esfuerzo normal $\mathcal{N}_{i,t}^*$ es directamente en valor y signo, $\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t}^* s_i \lambda t$.

que experimenta una variación de temperatura, u otra modificación cualquiera de forma, para la cual, en el sistema hecho isostático mediante la supresión de los vínculos superfluos, corresponderían a las barras variaciones de longitud $\Delta s_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Si en el sistema hecho isostático aplicamos fuerzas cualesquiera según las direcciones de las reacciones hiperestáticas, las tensiones $T_{i,t}$, que originan en las barras i , producirán para cada una de estas un trabajo • de deformación igual a

$$\frac{1}{2} T_{i,t}^2 \epsilon_i.$$

Haciendo experimentar, luego, la variación de forma, como durante la misma ya actúan las tensiones $T_{i,t}$ con toda su intensidad, se producirá, para cada barra i , un nuevo trabajo

$$T_{i,t} \Delta s_{i,t}.$$

El trabajo total para la misma será, por consiguiente,

$$\Phi_i = T_{i,t} \left(\frac{1}{2} T_{i,t} \epsilon_i + \Delta s_{i,t} \right),$$

y, para todo el reticulado,

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n T_{i,t} \left(\frac{1}{2} T_{i,t} \epsilon_i + \Delta s_{i,t} \right). \quad [a]$$

Si se trata de una variación uniforme de temperatura de t° , y s_i es la longitud de la barra genérica i , se tiene

$$\Delta s_{i,t} = s_i \lambda t.,$$

y, sustituyendo, resulta

$$\Phi = \sum_{i=1}^n T_{i,t} \left(\frac{1}{2} T_{i,t} \epsilon_i + s_i \lambda t \right). \quad [b]$$

447. Extensión del principio de Menabrea-Castigliano para la obtención de las reacciones hiperestáticas debidas a dilataciones térmicas. — Los cambios de forma de los sistemas isostáticos, originados por una variación de temperatura o por otra causa física cualquiera, pueden siempre interpretarse como producidos por determinados estados de cargas. Así, si por la temperatura se realizan desplazamientos relativos $\theta_{i,t}$, $n_{i,t}$ y $c_{i,t}$ en torno a una unión i (ρ_i , ϵ_i , γ_i) de una cadena elástica, los mismos desplazamientos podrían obtenerse, aplicando a ambos lados de la unión, en los eslabones adyacentes, respectivamente dos cuplas

opuestas $\overline{\mathcal{M}}_i$ y dos pares de fuerzas opuestas, $\overline{\mathcal{N}}_i$, paralelas al eslabón s_i y $\overline{\mathcal{C}}_i$, normales al mismo, tales que se verifique que

$$\overline{\mathcal{M}}_i \rho_i = \theta_{i,t}$$

$$\overline{\mathcal{N}}_i \varepsilon_i = n_{i,t}$$

y

$$\overline{\mathcal{C}}_i \gamma_i = c_{i,t}.$$

Equilibrándose entre sí estos pares de cuplas o fuerzas opuestas, no alteran la posición relativa de los restantes eslabones y producen, por lo tanto, el mismo efecto que la causa física originaria de los desplazamientos $\theta_{i,t}$, $n_{i,t}$ y $c_{i,t}$.

Análogamente, si debido a la temperatura, o por otra causa, las barras de un sistema de reticulado isostático experimentan determinadas variaciones de longitud $\Delta s_{i,t}$, el mismo efecto puede conseguirse aplicando en los extremos de cada barra un par de fuerzas opuestas \overline{T}_i , tales que

$$T_i \varepsilon_i = \Delta s_{i,t}.$$

Por otra parte, es evidente que las reacciones que en un sistema hiperestático origina una variación de temperatura, u otro cambio cualquiera de forma, son las mismas que las que producirían dichos estados hipotéticos de carga, toda vez que estos últimos dan al sistema la misma deformación.

448. — Sentado lo anterior, consideremos un sistema hiperestático de grado G , que experimenta un determinado cambio de temperatura. Suprimamos los vínculos superfluos, pongamos según las direcciones de las incógnitas hiperestáticas respectivas fuerzas de intensidad variable X_j ($j = 1, 2, \dots, G$) y formemos la función

$$\Phi = \Phi (X_j),$$

que proporciona los trabajos de deformación del sistema, para dichas fuerzas variables y para la variación dada de temperatura.

Independientemente, consideremos el sistema hecho isostático, sujeto a las fuerzas variables X_j y al estado especial de cargas que, según lo establecido en el número anterior, es capaz de originar la misma deformación que la variación dada de temperatura, y formemos la función

$$\Phi_1 = \Phi_1 (X_j),$$

que da, a su vez, el trabajo de deformación del sistema para aquellas fuerzas variables X_j y este estado de cargas.

Ahora bien, es fácil ver que

$$\Phi_1 = \Phi_1 (X_j) = \Phi (X_j) + C,$$

siendo C una cantidad constante, independiente de las variables X_j .

En efecto; en el segundo caso el trabajo de deformación es igual al Φ que producen las tensiones internas originadas por las fuerzas X_j en virtud de la deformación debida a ellas mismas y al estado especial de cargas capaz de producir la misma deformación que la temperatura, mas el trabajo que originan las tensiones debidas a estas cargas, trabajo este último independiente de los valores X_j . O, con más detalle, si se da, por ejemplo, una cadena hiperestática de grado G y n uniones i ($\rho_i, \varepsilon_i, \gamma_i$) que experimenta un cambio de temperatura para el que, en el sistema hecho isostático por la supresión de los vínculos superfluos, corresponden en torno a las uniones i , desplazamientos relativos $\theta_{i,t}$, $n_{i,t}$ y $c_{i,t}$, la función Φ , llamando X_j ($j = 1, 2, \dots, G$) a fuerzas de intensidad variable aplicadas según las direcciones de las incógnitas hiperestáticas, es según [a] de (443),

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi (X_j) = \sum_{i=1}^n \left[\mathcal{M}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t} \rho_i + \theta_{i,t} \right) + \right. \\ \left. + \mathcal{N}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t} \varepsilon_i + n_{i,t} \right) + \mathcal{T}_{i,t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{T}_{i,t} \gamma_i + s_{i,t} \right) \right] \end{aligned} \quad [a]$$

en la que $\mathcal{M}_{i,t}$, $\mathcal{N}_{i,t}$ y $\mathcal{T}_{i,t}$ son las características debidas a dichas fuerzas variables X_j .

Los pares de cuplas y fuerzas opuestas capaces de producir en el sistema isostático una deformación igual a la debida al cambio dado de temperatura, están determinados, para cada unión i , por las expresiones

$$\overline{\mathcal{M}}_i \rho_i = \theta_{i,t}$$

$$\overline{\mathcal{N}}_i \varepsilon_i = n_{i,t}$$

y

$$\overline{\mathcal{T}}_i \gamma_i = c_{i,t}.$$

Las características debidas a este estado de cargas y a las fuerzas variables X_j , serán, por consiguiente,

$$\mathcal{M}_{i,t} + \overline{\mathcal{M}}_i; \quad \mathcal{N}_{i,t} + \overline{\mathcal{N}}_i; \quad \mathcal{T}_{i,t} + \overline{\mathcal{T}}_i,$$

y la función Φ_1 , que da el respectivo trabajo de deformación,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\mathcal{M}_{i,t} + \overline{\mathcal{M}}_i)^2 \rho_i + (\mathcal{N}_{i,t} + \overline{\mathcal{N}}_i)^2 \varepsilon_i + (\mathcal{T}_{i,t} + \overline{\mathcal{T}}_i)^2 \gamma_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t}^2 + \frac{1}{2} \overline{\mathcal{M}}_i^2 + \mathcal{M}_{i,t} \overline{\mathcal{M}}_i \right) \rho_i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t}^2 + \frac{1}{2} \overline{\mathcal{N}}_i^2 + \mathcal{N}_{i,t} \overline{\mathcal{N}}_i \right) \varepsilon_i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \mathcal{T}_{i,t}^2 + \frac{1}{2} \overline{\mathcal{T}}_i^2 + \mathcal{T}_{i,t} \overline{\mathcal{T}}_i \right) \gamma_i \right], \end{aligned}$$

que, agrupando convenientemente los términos, da

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t}^2 + \mathcal{M}_{i,t} \overline{\mathcal{M}}_i \right] \rho_i + \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{i,t}^2 + \mathcal{N}_{i,t} \overline{\mathcal{N}}_i \right) \varepsilon_i + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \mathcal{T}_{i,t}^2 + \mathcal{T}_{i,t} \overline{\mathcal{T}}_i \right) \gamma_i \Big] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\overline{\mathcal{M}}_i^2 \rho_i + \overline{\mathcal{N}}_i^2 \varepsilon_i + \overline{\mathcal{T}}_i^2 \gamma_i \right), \end{aligned}$$

expresión que, haciendo

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\overline{\mathcal{M}}_i^2 \rho_i + \overline{\mathcal{N}}_i^2 \varepsilon_i + \overline{\mathcal{T}}_i^2 \gamma_i \right),$$

cantidad constante con respecto a las variables X_j , y observando que la primera sumatoria, sustituyendo $\mathcal{M}_i \rho_i$, $\mathcal{N}_i \varepsilon_i$, por sus iguales $\theta_{i,t}$, $n_{i,t} \dots$, se convierte, según la [a], en la función Φ , nos da

$$\Phi_1 = \Phi + C, \tag{b}$$

según queríamos demostrar.

Con un razonamiento análogo, a igual resultado hubiéramos llegado, evidentemente, para un sistema de reticulado.

Ahora bien, las efectivas reacciones hiperestáticas $X_j = X_{j,t}$ producidas por el considerado estado de cargas $\overline{\mathcal{M}}_i, \overline{\mathcal{N}}_i \dots$ (iguales, según hemos establecido, a las debidas al cambio de temperatura) están dadas, de acuerdo con el principio de Menabrea-Castigliano, por el conjunto de valores que hacen pasar por un mínimo a la función Φ . Como, por otra parte, según la [b], para este mismo conjunto de valores, también pasa por un mínimo la función Φ_1 , quiere decir que dicho principio es aplicable al cálculo de las reacciones hiperestáticas debidas a variaciones de temperatura, o a cambios de forma originados por otra causa física cualquiera, o sea, que:

Dado un sistema hiperestático que experimenta una variación de temperatura, o un cambio de forma debido a cualquier otra causa física, la función Φ , que da el trabajo de deformación que, en el sistema hecho isostático mediante la supresión de los vínculos superfluos, originan la aplicación sucesiva de fuerzas variables X_j , dirigidas según las reacciones hiperestáticas y de dicha deformación, (hecha en este orden), pasa por un mínimo para los valores $X_j = X_{j,t}$ de estas últimas, correspondientes a las efectivas reacciones de vínculo superfluo.

Demostrado la anterior, pasamos a ocuparnos de la obtención de los sistemas de ecuaciones a que conduce, lo que hacemos sólo para los casos más importantes.

449. Aplicación de lo anterior al cálculo de reacciones hiperestáticas debidas a dilataciones térmicas.— Sea una cadena elástica, hiperestática de grado G , de eslabones finitos, con n uniones i de masas elásticas ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), que experimenta una variación uniforme de temperatura de t° . Suprimamos los vínculos superfluos, pongamos en su reemplazo fuerzas de intensidades variables X_j ($j = 1, 2, \dots, G$) y tendremos que, despreciando la influencia de las deformaciones producidas por los esfuerzos normales y tangenciales, la expresión del trabajo de deformación, debido a dichas fuerzas y al cambio de temperatura, actuando en el orden enunciado, es, según la [b] de (444),

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{i,t}^2 \rho_i + \mathcal{N}_{i,t}^* s_i \lambda t \right),$$

en la que $\mathcal{M}_{i,t}$ y $\mathcal{N}_{i,t}^*$ son las características debidas a las X_j , únicas fuerzas que actúan sobre el sistema.

Según el principio de Menabrea-Castigliano, cuya extensibilidad a este caso acabamos de demostrar, para los valores $X_j = X_{j,t}$, correspondientes a las efectivas reacciones de vínculo originadas por el cambio de temperatura, Φ pasa por un mínimo, o sea,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right)_{X_j = X_{j,t}} = \left[\sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_{i,t} \frac{\partial \mathcal{M}_{i,t}}{\partial X_j} \rho_i + \frac{\partial \mathcal{N}_{i,t}^*}{\partial X_j} s_i \lambda t \right) \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0, \quad [a]$$

($j = 1, 2, \dots, G$)

que, recordando que, según (430), si $\mathcal{M}_{i,j}'$ y $\mathcal{N}^*_{i,j}$ representan las características en la unión i debidas a fuerzas $X_j = U_j$, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{i,t}}{\partial X_j} = \frac{\mathcal{M}'_{i,j}}{U_j}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{i,t}^*}{\partial X_j} = \frac{\mathcal{N}^*_{i,j}}{U_j},$$

se convierte en

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}_{i,t} \frac{\mathcal{M}'_{i,j}}{U_j} \rho_i + \frac{\mathcal{N}^*_{i,j}}{U_j} s_i \lambda t \right) \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0. \quad [b]$$

($j = 1, 2, \dots, G$)

sistema de G ecuaciones lineales entre las G incógnitas $X_{j,t}$, que permite determinar sus valores.

450. — Consideremos, ahora, una cadena de eslabones infinitesimos, hiperestática de grado G , de longitud de fibra media igual a l , que experimenta una variación uniforme de temperatura de t° . Suprimiendo, como antes, los vínculos superfluos y aplicando, según las direcciones de las incógnitas respectivas, fuerzas de intensidades variables X_j , la expresión del trabajo de deformación es, según la [b] de (445),

$$\Phi = \int_0^l \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_t^2 \rho' + \mathcal{N}_t^* \lambda t \right) ds,$$

en la que \mathcal{M}_t y \mathcal{N}_t^* son las características debidas a dichas fuerzas variables X_j , únicas que actúan sobre el sistema.

Según el principio que nos ocupa las reacciones $X_{j,t}$ son las que satisfacen al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right)_{X_j = X_{j,t}} = \left[\int_0^l \left(\mathcal{M}_t \frac{\partial \mathcal{M}_t}{\partial X_j} \rho' + \frac{\partial \mathcal{N}_t^*}{\partial X_j} \lambda t \right) ds \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0. \quad [a]$$

($j = 1, 2, \dots, G$).

Recordando que, según (422), si \mathcal{M}_j' $\mathcal{N}_j^{*'}$ son las características debidas a una fuerza $X_j = 1$, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{M}_t}{\partial X_j} = \mathcal{M}_j'$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{N}_t^*}{\partial X_j} = \mathcal{N}_j^{*'}$$

y, sustituyendo, el sistema anterior de ecuaciones, toma, también, la forma

$$\left[\int_0^l (\mathcal{M}_t \mathcal{M}_j' \rho + \mathcal{N}_j^{*' \lambda t}) ds \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0.$$

($j = 1, 2, \dots, G$)

451. — Sea, finalmente, un sistema de reticulado, hiperestático de grado G , que experimenta una variación de forma, tal que en el sistema

hecho isostático, correspondan a las n barras i , variaciones de longitud $\Delta s_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Puestas, según las reacciones hiperestáticas, fuerzas X_j de intensidad variable, el trabajo de deformación durante dicho cambio de forma será, según la [a] de (446),

$$\Phi = \sum_{i=1}^n T_{i,t} \left(\frac{1}{2} T_{i,t} \epsilon_i + \Delta s_{i,t} \right),$$

en la que $T_{i,t}$ son las tensiones que en el reticulado originan las fuerzas variables X_j , únicas que actúan sobre el mismo.

En virtud del principio de Menabrea-Castigliano, las reacciones hiperestáticas $X_j = X_{j,t}$ producidas por el cambio dado de forma, están determinadas por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{X_j = X_{j,t}} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_{i,t}}{\partial X_j} (T_{i,t} \epsilon_i + \Delta s_{i,t}) \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0, \quad [a]$$

$(j = 1, 2, \dots, G)$

que, recordando que, según (430), si $T'_{i,j}$, representa la tensión en la barra i debida a una fuerza $X_j = U_j$, se tiene

$$\frac{\partial T_{i,t}}{\partial X_j} = \frac{T'_{i,j}}{U_j},$$

se convierte en

$$\left[\sum_{i=1}^n T'_{i,j} (T_{i,t} \epsilon_i + \Delta s_{i,t}) \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0. \quad [b]$$

$(j = 1, 2, \dots, G)$

Finalmente, para el caso de una variación uniforme de temperatura de t° , en que

$$\Delta s_{i,t} = s_i \lambda t,$$

el sistema anterior toma la forma

$$\left[\sum_{i=1}^n T'_{i,j} (T_{i,t} \epsilon_i + s_i \lambda t) \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0. \quad [c]$$

$(j = 1, 2, \dots, G)$

452. Ejemplo. — Aclaremos la aplicación de las expresiones anteriores, efectuándola a un caso concreto.

Sea, al efecto, un sistema hiperestático de 2º grado, de alma llena (fig. 248 a), empotrado en A y con una articulación fija en C . Llamamos h la altura del pilar AB y l la luz de la viga BC , y siendo, I_2 e I_1 , respectivamente, los momentos de inercia de estas piezas, propongámo-

nos calcular las reacciones hiperestáticas debidas a una variación uniforme de temperatura de t° .

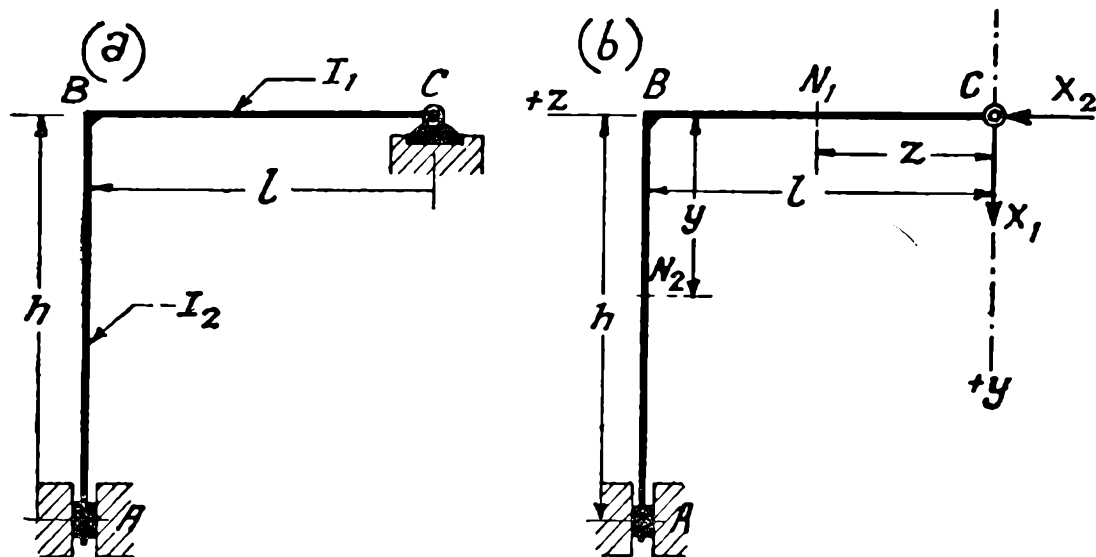


FIG. 248

Suprimidos los vínculos superfluos que corresponden a la articulación fija y puestas, según las componentes vertical y horizontal de la reacción respectiva (fig. 248 b) dos fuerzas X_1 y X_2 de intensidad variable, el principio de Menabrea-Castigliano, despreciando la influencia de los esfuerzos normales y tangenciales, nos conduce, según la [a] de (450), al sistema de ecuaciones

$$\left[\sum_{i=1}^2 \int \left(\mathcal{M}_i \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial X_j} \rho' + \frac{\partial \mathcal{N}_i^*}{\partial X_j} \lambda t \right) ds \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0, \quad (j = 1, 2)$$

toda vez que, en nuestro caso, el sistema hay que considerarlo como formado de dos cadenas elásticas CB y BA .

Adoptando los ejes $C(z, y)$ y desarrollando el sistema anterior, se tiene,

$$\left[\int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}_{1,t}}{EI_1} \frac{\partial \mathcal{M}_{1,t}}{\partial X_j} + \frac{\partial \mathcal{N}_{1,t}^*}{\partial X_j} \lambda t \right) dz + \int_0^h \left(\frac{\mathcal{M}_{2,t}}{EI_2} \frac{\partial \mathcal{M}_{2,t}}{\partial X_j} + \frac{\partial \mathcal{N}_{2,t}^*}{\partial X_j} \lambda t \right) dy \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0, \quad (j = 1, 2) \quad [a]$$

en el que $\mathcal{M}_{1,t}$ y $\mathcal{N}_{1,t}^*$ representan las características debidas a las fuerzas variables X_1 y X_2 en un punto cualquiera N_1 de la viga, de abscisa z , y $\mathcal{M}_{2,t}$ y $\mathcal{N}_{2,t}^*$ las mismas cantidades en un punto N_2 del pilar, de ordenada y .

De la figura 248 b se deduce que, para la viga, se tiene (*)

$$\mathcal{M}_{1,t} = X_1 z; \quad \mathcal{N}_{1,t}^* = -X_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{1,t}}{\partial X_1} = z; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_{1,t}}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{1,t}^*}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{N}_{1,t}^*}{\partial X_2} = -1,$$

y, para el pilar,

$$\mathcal{M}_{2,t} = X_1 l - X_2 y; \quad \mathcal{N}_{2,t}^* = -X_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{2,t}}{\partial X_1} = l; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_{2,t}}{\partial X_2} = -y$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{2,t}^*}{\partial X_1} = -1; \quad \frac{\partial \mathcal{N}_{2,t}^*}{\partial X_2} = 0.$$

Sustituyendo en el sistema [a] y haciendo sucesivamente j igual a 1 y 2, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{EI_1} \int_0^l X_{1,t} z^2 dz + \int_0^h \left(\frac{X_{1,t} l - X_{2,t} y}{EI_2} l - \lambda t \right) dy = 0 \\ - \int_0^l \lambda t dz - \frac{1}{EI_2} \int_0^h (X_{1,t} l - X_{2,t} y) y dy = 0, \end{array} \right.$$

que, integrando y simplificando, se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{l^3}{3 I_1} + \frac{l^2 h}{I_2} \right) X_{1,t} - \frac{l h^2}{2 I_2} X_{2,t} - E \lambda t h = 0 \\ - \frac{l h^2}{2 I_2} X_{1,t} + \frac{h^3}{3 I_2} X_{2,t} - E \lambda t l = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema, nos da, finalmente,

$$X_{1,t} = E I_2 \lambda t \frac{3 l^2 + 2 h^2}{l \left(\frac{2 I_2}{3 I_1} l^2 h + \frac{1}{2} l h^2 \right)}$$

y

$$X_{2,t} = E I_2 \lambda t \frac{2 \frac{I_2}{I_1} \frac{l^3}{h^2} + 6 \frac{l^2}{h} + 3 h}{\frac{2}{3} \frac{I_2}{I_1} l^2 h + \frac{1}{2} l h^2}.$$

[a]

(*) $\mathcal{N}_{1,t}^*$ es igual a X_2 , con signo cambiado porque cuando ésta es positiva, como está dibujada en la figura, origina en la viga un esfuerzo de compresión (negativo).

453. Extensión del teorema de Castigliano para el cálculo de desplazamientos debidos a dilataciones térmicas. — Por consideraciones análogas a las hechas en (447) y (448) es fácil demostrar que el teorema de Castigliano es extensible, también, al cálculo de un desplazamiento cualquiera a debido a una dilatación térmica. Es decir, que si se da un sistema, isostático o hiperestático, que experimenta una determinada variación de temperatura y se forma la función

$$\Phi = \Phi (X_j, U),$$

que proporciona el trabajo de deformación que se produce en el mismo (hecho isostático si es hiperestático), haciendo actuar primero un esfuerzo auxiliar U (y fuerzas variables X_j según las reacciones hiperestáticas si es hiperestático), y luego la deformación debida a dicho cambio de temperatura, el desplazamiento a que este último origina en el sistema dado, según el esfuerzo auxiliar U considerado, es

$$a = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)_{\substack{X_j = X_{j,t} \\ U=0}},$$

siendo $X_j = X_{j,t}$, en el caso de un sistema hiperestático, las reacciones superfluas debidas al cambio de temperatura, que se supondrán calculadas.

No insistimos mayormente sobre este asunto, por no ofrecer ninguna dificultad ni especial interés práctico. Nos limitaremos, por ello, a aclarar lo anteriormente expuesto, aplicándolo a un caso concreto.

454. — Sea el sistema representado en la figura 248 bis *a* y ya tratado en (452), que experimenta un cambio de temperatura de t° , y propongámonos hallar el desplazamiento a que el punto N de abscisa α experimenta verticalmente durante la deformación debida al mismo.

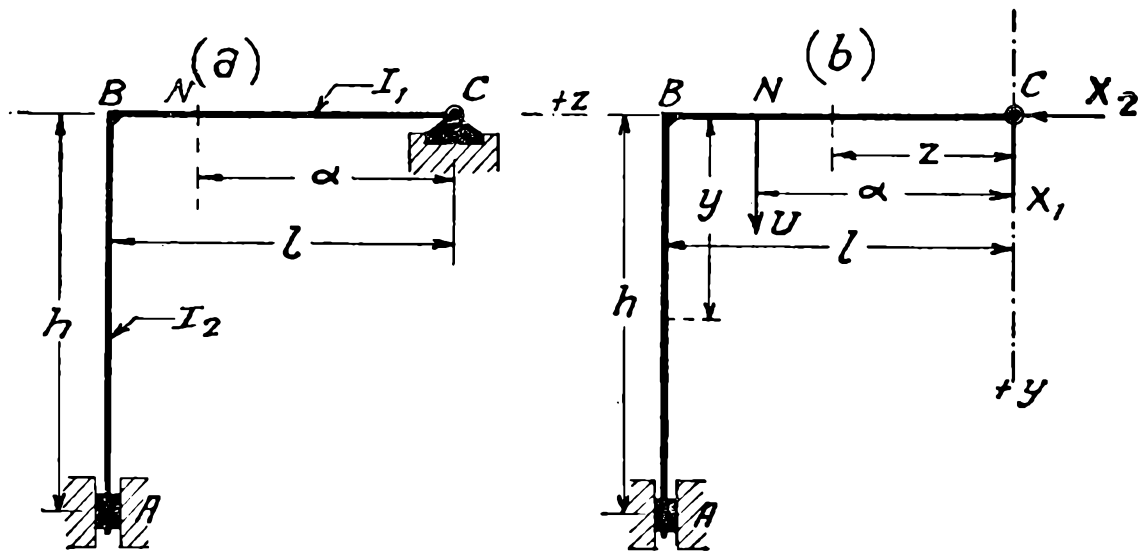


FIG. 248 bis

Suprimamos los vínculos superfluos que implica la articulación C y apliquemos en este punto (fig. 248 bis *b*), dos fuerzas variables, X_1 y X_2

dirigidas según las componentes vertical y horizontal de la reacción hiperestática en el mismo; hagamos actuar, además, en N , una fuerza U , también variable (esfuerzo auxiliar correspondiente al desplazamiento α a calcular). Llamando \mathcal{M}_1 y \mathcal{N}_1^* , las características que este estado de cargas originan entre C y N , \mathcal{M}_2 y \mathcal{N}_2^* las mismas cantidades entre N y B y \mathcal{M}_3 y \mathcal{N}_3^* entre B y A , la función Φ que da el trabajo de deformación debido a las mismas y al cambio de temperatura de t° , es

$$\Phi = \int_0^\alpha \left(\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}_1^2}{EI_1} + \mathcal{N}_1^* \lambda t \right) dz + \int_\alpha^l \left(\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}_2^2}{EI_1} + \mathcal{N}_2^* \lambda t \right) dz + \\ + \int_0^h \left(\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}_3^2}{EI_2} + \mathcal{N}_3^* \lambda t \right) dy,$$

y, por consiguiente, el desplazamiento α buscado

$$a = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)_{\substack{x_j = x_{j,t} \\ U=0}} = \left[\int_0^\alpha \left(\frac{\mathcal{M}_1}{EI_1} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} + \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial U} \lambda t \right) dz + \right. \\ \left. + \int_\alpha^l \left(\frac{\mathcal{M}_2}{EI_1} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} + \frac{\partial \mathcal{N}_2^*}{\partial U} \lambda t \right) dz + \int_0^h \left(\frac{\mathcal{M}_3}{EI_2} \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial U} + \frac{\partial \mathcal{N}_3^*}{\partial U} \lambda t \right) dy \right]_{\substack{x_j = x_{j,t} \\ U=0}}$$

De la figura se deduce que

$$\mathcal{M}_1 = X_1 z; \quad \mathcal{N}_1^* = -X_2$$

$$\mathcal{M}_2 = X_1 z + U(z - \alpha); \quad \mathcal{N}_2^* = -X_2$$

y

$$\mathcal{M}_3 = X_1 l + U(l - \alpha) - X_2 y; \quad \mathcal{N}_3^* = -X_1 - U$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{N}_1^*}{\partial U} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} = z - \alpha; \quad \frac{\partial \mathcal{N}_2^*}{\partial U} = 0$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial U} = l - \alpha; \quad \frac{\partial \mathcal{N}_3^*}{\partial U} = -1,$$

y, sustituyendo,

$$a = \left[\frac{1}{EI_1} \int_\alpha^l \left(X_1 z + U(z - \alpha) \right) (z - \alpha) dz + \right. \\ \left. + \frac{1}{EI_2} \int_0^h \left(X_1 l + U(l - \alpha) - X_2 y \right) (l - \alpha) dy - \int_0^h \lambda t dy \right]_{\substack{x_j = x_{j,t} \\ U=0}} = \\ = \frac{1}{EI_1} \int_\alpha^l X_{1,t} z (z - \alpha) dz + \frac{1}{EI_2} \int_0^h (X_{1,t} l - X_{2,t} y) (l - \alpha) dy - \int_0^h \lambda t dy,$$

que, integrando y simplificando, nos da

$$a = \frac{X_{1,t}}{EI_1} \left(\frac{l^3}{3} - \frac{\alpha l^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6} \right) + \frac{l - \alpha}{EI_2} \left(X_{1,t} l h - X_{2,t} \frac{h^2}{2} \right) - \lambda t h,$$

en la que habría que sustituir $X_{1,t}$ y $X_{2,t}$, por sus valores dados por las [a] de (451).

455. Caso en que actúan simultáneamente cargas y dilataciones térmicas. — En el caso en que además de una variación de temperatura actuara sobre el sistema un determinado estado de cargas, las funciones Φ las obtendríamos, tanto para la aplicación del principio de Menabrea-Castigliano como del teorema de Castigliano, reemplazando en las anteriormente obtenidas, las características $\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i, \mathcal{T}_i$ o las tensiones $T_{i,t}$, debidas a las fuerzas X_j (y para el teorema de Castigliano a éstas y el esfuerzo auxiliar U) por las debidas a ellas más las originadas en el sistema hecho isostático por el estado de cargas. En esta forma se podrían obtener directamente las reacciones totales debidas a la temperatura y las cargas, o los desplazamientos debidos a la deformación producida por estas dos causas.

Pero, por lo general, será más cómodo proceder por partes, en la forma conocida, calculando primeramente el efecto de las cargas y luego el de la temperatura y sumando los resultados, tanto más cuanto que en las aplicaciones prácticas, interesa, por lo común, conocer el efecto de las cargas solas, y las modificaciones que origina la temperatura.

EJERCICIOS DEL CAPITULO VI

I. — Aplicaciones del principio de Menabrea-Castigliano y del teorema de Castigliano a sistemas de reticulado.

Datos. — Se da el sistema de triangulado simple representado en las láminas VII y VIII, isostáticamente sustentado, pero con un vínculo interno superfluo constituido por la barra $AB \equiv 0-20$.

Se pide resolver los siguientes problemas:

1. — Hallar, aplicando el principio de Menabrea-Castigliano, la tensión hiperestática $X_1 = T_{0-20}$ que, en la barra superflua 0-20, originan las cargas P_i ($i = 1, \dots, 5$) representadas en la lámina VII (*).

Según la [d] de (430), y dado que en este caso existe una sola incógnita hiperestática, la tensión buscada está dada por la expresión

$$\sum T^*_{i,j} \frac{T'_{i,j}}{U_1} \epsilon_{i,j} = 0,$$

en la que, entendiéndose extendida la sumatoria a la totalidad de las barras del reticulado, $T'_{i,j}$ representa las tensiones que en las barras del sistema hecho isostático mediante la supresión de la 0-20, originan un

(*) Este cálculo, ha sido ya efectuado en el problema (1) del ejercicio (I) del Cap. IV, aplicando la ley de Betti. Véase pág. 42.

par de fuerzas opuestas $X_1 = U_1$, dirigidas según la incógnita hiperestática, y $T^*_{i,j}$ las tensiones que en el sistema hiperestático producen las cargas P_i .

Estas últimas tensiones, si llamamos $\overline{T}_{i,j}$ las que originan las cargas P_i en el sistema isostático, y X_1 , en general, el valor de la incógnita hiperestática, están dadas por la expresión

$$T^*_{i,j} = \overline{T}_{i,j} + \frac{T'_{i,j}}{U_1} \cdot X_1,$$

que, sustituyendo en la anterior, da

$$\sum \left(\overline{T}_{i,j} + \frac{T'_{i,j}}{U_1} X_1 \right) \frac{T'_{i,j}}{U_1} \epsilon_{i,j} = 0$$

$$X_1 = T_{0-20} = - \frac{\sum \overline{T}_{i,j} T'_{i,j} \epsilon_{i,j}}{\sum T'^2_{i,j} \epsilon_{i,j}} U_1. \quad [a]$$

Las tensiones $T'_{i,j}$, originadas por una fuerza $U_1 = 1 t$, se han obtenido en la lámina VII mediante un Cremona y se consignan en el cuadro N° 1 de la página 43, en el que también se dan los coeficientes de alargamiento $\epsilon_{i,j}$ de las barras. Las tensiones $\overline{T}_{i,j}$, originadas, en el sistema hecho isostático, por las cargas P_i se han obtenido también en la lámina VII mediante un Cremona y están dadas en el cuadro N° 4 de la página 46. En el cuadro N° 1 adjunto se agrupan todos estos elementos y se calculan las sumatorias que figu-

CUADRO N° 1

Barra i,j	$T'_{i,j}$ t	$\overline{T}_{i,j}$ t	$T'_{i,j} \epsilon_{i,j}$ $10^{-6} m$	$T'_{i,j} \overline{T}_{i,j} \epsilon_{i,j}$ $10^{-6} tm$	$T'^2_{i,j} \epsilon_{i,j}$ $10^{-6} tm$
0-1	+ 2,80	- 29,6	+ 127	- 3760	+ 355,0
0-2	- 3,27	+ 16,7	- 188	- 3140	+ 615,0
1-2	0	0	0	0	0
1-3	+ 2,80	- 29,6	+ 127	- 3760	+ 355,0
2-3	0	0	0	0	0
2-4	- 3,27	+ 16,7	- 196	- 3270	+ 641,0
3-4	0	0	0	0	0
3-5	+ 2,80	- 29,6	+ 127	- 3760	+ 355,0
4-5	- 0,73	+ 3,80	- 73,0	- 277,0	+ 53,30
4-6	- 2,93	+ 15,0	- 265	- 3970	+ 776,0
5-6	+ 0,50	- 2,60	+ 72,5	- 186,0	+ 36,30
5-7	+ 2,10	- 25,8	+ 237	- 6120	+ 497,0
6-7	- 2,27	+ 23,8	- 420	- 9990	+ 954,0
6-8	+ 1,60	- 24,8	+ 181	- 4490	+ 200,0
6-9	- 3,67	+ 31,2	- 514	- 16040	+ 1880,0
7-8	+ 1,80	- 19,8	+ 180	- 3560	+ 324,0
8-9	- 1,83	+ 19,6	- 238	- 4660	+ 436,0
8-10	+ 3,42	- 40,0	+ 342	- 13100	+ 1170,0
9-10	0	- 4,40	0	0	0
9-11	- 4,43	+ 42,4	- 332	- 14100	+ 1470,0
0-20	+ 1,00	0	+ 450	0	+ 450,0

$$\frac{1}{2} \sum T'_{i,j} \overline{T}_{i,j} \epsilon_{i,j} = -94200,0$$

$$\frac{1}{2} \sum T'^2_{i,j} \epsilon_{i,j} = +10600,0$$

ran en la expresión anterior. Dada la simetría del sistema y de las cargas, este último cálculo se efectúa solamente para la mitad izquierda del reticulado (para las barras 9-11 y 0-20 se han tomado para $\epsilon_{i,j}$ valores iguales a 0,5 ϵ_{9-11} y 0,5 ϵ_{0-20}), obteniéndose los siguientes resultados:

$$\frac{1}{2} \sum \overline{T}_{i,j} T'_{i,j} \epsilon_{i,j} = -94200 \times 10^{-6} tm$$

y

$$\frac{1}{2} \sum T'^2_{i,j} \epsilon_{i,j} = +10600 \times 10^{-6} tm$$

Sustituyendo en la [a], se obtiene, finalmente, para la tensión hiperestática buscada,

$$X_1 = T_{0-20} = - \frac{-94\,200 \times 10^{-6} \text{ tm}}{+10\,600 \times 10^{-6} \text{ tm}} \text{ t} = +8,88 \text{ t}$$

2. — Hallar, aplicando el principio de Menabrea-Castigliano, la tensión hiperestática T'_{0-20} que, en la barra superflua 0-20, originan las cargas oblicuas F_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) representadas en la lámina VII (*).

Esta tensión T'_{0-20} está dada por la misma expresión [a] del problema anterior, siempre que para las $T_{i,j}$ se tomen las tensiones que, en el sistema hecho isostático por la supresión de la barra 0-20, originan las cargas F_i . Estas tensiones se determinan en la lámina VIII mediante un Cremona y se consignan en el cuadro N° 2 adjunto. Siendo las tensiones $T'_{i,j}$ las mismas que en el problema anterior, ya tenemos calculada la suma-

CUADRO N° 2

Barra i,j	$T_{i,j}$ t	$T'_{i,j} \epsilon_{i,j}$ 10^{-6} m	$T_{i,j} T_{i,j} \epsilon_{i,j}$ 10^{-6} tm	Barra i,j	$T_{i,j}$ t	$T'_{i,j} \epsilon_{i,j}$ 10^{-6} m	$T_{i,j} T_{i,j} \epsilon_{i,j}$ 10^{-6} tm
0-1	+ 21,2	+ 127	+ 2690,0	10-11	+ 3,20	—	—
0-2	— 28,4	— 188	+ 5340,0	10-12	+ 17,8	+ 342	+ 6080,0
1-2	—	—	—	11-12	— 13,6	— 238	+ 3240,0
1-3	+ 21,2	+ 127	+ 2690,0	11-13	— 21,8	— 514	+ 11200,0
2-3	—	—	—	12-13	+ 12,0	+ 181	+ 2170,0
2-4	— 28,4	— 196	+ 5560,0	12-14	+ 6,20	+ 180	+ 2210,0
3-4	—	—	—	13-14	— 10,4	— 420	+ 4370,0
3-5	+ 21,2	+ 127	+ 2690,0	13-15	— 3,60	+ 72,5	— 261,0
4-5	— 6,00	— 73,0	+ 438,0	14-15	+ 9,00	+ 237	+ 2130,0
4-6	— 25,8	— 265	+ 6840,0	13-16	— 9,80	— 265	+ 2590,0
5-6	+ 4,20	+ 72,5	+ 304,0	15-16	+ 0,800	— 73,0	— 58,4
5-7	+ 15,4	+ 237	+ 3600,0	15-17	+ 7,40	+ 127	+ 940,0
6-7	— 16,8	— 420	+ 7050,0	16-17	— 3,60	—	—
6-8	+ 8,20	+ 181	+ 1480,0	16-18	— 7,00	— 196	+ 1370,0
7-8	+ 13,4	+ 180	+ 2410,0	17-18	+ 3,00	—	—
6-9	— 28,0	— 514	+ 14400,0	17-19	+ 3,20	+ 127	+ 406,0
8-9	— 9,40	— 238	+ 2240,0	18-19	— 2,40	—	—
9-10	— 3,40	—	—	18-20	— 3,20	— 188	+ 602,0
8-10	+ 21,6	+ 342	+ 7380,0	19-20	+ 2,40	+ 127	+ 305,0
9-11	— 29,6	— 664	+ 19700,0	0-20	—	+ 900	—

$$\sum T'_{i,j} T_{i,j} \epsilon_{i,j} = +121000,0$$

(*) Véase página 45, donde este problema ya ha sido resuelto mediante la ley de Betti.

toria del denominador de la [a], así como también los productos $T'_{i,j} \epsilon_{i,j}$ que se han consignado nuevamente en el cuadro N° 2 (*), en el que se calcula la sumatoria $\sum T'_{i,j} T'_{i,j} \epsilon_{i,j}$. Sustituyendo en la [a] los valores obtenidos, resulta, finalmente,

$$T'_{0-20} = - \frac{121\,000 \times 10^{-6} \text{ tm}}{2 \times 10\,600 \times 10^{-6} \text{ tm}} 1 \text{ t} = -5,77 \text{ t.}$$

3. — Calcular, aplicando el teorema de Castigliano, la proyección sobre la recta xx (Lám. VIII) del desplazamiento que el nudo 13 experimenta bajo la acción de las cargas verticales P_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) (**).

CUADRO N° 3

Barra i,j	$\epsilon_{i,j}$ 10^{-6} m t^{-1}	$T^*_{i,j}$ t	$T'_{i,j}, U$ t	$T^*_{i,j} T'_{i,j}, U \epsilon_{i,j}$ 10^{-6} tm
0-1	45,5	— 4,90	+ 1,21	— 269,0
0-2	57,5	— 12,2	— 1,93	+ 1350,0
1-2	35,0	—	—	—
1-3	45,5	— 4,90	+ 1,21	— 269,0
2-3	95,0	—	—	—
2-4	60,0	— 12,2	— 1,93	+ 1410,0
3-4	70,0	—	—	—
3-5	45,5	— 4,90	+ 1,21	— 269,0
4-5	100,0	— 2,65	— 0,500	+ 133,0
4-6	90,6	— 10,9	— 1,71	+ 1690,0
5-6	145,0	+ 1,82	+ 0,330	+ 87,1
5-7	113,0	— 7,20	+ 0,743	— 605,0
6-7	185,0	+ 3,70	— 0,830	— 568,0
6-8	113,0	— 10,7	+ 0,214	— 259,0
6-9	140,0	— 1,20	— 1,58	+ 265,0
7-8	100,0	— 3,90	+ 0,671	— 262,0
8-9	130,0	+ 3,40	— 0,257	— 114,0
8-10	100,0	— 9,80	+ 0,900	— 882,0
9-10	130,0	— 4,40	— 0,500	+ 286,0
9-11	150,0	+ 3,20	— 1,34	— 643,0
10-11	130,0	— 4,40	+ 0,530	— 303,0
10-12	100,0	— 9,80	+ 0,314	— 308,0
11-12	130,0	+ 3,40	— 0,814	— 359,0
12-14	100,0	— 3,90	— 0,400	+ 156,0
11-13	140,0	— 1,20	— 0,614	+ 103,0
12-13	113,0	— 10,7	+ 0,700	— 846,0
13-14	185,0	+ 3,70	+ 0,514	+ 352,0
14-15	113,0	— 7,20	— 0,471	+ 383,0
13-15	145,0	+ 1,82	— 0,060	— 15,8
13-16	90,6	— 10,9	+ 0,271	— 268,0
15-16	100,0	— 2,65	+ 0,070	— 18,6
15-17	45,5	— 4,90	— 0,543	+ 121,0
16-17	70,0	—	—	—
16-18	60,0	— 12,2	+ 0,300	— 219,0
17-18	95,0	—	—	—
17-19	45,5	— 4,90	— 0,543	+ 121,0
18-19	35,0	—	—	—
18-20	57,5	— 12,2	+ 0,300	— 210,0
19-20	45,5	— 4,90	— 0,543	+ 121,0
0-20	900,0	+ 8,84	—	—

$\sum T^*_{i,j} T'_{i,j}, U \epsilon_{i,j} = -105,0$

(*) La sumatoria $\sum T^*_{i,j} \epsilon_{i,j}$ y los productos $T^*_{i,j} \epsilon_{i,j}$ son comunes para el cálculo de la tensión T_{0-20} debida a cualquier estado de cargas.

(**) Véase página 46, donde este problema ya ha sido resuelto mediante la ley de Betti (teorema de Mohr).

Según la [b] de (440) este desplazamiento está dado por la expresión

$$a = \frac{1}{U_1} \sum T^{*i,j} T'^{i,j} U \varepsilon_{i,j},$$

en la que $T^{*i,j}$ representa las tensiones que en el sistema hiperestático originan las cargas P_i y $T'^{i,j}U$ las tensiones que en el sistema hecho isostático mediante la supresión de la barra 0-20, origina un esfuerzo auxiliar de intensidad arbitraria U_1 , aplicado en el nudo 13 según la dirección del desplazamiento a calcular.

Las tensiones $T^{*i,j}$ ya han sido obtenidas en el problema (3) del ejercicio (1) del capítulo IV y se consignan en el cuadro N° 4 de la página 46. En la lámina VIII se determinan, además, mediante un Cremona, las tensiones $T'^{i,j}U$ que un esfuerzo auxiliar $U_1 = 1 t$ origina en las barras del reticulado hecho isostático. En el cuadro N° 3 adjunto se agrupan estas tensiones y se calcula la sumatoria de la expresión anterior, resultando, de acuerdo con el mismo,

$$a = \frac{1}{U_1} \sum T^{*i,j} T'^{i,j} U \varepsilon_{i,j} = \frac{1}{1 t} \times (-105 \times 10^{-6} \text{ tm}) = -105 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

4. — Calcular, aplicando el principio de Menabrea-Castigliano, la tensión hiperestática T'''_{0-20} en la barra 0-20, originada por el siguiente cambio de temperatura: el cordón exterior experimenta un aumento de 30° mientras el interior y el tensor no sufren cambio alguno; para las barras de diagonal se supone, además, que el aumento de temperatura varía linealmente desde 30° en sus extremos exteriores hasta 0° en los interiores (*).

Según lo establecido en (451), y teniendo en cuenta que en este caso se trata de un sistema de una sola incógnita hiperestática, la tensión incógnita buscada está dada por la expresión

$$\sum T'^{i,j} (T^{*i,j} \varepsilon_{i,j} + \Delta s_{i,j}) = 0, \quad [a]$$

en la que $T'^{i,j}$ representa las tensiones, ya obtenidas, que la fuerza $X_1 = U_1 = 1 t$, actuando según la incógnita hiperestática, origina en las barras del reticulado, y $T^{*i,j}$ las tensiones originadas por una fuerza variable X_1 según la dirección de la misma incógnita, dadas, evidentemente, por la expresión.

$$T^{*i,j} = \frac{T'^{i,j}}{U_1} X_1 \quad [b]$$

Además, $\Delta s_{i,j}$ son las variaciones de longitud de las barras, producidas, en el sistema hecho isostático, por la variación de temperatura.

Sustituyendo la [b] en la [c] se tiene

$$\sum T'^{i,j} \left(\frac{T'^{i,j}}{U_1} X_1 \varepsilon_{i,j} + \Delta s_{i,j} \right) = 0$$

$$X_1 = T_{0-20} = - \frac{\sum T'^{i,j} \Delta s_{i,j}}{\sum T'^{i,j} \varepsilon_{i,j}} U_1.$$

Las tensiones $T'^{i,j}$, originadas por una fuerza $U_1 = 1 t$, ya han sido halladas para resolver el problema (1) y se consignan en el cuadro N° 4. Los alargamientos $\Delta s_{i,j}$ fueron calculados para resolver el problema (1) del ejercicio (III) del capítulo IV y se consignan en el cuadro N° 1 de la página 50. Estos elementos han sido agrupados nuevamente en el cuadro N° 4 adjunto, en el que además se calcula la sumatoria $\frac{1}{2} \sum T'^{i,j} \Delta s_{i,j}$, extendida sólo a la mitad izquierda del sistema, dada su simetría y la de la variación de temperatura. La sumatoria del denominador ya ha sido calculada para resolver el problema (1) de este ejercicio, habiendo resultado (cuadro N° 1)

$$\frac{1}{2} \sum T'^{i,j} \varepsilon_{i,j} = +10\,600 \times 10^{-6} \text{ tm.}$$

Sustituyendo, pues, los valores obtenidos, se tiene para la tensión superflua T'''_{0-20} , debida a la temperatura,

$$T'''_{0-20} = - \frac{14\,500 \times 10^{-6} \text{ tm}}{10\,600 \times 10^{-6} \text{ tm}} 1 t = -1,3 t.$$

(*) Véase página 50, donde este problema ya ha sido resuelto mediante la ley de Betti.

CUADRO N° 4

Barra i,j	$T'_{i,j}$ t	$\Delta s_{i,j}$ 10^{-6} tm	$T'_{i,j} \Delta s_{i,j}$ 10^{-6} tm
0-1	+ 2,80	810	+ 2270,0
0-2	- 3,27	—	—
1-2	—	142	—
1-3	+ 2,80	810	+ 2270,0
2-3	—	385	—
2-4	- 3,27	—	—
3-4	—	283	—
3-5	+ 2,80	810	+ 2270,0
4-5	- 0,730	405	- 296,0
4-6	- 2,93	—	—
5-6	+ 0,500	587	+ 293,0
5-7	+ 2,10	1377	+ 2890,0
6-7	- 2,27	749	- 1700,0
6-8	+ 1,60	688	+ 1100,0
6-9	- 3,67	—	—
7-8	+ 1,80	1215	+ 2180,0
8-9	- 1,83	526	- 963,0
8-10	+ 3,42	1215	+ 4150,0
9-10	—	526	—
9-11	- 4,43	—	—
0-20	+ 1,00	—	—

$$\frac{1}{2} \sum T'_{i,j} \Delta s_{i,j} = + 14500,0$$

II. — Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano a la resolución de sistemas de eslabones infinitésimos.

Datos. — Se da un pórtico simétrico de luz l (Lám. X), altura h , momentos de inercia I_1 e I_2 , respectivamente para los pilares y la viga superior, y sujeto en toda la extensión de esta última a una carga uniformemente repartida de intensidad específica p .

Se pide resolver los siguientes problemas:

1. — Hallar, aplicando el principio de Menabrea-Castigliano, las expresiones que dan los valores de las tres incógnitas hiperestáticas que corresponden al sistema.

Despreciaremos la influencia de las traslaciones normales y tangenciales, y tomaremos como incógnitas hiperestáticas las tres componentes X_1' , X_2' y X_3' de la reacción en el empotramiento D (Lám. X), dirigidas, respectivamente, según la recta en el infinito y las vertical y horizontal que pasan por D .

Siendo distintas las funciones que dan los momentos flectores en las tres piezas que constituyen el pórtico, estamos en el caso de un sistema constituido por otras tantas partes a considerarse como cadenas elásticas de eslabones infinitésimos, y, llamando en general X'_j ($j = 1, 2, 3$) las incógnitas hiperestáticas buscadas, y \mathcal{M}_i ($i = 1, 2, 3$) los momentos flectores que, respectivamente en el pilar de la derecha, en la viga superior y en el pilar de la izquierda, del sistema hecho isostático mediante la supresión del empotramiento D , originan la carga p y las fuerzas X_j ($j = 1, 2, 3$) de intensidades variables aplicadas según las direcciones de las incógnitas X'_j buscadas, estas incógnitas, según la [a] de (423), están dadas por el sistema de ecuaciones:

$$\left[\sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{\mathcal{M}_i}{EI_i} \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial X_j} ds_i \right]_{X_j = X'_j} = 0,$$

$(j = 1, 2, 3)$

que, desarrollando y haciendo

$$\alpha = \frac{I_2}{I_1},$$

toma la forma

$$[a] \left\{ \begin{array}{l} \left[\int_0^h \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_1} ds + \int_0^l \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_1} ds + \alpha \int_0^h \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_1} ds \right]_{X_j = X'_j} = 0 \\ \left[\int_0^h \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_2} ds + \int_0^l \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_2} ds + \alpha \int_0^h \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_2} ds \right]_{X_j = X'_j} = 0 \\ \left[\int_0^h \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_3} ds + \int_0^l \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_3} ds + \alpha \int_0^h \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_3} ds \right]_{X_j = X'_j} = 0 \end{array} \right.$$

De acuerdo a las notaciones de la lámina y refiriendo el sistema a los ejes $D(z, y)$, se tiene, para un punto N_1 del pilar de la derecha, de ordenada y ,

$$\mathcal{M}_1 = X_1 + X_3 y$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_1} = 1; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_3} = y$$

Análogamente, para un punto de la viga, N_2 , de abscisa z , se verifica

$$\mathcal{M}_2 = X_1 + X_2 z + X_3 h + \frac{pz^2}{2}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_1} = 1; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_2} = z \quad \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_3} = h.$$

Finalmente, para un punto del pilar izquierdo, N_3 , de ordenada y , se tiene

$$\mathcal{M}_3 = X_1 + X_2 l + X_3 y + \frac{pl^2}{2}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_1} = 1; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_2} = l; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_3} = y.$$

Sustituyendo en las [a], y haciendo desde 0 a $X_j = X'_j$ y notando que ds es igual a dy para los pilares y a dz para la viga, resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \int_0^h (X_1' + X_3' y) dy + \int_0^l \left(X_1' + X_2' z + X_3' h + \frac{pz^2}{2} \right) dz + \alpha \int_0^h \left(X_1' + X_2' l + X_3' y + \frac{pl^2}{2} \right) dy = 0 \\ \alpha \int_0^h (X_1' + X_3' y) \times 0 \times dy + \int_0^l \left(X_1' + X_2' z + X_3' h + \frac{pz^2}{2} \right) z dz + \alpha \int_0^h \left(X_1' + X_2' l + X_3' y + \frac{pl^2}{2} \right) l dy = 0 \\ \alpha \int_0^h (X_1' + X_3' y) y dy + \int_0^l \left(X_1' + X_2' z + X_3' h + \frac{pz^2}{2} \right) h dz + \alpha \int_0^h \left(X_1' + X_2' l + X_3' y + \frac{pl^2}{2} \right) y dy = 0 \end{array} \right.$$

Integrando y simplificando se tiene, por último,

$$[b] \left\{ \begin{array}{l} \left(2\alpha h + l \right) X_1' + \left(\alpha hl + \frac{l^3}{2} \right) X_2' + \left(\alpha h^3 + hl \right) X_3' + \frac{pl^3}{2} \left(\alpha h + \frac{l}{3} \right) = 0 \\ \left(\alpha hl + \frac{l^3}{2} \right) X_1' + \left(\alpha hl^3 + \frac{l^3}{3} \right) X_2' + \left(\frac{\alpha h^3 l}{2} + \frac{hl^3}{2} \right) X_3' + \frac{pl^3}{2} \left(\alpha hl + \frac{l^3}{4} \right) = 0 \\ \left(\alpha h^3 + hl \right) X_1' + \left(\frac{\alpha hl^3}{2} + \frac{hl^3}{2} \right) X_2' + \left(\frac{2\alpha h^3}{3} + h^3 l \right) X_3' + \frac{pl^3}{2} \left(\frac{\alpha h^3}{2} + \frac{hl}{3} \right) = 0 \end{array} \right.$$

sistema de ecuaciones lineales entre las incógnitas X_1' , X_2' y X_3' que, resuelto, nos da

$$X_1' = - \frac{pl^2}{12(k+2)}$$

$$X_2' = - \frac{pl}{2} \quad [c]$$

$$X_3' = \frac{pl^2}{4h(k+2)},$$

en las que se ha hecho

$$k = \alpha \frac{h}{l} = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} \quad [d]$$

y con las que queda resuelto el problema (*).

2. — Calcular las reacciones que en el pórtico representado en la lámina X, en el que $l = 8$ m, $h = 5$ m, $I_1 = 0,772 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ e $I_2 = 0,965 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, origina una carga uniformemente repartida de intensidad específica $p = 2 \text{ tm}^{-1}$.

Se tiene

$$k = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} = \frac{0,965}{0,772} \cdot \frac{5}{8} = 0,781$$

y, por consiguiente,

$$X_1' = - \frac{pl^2}{12(k+2)} = - \frac{2 \cdot 8^2}{12(0,781+2)} \text{ tm} = - 3,83 \text{ tm}$$

$$X_2' = - \frac{pl}{2} = - \frac{2 \cdot 8}{2} \text{ t} = - 8 \text{ t}$$

y

$$X_3' = \frac{pl^2}{4h(k+2)} = \frac{2 \cdot 8^2}{4 \cdot 5(0,781+2)} \text{ t} = + 2,3 \text{ t}.$$

3. — Trazar el diagrama de momentos flectores que en el pórtico anterior origina la carga p .

En el pilar CD los momentos flectores (adoptando como convención de signos, la común del momento de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección considerada) son iguales y de signo contrario a los momentos de las tres componentes de la reacción en D, X_1' , X_2' y X_3' , ya conocidas, y varían, por tanto, según una función lineal.

Para los puntos D y C se tiene, respectivamente,

$$\mathcal{M}_D^* = - X_1' = + 3,83 \text{ tm}$$

y

$$\mathcal{M}_C^* = - (X_1' + X_3' h) = - (- 3,83 + 2,3 \cdot 5) \text{ tm} = - 7,69 \text{ tm}$$

Adoptando para el diagrama de momentos flectores pedido la escala $\frac{5 \text{ tm}}{\text{cm}}$, se han llevado en la lámina, segmentos $\overline{DD_1}$ y $\overline{CC_1}$ representativos de estos momentos \mathcal{M}_D^* y \mathcal{M}_C^* , y uniendo los puntos D_1 y C_1 , se ha obtenido la parte de dicho diagrama correspondiente al pilar derecho.

El diagrama de momentos del pilar izquierdo es igual al derecho, por razones de simetría del sistema y de las cargas, y se lo ha obtenido directamente.

El diagrama de momentos de la viga superior puede considerarse constituido por dos partes: 1º) Por los momentos originados por la carga p y las componentes verticales $X_1' = - \frac{pl}{2}$ de las reacciones en los

(*) En el caso especial de que se trata, de antemano se pudo establecer que

$$X_2' = - \frac{pl}{2},$$

pues, dada la simetría del sistema, las dos componentes verticales de las reacciones en A y D deben ser iguales y de signo contrario a la mitad de la carga pl . Con esta consideración pudo haberse ahorrado la determinación de la segunda de las [b] y halladas las primera y tercera y sustituyendo en ellas X_2' por su valor conocido, se hubiera obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que hubieran permitido resolver el problema con mucha mayor sencillez.

empotramientos, momentos iguales a los que en la viga BC , considerada como simplemente apoyada, originaría la carga uniforme p , y dados, como se sabe, por una parábola de flecha

$$f = \frac{pl^2}{8} = \frac{2 \cdot 8^2}{8} \text{ tm} = 16 \text{ tm:}$$

y 2º) Por los momentos originados por fuerzas iguales y de sentido contrario a las componentes X_1' y X_3' , momentos constantes, iguales a \mathcal{M}^* calculados y representados por la recta B_2C_2 , determinada para toda la viga como se ve en la lámina.

Haciendo pasar por C_2 y B_2 la parábola de flecha f , ella nos da, referida a la recta BC , la suma algebraica de los dos diagramas correspondientes a estas partes, es decir, nos da el diagrama buscado de momentos flectores de la viga superior.

4. — Trazar el diagrama de esfuerzos de corte del pórtico anterior, para el dado estado de cargas.

Adoptamos como signo de los esfuerzos de corte el de la componente tangencial de la resultante de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección considerada.

Para ambos pilares el esfuerzo de corte es igual y de signo contrario a la componente horizontal X_3' de la reacción en D , y está representada, en la escala $\frac{5t}{\text{cm}}$, por las rectas paralelas a los ejes $A_1'B_1'$ y $C_1'D_1'$.

En el punto C de la viga se tiene

$$\mathcal{T}_C^* = -X_3' = 8t,$$

y en B

$$\mathcal{T}_B^* = -(X_3' + pl) = -(-8 + 2 \cdot 8)t = -8t$$

Llevados estos esfuerzos en C_2 y B_2 , el diagrama para la viga, referido a la recta $C_2'B_2'$, está dado por la recta $C_2'B_2'$, derivada del diagrama parabólico de momentos flectores.

5. — Calcular los esfuerzos normales en los pilares y en la viga del pórtico anterior.

Adoptaremos el signo positivo para los esfuerzos normales que hagan trabajar las piezas a la tracción.

En el pilar CD el esfuerzo normal es igual en valor y signo a la componente X_2' , toda vez que cuando ésta es positiva hace trabajar a la tracción a dicha pieza, es decir, que, llamándolo $\mathcal{N}^* p$, se tiene

$$\mathcal{N}^* p = X_2' = -8t.$$

Por razones de simetría, igual valor tiene el esfuerzo normal en el pilar izquierdo.

Para la viga, el esfuerzo normal está dado en valor absoluto, por la componente horizontal X_3' de la reacción en D . En cuanto a signo, es contrario al de esta última, toda vez que cuando ésta es positiva, la viga resulta comprimida. Vale decir que, llamándolo $\mathcal{N}^* v$, se tiene

$$\mathcal{N}^* v = -X_3' = -2,3t.$$

6. — Hallar las expresiones que dan los valores de las componentes de la reacción hiperestática en D debida a una variación uniforme de temperatura de t° .

Según la [a] de (450), y despreciando como siempre la influencia de las deformaciones debidas a los esfuerzos normales y tangenciales, las tres componentes $X_{j,t}$ ($j = 1, 2, 3$) de la reacción en D debida al cambio de temperatura, están dadas por el sistema de ecuaciones

$$\left[\sum_{i=1}^3 \left(\int_0^{l_i} \frac{\mathcal{M}_i}{EI_i} \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_i}{\partial X_j} \lambda t \right) ds_i \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0,$$

($j = 1, 2, 3$)

en la que \mathcal{M}_i y \mathcal{N}^*_i ($i = 1, 2, 3$) representan los momentos flectores y esfuerzos normales que respectivamente, en el pilar izquierdo, en la viga y en el pilar derecho, originan, en el sistema hecho isostático por la supresión del empotramiento D , fuerzas X_j ($j = 1, 2, 3$) de intensidad variable, actuando según las direcciones de las incógnitas hiperestáticas.

Haciendo, como en el problema (1),

$$\alpha = \frac{I_2}{I_1}$$

y desarrollando, se tiene

$$\left[\begin{array}{l}
 \int_0^h \left(\frac{\alpha \mathcal{M}_1}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{1 \lambda t}}{\partial X_1} \right) dy + \int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}_2}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{2 \lambda t}}{\partial X_1} \right) dz + \\
 + \int_0^h \left(\frac{\alpha \mathcal{M}_3}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{3 \lambda t}}{\partial X_1} \right) dy \Big]_{X_j = X_{j,t}} = 0 \\
 \\
 \left[\int_0^h \left(\frac{\alpha \mathcal{M}_1}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{1 \lambda t}}{\partial X_2} \right) dy + \int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}_2}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{2 \lambda t}}{\partial X_2} \right) dz + \right. \\
 \left. + \int_0^h \left(\frac{\alpha \mathcal{M}_3}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{3 \lambda t}}{\partial X_2} \right) dy \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0 \\
 \\
 \left[\int_0^h \left(\frac{\alpha \mathcal{M}_1}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{1 \lambda t}}{\partial X_3} \right) dy + \int_0^l \left(\frac{\mathcal{M}_2}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{2 \lambda t}}{\partial X_3} \right) dz + \right. \\
 \left. + \int_0^h \left(\frac{\alpha \mathcal{M}_3}{E} \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \mathcal{N}^*_{3 \lambda t}}{\partial X_3} \right) dy \right]_{X_j = X_{j,t}} = 0
 \end{array} \right. \quad [a]$$

Las características que figuran en las ecuaciones anteriores son:

Para el pilar derecho,

$$\mathcal{M}_1 = X_1 + X_2 y; \quad \mathcal{N}^*_{1 \lambda t} = X_2;$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_1} = 1; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X_3} = y$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{N}^*_{1 \lambda t}}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{N}^*_{1 \lambda t}}{\partial X_2} = 1; \quad \frac{\partial \mathcal{N}^*_{1 \lambda t}}{\partial X_3} = 0.$$

Para la viga superior,

$$\mathcal{M}_2 = X_1 + X_2 z + X_3 h; \quad \mathcal{N}^*_{2 \lambda t} = -X_3$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_1} = 1; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_2} = z; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X_3} = h$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{N}^*_{2 \lambda t}}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{N}^*_{2 \lambda t}}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{N}^*_{2 \lambda t}}{\partial X_3} = -1$$

Para el pilar izquierdo,

$$\mathcal{M}_3 = X_1 + X_2 l + X_3 y; \quad \mathcal{N}^*_{3 \lambda t} = -X_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_1} = 1; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_2} = l; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X_3} = y.$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{N}^*_{3 \lambda t}}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{N}^*_{3 \lambda t}}{\partial X_2} = -1; \quad \frac{\partial \mathcal{N}^*_{3 \lambda t}}{\partial X_3} = 0.$$

Sustituyendo en las [a] y haciendo ya $X_j = X_{j,t}$, resulta

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_0^h \frac{\alpha}{E} (X_{1,t} + X_{3,t} \cdot y) dy + \int_0^l \frac{1}{E} (X_{1,t} + X_{2,t} z + X_{3,t} h) dz + \int_0^h \frac{\alpha}{E} (X_{1,t} + X_{2,t} l + X_{3,t} y) dy = 0 \\
 \int_0^h \lambda t dy + \int_0^l \frac{1}{E} (X_{1,t} + X_{2,t} z + X_{3,t} h) z dz + \int_0^h \left[\frac{\alpha}{E} (X_{1,t} + X_{2,t} l + X_{3,t} y) l - \lambda t \right] dy = 0 \\
 \int_0^h \frac{\alpha}{E} (X_{1,t} + X_{3,t} \cdot y) y dy + \int_0^l \left[\frac{1}{E} (X_{1,t} + X_{2,t} z + X_{3,t} h) h - \lambda t \right] dz + \int_0^h \frac{\alpha}{E} (X_{1,t} + X_{2,t} l + X_{3,t} y) y dy = 0
 \end{array} \right.$$

e, integrando y simplificando (*),

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(2 \alpha h + l \right) X_{1,t} + \left(\alpha h l + \frac{l^2}{2} \right) X_{2,t} + \left(\alpha h^2 + h l \right) X_{3,t} = 0 \\ \left(\alpha h l + \frac{l^2}{2} \right) X_{1,t} + \left(\alpha h l^2 + \frac{l^3}{3} \right) X_{2,t} + \left(\frac{\alpha h^2 l}{2} + \frac{h l^2}{2} \right) X_{3,t} = 0 \\ \left(\alpha h^2 + h l \right) X_{1,t} + \left(\frac{\alpha h^2 l}{2} + \frac{h l^2}{2} \right) X_{2,t} + \left(\frac{2 \alpha h^3}{3} + h^2 l \right) X_{3,t} - E I_2 \lambda t l = 0, \end{array} \right.$$

sistema de ecuaciones que, resuelto, nos da, finalmente,

$$\begin{aligned} X_{1,t} &= -3 E I_2 \lambda t \frac{k+1}{(k+2) k h} \\ X_{2,t} &= 0 \\ X_{3,t} &= 3 E I_2 \lambda t \frac{2k+1}{(k+2) k h^2}; \end{aligned} \quad [b]$$

en las que, como en el ejercicio (1), se ha hecho

$$k = \alpha \frac{h}{l} = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l}.$$

7. — Calcular la influencia que tiene una variación de temperatura de $+20^\circ$ en el pórtico representado en la lámina X.

Suponiendo que dicho pórtico esté construido en acero dulce para el que el módulo de elasticidad es

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ tm}^{-2}$$

y el coeficiente de dilatación lineal,

$$\lambda = \frac{0,12 \cdot 10^{-4}}{1^\circ},$$

las reacciones debidas al cambio de temperatura son, de acuerdo con las expresiones obtenidas en el ejercicio anterior,

$$X_{1,t} = -3 \times 2 \times 0,965 \times 0,12 \times 20 \times 10^{-1} \frac{0,965 + 1}{(0,965 + 2) 0,965 \times 5} \text{ tm} = -0,191 \text{ tm}$$

$$X_{2,t} = 0$$

$$X_{3,t} = 3 \times 2 \times 0,965 \times 0,12 \times 20 \times 10^{-1} \frac{2 \times 0,965 + 1}{(0,965 + 2) 0,965 \times 5^2} \text{ t} = +0,0569 \text{ t}.$$

Los momentos flectores que la variación de temperatura origina en D y C —iguales, respectivamente por simetría, a los producidos en A y B, —son por consiguiente,

$$M_{D,t}^* = M_{A,t}^* = -X_{1,t} = +0,191 \text{ tm}$$

y

$$M_{C,t}^* = M_{B,t}^* = -(X_{1,t} + X_{3,t} h) = -(-0,191 + 0,0569 \times 5) = -0,0935 \text{ tm}.$$

El esfuerzo de corte en los pilares, de valor constante, es

$$T_p^* = -X_{3,t} = -0,0569 \text{ t},$$

y en la viga, también de valor constante.,

$$T_v^* = -X_{2,t} = 0.$$

Finalmente, los esfuerzos de compresión debidos a la variación de la temperatura son, para los pilares

$$N_p^* = X_{2,t} = 0$$

(*) Nótese que en este sistema de ecuaciones los coeficientes de los $X_{j,t}$ son los mismos que los obtenidos en las [b] del problema (1), para la carga uniforme p . Dichos coeficientes son comunes para cualquier hipótesis de carga, como veremos más adelante.

y, para la viga,

$$\mathcal{M}_z^* = -X_{3,t} = -0,0569 \text{ t.}$$

III. — Aplicación del principio de Menabrea-Castigliano y del teorema de Castigliano a la resolución y obtención de desplazamientos de sistemas mixtos (de alma llena y reticulado).

Datos. — Se da la viga armada representada en la lámina X. Sea l su luz, α el ángulo que el tensor forma con su fibra media, I su momento de inercia, Ω_0 y Ω_1 las áreas de las secciones transversales del puntal central y del tensor.

Estando la viga sometida a una carga uniformemente repartida de intensidad específica p , se pide resolver los siguientes problemas:

1. — Hallar, mediante el principio de Menabrea-Castigliano, la expresión que da la tensión hiperestática $X_1' = T_0'$, en el puntal central BD .

Hecho isostático el sistema por la supresión de la barra BD y aplicado (como puede verse en la lámina) según la dirección de la incógnita hiperestática, un par de fuerzas de intensidad variable X_1 , una de ellas en el punto B por intermedio de un resorte de coeficiente de alargamiento ε_0 igual al de la barra BD y la otra ($-X_1$) directamente en el punto D , y llamando \mathcal{M} , T_0 y T_1 , respectivamente, el momento flector en un punto cualquiera N_1 de la viga, distante z del apoyo de la derecha, y las tensiones en el puntal y en el tensor que este estado de cargas origina, la tensión hiperestática $X_1' = T_0'$ buscada, está dada, según (432) y despreciando en la viga la influencia de los esfuerzos normales y tangenciales por la expresión

$$\left[\sum \int \mathcal{M} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X_1} p' ds + \sum T \frac{\partial T}{\partial X_1} \varepsilon \right]_{X_1 = X_1' = T_0'} = 0.$$

Ahora bien, dada la simetría del sistema y de las cargas, la derivada con respecto a X_1 del trabajo de deformación, o sea la $\int \mathcal{M} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X_1} p' ds$ es igual para ambas mitades de la viga. Efectuando, pues, la integración solo para la mitad derecha y desarrollando la sumatoria del segundo término, se tiene

$$\left[2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X_1} dz + 2 T_1 \frac{\partial T}{\partial X_1} \varepsilon_1 + T_0 \frac{\partial T_0}{\partial X_1} \varepsilon_0 \right]_{X_1 = X_1' = T_0'} = 0, \quad (a)$$

en la que ε_0 y ε_1 representan, respectivamente, los coeficientes de alargamiento de las barras del tensor y del puntal.

Siendo

$$R_C = -\frac{pl}{2} - \frac{X_1}{2}$$

la reacción que el estado de cargas origina en el apoyo C , el momento flector \mathcal{M} en el punto corrido N_1 distante z de este apoyo, es

$$\mathcal{M} = R_C \cdot z + \frac{pz^2}{2} = -\frac{pl}{2} z - \frac{X_1}{2} z + \frac{pz^2}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X_1} = -\frac{z}{2}.$$

Por otra parte, como se deduce fácilmente de la lámina, se tiene

$$T_0 = X_1; \quad T_1 = -\frac{X_1}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial X_1} = 1; \quad \frac{\partial T_1}{\partial X_1} = -\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

Sustituyendo en la [a] y poniendo ya $X_1 = X'_1$, resulta

$$\frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{pl}{2} z - \frac{X'_1}{2} z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{z}{2} \right) dz +$$

$$+ 2 \left(-\frac{X'_1}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) \left(-\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) \varepsilon_1 + X'_1 \varepsilon_0 = 0$$

ecuación que, integrando, sustituyendo a ε_0 y ε_1 por sus valores

$$\varepsilon_0 = \frac{s_0}{E \Omega_0} = \frac{l \operatorname{tg} \alpha}{2 E \Omega_0}$$

y

$$\varepsilon_1 = \frac{s_1}{E \Omega_1} = \frac{l}{2 \cos \alpha E \Omega_1}$$

y despejando a X'_1 , nos da

$$X'_1 = T'_0 = -\frac{5}{8} pl^3 \frac{1}{l^2 + \frac{12 I}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \Omega_1} + \frac{24 I \operatorname{tg} \alpha}{\Omega_0}}$$

expresión que nos resuelve el problema (*).

2. — Calcular la tensión T'_0 que una carga uniforme $p = 2 \text{ tm}^{-1}$ origina en la viga representada en la lámina X, que se supone de hierro, y para la que $l = 8 \text{ m}$, $h = 1,20 \text{ m}$, $I = 0,574 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $\Omega_0 = 22 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $\Omega_1 = 12,6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

Siendo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} = 0,3$$

resulta

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,287$$

y

$$\cos \alpha = 0,958.$$

Sustituyendo en la expresión hallada en el problema anterior, se tiene

$$T'_0 = -\frac{5}{8} \times 2 \times 8^3 \frac{1}{8^2 + \frac{12 \times 0,574 \times 10^{-4}}{0,287^2 \times 0,958 \times 12,6 \times 10^{-4}} + \frac{24 \times 0,574 \times 10^{-4} \times 0,3}{22 \times 10^{-4}}} \quad t = -9 \text{ t.}$$

3. — Completar el cálculo de sistema anterior hallando la tensión T_1 y trazando los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos de corte de la viga.

Para la tensión T_1 se tiene

$$T_1 = -\frac{T'_0}{2 \operatorname{sen} \alpha} = -\frac{-9}{2 \times 0,287} t = +15,7 \text{ t.}$$

En cuanto al diagrama de momentos flectores, es fácil ver que queda determinado por la suma algebraica de los diagramas que en la viga simplemente apoyada AC, originan, por una parte, la carga uniformemente repartida p , y por otra, la carga T'_0 concentrada en su punto medio C. El primero está dado por la parábola AB_1C de flecha.

$$f = \frac{pl^3}{8} = \frac{2 \times 8^3}{8} \text{ tm} = 16 \text{ tm,}$$

y el segundo por el triángulo AB_2C de altura

$$BB_2 = \frac{T'_0 l}{4} = \frac{-9 \times 8}{4} \text{ tm} = -18 \text{ tm,}$$

(*) Se ha supuesto que todo el sistema sea del mismo material. Si la viga hubiera tenido un módulo de elasticidad distinto del de los tensores y del puntal, se hubiera requerido tomarlo en cuenta al sustituir ε_0 y ε_1 por sus valores.

que se ha llevado en la lámina con signo contrario, a fin de que la parábola anterior, referida a sus lados, nos dé directamente la suma algebraica de ambos diagramas componentes, o sea, el diagrama buscado, de momentos flectores de la viga.

Más cómodo es referir todo este diagrama a la recta horizontal AC , como también se ha efectuado en la lámina. Para ello se ha comenzado por calcular el momento flector en B , dado por la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*_B &= R_C \cdot \frac{l}{2} + \frac{pl^2}{8} = -\left(\frac{pl}{2} + \frac{T'_0}{2}\right) \cdot \frac{l}{2} + \frac{pl^2}{8} = \\ &= -\left(\frac{2 \times 8}{2} + \frac{-9}{2}\right) \frac{8}{2} \text{ tm} + \frac{2 \times 8^2}{8} \text{ tm} = -2 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Se ha llevado luego, en la escala de momentos, un segmento $\overline{BB_1}$ representativo de este último y sobre las rectas AB_1 y B_1C , se han trazado las parábolas AM_1B_1 y CM_1B_1 , de flechas

$$\overline{M_1' M_1} = \overline{M_1' M_2} = \frac{pl_1^2}{8} = \frac{2 \times 4^2}{8} = 4 \text{ tm},$$

que darían los diagramas de momentos flectores de los trozos de viga AB y BC , si fueran aislados y simplemente apoyados.

Estas parábolas, referidas al eje AC , dan, como es fácil ver, en la forma rayada en la lámina, el diagrama buscado de momentos flectores de la viga.

El diagrama de esfuerzos de corte está dado, para ambas mitades de la viga, por rectas, ya que es el diagrama diferencial del de momentos flectores constituido por parábolas de segundo grado. Además, por la simetría del sistema es igual y de signo contrario para ambas mitades BC y AB . Basta, por tanto, para determinar este diagrama, calcular los esfuerzos tangenciales en C y B , que son, respectivamente,

$$\mathcal{T}^*_C = -R_C = -\left(\frac{pl}{2} + \frac{T'_0}{2}\right) = -\left(\frac{2 \times 8}{2} + \frac{-9}{2}\right) t = +3,5 t$$

y

$$\mathcal{T}^*_B = -\left(R_C + \frac{pl}{2}\right) = -\left(3,5 + \frac{2 \times 8}{2}\right) t = -4,5 t$$

Llevados, pues, los segmentos $\overline{CC_1}$ y $\overline{BB_1}$ que, en la escala $\frac{5 t}{\text{cm}}$, representan respectivamente a \mathcal{T}^*_C y \mathcal{T}^*_B y unidos los puntos C_1 y B_1 , la recta B_1C_1 referida al eje AC , nos da el diagrama de esfuerzos de corte de la mitad derecha de la viga. Para la mitad izquierda se lo ha deducido en la lámina del anterior por las razones de simetría ya dadas.

4. — Hallar la expresión que da el desplazamiento vertical que el punto M de la viga, distante a del apoyo A , experimenta bajo la acción de la carga uniformemente repartida p .

Si sobre el sistema hecho isostático, además de la carga p y un par de fuerzas X_1 de intensidad variable, aplicamos en M una fuerza U , también variable (esfuerzo auxiliar correspondiente al desplazamiento a calcular, dibujado punteado en la lámina) y \mathcal{M} y T , son los momentos flectores en la viga y las tensiones en las barras que este estado de cargas origina, el desplazamiento a , según el teorema de Castigliano, está dado por la expresión

$$a = \left[\sum \int \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial U} dz + \sum T \frac{\partial T}{\partial U} \epsilon \right]_{U=0} \quad X_1 = X'_1 = T'_1$$

extendiéndose la primera sumatoria a todas las partes de la viga a considerarse aisladamente como cadenas elásticas, y la segunda, a las 3 barras del sistema.

Como la fuerza U no origina tensiones en las barras, las T son independientes de la misma, y por lo tanto, para cualquiera de ellas se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial U} = 0,$$

o sea, en nuestro caso la segunda suma desaparece.

En cuanto a la primera, observando que el momento flector está dado por una función distinta, según que se considere las partes AM , MB y BC , y llamando respectivamente \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 y \mathcal{M}_3 al que se produce en puntos cualesquiera N_1 y N_2 de las dos primeras partes, distantes z del apoyo A y en el punto N_3 de la tercera, distante z del apoyo C , la expresión de α se convierte en

$$\alpha = \frac{1}{EI} \left[\int_0^\alpha \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} dz + \int_\alpha^{\frac{l}{2}} \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} dz + \int_0^{\frac{l}{2}} \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial U} dz \right]_{\substack{U=0 \\ X_1 = X'_1 = T'}}$$

De la figura se deduce que las reacciones R_A y R_C , son

$$R_A = -\frac{pl}{2} - \frac{X_1}{2} - \frac{U(l-\alpha)}{l}$$

y

$$R_C = -\frac{pl}{2} - \frac{X_1}{2} - \frac{U\alpha}{l},$$

y, por tanto, se tiene:

Entre A y N (*),

$$\mathcal{M}_1 = R_A \cdot z + \frac{pz^2}{2} = -\frac{pl}{2}z - \frac{X_1}{2}z - \frac{U(l-\alpha)}{l}z + \frac{pz^2}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} = -\frac{l-\alpha}{l}z$$

Entre N y B ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= R_A \cdot z + \frac{pz^2}{2} + U(z-\alpha) = \\ &= -\frac{pl}{2}z - \frac{X_1}{2}z - \frac{U(l-\alpha)}{l}z + \frac{pz^2}{2} + U(z-\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} = -\frac{l-\alpha}{l}z + z - \alpha = \frac{\alpha}{l}z - \alpha$$

Y, entre C y B ,

$$\mathcal{M}_3 = R_C \cdot z + \frac{pz^2}{2} = -\frac{pl}{2}z - \frac{X_1}{2}z - \frac{U\alpha}{l}z + \frac{pz^2}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial U} = -\frac{\alpha}{l}z.$$

Sustituyendo en la [a] se tiene

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^\alpha \left(-\frac{pl}{2}z - \frac{X_1}{2}z - \frac{U(l-\alpha)}{l}z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{l-\alpha}{l}z \right) dz + \right. \\ &+ \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{pl}{2}z - \frac{X_1}{2}z - \frac{U(l-\alpha)}{l}z + \frac{pz^2}{2} + U(z-\alpha) \right) \left(\frac{\alpha}{l}z - \alpha \right) dz + \\ &\left. + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{pl}{2}z - \frac{X_1}{2}z - \frac{U\alpha}{l}z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{\alpha}{l}z \right) dz \right]_{\substack{U=0 \\ X_1 = X'_1 = T'}} \end{aligned}$$

(*) Tomamos indistintamente los momentos flectores de las fuerzas que quedan de uno u otro lado de la sección considerada, sin ocuparnos del signo, por cuanto éste no tiene importancia en la función Φ que da el trabajo y por lo tanto en su derivada con respecto a U , toda vez que en aquélla entran los momentos flectores \mathcal{M} elevados al cuadrado.

que haciendo ya $U = 0$ y $X_1 = T_0'$, toma la forma

$$\alpha = \frac{1}{EI} \left[\int_0^\alpha \left(-\frac{pl}{2} z - \frac{T_0'}{2} z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{l-\alpha}{l} z \right) dz + \int_\alpha^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{pl}{2} z - \frac{T_0'}{2} z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(\frac{\alpha}{l} z - \alpha \right) dz + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{pl}{2} z - \frac{T_0'}{2} z + \frac{pz^2}{2} \right) \left(-\frac{\alpha}{l} z \right) dz \right]$$

expresión que, integrando y simplificando, nos da, finalmente,

$$\alpha = \frac{1}{EI} \left[\frac{p}{24} \alpha^4 - \frac{1}{12} (pl + T_0') \alpha^3 + \left(\frac{pl^3}{24} + \frac{T_0'}{13} l^2 \right) \alpha \right].$$

5. — Calcular y trazar la elástica vertical de la deformación que, en la viga representada en la lámina origina la carga uniformemente repartida $p = 2 \text{ tm}^{-1}$.

Atribuyendo diversos valores a α , los desplazamientos α , dados por la expresión obtenida en el problema anterior, son, evidentemente, las ordenadas de la elástica correspondientes a los mismos.

Siendo en este caso

$$E = 2 \times 10^7 \text{ tm}^{-2}$$

y recordando que según se encontró en el problema (2)

$$T_0' = -9 \text{ t},$$

se tiene

$$\alpha = \frac{1}{2 \times 10^7 \times 0,574 \times 10^{-4}} \left[\frac{2}{24} \alpha^4 - \frac{1}{12} (2 \times 8 - 9) \alpha^3 + \left(\frac{2 \times 8^3}{24} + \frac{-9 \times 8^2}{10} \right) \alpha \right]$$

o sea

$$\alpha = \frac{1}{1,148} (83,3 \alpha^4 - 583 \alpha^3 + 6660 \alpha) \quad [10^{-6} \text{ m}]$$

ecuación de la parte de elástica pedida correspondiente a la mitad izquierda de la viga. La de la mitad derecha podría obtenerse por simple simetría.

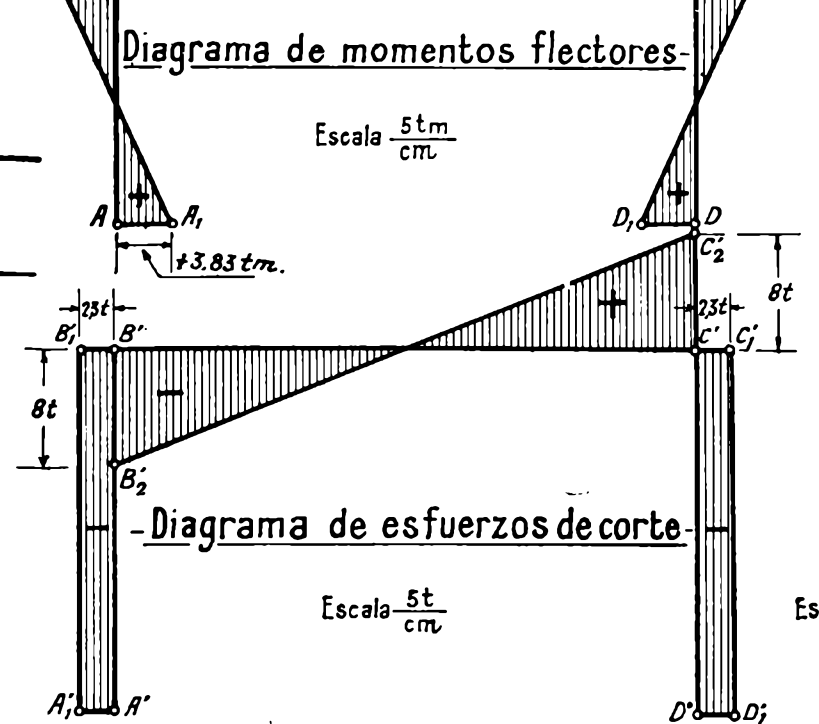
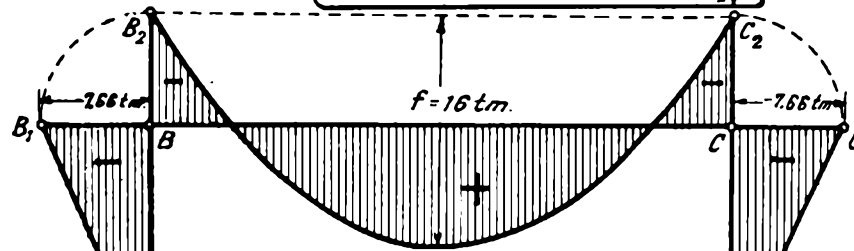
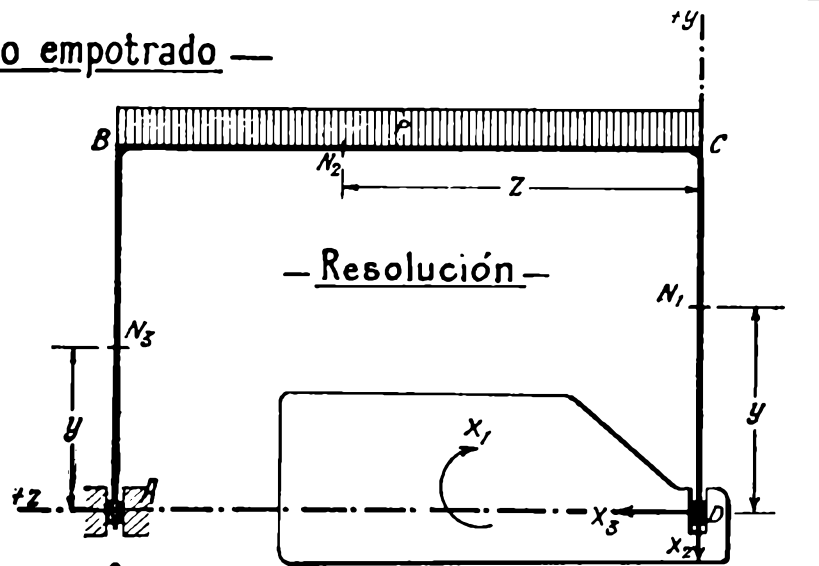
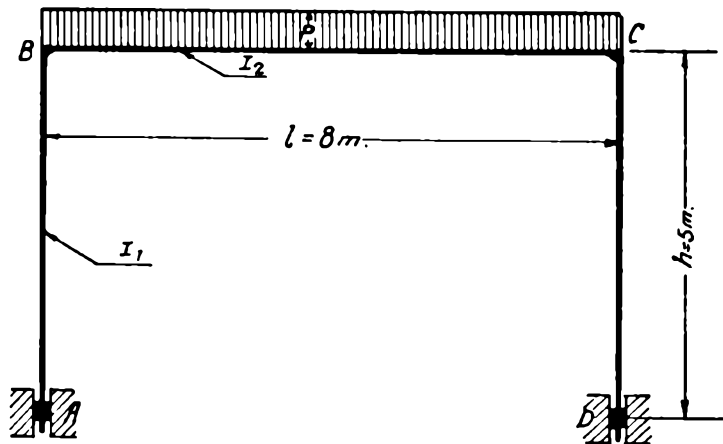
En el cuadro N° 1 se calculan los valores α (ordenadas de la elástica) para abscisas α variables de 0,5 m en 0,5 m.

CUADRO N° 1

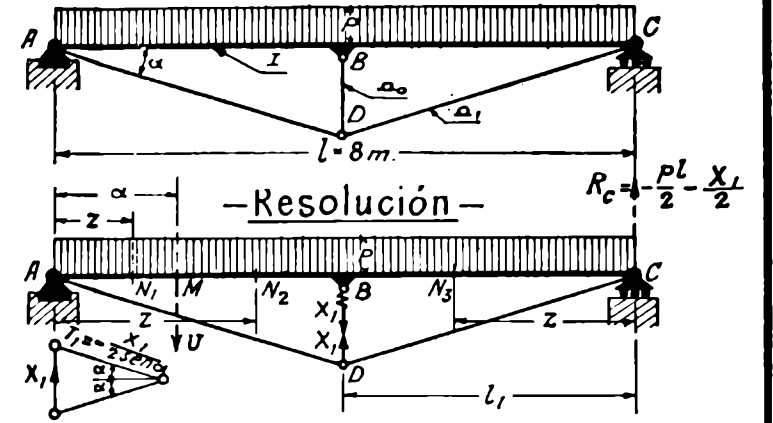
α	$m_1 = 83,3 \alpha^4$	$m_2 = -583 \alpha^3$	$m_3 = 6660 \alpha$	$\alpha = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^3 m_i$ 10^{-6} m
0,5	5,21	— 72,9	3330	2840
1,0	83,3	— 583	6660	5360
1,5	422	— 1970	9990	7350
2,0	1330	— 4660	13300	8680
2,5	3250	— 9110	16600	9350
3,0	6750	— 15700	20000	9630
3,5	12500	— 25000	23300	9410
4,0	21300	— 37300	26600	9230

Finalmente, en la lámina, se han llevado estas ordenadas, en la escala $\frac{5000 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}$ y unido sus extremos por una curva continua que constituye la elástica pedida, la que se ha completado para la mitad derecha BC de la viga, por simple simetría.

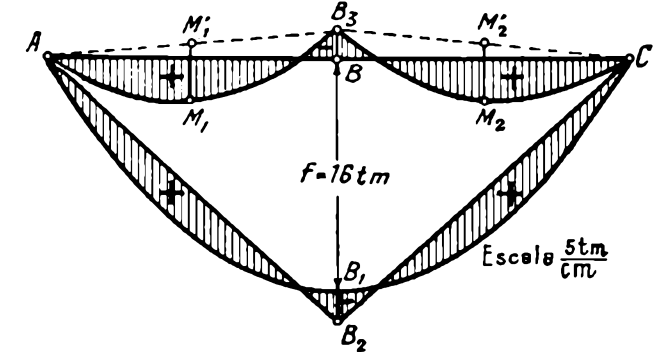
— Pórtico recto empotrado —



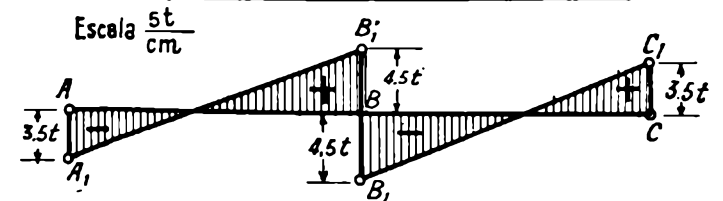
— Viga armada —



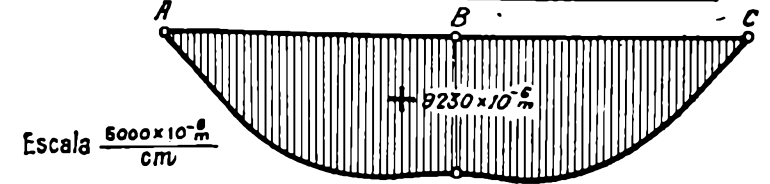
— Diagrama de momentos flectores —



— Diagrama de esfuerzos de corte —



— Elástica vertical de deformación —



— APLICACION DEL PRINCIPIO —

— DE MENABREA CASTIGLIANO —

— SISTEMAS DE ALMA LLENA Y MIXTOS —

Escala de longitudes $\frac{1m}{cm}$

TERCERA PARTE

PROCEDIMIENTOS GENERALES PARA LA
RESOLUCION DE SISTEMAS PLANOS

CAPITULO VII

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE RESOLUCION DE SISTEMAS PLANOS

§ 1. — Problemas que implica la resolución de un sistema

456. Diversas causas de tensión interna o de deformación que pueden actuar sobre un sistema. — Un sistema cualquiera, isostático o hiperestático, puede estar sometido a diversas acciones cuyos efectos sobre sus partes constitutivas se requiere calcular a fin de constatar la no existencia en punto alguno de peligro de deformación permanente, o de rotura, constatación esta última que es lo que en esencia constituye el objeto de su resolución estática.

Dichas acciones son las siguientes:

1º) *Acción de una carga permanente.* Ella puede estar constituida por el peso propio de la estructura constructiva del sistema o por otras fuerzas cualesquiera que, como aquél, actúen con carácter permanente, tales como, por ejemplo, los empujes de las tierras en las obras de contención.

2º) *Acción de las cargas accidentales y móviles.* Estas cargas están constituidas por las fuerzas que, según las circunstancias, puedan o no actuar sobre el sistema. Sus acciones deben combinarse con las de la carga permanente a fin de obtener los efectos más desfavorables. Para una incógnita cualquiera, puede suceder que, siendo los efectos de las cargas accidentales y móviles de signo contrario y menores que los de la permanente, el resultado más desfavorable sea el debido a esta última sola. En otros casos se requerirá sumar los efectos de ambas.

Cabe hacer, desde ya, una distinción entre carga *accidental* y carga *móvil*. Llamamos carga accidental la que, pudiendo o no, según las circunstancias, actuar sobre el sistema, de hacerlo lo efectúa incidiendo sobre zonas, o partes del mismo, perfectamente determinadas; por ejemplo, la acción del viento sobre un techo que cuando actúa se ejerce sobre toda la parte perfectamente determinable *a priori*, expuesta al mismo. Carga móvil, en cambio, llamamos a una que pueda trasladarse sobre el

sistema, distribuyéndose en formas varias; por ejemplo, la carga de peatones que actúa sobre un puente.

Mientras para la carga accidental, dada su intensidad y su distribución única, se puede determinar directamente su efecto sobre todas las magnitudes a calcular en el sistema, para la carga móvil, en contra, el problema es mucho más complejo, pues se requiere, para cada magnitud a calcular, hallar la distribución de la misma que produzca un máximo o un mínimo máximo negativo.

3º) *Acción de las variaciones de temperatura o de otro cambio cualquiera de forma.* Sabemos que los efectos de estos cambios de forma son nulos en los sistemas isostáticos. Las variaciones uniformes de temperatura, u otro cambio cualquiera de forma por el que el sistema libre se mantenga semejante a sí mismo, como es, por ejemplo, la contracción de fragüe en una obra de hormigón, no producen efectos en los sistemas hiperestáticos con vínculos superfluos solamente internos, ni en los hiperestáticamente sustentados susceptibles de dilatarse libremente, en los cuales los cambios uniformes de temperatura no originen tensión alguna; tal es el caso, por ejemplo, de la viga continua recta sobre apoyos móviles paralelamente a su fibra media.

Los cambios no uniformes de temperatura, o cualquier otra variación no semejante de forma, producen tensiones en cualquier sistema hiperestático, aunque muy pequeñas y, en general, prácticamente despreciables, en los sistemas con vínculos superfluos puramente internos.

4º) *Acción de desplazamientos accidentales de los puntos de sustentación.* Tratándose, como debe entenderse, de pequeños asientos de las fundaciones, del mismo orden de magnitud que las deformaciones del sistema, su efecto es nulo en los sistemas isostáticos y en los hiperestáticos isostáticamente sustentados. En cambio, en los sistemas hiperestáticamente sustentados, pequeñísimos desplazamientos de los puntos de sustentación pueden ser causa de estados sumamente importantes de tensión interna. Si después de construída una obra hiperestáticamente sustentada se constatan asientos en las fundaciones, se impone, por tanto, calcular los efectos correspondientes a fin de determinar el estado suplementario de tensión que ellos originan y conocer las nuevas condiciones de resistencia que resulten.

457. Magnitudes que se requiere calcular para dejar resuelto un sistema. — Para dejar completamente resuelto un sistema se requiere calcular los efectos de todas las acciones que acabamos de enumerar sobre dos clases de magnitudes, a saber:

1º) Reacciones de vínculos externo o interno, que, en general, llamaremos *magnitudes*, o incógnitas, *estáticas*.

•

- 2º) Desplazamientos absolutos o relativos correspondientes a las deformaciones que las referidas acciones originan en el sistema, que llamaremos, en general, *desplazamientos*.

458. — Considerando, para mayor generalidad, un sistema mixto, compuesto de partes de alma llena y de barras de reticulado, las magnitudes estáticas que se presentan, que por lo común designaremos con la letra M , son las siguientes:

a) *Componentes de las reacciones de vínculo externo según determinadas direcciones*. Designaremos, en general, a estos componentes con la letra R y les daremos el signo que les corresponda de acuerdo con la convención común adoptada para los signos de vectores. Es decir, que una reacción tendrá signo positivo cuando su proyección horizontal tenga el sentido de las z positivas y, en el caso de ser vertical, cuando ella misma esté dirigida según las y positivas, y a la inversa.

b) *Características, o sea momentos flectores, esfuerzos tangenciales y esfuerzos normales, en cualquiera de las secciones de las partes de alma llena*. De acuerdo con la convención usualmente adoptada por los tratadistas de la materia, adoptaremos para individualizar las dos primeras características, es decir, los momentos flectores y esfuerzos tangenciales, el signo que les corresponda al considerarlas como componentes de la resultante de las fuerzas exteriores (cargas y reacciones) que quedan a la izquierda de la sección considerada, dando signo positivo, como siempre, para los momentos flectores, a la cupla que gira en el sentido de las agujas de un reloj y, para los esfuerzos tangenciales, en forma análoga que para cualquier otro vector, o sea tal como se acaba de recordar para las reacciones. Para los esfuerzos normales adoptaremos el signo positivo o negativo, según, respectivamente, que produzcan un esfuerzo de tracción o de compresión en la pieza en que actúan.

Las características \mathcal{M} , \mathcal{N} y \mathcal{T} que, para el cálculo de las elásticas de deformación, hemos adoptado en la parte primera, estaban dadas, por razones de comodidad, por las componentes de la resultante de las fuerzas que actuaban a la derecha de la sección considerada. A fin de no confundirlas con las mismas características determinadas a los efectos de calcular el estado de tensión interna, y que poseerán signos determinados en la forma que acabamos de establecer, distinguiremos a estas últimas con un asterisco, poniendo \mathcal{M}^* , \mathcal{N}^* y \mathcal{T}^* .

Las letras \mathcal{M} , \mathcal{T} y \mathcal{N} , representarán, pues, como siempre, las componentes de la resultante de las fuerzas que quedan a la derecha de una sección de un sistema de alma llena, dirigidas respectivamente según la recta en el infinito y las normal y tangente a la fibra media en el punto

perteneciente a la sección considerada. Las \mathcal{M}^* y \mathcal{T}^* que, en cambio, representarán las componentes según las dos primeras direcciones, de la resultante de las fuerzas que quedan a la izquierda, serán siempre iguales y de signo contrario a las \mathcal{M} y \mathcal{T} es decir, se tendrá

$$\mathcal{M}^* = -\mathcal{M}; \quad \mathcal{T}^* = -\mathcal{T}.$$

\mathcal{N}^* a su vez será igual en valor absoluto a \mathcal{N} es decir

$$|\mathcal{N}^*| = |\mathcal{N}|,$$

y su signo dependerá de su sentido con respecto a la fibra media. Considerando la componente \mathcal{N} de las fuerzas que quedan a la derecha y recorriendo la cadena de derecha a izquierda, cuando la flecha de \mathcal{N} tenga el sentido de este recorrido habrá compresión y por tanto \mathcal{N}^* tendrá signo negativo, y a la inversa cuando la flecha de \mathcal{N} tenga sentido contrario a dicho recorrido (*).

En algunos sistemas de alma llena no tiene sentido el hablar de las partes que quedan a la derecha o a la izquierda de una sección considerada; así, por ejemplo, en la figura 249 *a*, no podría decirse cuál es la parte que queda a la derecha o a la izquierda de la sección *mm*. En

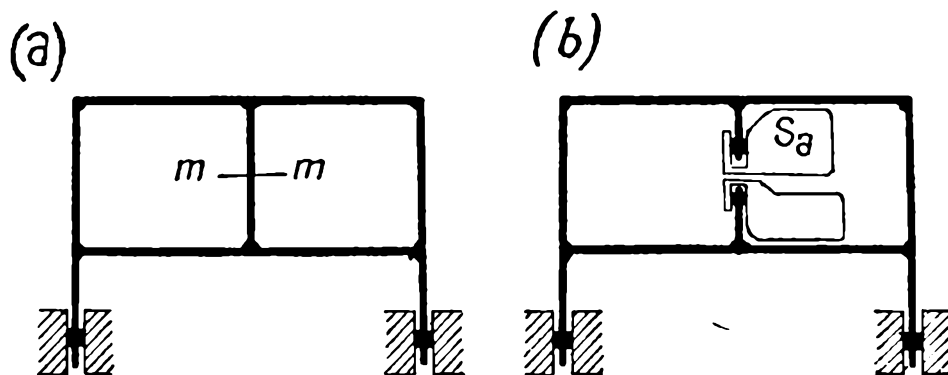


FIG. 249

estos casos se harán convenciones especiales para determinar los signos de los momentos flectores y esfuerzos tangenciales. En el caso de la figura se podría adoptar, por ejemplo, los signos de las componentes que, para mantener el equilibrio y una vez efectuada la sección *mm*, haya que aplicar en la chapa S_a , ligada a la parte que queda arriba de *mm* (fig. 249 *b*).

c) *Tensiones en la totalidad de las barras de reticulado.* A estas tensiones que, como hasta ahora, designaremos con la letra *T*, les dare-

(*) La fijación de signos para los momentos flectores es puramente convencional y podrá cambiarse en los casos particulares en que se crea conveniente, siempre que se estipule claramente la convención especial que al respecto se haga.

En una cadena cerrada se entiende por parte que queda a la izquierda de una sección considerada la que queda atrás al recorrerla, a partir de la misma, en el sentido de las agujas de un reloj.

mos, como siempre, signo positivo cuando correspondan a un esfuerzo de tracción, y a la inversa.

459. — Los desplazamientos que puede requerirse determinar en un sistema de alma llena o de reticulado son los que ya hemos establecido en (370) al ocuparnos del teorema de Mohr, que puede utilizarse para su cálculo. Los designaremos, como allí hemos establecido, en general, con la letra a .

460. — Resumiendo, pues, un sistema mixto formado de partes de alma llena y de barras de reticulado, quedará completamente resuelto, cuando se hayan obtenido: 1º) Las componentes R de todas las reacciones de vínculo externo, las tensiones T en todas sus barras de reticulado y los diagramas que proporcionen las características \mathcal{M}^* , \mathcal{N}^* y \mathcal{C}^* para las secciones de las partes de alma llena (o, por lo menos, se conozcan estas características en las principales secciones), correspondientes a las diversas acciones (cargas permanentes, accidentales, móviles, cambios de forma y asientos de las fundaciones) que puedan presentarse, y 2º) Los estados de deformación originados por dichas diversas acciones, que proporcionen cualquiera de los desplazamientos absolutos y relativos de sus puntos, de las secciones de sus partes de alma llena y de las direcciones de sus barras de reticulado.

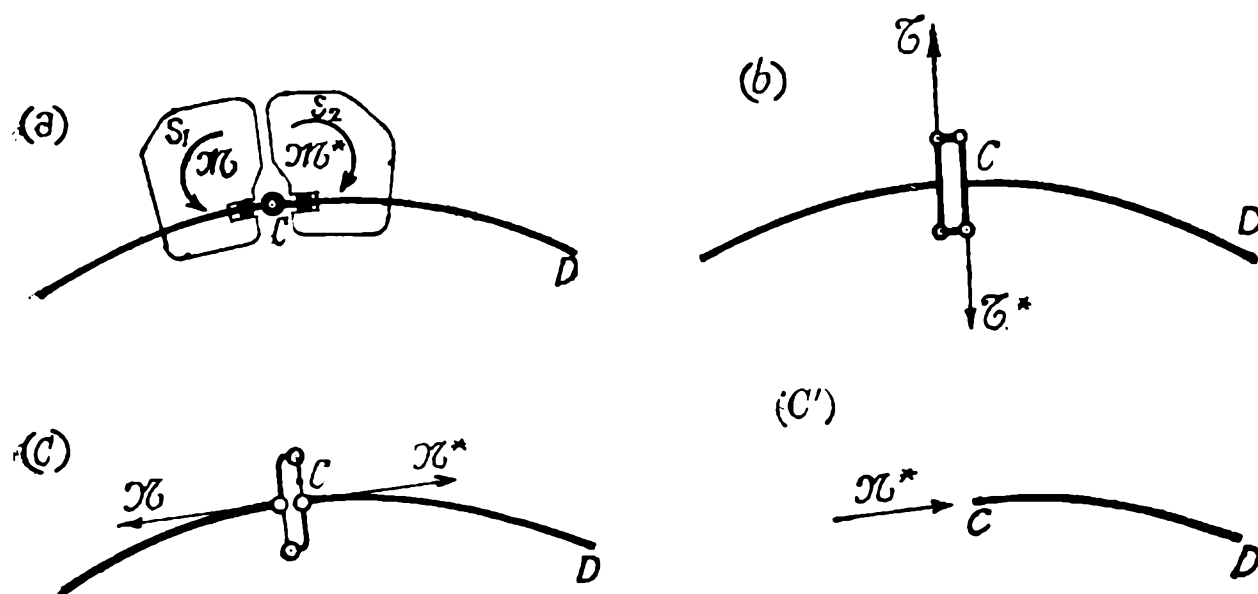


FIG. 250

461. Observación. — Si a los efectos de calcular un momento flector \mathcal{M}^* se lo pone en evidencia de acuerdo a lo establecido en (364) y como indica la figura 250 a, el momento de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección considerada C , que constituye dicha característica \mathcal{M}^* , está dado, en valor y signo, por la cupla que, para mantener el equilibrio, se requiere aplicar sobre la chapa S_2 de la derecha. Esta

cupla, en efecto, es la que aplicada en el extremo C del trozo derecho CD , lo mantiene en equilibrio y, por tanto, debe ser, como la característica \mathcal{M}^* buscada, igual, en valor y signo, al momento de las fuerzas que quedan a la izquierda de C .

Análogamente (fig. 250 b), al poner en evidencia el esfuerzo tangencial \mathcal{T}^* en el punto C , este esfuerzo, componente de la resultante de las fuerzas que quedan a la izquierda, está dado, en valor y signo, por la fuerza \mathcal{T}^* aplicada sobre la parte CD de la derecha.

En cuanto al esfuerzo normal \mathcal{N}^* , hallada la flecha de la fuerza que se requiera aplicar sobre la parte CD (fig. 250 c), para mantener el sistema en equilibrio una vez que se ha puesto aquél en evidencia, si ella resulta dirigida hacia la parte derecha CD como en las figuras 250 c y c' , comprimirá a la misma, y, por tanto, a \mathcal{N}^* corresponderá signo negativo. En caso contrario, es decir, si en la figura la flecha de \mathcal{N}^* estuviera dirigida hacia la izquierda, el esfuerzo normal sería positivo.

462. Cálculo de las tensiones unitarias máximas en las fibras externas de las secciones de los sistemas de alma llena.— En el cálculo de una sección de un sistema de alma llena sujeto a cargas móviles, que trabaje a la flexión compuesta, es decir, para la que a la vez se produzcan mo-

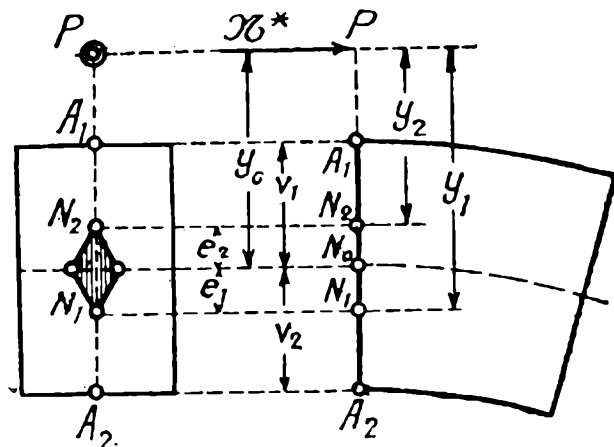


FIG. 251

mentos flectores \mathcal{M}^* y esfuerzos normales \mathcal{N}^* puede tropezarse, si se quiere obtener independientemente estas magnitudes, con serias dificultades para encontrar el estado de cargas más desfavorable. La hipótesis de carga, en efecto, que dé el máximo momento flector, no corresponderá en general, con la que dé el máximo esfuerzo normal, y a la inversa; ninguna de ellas será, por consiguiente, la más peligrosa para la sección, es decir, la que origine en las fibras externas tensiones unitarias máximas.

En lugar de calcular dichas características \mathcal{M}^* y \mathcal{N}^* , convendrá, pues, hallar directamente estas tensiones σ_1 y σ_2 en los puntos A_1 y A_2 (fig. 251) de las fibras externas de la sección considerada, lo que se

realiza fácilmente sabiendo que son proporcionales respectivamente a los momentos flectores \mathcal{M}_1^* y \mathcal{M}_2^* , no en el centro de gravedad N_0 de la sección, sino en los puntos N_1 y N_2 , extremos de su núcleo central, respectivamente opuestos a los A_1 y A_2 . Pasamos a demostrar, en efecto, que si \mathcal{M}_i^* ($i = 1, 2$) es el momento flector en el punto N_i , extremo del núcleo central opuesto a la fibra externa A_i , la tensión en esta última está dada en valor absoluto por la expresión

$$|\sigma_i| = \left| \frac{\mathcal{M}_i^* v_i}{I} \right|, \quad [a]$$

en la que, como en la fórmula común de la flexión simple, v_i es la distancia entre la fibra externa A_i , considerada y el centro de gravedad N_0 de la sección, e I el momento de inercia de la misma.

Sea, en efecto, P (fig. 251) el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección $A_1 A_2$ y \mathcal{N}^* la componente normal de esta última. El momento flector, momento de \mathcal{N}^* con respecto a N_0 , es, en valor absoluto,

$$|\mathcal{M}^*| = |\mathcal{N}^* y_0|,$$

y, dado el sentido de \mathcal{N}^* y la posición de su punto de aplicación P , este momento es positivo y hace trabajar la fibra superior A_1 a la compresión, lo mismo que la fuerza \mathcal{N}^* . La tensión σ_1 es, por lo tanto, en valor absoluto, igual a la suma de los valores absolutos de las tensiones originadas por la fuerza de compresión \mathcal{N}^* y por el momento flector $|\mathcal{N}^* y_0|$, es decir,

$$|\sigma_1| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{\Omega} \right| + \left| \frac{\mathcal{M}^* v_1}{I} \right|,$$

en la que Ω es el área de la sección y v_1 la distancia $N_0 A_1$.

Análogamente, siendo de signo contrario las tensiones que el esfuerzo normal y el momento flector originan en la fibra inferior A_2 , su resultante será, en valor absoluto

$$|\sigma_2| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{\Omega} \right| - \left| \frac{\mathcal{M}^* v_2}{I} \right|,$$

siendo $v_2 = \overline{N_0 A_2}$.

Sustituyendo el valor dado más arriba para \mathcal{M}^* y recordando que, si i es el radio de giro de la sección, se tiene

$$\Omega = \frac{I}{i^2},$$

resulta

$$|\sigma_1| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{\frac{I}{i^2}} \right| + \left| \frac{\mathcal{N}^* y_0 v_1}{I} \right| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{I} (i^2 + y_0 v_1) \right|$$

y

$$|\sigma_2| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{\frac{I}{i^2}} \right| - \left| \frac{\mathcal{N}^* y_0 v_2}{I} \right| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{I} (i^2 - y_0 v_2) \right|.$$

Observando, finalmente, que si e_1 y e_2 son las distancias entre el centro de gravedad N_0 y los extremos N_1 y N_2 del núcleo central respectivamente opuestos a las fibras externas A_1 y A_2 , por las que pasarían los ejes neutros para fuerzas aplicadas respectivamente en dichos puntos, se tiene

$$|e_1 v_1| = |e_2 v_2| = i^2,$$

y sustituyendo, resulta finalmente

$$|\sigma_1| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{I} (e_1 v_1 + y_0 v_1) \right| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{I} v_1 (e_1 + y_0) \right|$$

y

$$|\sigma_2| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{I} (e_2 v_2 - y_0 v_2) \right| = \left| \frac{\mathcal{N}^*}{I} v_2 (e_2 - y_0) \right|$$

Ahora bien, siendo

$$|\mathcal{N}^* (e_1 + y_0)| = |\mathcal{N}^* y_1| = |\mathcal{M}_1^*|$$

y

$$|\mathcal{N}^* (e_2 - y_0)| = |\mathcal{N}^* y_2| = |\mathcal{M}_2^*|,$$

respectivamente los momentos flectores en los puntos N_1 y N_2 , extremos del núcleo central opuestos a las fibras externas A_1 y A_2 , se tiene, finalmente,

$$|\sigma_1| = \left| \frac{\mathcal{M}_1^* v_1}{I} \right|$$

y

$$|\sigma_2| = \left| \frac{\mathcal{M}_2^* v_2}{I} \right|,$$

que nos comprueba lo que queríamos demostrar.

463. — Por lo que respecta a los signos de las tensiones σ_1 y σ_2 , se los deduce fácilmente de los signos de los momentos flectores \mathcal{M}_1^* y \mathcal{M}_2^* . Observando, en efecto, que si el momento flector \mathcal{M}_i^* es positivo, comprime las fibras superiores (fig. 252) y extiende las inferiores, resulta

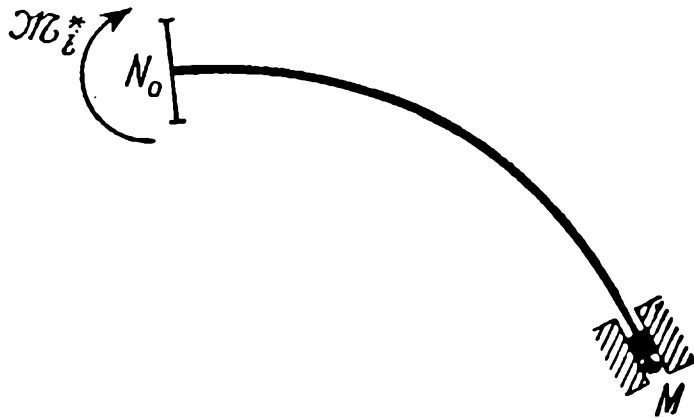


FIG. 252

que las tensiones σ_1 en las primeras serán negativas cuando \mathcal{M}_1^* sea positivo, o sea, de signo contrario a este último. A la inversa, las tensiones σ_2 en las fibras inferiores tendrán el mismo signo que el momento flector \mathcal{M}_2^* en el extremo opuesto del núcleo central.

464. — Resumiendo, pues, tratándose de sistemas de alma llena sujetos a cargas móviles no calcularemos momentos y esfuerzos normales en sus diversas secciones, sino momentos flectores en los puntos extremos de los núcleos centrales de las mismas, que nos darán directamente, por simple proporcionalidad, las tensiones unitarias máximas en las fibras externas situadas en los lados opuestos a dichos puntos.

§ 2. — Cálculo en los sistemas isostáticos de las magnitudes estáticas debidas a cargas permanentes y accidentales

465. **Generalidades.** — Dado un sistema isostático cualquiera, sujeto a una carga permanente o accidental, es decir, a una carga perfectamente determinada tanto en intensidad como en distribución, lo primero que hay que calcular, para resolverlo, son las componentes R de las reacciones de vínculo externo, que se hallarán en la forma conocida mediante los procedimientos que proporciona la Estática gráfica o bien analíticamente mediante las ecuaciones de equilibrio estático. Además, si el sistema está formado por varias chapas (es decir, si se trata de una cadena cinemática o de un sistema general) se hallarán también, con los mismos procedimientos, las reacciones de vínculo interno que entre sí se transmiten dichas chapas.

Hecho lo anterior, cada una de las chapas del sistema se podrá considerar aisladamente, en equilibrio bajo la acción de sus *fuerzas exteriores*, es decir, del conjunto de las cargas directamente aplicadas y de las reacciones calculadas, tanto de vínculo externo (correspondientes a sus puntos de unión con la Tierra) como interno (correspondientes a sus articulaciones de unión con las restantes chapas).

Si la chapa, así considerada, es de reticulado, un simple diagrama de Cremona o cualquier otro de los procedimientos de la Estática gráfica, permitirá determinar las tensiones que dichas fuerzas exteriores (cargas y reacciones) producen en todas sus barras, con lo que quedará terminado el cálculo de la influencia sobre la misma de la carga permanente o accidental considerada.

Si la chapa, en cambio, es de alma llena, habrá que calcular las características \mathcal{M}^* , \mathcal{N}^* y \mathcal{T}^* que las fuerzas exteriores producen en sus diversas secciones y para ello, se utilizarán, en general, de los procedimientos que pasamos a exponer.

466. Curva de presiones.— Sea AB (fig. 253) una parte libre de un sistema de alma llena, sujeta a las cargas y reacciones P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y sean, además, R_A y R_B las resultantes de las fuerzas que en el sistema mismo actúan a la izquierda y a la derecha de las secciones A y B . La parte AB se mantendrá en equilibrio bajo la acción de dichas fuerzas exteriores R_A , P_i y R_B .

A partir de un punto O , tomado como origen, construyamos un polígono de estas fuerzas, es decir, llevemos un vector OO equipolente de R_A , por O otro $O-1$ equipolente de P_1 , por 1 el $1-2$ equipolente de P_2, \dots , por $n-1$ uno $n-1-n$ equipolente de P_n y, finalmente, por n uno nO equipolente de R_B que, por estar las fuerzas en equilibrio, debe cerrar el polígono.

Hecho lo anterior, por la intersección A_1 de las fuerzas R_A y P_1 , hagamos pasar una recta paralela a $O1$, que será la recta de acción de la resultante R_1 de las mismas; por el punto A_2 de su intersección con la P_2 , tracemos una paralela A_2A_3 al radio $O2$, que nos dará, evidentemente, la recta de acción de la resultante de R_1 y P_2 , o sea de la R_2 , resultante de las fuerzas R_A , P_1 y P_2 que quedan a la izquierda del punto de aplicación de la P_2 ; procediendo en forma análoga trazaremos el polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$, que llamaremos *polígono (o curva) de presiones* y que, como pasamos a ver, nos permite obtener, en forma sumamente cómoda, las características en una sección cualquiera.

En efecto; para una sección mm , por ejemplo, la resultante R_1 de las fuerzas que quedan a la izquierda tiene como recta de acción el lado

$A_1 A_2$ de dicho polígono anterior a la fuerza P_2 y su intensidad está dada por el segmento $\overline{O1}$ leído en la escala respectiva. Trazando por O una paralela a la tangente a la fibra media en M y por 1 una a la normal a dicha fibra en el mismo punto, los segmentos $\overline{O1'}$ y $\overline{1'1}$ nos dan, respectivamente, las intensidades del esfuerzo normal \mathcal{N}^* y del esfuerzo tangencial \mathcal{T}^* en la sección considerada, deduciéndose sus signos directamente de las flechas de la figura (en este caso el de \mathcal{T}^* es positivo, por serlo su proyección sobre el eje de los z , y el de \mathcal{N}^* es negativo por comprimir esta fuerza la parte MB que queda a la derecha).

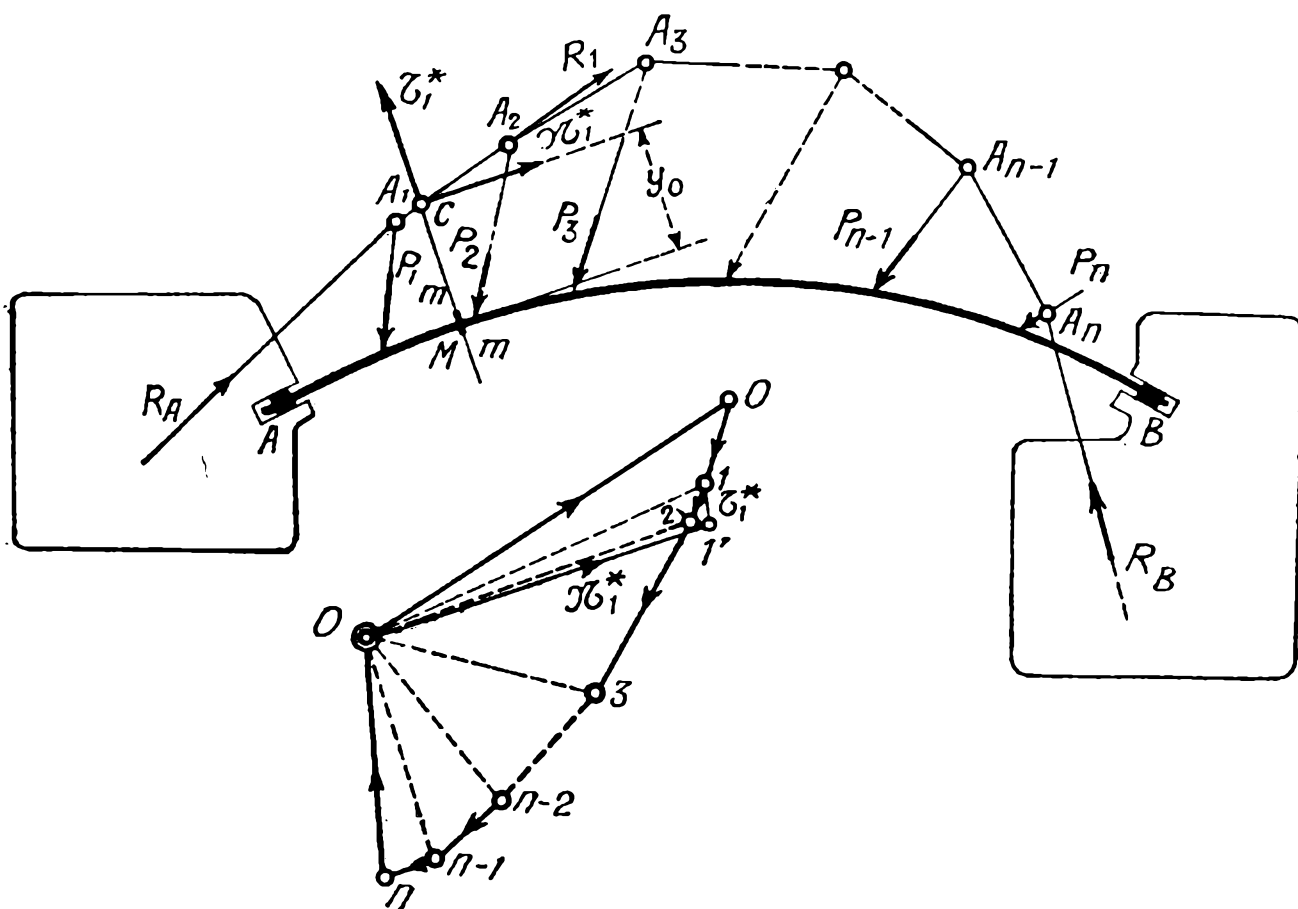


FIG. 253

Finalmente, llamando y_0 la distancia CM , entre el punto C de aplicación de la fuerza R_1 y el centro de gravedad M de la sección considerada, el momento flector en este último es, en valor absoluto, $|\mathcal{M}^*| = |\mathcal{N}_1^* y_0|$ y su signo se deduce, también, de la figura (positivo en el caso de que se trata).

Dado, pues, un sistema de alma llena, calculadas las reacciones de vínculo interno o externo que los diversos estados de cargas permanentes y accidentales originan en sus varias partes constitutivas, y trazadas, en la forma indicada, las curvas de presiones respectivas, se obtienen las características en todas las secciones, y el problema del cálculo de las magnitudes estáticas debidas a dichas cargas queda, por tanto, resuelto.

467. — Conviene notar que cuando las cargas no son normales a la fibra media del sistema, el lado del polígono de presiones correspondiente a una sección cualquiera no es, por lo general, el que pasa por el punto de intersección de la dirección de esta última con aquel polígono, sino el lado de éste comprendido entre las fuerzas anterior y posterior a la sección. El punto de aplicación de la resultante de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección, se hallará, por tanto, en la intersección de esta última con la prolongación de aquél. Así, por ejemplo,

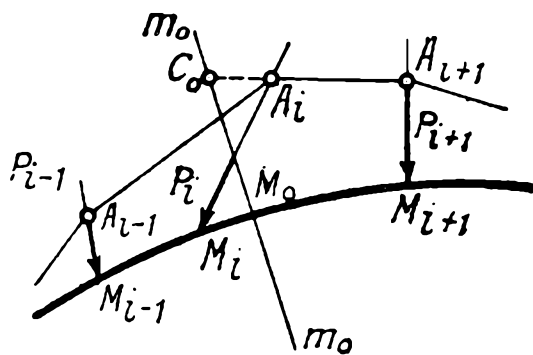


FIG. 254

(fig. 254), el lado de la curva de las presiones $\dots A_{i-1} A_i A_{i+1} \dots$ correspondiente a la sección $m_0 m_0$, dada por el punto M_0 , es el $A_i A_{i+1}$, comprendido entre las fuerzas P_i y P_{i+1} , entre cuyos puntos M_i y M_{i+1} de aplicación se encuentra M_0 , y, además, el punto de aplicación de la resultante R_i de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección $m_0 m_0$ es el C_0 , indicado en la figura.

468. — Trazada, en la forma que queda dicha, la curva de las presiones, nos permitirá obtener las características \mathcal{M}^* , \mathcal{N}^* y \mathcal{G}^* en un número cualquiera de secciones, y llevando ordenadas representativas de las mismas, a partir de ejes determinados y en correspondencia de dichas secciones, marcaremos series de puntos que unidos entre sí darán curvas que, con una aproximación que dependerá del número considerado de secciones, serán los diagramas de repartición de dichas características.

En muchos casos el procedimiento gráfico de la curva de las presiones no da suficiente aproximación en lo que respecta a la obtención de los momentos flectores, debido a que dicha curva suele mantenerse muy próxima a la fibra media y los brazos de palanca (distancia entre ambas) quedan representados por segmentos del mismo orden de magnitud que los errores de dibujo. En estos casos no queda otro recurso que calcular numéricamente los momentos flectores para un número más o menos grande de secciones, y obtener, luego, si se desea, aproximadamente, en la forma expuesta más arriba, un diagrama gráfico de su repartición para todo el sistema.

469. — Si se trata de sistemas de alma llena rectilíneos, no resulta ventajoso, por lo común, el empleo de la curva de las presiones, siendo más cómodo recurrir directamente, como se expondrá en los números siguientes, a la construcción de diagramas de momentos flectores, esfuerzos tangenciales y esfuerzos normales. Damos, sin embargo, a continuación, las simplificaciones que en el trazado de la curva de las presiones se presentan, en el caso frecuente de cargas continuas que varían según una función lineal.

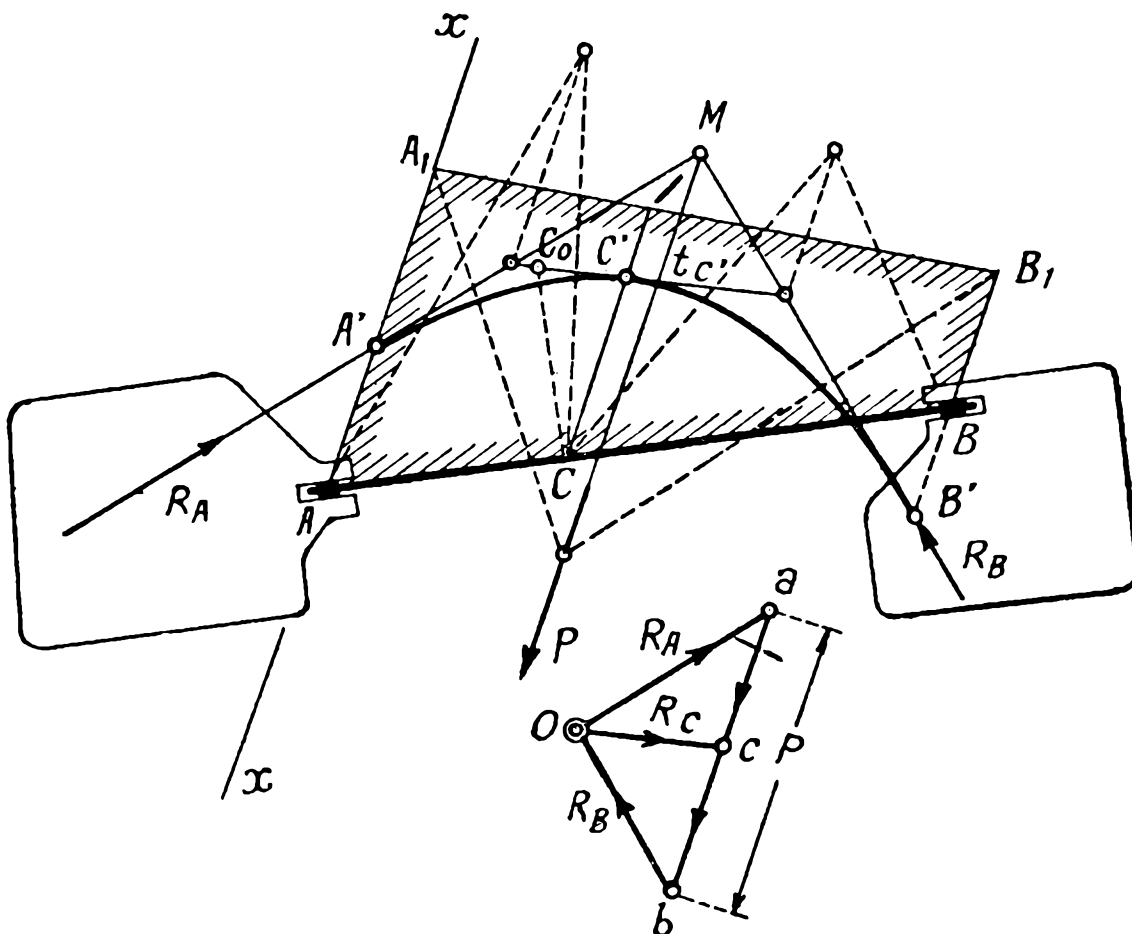


FIG. 255

Sea AB (fig. 255) una parte rectilínea de un sistema de alma llena sujeta a una carga continua de dirección xx , de repartición lineal dada por el diagrama AA_1BB_1 , y sea, además, R_A la resultante de las fuerzas que en el sistema total actúan a la izquierda de la sección A . La resultante de las fuerzas que actúan a la derecha de la sección B se determina fácilmente sabiendo que debe equilibrar a la R_A y a la resultante P de las cargas directamente aplicadas sobre AB . Construyendo, pues, un polígono oab de estas fuerzas se tiene $R_B = bo$ y su recta de acción es la MB' paralela a la ob trazada por la intersección M de R_A y P .

Conocidas así las fuerzas R_A y R_B y hallados los puntos A' y B' en que cortan a los lados extremos AA_1 y BB_1 del diagrama de cargas, la curva de las presiones no resulta otra cosa que la curva funicular de

estas cargas, tangente en dichos puntos A' , B' a las restas de acción de las fuerzas R_A y R_B , curva funicular, constituida por una parábola cúbica que se traza fácilmente, mediante puntos y tangentes, en la forma conocida. En la figura se ha dejado la determinación del punto C' y tangente tc' correspondientes a la sección C . El lado de la curva de las presiones correspondiente a esta sección, es decir, la recta de acción de la resultante de las fuerzas que quedan a su izquierda, está dado por la tangente tc' y su punto de aplicación es el C_0 de intersección con la dirección CC_0 de la sección (perpendicular por C a AB). Por lo que respecta a la intensidad R_C de la recta de acción de las fuerzas que quedan a la izquierda de C , está dada, como indica la figura, por el segmento $R_C = oc$ obtenido mediante una paralela oc a la tangente tc'

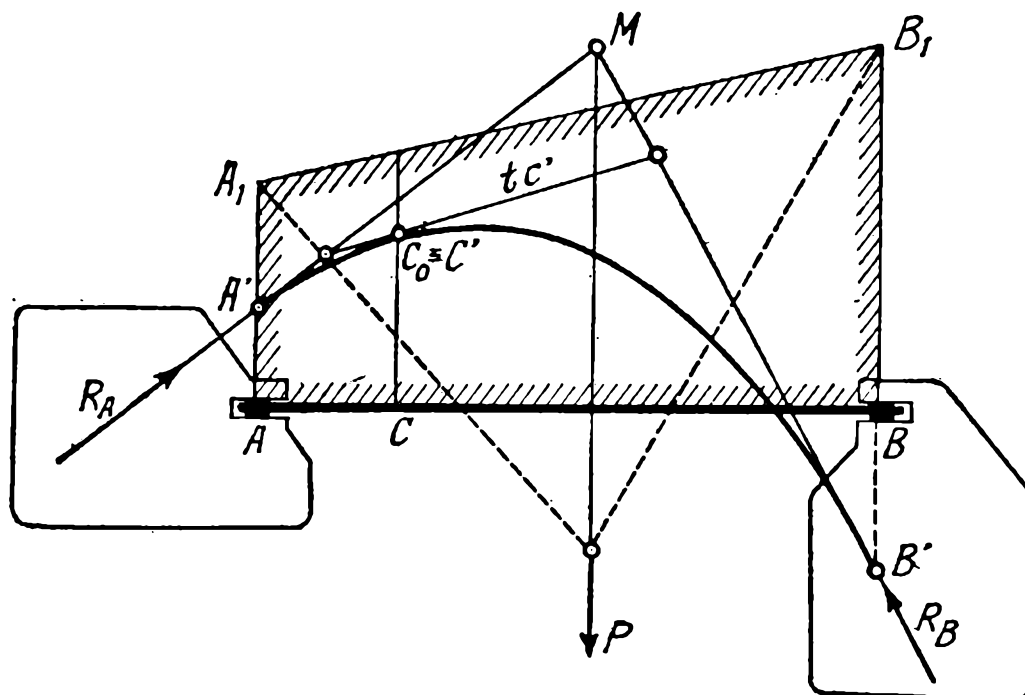


FIG. 256

Si la carga es (fig. 256) normal a la fibra media, los puntos C_0 y C' de la figura 255 coinciden, es decir, para una sección CC_0 , la resultante de las fuerzas que quedan a la izquierda está dada directamente por la tangente tc' a la curva de las presiones en el punto $C' \equiv C_0$ de intersección con dicha sección. En este caso, además, el esfuerzo normal es constante en toda la pieza AB , e igual a la componente \mathcal{N} de la fuerza R_A , paralela a la fibra media.

470. Diagramas de momentos flectores de sistemas rectilíneos. — Sea AB (fig. 257 a) una parte rectilínea de un sistema de alma llena, sujeta a las cargas directamente aplicadas de direcciones cualesquiera P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y sean, además, R_A y R_B , las resultantes de las fuerzas

que quedan a la izquierda de A y a la derecha de B , resultantes que equilibran a las fuerzas P_i .

Descompongamos las fuerzas P_i en fuerzas V_i , normales a la fibra media AB y H_i paralelas a la misma (fig. 257 b), y sean V_A y V_B las reacciones que en los puntos A y B de la pieza AB considerada como simplemente apoyada, originarían las solas componentes normales V_i .

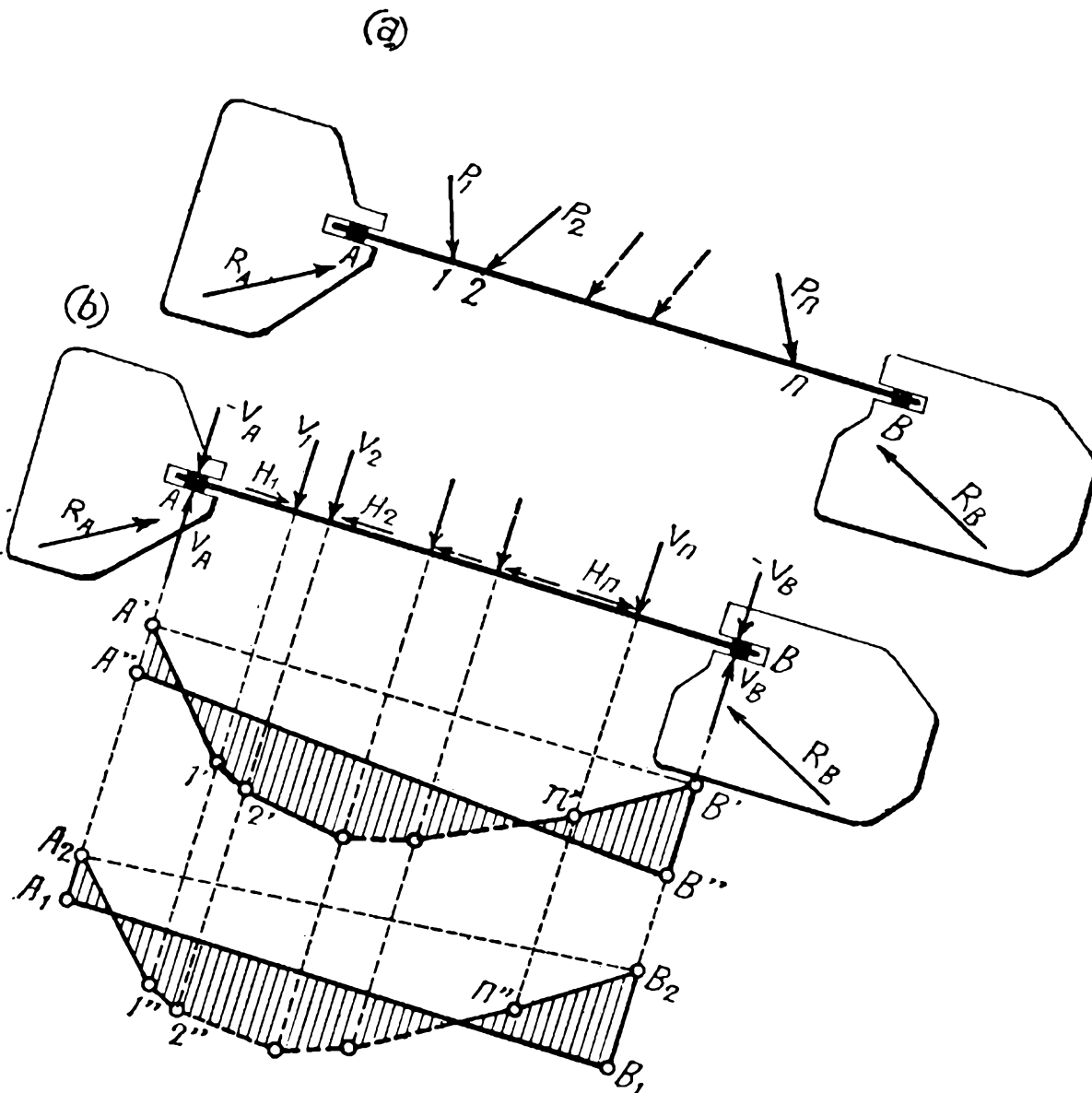


FIG. 257

Si en dichos puntos del sistema dado aplicamos ahora, pares de fuerzas opuestas V_A y $-V_A$, V_B y $-V_B$, respectivamente iguales en valor absoluto a estas reacciones, las condiciones de equilibrio no alteran, y podemos considerar los momentos flectores que en el sistema se originan como la suma de los producidos por los siguientes grupos de fuerzas: 1º) Las cargas normales V_i y la reacción V_A cuyos momentos flectores, que son los mismos que las cargas V_i originarían en la viga AB si fuera simplemente apoyada, están dados, como se sabe, por el polígono funicular $A'1'2'\dots n'B'$ de estas fuerzas V_i referido a la recta $A'B'$. 2º) Las fuerzas R_A , $-V_A$ y H_i ; siendo nulos los momentos debidos a estas H_i , se

reducen los debidos a aquellas fuerzas a los producidos por la resultante de las dos primeras, R_A y $-V_A$, que por actuar ambas a la izquierda de A , están dados, para toda la pieza AB , por una función lineal.

Al diagrama de momentos flectores $A'1'2' \dots n'B'$ obtenido considerando la pieza AB como simplemente apoyada, se requerirá, pues, sumar las ordenadas de una recta para obtener el diagrama buscado de momentos flectores de la pieza AB , o, lo que es lo mismo, aquel polígono referido a un nuevo eje nos dará este diagrama. El nuevo eje, por otra parte, quedará perfectamente determinado si se conocen los momentos en los extremos A y B de la pieza dada.

Calculados, pues, estos momentos \mathcal{M}_A^* en A (igual al momento con respecto a A de la R_A) y \mathcal{M}_B^* en B (igual y de sentido contrario al momento con respecto a B de la R_B) y llevados segmentos $\overline{A'A''}$ y $\overline{B'B''}$ representativos de los mismos cambiados de signo, el nuevo eje de referencia será el $A''B''$ y el polígono de momentos $A'1'2' \dots n'B'$, obtenido al considerar la viga AB como simplemente apoyada, referido al mismo, como indica el rayado de la figura, nos representará el diagrama de momentos flectores buscado de la pieza AB .

471. — Si se desea obtener el diagrama de momentos referido a una recta dada de antemano, por ejemplo A_1B_1 (fig. 257 *b*) paralela a la fibra media de AB , se procederá como sigue:

Se llevará en $\overline{A_1A_2}$ y en $\overline{B_1B_2}$, en la escala elegida y con su signo, segmentos representativos de los momentos \mathcal{M}_A^* y \mathcal{M}_B^* y sobre la A_2B_2 , tomada como eje, se construirá el diagrama de momentos flectores $A_21''2'' \dots n''B_2$ que las cargas normales V_i originarían en la viga AB si fuera simplemente apoyada. El polígono así obtenido, referido al dado eje A_1B_1 , como marca el rayado de la figura, nos dará el diagrama buscado.

472. **Diagramas de esfuerzos tangenciales de sistemas rectilíneos.** — Sea AB (fig. 258) una parte rectilínea y de alma llena de un sistema, sujeta a las cargas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), y R_A y R_B las resultantes de las fuerzas que en el sistema total, actúan, respectivamente, a la izquierda y a la derecha de sus secciones extremas A y B . Sobre la recta $A'B'$, tomada como eje, propongámonos construir su diagrama de esfuerzos tangenciales.

Para ello, comencemos por calcular las componentes V_A y V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de las fuerzas R_A y P_i , normales a la fibra media del sistema, y siendo V_A el valor del esfuerzo de corte en A , el punto respectivo A'' del diagrama buscado lo obtendremos llevando, en la escala elegida, un segmento $\overline{A'A''}$ representativo del mismo.

Entre el extremo A y el punto A_1 de aplicación de la P_1 no actúa ninguna fuerza y, por tanto, el diagrama de esfuerzos tangenciales está constituido por la paralela $A''A_1''$ al eje. Entre los puntos A_1 y A_2 el

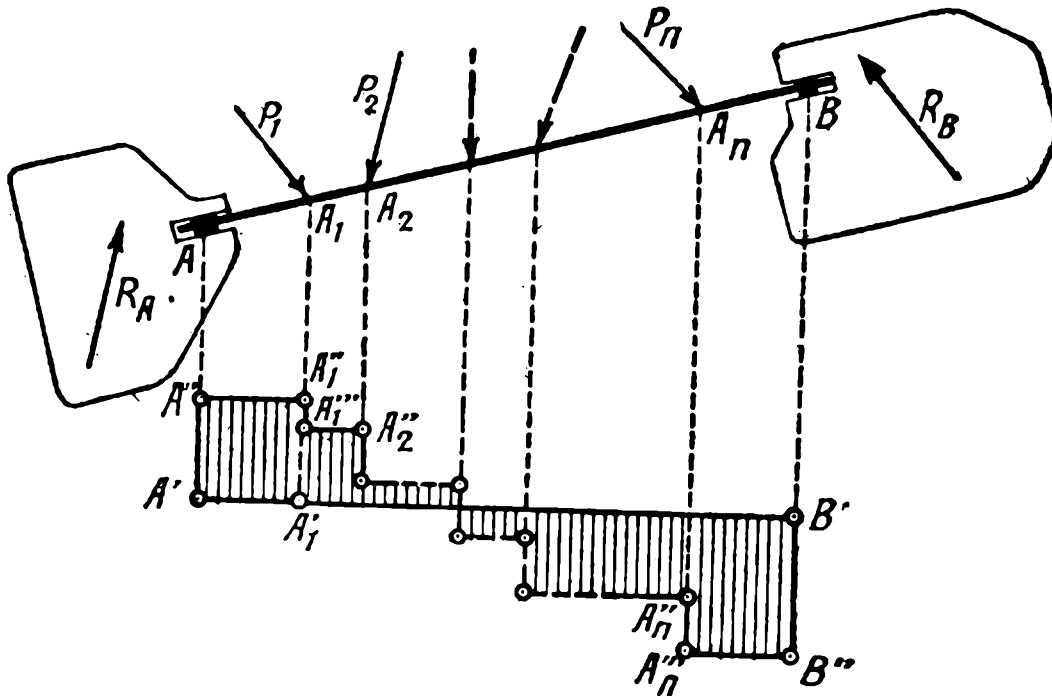


FIG. 258

esfuerzo tangencial está dado por la nueva paralela $A_1'''A_2''$ al eje, obtenida sumando algebraicamente a la anterior ordenadas proporcionales a la componente normal V_1 de la P_1 ; y así sucesivamente hasta llegar al punto B , cuyo esfuerzo tangencial $\overline{B'B''}$ debe resultar, como verificación, igual y de sentido contrario a la componente tangencial V_B de la R_B .

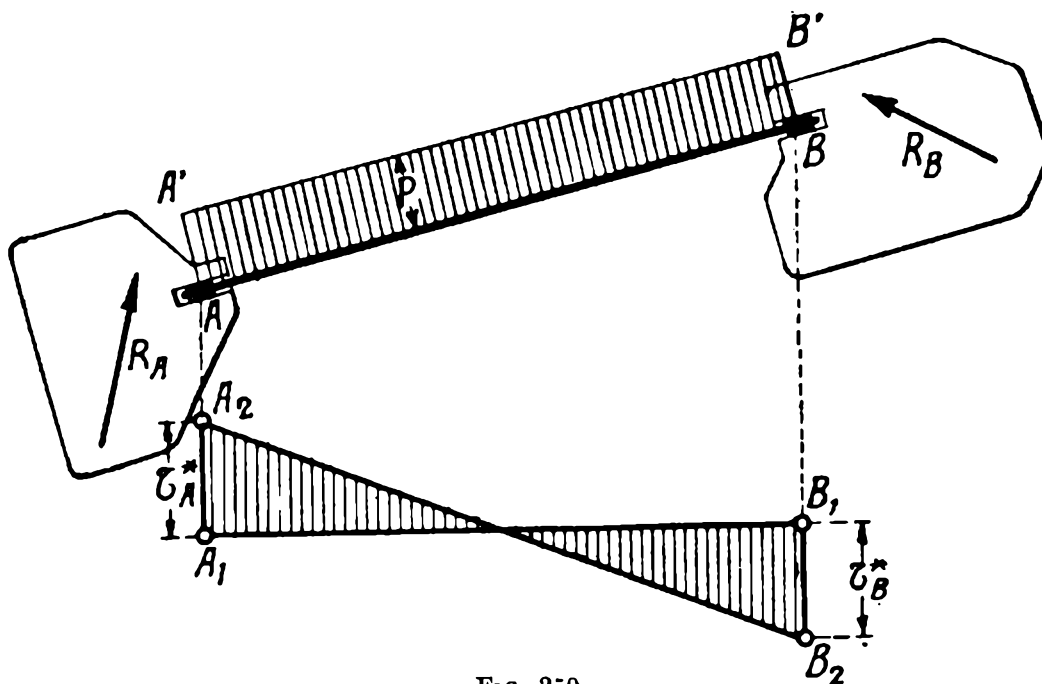


FIG. 259

473. — Si el trozo de viga AB (fig. 259) está sometido a un diagrama continuo de cargas, cuyas componentes perpendiculares a la fibra media se distribuyen uniformemente, según la recta $A'B'$, el diagrama de es-

fuerzas tangenciales, que, como se sabe, es el diagrama integral del de dichas componentes perpendiculares de las cargas, estará constituido por una recta.

Calculados, pues, los esfuerzos tangenciales \mathcal{T}_A^* y \mathcal{T}_B^* en A y B , tomando la recta A_1B_1 como eje para construir el diagrama de esfuerzos tangenciales y llevando segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{B_1B_2}$ representativos de los mismos, este diagrama está dado por la recta A_2B_2 , en la forma indicada por el rayado de la figura.

474. — Si el diagrama de cargas normales a la fibra media está dado por la recta $A'B'$ (fig. 260) oblicua con respecto a la misma, el de esfuerzos tangenciales, integral del mismo, será una parábola de 2º grado,

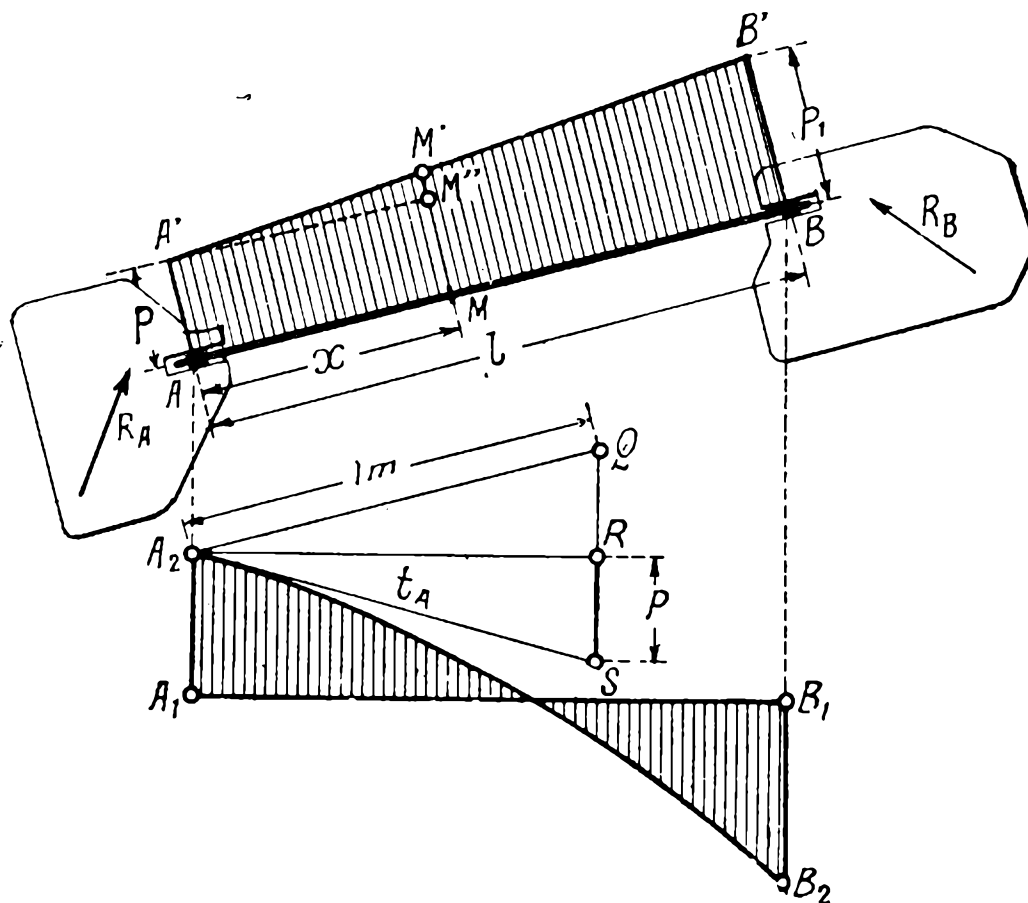


FIG. 260

que pasará por los puntos A_2 y B_2 , tales que $\overline{A_1A_2} = \mathcal{T}_A^*$ y $\overline{B_1B_2} = \mathcal{T}_B^*$. Dicha parábola quedará, por consiguiente, determinada si se da su tangente en el punto A . Para hallar esta última comencemos por obtener la ecuación de aquélla. Considerando un punto M , distante x de A , el esfuerzo de corte V a agregar a \mathcal{T}_A^* será dado por el área $AA'M'M$, que, trazando la paralela $A'M''$ al eje, queda dividida en el rectángulo $AA'MM''$ igual a px y el triángulo $A'M'M''$ igual a $\frac{p_1 - p}{2l} x^2$; es decir que

$$V = px + \frac{p_1 - p}{2l} x^2.$$

De la anterior se deduce que

$$\frac{dV}{dx} = p + \frac{p_1 - p}{l} \cdot x,$$

que para x igual a cero, es decir, para el punto A , nos da

$$\left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=0} = p.$$

La tangente a la parábola en A , forma con respecto al eje un ángulo infinitésimo igual a p , y llevando, por tanto, a partir de A_2 sobre una paralela a la fibra media AB , un segmento $\overline{A_2Q} = 1$ m, trazando por su extremo una paralela a la dirección de las ordenadas del diagrama de esfuerzos tangenciales buscado, y llevando, a partir del punto R en que la paralela A_2R a A_1B_1 la corta, un segmento $\overline{RS} = p$, la tangente en A a este diagrama de esfuerzos de corte, queda dada por la recta A_2S . Obtenida esta tangente t_A , la terminación del diagrama se reduce a la construcción de la parábola de 2º grado que pasa por A_2 y B_2 y es tangente en A_2 a la misma.

475. — Resumiendo lo anteriormente expuesto y a modo de ejemplo, consideremos la parte rectilínea AB de un sistema, sometida a un estado de cargas cuyas componentes normales a su fibra media están dadas por el diagrama representado en la figura 261. La componente perpendicular a la fibra media \mathcal{T}_A^* , de la resultante R_A de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección A , que constituye el esfuerzo tangencial en esta sección, está representada, en la escala elegida, por el segmento $\overline{A_1A_2}$. No actuando fuerzas entre los puntos A y C , el esfuerzo de corte se mantiene constante e igual a \mathcal{T}_A^* , estando representado por la paralela A_2C_2 al eje A_1B_1 . En la sección inmediatamente a la derecha de C el esfuerzo de corte se obtiene sumando algebraicamente al anterior la fuerza concentrada V_1 , y el punto C_3 , correspondiente en el diagrama, se determina como se ve en la figura. En la sección D el esfuerzo tangencial es igual a la suma del $\overline{C_1C_3}$ correspondiente a C y de la carga uniformemente repartida extendida entre C y D , es decir, es igual al segmento $\overline{D_1D_2} = \overline{C_1C_3} + px$, y entre los puntos C_3 y D_2 el diagrama de esfuerzos de corte está dado por la recta C_3D_2 .

Finalmente, en B el esfuerzo tangencial es igual al $\overline{D_1D_2}$ más la carga trapezoidal $DD''BB'$, es decir, es $\overline{B_1B_2} = \overline{D_1D_2} + \frac{p_1 + p_2}{2} x_1$; y entre D_2 y B_2 el diagrama es una parábola de 2º grado tangente en D_2 a la recta

t_D , determinada en la forma expuesta en el número anterior, es decir, llevando por D_2 un segmento $\overline{D_2Q} = 1$ m. paralelo a AB , trazando por su extremo una paralela QS a las ordenadas del diagrama de esfuerzos de corte, hallando el punto R en que la corta la paralela D_2R al eje A_1B_1 del diagrama y midiendo un segmento $\overline{RS} = p_1$.

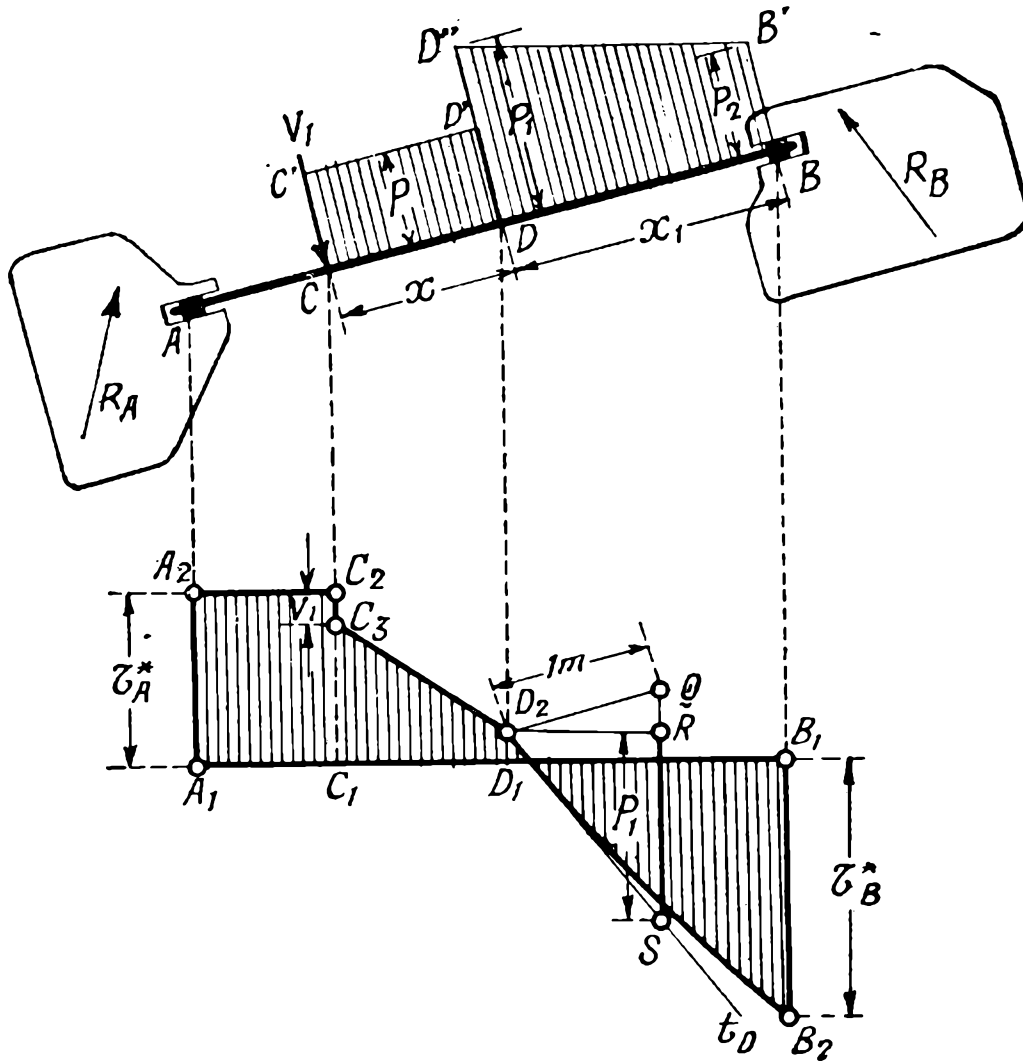


FIG. 261

476. Obtención de los diagramas de esfuerzos tangenciales en función de los de momentos flectores.— Dado el diagrama de momentos flectores de una parte rectilínea AB (fig. 262) de un sistema de alma llena se puede obtener directamente, en función del mismo, el de esfuerzos tangenciales. Basta recordar, para ello, que el diagrama de momentos flectores es un polígono funicular de las cargas normales V_i y de las componentes normales V_A y V_B de las resultantes R_A y R_B de las fuerzas que quedan a la izquierda y a la derecha de A y B . Según esto, la recta A_1B_1 y el primer lado $A_1'1'$, constituyen los lados del funicular correspondientes a la fuerza V_A anterior a la sección A y la recta de acción de esta última debe ser, la determinada por el punto M de intersección de las mismas.

Sentado lo anterior, supongamos, para precisar ideas, que el diagrama de momentos flectores de la figura esté dibujado en la escala $\frac{5 \text{ tm}}{\text{cm}}$ y pongámonos a trazar el diagrama de esfuerzos tangenciales en la escala $\frac{2 \text{ t}}{\text{cm}}$, lo que haremos hallando, en esta escala, el polígono de fuerzas que

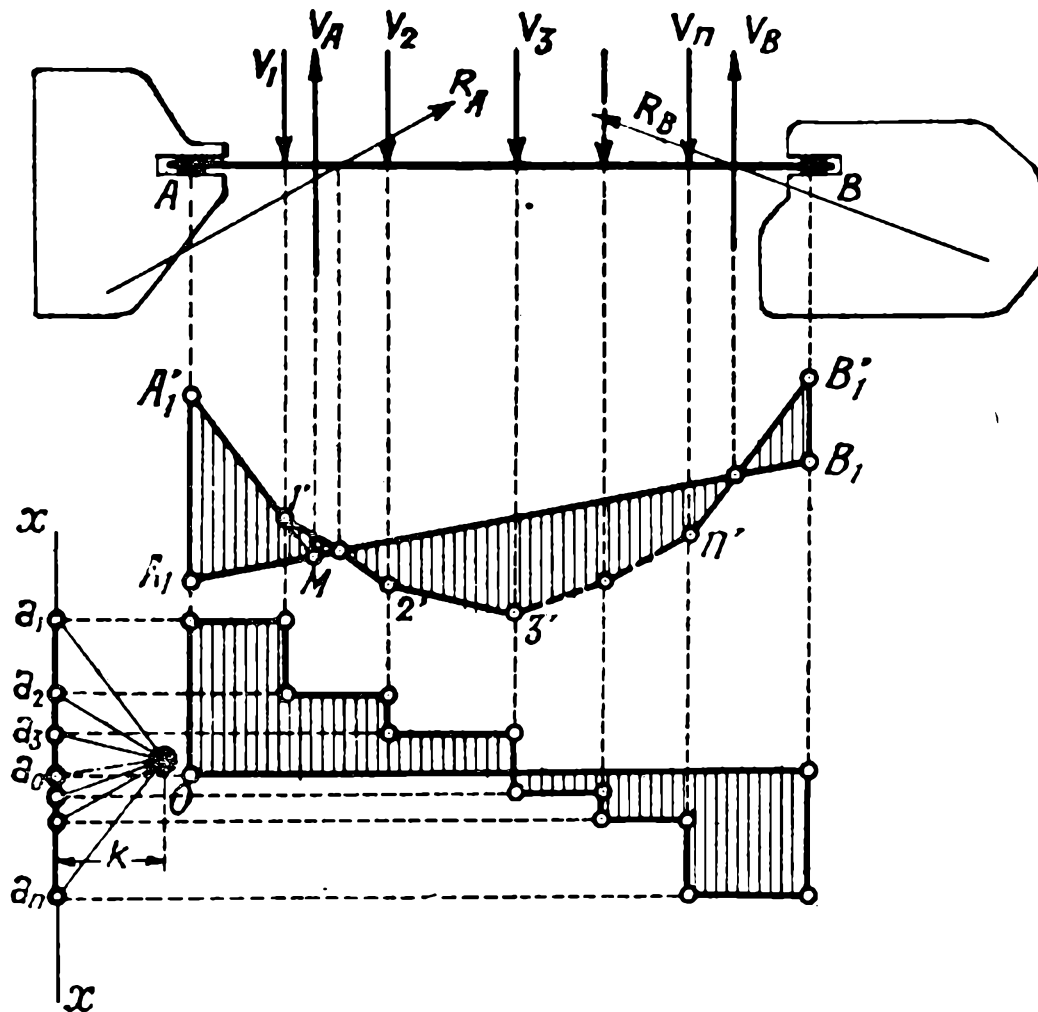


FIG. 262

pudo haber servido para construir el funicular $A_1'1'2' \dots n' B_1'$. Recordando que la escala $\frac{5 \text{ tm}}{\text{cm}}$ de momentos es igual al producto de la distancia polar k por la escala $\frac{2 \text{ t}}{\text{cm}}$ de fuerzas, es decir, que

$$\frac{5 \text{ tm}}{\text{cm}} = k \frac{2 \text{ t}}{\text{cm}},$$

resulta que dicha distancia polar es

$$k = \frac{5}{2} \text{ m} = 2,5 \text{ m}.$$

Hallada esta distancia polar k tomemos un punto cualquiera 0 como polo y tracemos una recta xx paralela a las cargas normales V_1 y distante

k de 0. Trazando por 0 paralelas a los lados A_1B_1 y $A_1'1'$ del diagrama de momentos determinaremos sobre xx el segmento $\overline{a_0a_1}$ que, evidentemente, nos dará la intensidad de la fuerza V_A , es decir, del esfuerzo tangencial en A . Análogamente hallando la intersección a_2 de la paralela $0a_2$ al lado $1'2'$ del diagrama de momentos, el segmento $\overline{a_0a_2}$ representará la intensidad de la resultante de las fuerzas normales V_A y V_1 que quedan a la izquierda de las secciones comprendidas entre 1 y 2, es decir; nos dará el esfuerzo tangencial, constante entre estas secciones.

Obtenidos, pues, en esta forma los esfuerzos tangenciales en un número conveniente de secciones, se podrá trazar el diagrama respectivo como indica la figura.

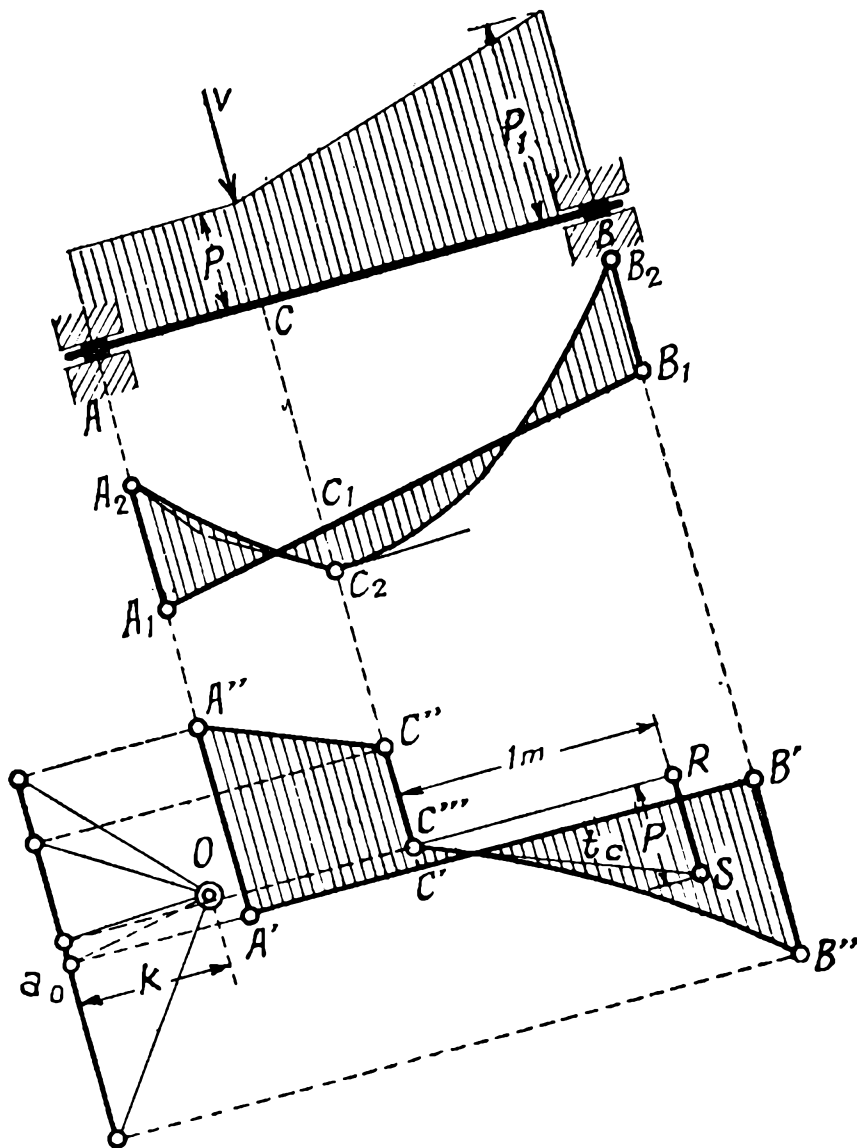


FIG. 263

477. —En general no convendrá hallar todo el diagrama de esfuerzos tangenciales, punto por punto en la forma expuesta, que, por otra parte, no es sino una diferenciación gráfica, sino limitarse a hallar con dicho procedimiento los principales puntos y completar el trazado directamen-

te, por suma de las cargas que quedan a la izquierda de las diversas secciones, tal como se ha visto en (475). Además, si el diagrama de momentos flectores entre dos puntos es una recta oblicua, una parábola de 2º grado o una de 3º, los diagramas de esfuerzos tangenciales entre los mismos, diagramas diferenciales de aquéllos, serán respectivamente una recta paralela al eje, una recta oblicua y una parábola de 2º grado.

Así, por ejemplo, en la figura 263 se han hallado los esfuerzos tangenciales en la sección A , a la izquierda y derecha de la sección C y en la sección B , trazando por el polo O las paralelas a la línea de cierre A_1B_1 del diagrama de momentos flectores y a las tangentes del mismo en A_2 , a la izquierda y derecha de C_2 y en B_2 . Luego, se ha completado el diagrama de esfuerzos tangenciales sabiendo que entre A'' y C'' es una recta y que entre C''' y B'' es una parábola de 2º grado cuya tangente en C''' es la t_C determinada, de acuerdo con (474), como se ve en la figura.

478. Diagramas de esfuerzos normales de sistemas rectilíneos. — Los diagramas de esfuerzos normales de los sistemas rectilíneos tienen la misma forma que los de esfuerzos tangenciales, y su determinación, una vez conocidos los esfuerzos normales \mathcal{N}_A^* y \mathcal{N}_B^* en las secciones extremas del trozo de viga considerado y hallados los diagramas de repartición de las componentes de las cargas paralelas a la fibra media de la viga no ofrece ninguna particularidad.

479. Obtención de desplazamientos correspondientes a las deformaciones debidas a las cargas permanentes o accidentales. — Por lo que respecta al cálculo de los desplazamientos absolutos o relativos de las deformaciones que en los sistemas isostáticos originan las cargas permanentes o accidentales, una vez conocidas todas las fuerzas exteriores, cargas y reacciones, que actúan sobre una parte cualquiera de los mismos, no ofrece ninguna dificultad, y se lo efectúa, ya sea mediante diagramas de Williot-Mohr, ya recurriendo a elásticas, en la forma expuesta en la parte primera de esta obra.

Si no se desea conocer la totalidad de los desplazamientos de la parte considerada del sistema, sino sólo alguno de ellos, se recurrirá, en la forma conocida, al empleo de los teoremas de Mohr o de Castigliano, según los casos.

§ 3. — Obtención en los sistemas hiperestáticos de las magnitudes estáticas y desplazamientos debidos a las cargas permanentes y accidentales, a los cambios de forma y a los asientos de las sustentaciones

480. Forma de plantear el problema de la resolución de un sistema hiperestático. — Para hallar, en un sistema isostático, los efectos de un estado cualquiera de cargas, basta conocer su forma: la posición de los vértices del reticulado si es de esta naturaleza o la curva que constituye su fibra media, si es de alma llena. En posesión de esta forma y dadas las cargas, pueden calcularse, sin más datos, ya las tensiones en las barras, ya las características en las diversas secciones, y, en función de ellas, fijar las dimensiones necesarias para que sus partes constitutivas resistan en buenas condiciones a dichas cargas. El cálculo de un sistema isostático es, pues, en general, un problema de cálculo directo, y decimos en general, porque no sucede lo mismo cuando se quiere hallar la acción del peso propio, ya que este peso es función de las secciones que se trata de determinar. Sin embargo, en gran número de casos prácticos el peso propio es pequeño e influye poco en comparación de las restantes cargas y, sin afectar groseramente los resultados, se lo puede, dentro del grado de aproximación, estimar *a priori* de modo a que, aún para el mismo, la determinación de las dimensiones resulte un cálculo directo.

En los sistemas hiperestáticos, en cambio, el problema se presenta siempre como un cálculo de verificación, ya que, para cualquier estado de cargas, su resolución depende de la deformación del mismo, o sea, de las secciones de sus piezas constitutivas, que son precisamente las que se trata de determinar. Para ellos, pues, sólo queda el recurso de fijar de antemano estas dimensiones y verificarlas luego, para volver a repetir el cálculo en caso que no resulten de acuerdo con las previstas.

La fijación previa de dimensiones se hace, por lo común, mediante comparaciones con obras análogas a la que se trata de calcular. Pero, cuando no sea posible establecer estas comparaciones, a causa de no existir obras análogas o de carecer de datos sobre las mismas, se procederá en la forma que pasamos a exponer.

Si se trata de un sistema de alma llena se podrá suponer, para un primer cálculo, que el momento de inercia se mantenga constante a lo largo de la fibra media o, a lo más, que tenga valores constantes en sus principales piezas, determinados en base a una grosera estimación sobre los posibles momentos flectores máximos a producirse. Si, en cambio, el sistema es de reticulado, se supondrá que los cordones tengan una sección constante y se desprejará, en el primer cálculo, por lo menos, la influen-

cia de la deformación de diagonales y montantes, con lo que no se requerirá fijar dimensiones a los mismos.

En uno y otro caso, no será menester dar valores absolutos a dichos momentos de inercia y secciones supuestos constantes, pues la obtención, mediante las ecuaciones de deformación, de las incógnitas hiperestáticas, no depende del valor absoluto de los desplazamientos sino de los valores relativos de dichos desplazamientos con respecto a uno cualquiera de ellos. En las ecuaciones [a] de (366), obtenidas para la resolución de un sistema hiperestático por la aplicación de la ley de Betti, los desplazamientos $a_{i,j}$ y $a_{p,j}$ de los puntos de aplicación de las incógnitas X_i y de las cargas P_p figuran, en efecto, en todos los términos, siendo posible la multiplicación de todos por un número cualquiera, sin alterar los resultados; como a esta multiplicación se puede llegar variando proporcionalmente todas las secciones Ω y momentos de inercia I del sistema, queda demostrado, como afirmábamos, que no interesan los valores efectivos de estos últimos sino simplemente números que les sean proporcionales. En el caso particular en que todo el sistema tenga un único momento de inercia constante, podrá pues, atribuírsele, por comodidad, un valor igual a la unidad. Si el sistema tuviera solamente dos valores de secciones o de momentos de inercia, se podrá hacer uno de ellos igual a la unidad y el otro igual a la relación de ambos; etc.

Estas últimas consideraciones son válidas únicamente en lo que se relaciona con el cálculo de las dimensiones debidas a las cargas, pues, para tener en cuenta los efectos de los cambios de forma (variación de temperatura, etc.) y de los asientos accidentales de las sustentaciones, se requiere conocer, previamente, las verdaderas dimensiones transversales de las piezas constitutivas del sistema.

Una vez efectuado un primer cálculo en base a las hipótesis de dimensiones transversales establecidas en la forma que acabamos de exponer, se dimensionará el sistema de acuerdo con los resultados del mismo y, con estas nuevas secciones se procederá a una nueva resolución, para volver a dimensionar el sistema teniendo en cuenta los nuevos resultados. Teóricamente debería continuarse en esta forma, hasta que las secciones obtenidas fueran, dentro del grado de aproximación, iguales a las que sirvieron de base para calcularlas. Pero, prácticamente, bastará, por lo general, con este segundo cálculo, aunque las secciones resulten bastante distintas de las que le sirvieron de punto de partida, pues, por lo común, de rehacerse el cálculo se llegaría a resultados que no alterarían apreciablemente dichas secciones. Debe tenerse presente a este respecto que, por importante que sea la influencia de los valores de las dimensiones transversales, mucho más lo es la de la forma del sistema, de modo que,

sin extremar la aproximación en la fijación de aquéllas, puede llegarse a resultados aceptables en la práctica.

481. — Conviene acentuar bien esta diferencia existente entre los sistemas isostáticos e hiperestáticos. En un sistema isostático de reticulado, por ejemplo, la tensión en una barra debida a un determinado estado de cargas, no altera si se cambia su sección transversal Ω , ya aumentándola, para alcanzar el debido coeficiente de trabajo, ya reduciéndola, para economizar material cuando este coeficiente resulte muy reducido.

En cambio, si calculada la tensión en una barra de un sistema hiperestático, resulta demasiado grande, no puede afirmarse *a priori* que el sistema se lleva a mejores condiciones de resistencia al aumentar su sección transversal. Aún más, es posible concebir sistemas hiperestáticos, en los que el aumento de la sección transversal de una barra, empeore el coeficiente de trabajo que en la misma origine un determinado estado de cargas, a causa de que dicho aumento de sección produzca en la propia barra un aumento de tensión en mayor proporción.

Pero, como hemos dicho, prácticamente, no es, por suerte, en general, tan predominante esa influencia de las dimensiones transversales y un sistema puede darse, casi siempre, como resuelto con suficiente aproximación cuando se haya dimensionado de acuerdo a los resultados del segundo cálculo de verificación a que nos hemos referido en el número anterior.

482. Elección y cálculo de las incógnitas hiperestáticas. — Dado un sistema hiperestático sujeto a un determinado estado de cargas, permanentes o accidentales, el primer problema a resolver consiste en hallar los valores de sus incógnitas hiperestáticas, obtenidas las cuales el cálculo

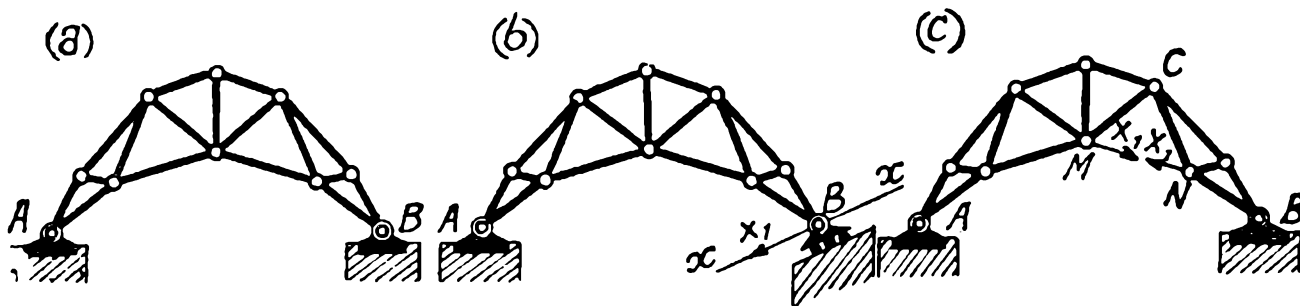


FIG. 264

lo se reduce al del sistema isostático que resulta al suprimir los vínculos superfluos correspondientes, bajo la acción, además de las cargas directamente aplicadas, de dichas reacciones hiperestáticas (de vínculo externo o interno) consideradas como fuerzas exteriores.

Por lo general, para un dado sistema se podrán elegir las incógnitas hiperestáticas de gran número de maneras. Así, por ejemplo, en el sistema de primer grado de la figura 264 *a*, se podrá tomar como incógnita hiperestática la proyección sobre una dirección cualquiera xx (fig. 264 *b*) de la reacción en B , convirtiendo esta articulación en un apoyo móvil según la dirección xx y manteniendo el equilibrio mediante la incógnita X_1 de esta misma dirección. Pero también podrá tomarse como incógnita hiperestática la tensión en una cualquiera MN de sus barras, reemplazándola por la misma (fig. 264 *c*) con lo que el sistema se convierte en el arco isostático con tres articulaciones A , B y C .

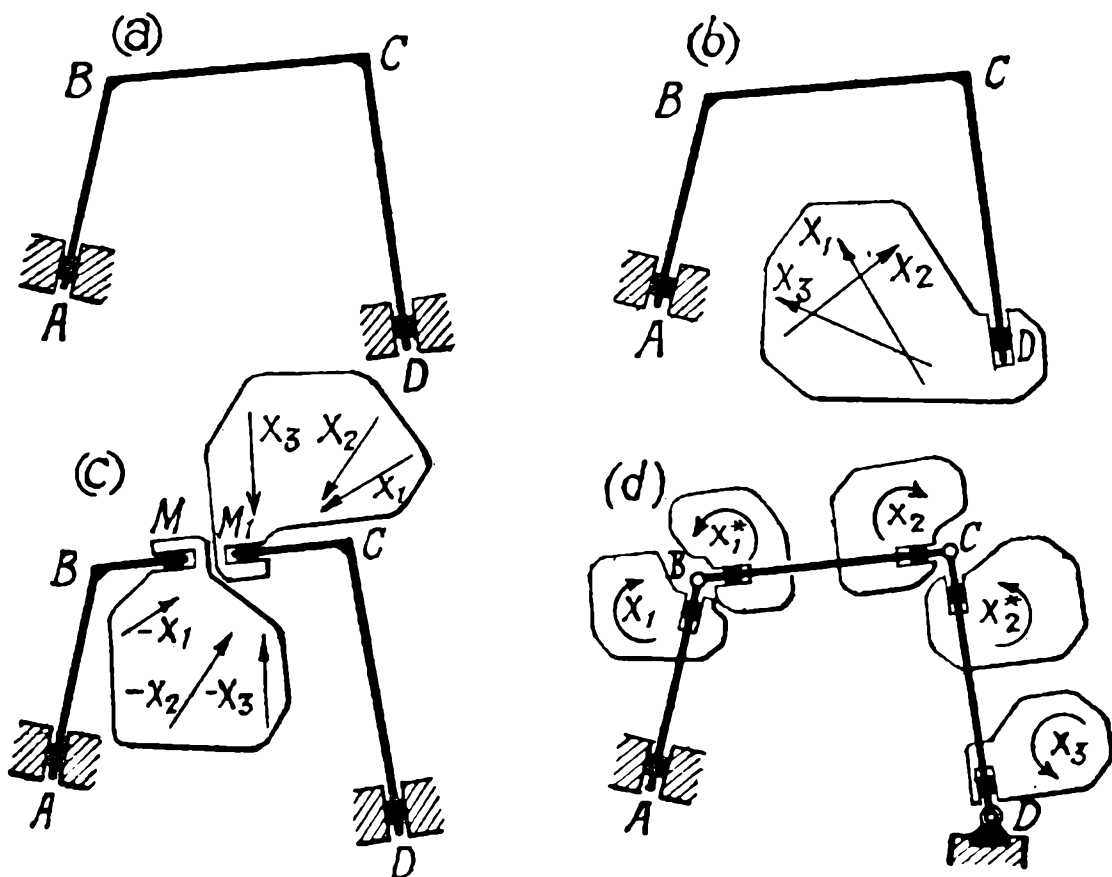


Fig. 265

Análogamente, en el sistema de alma llena de tercer grado de indeterminación estática de la figura 265 *a*, se pueden tomar como incógnitas hiperestáticas las tres componentes X_1 , X_2 y X_3 , según direcciones elegidas a voluntad, de la reacción en el empotramiento D (fig. 265 *b*); o, como indica la figura 265 *c* las tres componentes, también según direcciones cualesquiera X_1 , X_2 y X_3 , de la reacción interna transmitida a través de cualquiera de sus secciones M . Además, podrá tomarse las incógnitas no agrupadas en una sección, como en los casos anteriores, sino separadas, eligiendo, por ejemplo, (fig. 265 *d*) los momentos flectores en tres puntos B , C y D .

Pero, prácticamente, no es indiferente la elección de las incógnitas hiperestáticas, pudiéndose, cuando se la efectúa en forma adecuada, re-

ducir enormemente el trabajo de cálculo para su obtención. Esta elección de las incógnitas hiperestáticas, o, aún, de otras incógnitas auxiliares en función de las cuales puedan ellas determinarse, constituye, precisamente, el objeto principal del desarrollo de los capítulos siguientes.

483. — Debe notarse, por otra parte, que en un sistema hiperestático no siempre son superfluos todos sus vínculos y que, por tanto, no pueden tomarse como hiperestáticas las incógnitas correspondientes a cualquiera de ellos.

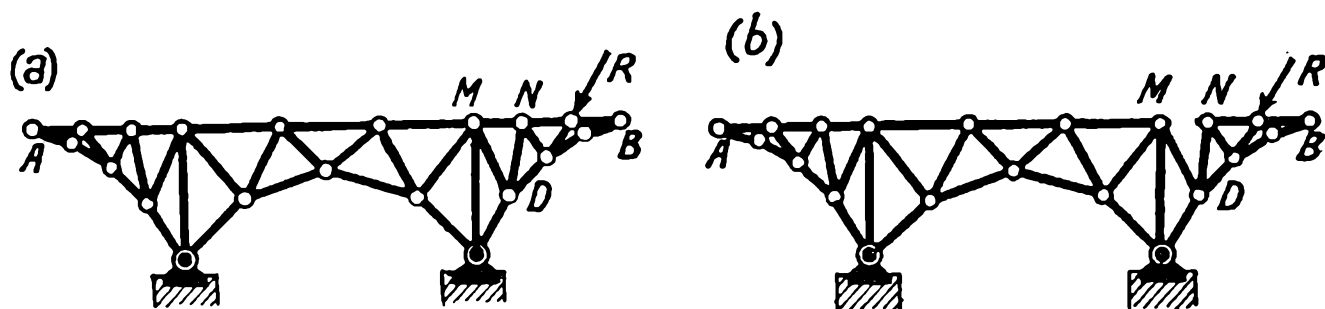


FIG. 266

Así, en el sistema hiperestático de primer grado representado en la figura 266 *a*, la barra *MN* no constituye un vínculo superfluo, ya que al suprimirla (fig. 266 *b*) queda hiperestática la parte *AMD* y la *NDB* con un grado de libertad. El cálculo de la tensión *T* en la misma no resuelve, pues, la indeterminación estática, lo que se hubiera podido deducir directamente observando que dicha tensión es isostática, ya que de antemano es conocida la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre la chapa *NDB* que queda a la derecha al suprimir la barra respectiva, resultante constituida por la de las cargas directamente aplicadas sobre la misma.

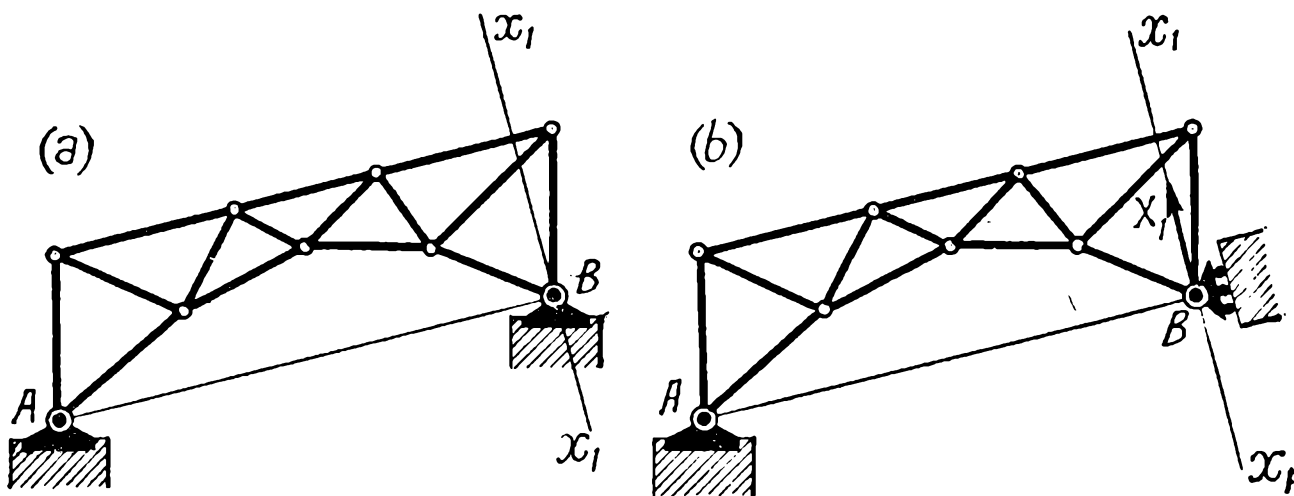


FIG. 267

En el sistema de la figura 267 *a* no se puede tomar como incógnita hiperestática la proyección de la reacción en *B* según la normal x_1x_1 de la recta *AB*, pues al reemplazar, con dicho objeto, la articulación fija *B*

por un apoyo móvil de dirección x_1x_1 (fig.267 b) el sistema resultante tiene un grado de libertad siendo susceptible de girar de cantidades infinitésimas en torno a A , lo que nos dice que la proyección X_1 considerada de la reacción en B es isostática.

Análogamente, en el sistema de tercer grado de la figura 268 a no se pueden tomar como incógnitas hiperestáticas simultáneamente los momentos flectores en A , M y B , pues, al suprimir los vínculos respectivos.

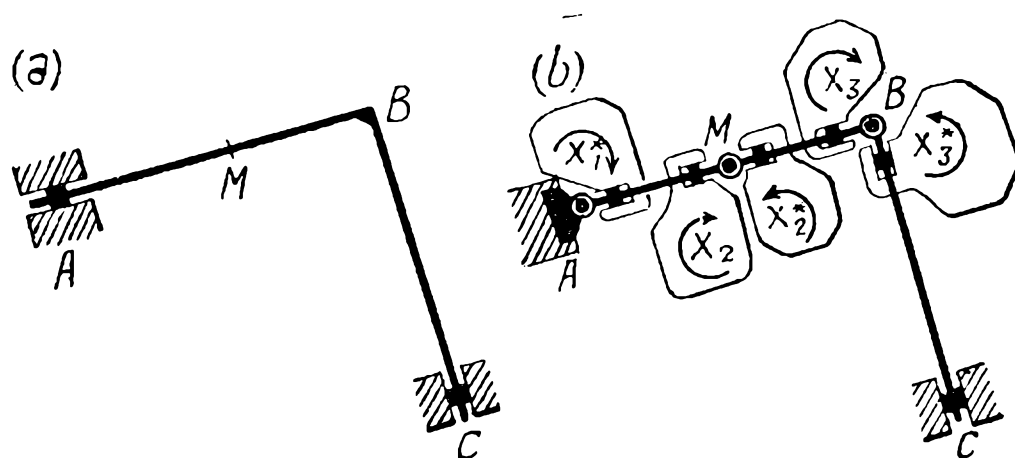


FIG. 268

para poner dichas incógnitas en evidencia, resulta (fig. 268 b) un sistema de un grado de libertad, pudiendo las chapas AM y MB girar de cantidades infinitésimas en torno a A y B . Esto sucede porque el momento en M está determinado estáticamente cuando se conocen los que se producen en A y B .

484. Cálculo de las magnitudes estáticas debidas a cargas permanentes o accidentales. — Obtenidas las reacciones hiperestáticas X_i ($i = 1, 2, \dots, G$) que en un sistema hiperestático de grado G produce un estado cualquiera de cargas, el resto del cálculo se reduce a considerar el sistema isostático resultante al suprimir los vínculos superfluos, sujeto a la acción de las cargas directamente aplicadas y de dichas reacciones hiperestáticas consideradas como fuerzas exteriores. La determinación de las magnitudes estáticas (tensiones T o características \mathcal{M}^* , \mathcal{N}^* y \mathcal{T}^*) se efectúa, por lo tanto, en la forma conocida para los sistemas isostáticos.

Pero, muchas veces se requiere obtener numéricamente dichas magnitudes estáticas. Sea por ejemplo, M una magnitud cualquiera a calcular y M_0 la intensidad de la parte de la misma que, en el sistema hecho isostático, originan las solas cargas P directamente aplicadas. Además si M_i' es la magnitud M originada en dicho sistema isostático por una fuerza cualquiera U_i aplicada según la incógnita hiperestática X_i , la

parte de la magnitud M correspondiente al valor X_i de esta incógnita, es

$$\frac{M_i'}{U_i} \cdot X_i = \alpha_{M,i} X_i,$$

en la que $\alpha_{M,i}$, intensidad de la magnitud M originada, en el sistema hecho isostático, por una fuerza igual a uno aplicada según la X_i , es lo que llamaremos *coeficiente de influencia de la fuerza X_i sobre la magnitud M* . Suponiendo, según esto, conocidos todos los coeficientes de influencia $\alpha_{M,i}$ ($i = 1, 2, \dots, G$) correspondientes a las G incógnitas hiperestáticas, el valor de la magnitud M buscada estará dado por la función lineal

$$M = M_0 + \alpha_{M,1} X_1 + \alpha_{M,2} X_2 + \dots + \alpha_{M,G} X_G,$$

o sea,

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^G \alpha_{M,i} X_i, \quad [a]$$

siendo, como queda dicho, M_0 el valor de M originado en el sistema isostático por las solas cargas P .

485. Efectos de las variaciones de forma y de los desplazamientos accidentales de los puntos de sustentación. — Estas acciones se limitan a producir en general, según sabemos, reacciones según los vínculos superfluos, internos y externos para las variaciones no semejantes de forma y solamente externos para las variaciones semejantes de forma y para los asientos accidentales de los puntos de sustentación.

Calculadas, por los métodos conocidos, o en la forma que en detalle exponaremos más adelante, estas incógnitas hiperestáticas $X_{i,t}$ debidas a dichas acciones, incógnitas que constituyen las únicas cargas que actúan sobre el sistema hecho isostático, la obtención de las magnitudes estáticas correspondientes se efectúa directamente por los procedimientos comunes, ya mediante un diagrama de Cremona si el sistema es de reticulado, ya por medio de una curva de presiones o de diagramas de características \mathcal{M}^* , \mathcal{N}^* y \mathcal{T}^* si es de alma llena.

Si se recurre a una curva de presiones debe notarse que, no existiendo cargas directamente aplicadas, dicha curva, en una parte cualquiera comprendida entre dos puntos consecutivos de aplicación de reacciones hiperestáticas, se reduce a una recta, a la recta de acción de la resultante de las fuerzas que quedan de uno u otro lado de sus secciones extremas. Así, para la parte $A_i A_{i+1}$ (fig. 269 a) comprendida entre las reacciones hiperestáticas X_i y X_{i+1} la curva de las presiones es la recta de acción

de las resultantes R_i y R_{i+1} de las fuerzas que quedan a la izquierda de A_i y a la derecha de A_{i+1} (fig. 269 b).

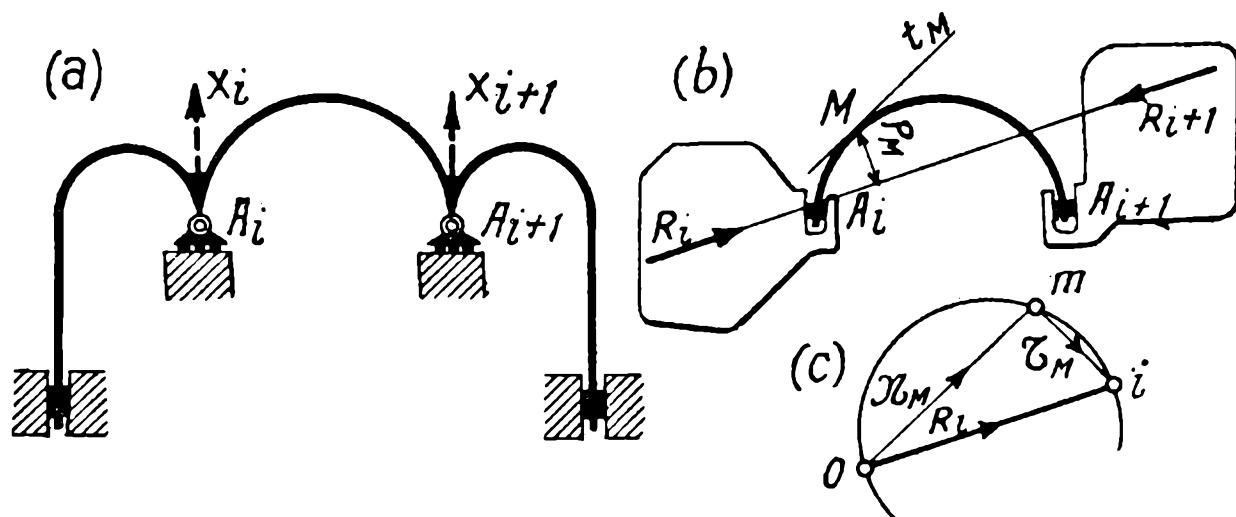


FIG. 269

En este caso, además, la propia fibra media A_iMA_{i+1} referida a la recta R_i constituye un diagrama de momentos flectores. Para un punto cualquiera M el momento flector es, en efecto, igual a $R_i \cdot p_M$, siendo p_M la longitud de la perpendicular bajada desde M sobre R_i ; es decir, que estas perpendiculares leídas en la escala $\frac{\alpha}{\text{cm}}$ de longitudes y multiplicadas por R_i dan los momentos flectores, o sea, como afirmábamos, que el lugar de los puntos M extremos de las mismas referido a la recta R_i como eje, constituye, en la escala $\frac{\alpha R_i}{\text{cm}}$, un diagrama de estos últimos.

Además, en este caso, los esfuerzos normales \mathcal{N}_M^* y tangenciales \mathcal{T}_M^* en un punto M cualquiera se obtienen muy cómodamente en la forma siguiente: Se lleva un vector \overline{oi} equipolente de la fuerza R_i , sobre el mismo tomado como diámetro se construye una circunferencia y trazando por o una paralela a la tangente t_M a la fibra media en el punto M considerado, los segmentos \overline{om} y \overline{mi} , dan respectivamente, las características \mathcal{N}_M^* y \mathcal{T}_M^* .

Finalmente, si se desea obtener numéricamente una magnitud estática M cualquiera (T , \mathcal{N}^* , \mathcal{N} o \mathcal{T}^*) originada por un cambio de forma o por un asiento de las sustentaciones, habrá que aplicar la fórmula [a] de (484) observando que, en este caso, las X_i toman los valores $X_{i,t}$ correspondientes a estas acciones y que, además, M_0 es nula por no existir cargas P directamente aplicadas; es decir, que toma la forma

$$M = \sum_{i=1}^G \alpha_{M,i} X_{i,t} \quad [a]$$

en la que los $\alpha_{M,i}$ son los mismos coeficientes de influencia utilizados en (484) para calcular la acción de las cargas permanentes o accidentales.

486. Desplazamientos correspondientes a las deformaciones originadas por cargas permanentes o accidentales, cambios de forma y asientos de las sustentaciones.— Una vez calculadas las reacciones hiperestáticas producidas por estas acciones y reemplazados los vínculos superfluos de las mismas, se tendrá el sistema hecho isostático, sujeto a las cargas directamente aplicadas y a estas reacciones consideradas como fuerzas exteriores. Su deformación será, pues, la que estas fuerzas originan en el sistema así hecho isostático, y la obtención de los desplazamientos absolutos o relativos que se deseen se hará exactamente en la forma expuesta en (479) para los sistemas isostáticos.

Como comprobación debe tenerse en este caso que los desplazamientos correspondientes a las incógnitas hiperestáticas, tienen que resultar nulos, ya que estas incógnitas son precisamente las fuerzas capaces de impedir desplazamientos según sus propias direcciones.

487. Diferencia entre las sustentaciones destinadas a originar reacciones isostáticas e hiperestáticas. — Despreciándose para calcular las reacciones que aisladamente se pueden considerar isostáticas, las deformaciones originadas por las cargas, ya que en dichos cálculos se supone rígido el sistema, ninguna influencia pueden tener desplazamientos de las sustentaciones del mismo orden de magnitud que dichas deformaciones.

En las sustentaciones destinadas a producir reacciones hiperestáticas, en cambio, entrando en el cálculo de estas últimas, magnitudes del mismo orden que las deformaciones del sistema, se requerirá, para obtener suficiente aproximación, que las sustentaciones sean capaces de producir dichas reacciones mediante desplazamientos despreciables con respecto a las deformaciones del sistema. Esto exige, por lo tanto, para los pilares, estribos o en general, para las fundaciones que deben transmitir reacciones hiperestáticas, mucha mayor solidez y seguridad, que las que corresponden a reacciones isostáticas.

Para tener un criterio que permita juzgar si una fundación se encuentra en condiciones de producir en buenas condiciones una reacción hiperestática, puede procederse como sigue: Suprimido en el sistema el vínculo superfluo correspondiente a la reacción considerada X_i , se calcula el desplazamiento a_i que esta última, cuyo valor se supone ya calculado, sería capaz de producir en el sistema resultante. Además se aplica sobre la fundación una fuerza igual a X_i y se calcula el desplazamiento ϵ que la deformabilidad del pilar o estribo correspondiente

permite a su punto de aplicación. La fundación estará en condiciones de originar la reacción hiperestática supuesta cuando ε resulte despreciable con respecto a a_i , es decir, si se calcula por ejemplo, con una aproximación de 1/100, cuando resulte

$$\varepsilon < \frac{1}{100} a_i.$$

§ 4. — Magnitudes estáticas y desplazamientos debidos a cargas móviles. Generalidades sobre líneas de influencia

488. Preliminar. — Ya hemos dicho que en los sistemas sujetos a cargas móviles, el cálculo de las diversas incógnitas (magnitudes estáticas y desplazamientos) no puede emprenderse con el solo dato de la intensidad de dichas cargas, sino que, para cada incógnita, se requiere hallar las distribuciones de estas últimas que produzcan un máximo (mayor valor positivo) y un mínimo (mayor valor negativo). La determinación de estos estados más desfavorables de cargas y, por tanto, el cálculo de las incógnitas, se realiza de una manera a la vez cómoda y elegante mediante las líneas de influencia de las mismas, de las que pasamos a ocuparnos.

489. Líneas de influencia — Definiciones. — Sea ABC (fig. 270) un sistema cualquiera, isostático o hiperestático, sobre el cual actúan cargas móviles de una dirección constante paralela a la recta xx , y propongámonos calcular una incógnita cualquiera, magnitud estática (R , M^* , V^* , T^* o T') o desplazamiento a , que designaremos por la notación general X .

Si X_i es el valor de dicha incógnita para la posición genérica i de la fuerza móvil de intensidad arbitraria P_i , el cociente

$$v_i = \frac{X_i}{P_i}, \quad [a]$$

es una cantidad constante, cualquiera que sea la intensidad de P_i , cantidad igual al valor de la incógnita X para una fuerza P aplicada en i de intensidad igual a uno y que, de acuerdo a lo establecido en (484), constituye el coeficiente de influencia sobre dicha incógnita X , para las cargas de dirección xx actuando en i .

Sentado lo anterior, si a partir de un eje $A'C'$, y en correspondencia de cada punto i , llevamos segmentos $\overline{i'i''}$ representativos de los coeficientes de influencia v_i respectivos, obtendremos una cierta curva o diagrama $A'i''B''j''C'$, curva de ordenadas iguales en cada punto a los

valores de la incógnita X originados por una fuerza de intensidad uno y de dirección xx aplicada en el mismo, a la que llamaremos *línea de influencia de la incógnita X para cargas de dirección xx* , o, más brevemente, *línea de influencia de X de dirección xx* .

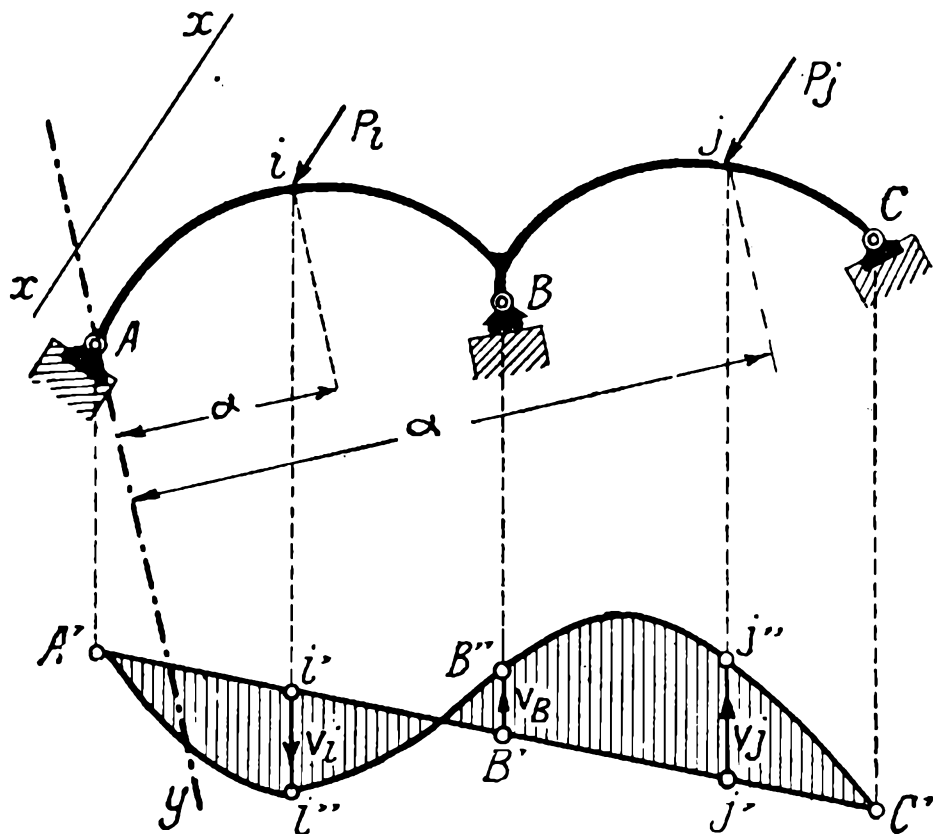


FIG. 270

Determinando las posiciones i de la fuerza móvil por sus distancias α a la recta cualquiera Ay , la línea de influencia será una cierta función de estas distancias, y podremos escribir

$$v_i = \frac{X}{P} = v(\alpha), \quad [b]$$

que constituye la ecuación analítica de la línea de influencia de X para cargas de dirección xx . En muchos casos esta ecuación resulta una función continua y regular de la variable α para todo el sistema, o, más generalmente aún, varias funciones de esta clase, cada una de ellas extendidas a partes del sistema perfectamente determinadas. Cuando ello sucede, puede resultar muy cómoda la utilización de la línea de influencia, mediante su expresión analítica.

490. — Si, de acuerdo a lo indicado más arriba, y como, por lo común, será indispensable, la línea de influencia se construye gráficamente, las ordenadas $\bar{v}i''$ representativas de los coeficientes de influencia

$$v = \frac{X}{P}, \quad [a]$$

habrá que llevarlas en una escala determinada $\frac{e}{\text{cm}}$, que será la escala de la línea de influencia.

Debe notarse, a este respecto, que el numerador de esta escala es una cantidad cuya unidad es igual a la de la incógnita X_i , partida por la unidad (toneladas) de la fuerza P_i . Así, en la escala de la línea de influencia de un momento flector, se expresará, por ejemplo,

$$\frac{\frac{1}{5} \text{ m}}{\text{cm}} = \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ cm}};$$

la de un esfuerzo de corte, esfuerzo normal, tensión en una barra o componente de reacción, es decir, la de una fuerza, tendrá la forma

$$\frac{\frac{1}{5}}{\text{cm}} = \frac{1}{5 \text{ cm}};$$

la de un desplazamiento, podrá ser, por ejemplo

$$\frac{\frac{200 \times 10^{-6} \text{ m}}{5 \text{ t}}}{\text{cm}} = \frac{40 \times 10^{-6} \text{ m t}^{-1}}{\text{cm}},$$

y, finalmente, la de una rotación

$$\frac{\frac{200 \times 10^{-6}}{5 \text{ t}}}{\text{cm}} = \frac{40 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}}.$$

En pocas palabras, la cantidad que expresa la escala de la línea de influencia de una incógnita cualquiera, tiene por unidad la de esta incógnita, dividida por t. cm. En esta forma la ordenada $\overline{i'i''}$ leída en centímetros, multiplicada por la escala y por la fuerza P_i , nos da directamente la magnitud X_i a calcular. Si esta magnitud es, por ejemplo, un momento flector y la escala de la línea de influencia es, como la dada más arriba, $\frac{1 \text{ m}}{5 \text{ cm}}$, se tendrá

$$v_i = \overline{i'i''} (\text{cm}) \cdot \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ cm}} = \frac{\overline{i'i''}}{5} \text{ m}$$

y

$$X_i = v_i P_i = \frac{\overline{i'i''} \cdot \text{m}}{5} \cdot P_i,$$

cuya unidad, siendo $\frac{i'i''}{5}$ un número, es efectivamente t. m. como debe resultar.

491. Aplicación de las líneas de influencia para el cálculo del valor de una incógnita correspondiente a un dado estado de cargas concentradas.— Sea (fig. 271) un sistema cualquiera AB y $A'1''2'' \dots n'' B'$ la línea de influencia de una de sus incógnitas X , para cargas verticales, trazada en la escala $\frac{e}{\text{cm}}$. Sobre el sistema actúa el estado de cargas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dibujado en la figura y nos proponemos calcular el valor correspondiente de dicha incógnita.

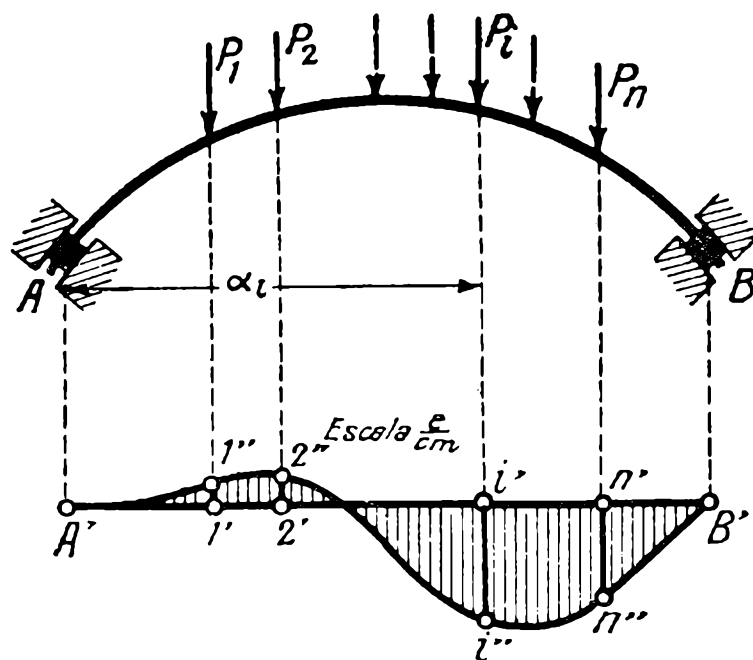


FIG. 271

Llamando v_i la ordenada de la línea de influencia correspondiente a la fuerza P_i de la [a]. de (489) se deduce que la parte de la incógnita X originada por la misma es

$$X_i = v_i \cdot P_i,$$

que por ser

$$v_i = \overline{i'i''} \text{ (cm)} \cdot \frac{e}{\text{cm}},$$

resulta

$$X_i = \overline{i'i''} \text{ (cm)} \cdot \frac{e}{\text{cm}} \cdot P_i,$$

y el valor total X de la incógnita para los n cargas P_i será, en virtud del principio de la superposición de los pequeños efectos,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \overline{i'i''} \text{ (cm)} \frac{e}{\text{cm}} P_i,$$

o sea,

$$X = \frac{e}{\text{cm}} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \overline{i'i''} \text{ (cm)}, \quad [a]$$

con lo que queda resuelto el problema (*).

492. — Si la línea de influencia está dada por su ecuación analítica

$$v = v(\alpha),$$

bastará calcular para cada fuerza P_i , el v_i correspondiente, obtenido haciendo en la misma $\alpha = \alpha_i$, es decir, por la expresión

$$v_i = v(\alpha_i),$$

y una vez conocidos estos valores v_i para las n fuerzas P_i , la incógnita X resultará dada por la expresión

$$X = \sum_{i=1}^n P_i \cdot v_i.$$

493. — En lo anterior, hemos supuesto que todas las cargas que actúan sobre el sistema tuvieran la misma dirección. Si ello no sucede se requerirá trabajar con dos líneas de influencia de X para dos direcciones determinadas, calculando con cada una de ellas la parte de X originada por las componentes de las cargas de la dirección respectiva y sumando los resultados. Estas dos líneas de influencia las tomaremos, en general, de direcciones vertical y horizontal.

Así por ejemplo sea el sistema AB (fig. 272), sujeto a las n cargas P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de direcciones cualesquiera, y, además, sean $A' M' B'$ y $A'' M'' B''$ las líneas de influencia de una de sus incógnitas X , respectivamente para cargas verticales y horizontales. Llamemos v_i y w_i las

(*) Por lo común hay la tendencia a trazar las líneas de influencia en escalas dadas por números redondos, de modo que sea cómodo, en función de las ordenadas $\overline{v'i''}$, el cálculo de las magnitudes v_i , y cuando no resultan directamente en dichas escalas sencillas, se suelen hacer transformaciones para obtenerlas. La expresión [a] indica que no es mayormente ventajoso este cambio de escala, siempre que se trabaje previamente con los segmentos $\overline{v'i''}$ (cm.) directamente leídos en centímetros, formando los productos $P_i \cdot \overline{v'i''}$ (cm.) y la suma de los mismos, en cuyo caso una sola multiplicación de esta suma por la escala, nos dará el resultado final.

ordenadas de estas líneas de influencia en correspondencia a un punto i , y siendo, además, y_i y z_i respectivamente, las ordenadas correspondien-

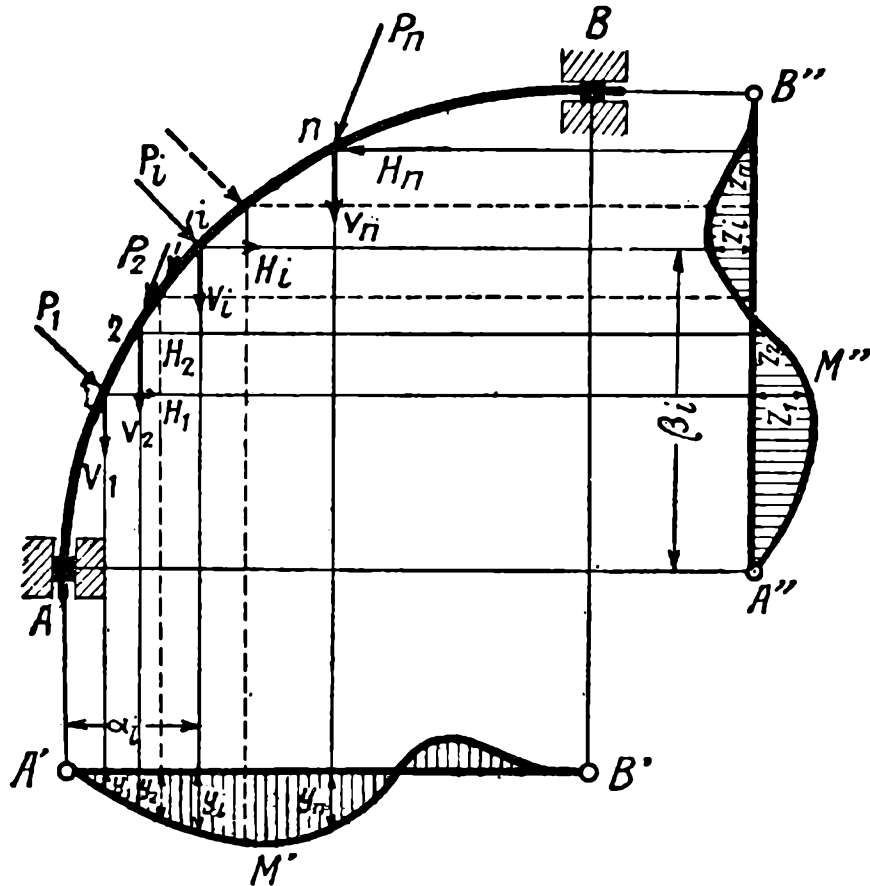


FIG. 272

tes en el dibujo, directamente medidas en centímetros, y $\frac{e}{\text{cm}}$ la escala de ambas líneas de influencia, resultará

$$v_i = y_i \cdot \frac{e}{\text{cm}} ; \quad w_i = z_i \cdot \frac{e}{\text{cm}}$$

Descompuestas las fuerzas P_i en sus componentes verticales V_i y horizontales H_i , las primeras tendrán sobre la incógnita X una influencia

$$\frac{e}{\text{cm}} \sum_{i=1}^n V_i \cdot y_i$$

y las segundas otra

$$\frac{e}{\text{cm}} \sum_{i=1}^n H_i \cdot z_i,$$

y el valor total de la incógnita X originada por las cargas dadas será por consiguiente,

$$X = \frac{e}{\text{cm}} \left[\sum_{i=1}^n V_i y_i + \sum_{i=1}^n H_i z_i \right]. \quad [a]$$

494. Aplicación de las líneas de influencia para el cálculo del valor de una incógnita correspondiente a una carga continua. — Consideremos, ahora, que sobre el sistema AB (fig. 273) actúe una carga vertical continua entre los puntos de abscisas α_1 y α_2 , representada en la figura y dada por la ecuación

$$p = p(\alpha).$$

Si la línea de influencia de la incógnita a calcular está dada gráficamente, no queda otro recurso para obtener su valor, que dividir en fajas verticales suficientemente pequeñas el diagrama de cargas y consi-

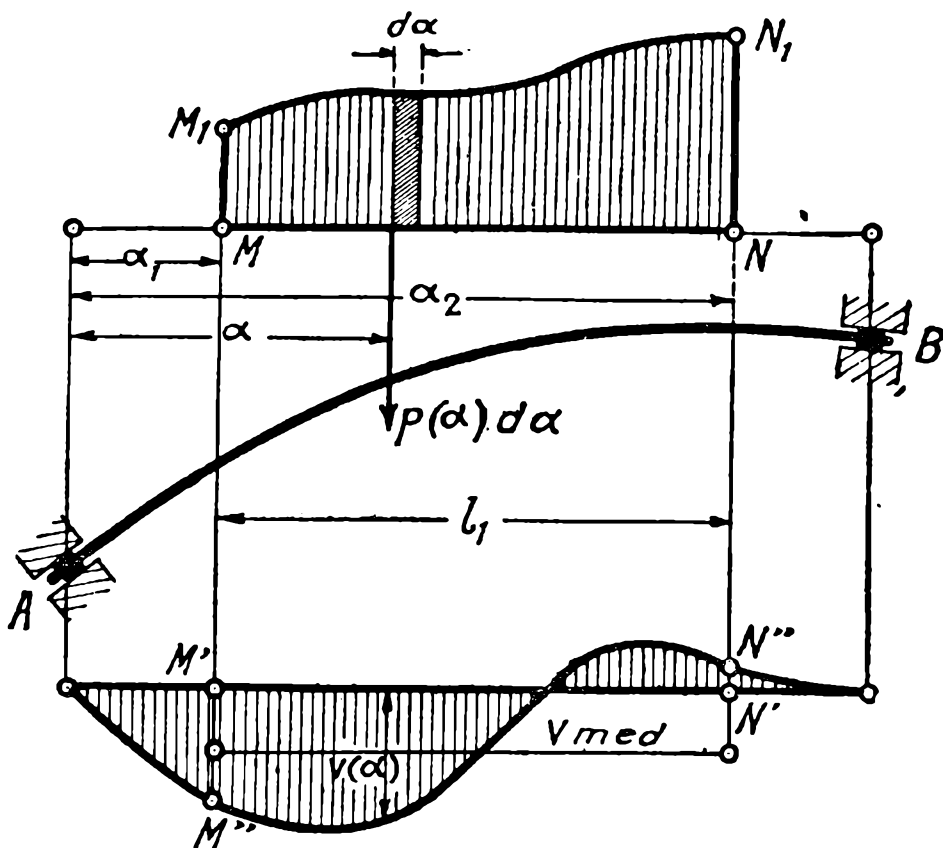


FIG. 273

derar como fuerzas concentradas las partes de carga correspondientes a cada una de ellas, con lo que el problema cae en el caso de cargas concentradas tratado en (491).

Si, en cambio, se posee la ecuación

$$v = v(\alpha)$$

de la línea de influencia, se puede calcular directamente el valor X originado por la carga continua. Considerando, en efecto, a partir de un punto cualquiera de abscisa α una faja infinitésima del diagrama de cargas de ancho $d\alpha$, la carga elemental correspondiente es

$$p \cdot d\alpha = p(\alpha) d\alpha,$$

y siendo $v = v(\alpha)$ la ordenada respectiva de la línea de influencia, la parte dX de la incógnita buscada producida por dicha carga elemental es

$$dX = p(\alpha) v(\alpha) d\alpha,$$

y, para toda la carga, se tendrá

$$X = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(\alpha) v(\alpha) d\alpha. \quad [a]$$

495. — Si la carga extendida entre α_1 y α_2 es uniforme, de intensidad p , se tiene

$$p = p(\alpha) = \text{Const.}$$

y la [a] del número anterior toma la forma

$$X = p \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha) d\alpha,$$

que, observando que la integral que figura en la misma es el área $M'M''N'N''$ de la parte rayada de la línea de influencia, es decir, que

$$\text{área } M'M''N'N'' = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha) d\alpha,$$

resulta

$$X = p. \text{área } M'M''N'N'' = p l_1 v_{\text{med.}} \quad [a]$$

en la que $l_1 = \alpha_1 - \alpha_2$ es igual a la longitud horizontal de la parte en que actúa la carga uniforme y $v_{\text{med.}}$ la ordenada media de la parte respectiva de la línea de influencia.

Siendo, finalmente,

$$P = pl_1,$$

la intensidad total de la carga uniforme, resulta

$$X = P \cdot v_{\text{med.}}, \quad [b]$$

que, si la línea de influencia está dibujada en la escala $\frac{e}{\text{cm}}$ y, además,

$y_{\text{med.}}$ representa la ordenada media de la parte comprendida entre α_1 y α_2 directamente leída en centímetros, en cuyo caso

$$v_{\text{med.}} = y_{\text{med.}} \frac{e}{\text{cm}},$$

toma, también la forma

$$X = P y_{\text{med.}} \frac{e}{\text{cm}}. \quad [b']$$

Las [b] y [b'] nos dicen que:

El valor de la incógnita X originada por una carga uniformemente repartida en una zona determinada de un sistema, es igual al producto de la intensidad total de esta carga por la ordenada media en dicha zona de la línea de influencia de la incógnita.

496. Utilización de las líneas de influencia para el cálculo de los valores máximos y mínimos de las incógnitas originadas por cargas móviles.— Sea (fig. 274) AB un sistema cualquiera y $A' M'' N'' B'$ la línea de influencia vertical de una de sus incógnitas. Si sobre el sistema

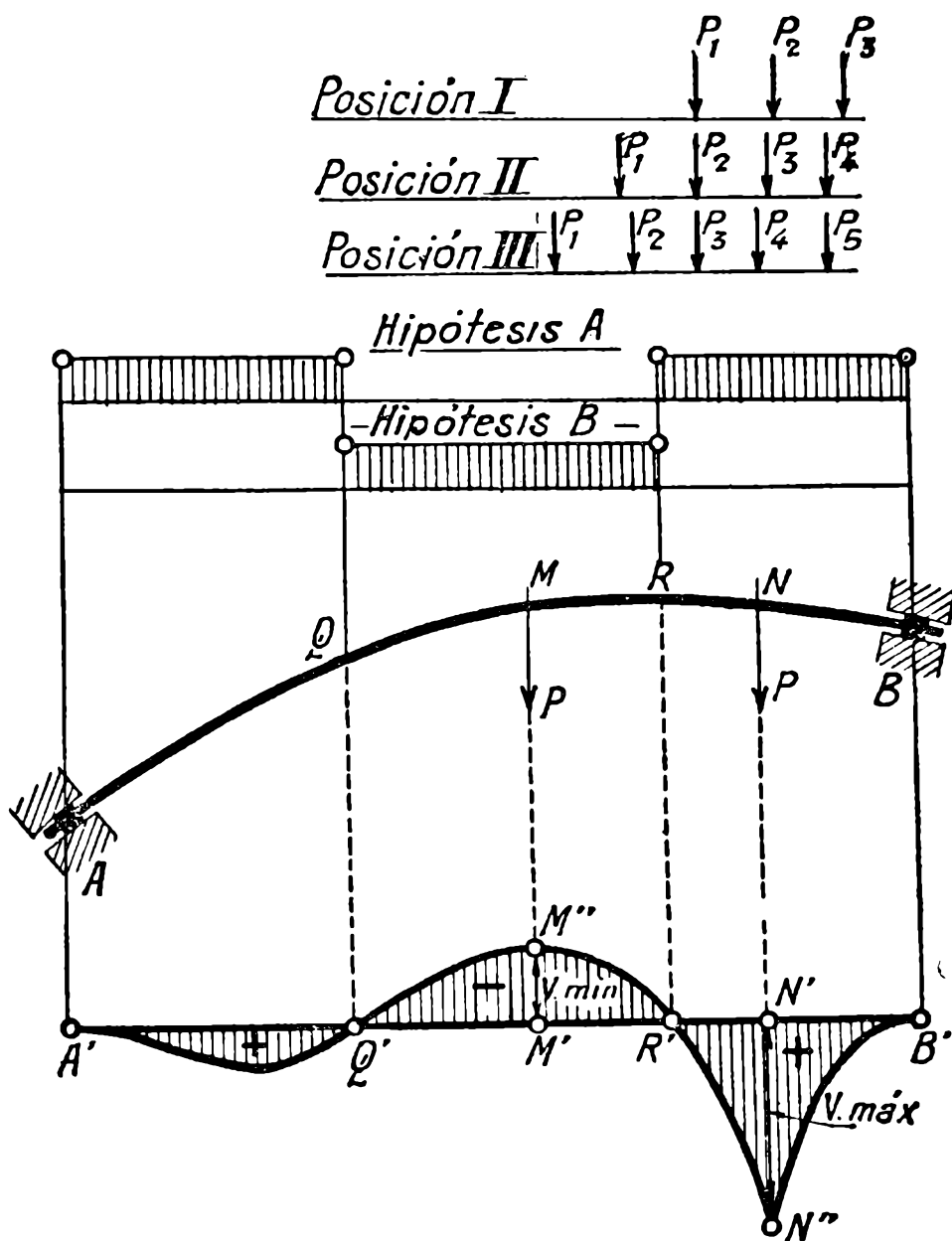


FIG. 274

actúa una única carga móvil P la determinación de los valores máximo y mínimo de la incógnita no ofrece ninguna dificultad. Se obtendrán, en efecto, haciendo actuar la carga, respectivamente, en los puntos N y M a los que, en la línea de influencia corresponden las ordenadas $v_{máx.}$ y $v_{mín.}$ de mayor valor positivo y negativo, respectivamente.

Si la carga móvil es uniformemente repartida, bastará para hallar el valor máximo de la incógnita, cargar las partes AQ y RB del sistema a la que corresponden zonas positivas en la línea de influencia, y descargar la QR restante (hipótesis de carga A). Análogamente, para obtener el máximo negativo bastará cargar la parte QR a la que corresponden ordenadas negativas en la línea de influencia y descargar las restantes (hipótesis de carga B).

Si la carga móvil está constituida por una serie de fuerzas concentradas a distancias invariables entre sí, como la que corresponde a un convoy de ferrocarril, la determinación de las hipótesis de carga que originan un máximo o un mínimo valor de la incógnita no es tan fácil como en los casos anteriores y sólo puede efectuarse, por lo común, mediante tanteos o ensayos de diversas hipótesis.

Tratándose de la línea de influencia de la figura, si se pide el valor máximo de la incógnita habrá que hacer entrar el tren por la derecha de modo a cargar principalmente la parte positiva y probar varias posiciones como las I, II y III de la figura, calculando los valores correspondientes de X a fin de probar cuál es el máximo. Además, y si ello durante el uso de la obra fuera posible simultáneamente con las anteriores cargas, habrá que cargar también con un segundo tren la parte AQ .

Debe observarse que las hipótesis II y III pueden dar valores mayores que I y a pesar de que en ellas se carga una parte negativa de la línea de influencia. Bastará para ello que las fuerzas P_1 y P_2 sean pequeñas y que las P_4 y P_5 que pasan a actuar sobre las ordenadas mayores de la parte positiva sean grandes, de modo que el aumento de X correspondiente a estas últimas resulte mayor que la disminución originada por aquéllas.

Si de las tres posiciones probadas en la figura, la intermedia da mayor valor que las I y III se tiene la seguridad de que el máximo para posiciones próximas a ella se encuentra para una comprendida entre estas últimas y en general quedará determinado entre estas posiciones intermedias para la que haga coincidir la mayor de las fuerzas P_i con la ordenada máxima $v_{\text{máx}}$.

497. Cambios de escala y de ejes de las líneas de influencia o de otros diagramas cualesquiera. — Al obtener gráficamente las líneas de influencia, con los procedimientos que veremos más adelante, suelen presentarse en escalas incómodas y referidas a ejes quebrados u oblicuos. Aunque el asunto, según hemos establecido en (491), no ofrece mayor interés, puede, en ciertas circunstancias, desearse transformar dichas curvas a una escala adecuada y referirlas a un único eje, horizontal o vertical, según que se trate, respectivamente de una línea de influencia vertical u horizontal.

En general la forma más directa y más exacta para efectuar esta transformación consiste en medir simplemente en el dibujo las diversas ordenadas y llevarlas, a partir del eje elegido, en la escala adoptada. Pero, también puede hacerse gráficamente dicha transformación en la forma que pasamos a exponer, no tanto, pues, por su aplicabilidad práctica, cuanto por señalar las propiedades geométricas que ligan entre sí a los diversos diagramas correspondientes a escalas y ejes distintos.

Claro está, además, que lo que indicamos con respecto a esta transformación de escalas y ejes vale tanto para las líneas de influencia como para cualquier otro diagrama gráfico: de momentos flectores, de esfuerzos tangenciales, elásticas, etc.

498. — Sea $ANMB$ (fig. 275) una línea de influencia u otro diagrama cualquiera, referida al eje AB , que queremos trazar en una nueva escala refiriéndola al eje $A'B'$ de dirección cualquiera con respecto al primitivo.

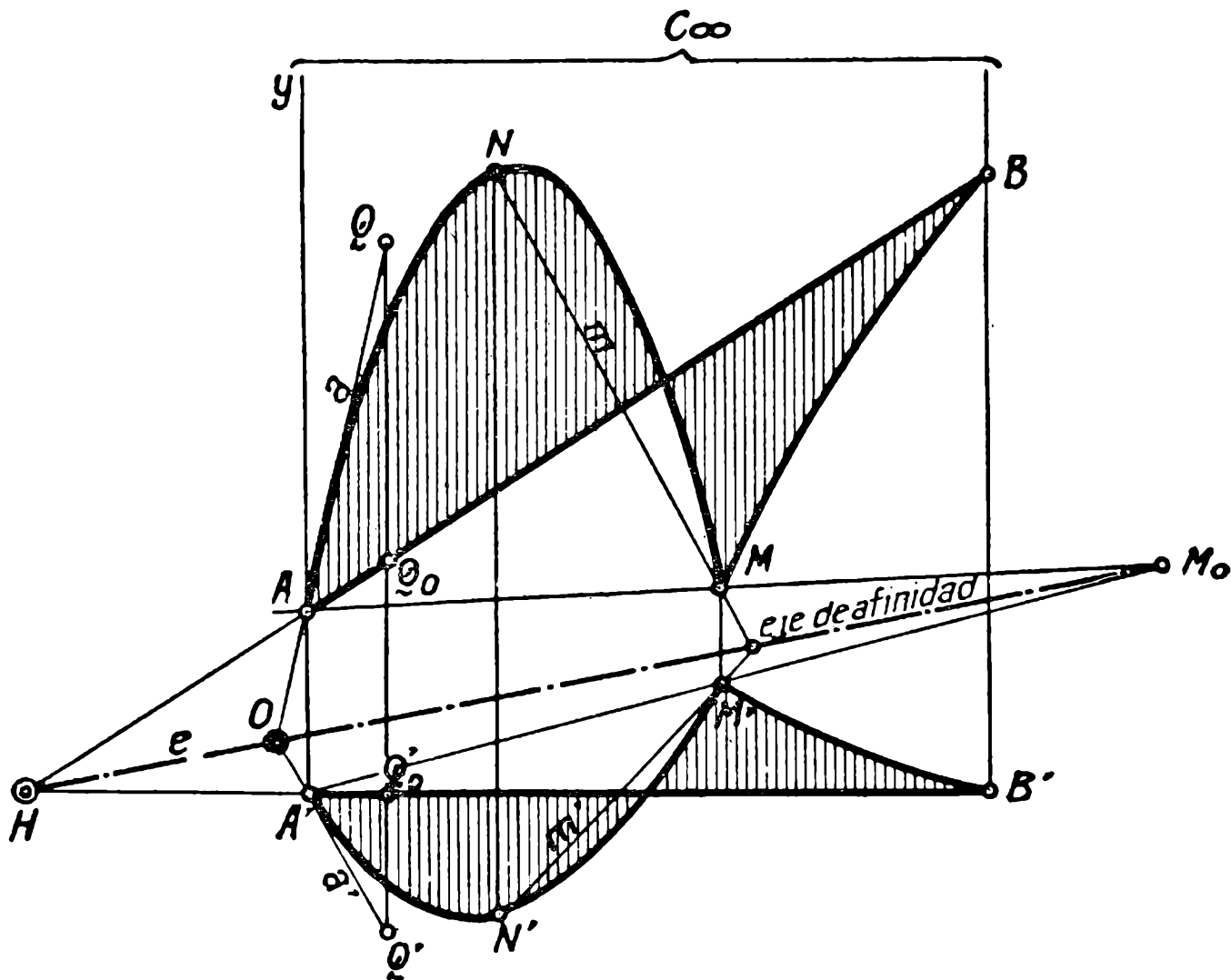


FIG. 275

Supongamos que, además de cambiar de escala, queremos cambiar de signo; es decir, que las partes que en el diagrama dado están situadas arriba del eje deberán quedar abajo en el nuevo, y a la inversa.

El diagrama buscado está ligado con el primitivo por las siguientes propiedades:

- 1º) Los puntos correspondientes M y M' , N y N' , etc., están alineados con el punto impropio C^∞ de la dirección Ay de las ordenadas de los diagramas.
- 2º) A una recta cualquiera $MN \equiv m$ del primer diagrama le corresponde en el segundo una nueva recta $M'N' \equiv m'$.
- 3º) A elementos (punto M y recta m) que se pertenecen, corresponden elementos (punto M' y recta m') que también se pertenecen.

Estas propiedades demuestran que las dos figuras $ANMB$ y $A'N'M'B'$ están ligadas por una afinidad con centro en el punto impropio C^∞ de las direcciones de sus ordenadas, y el problema quedará, por tanto, resuelto cuando hallemos el eje e de afinidad.

Por lo pronto, en virtud de los datos del problema, a la recta AB , eje del primitivo diagrama, le corresponde la $A'B'$, eje del segundo, y el eje de afinidad deberá, por tanto, pasar por su punto común H . Por otra parte, llevemos en el primitivo diagrama una ordenada cualquiera $\overline{Q_0Q}$ y calculemos la $\overline{Q'_0Q'}$ que, en la nueva escala, corresponde al segundo, llevándola a partir del eje $A'B'$, como indica la figura, en sentido contrario a la anterior, para tener en cuenta la inversión de signos que se pide para el nuevo diagrama; los dos puntos Q y Q' así obtenidos son correspondientes en la afinidad, y como otro tanto sucede con los A y A' , el punto de intersección O de las rectas correspondientes $a \equiv AQ$ y $a' \equiv A'Q'$ será un nuevo punto del eje de afinidad, que queda determinado, por consiguiente, por la recta $e \equiv HO$.

Hallado este eje, el problema pedido queda resuelto. Para determinar el correspondiente de un punto cualquiera M , bastará unirlo con uno A cuyo correspondiente A' se conozca, hallar la intersección M_0 de la AM con el eje e , unir M_0 con A' y hallar la intersección M' de esta última recta con la dirección de la ordenada que pasa por M .

499. — Si los dos ejes AB y $A'B'$ (fig. 275) fueran paralelos, el punto H sería el punto impropio de su común dirección y el eje de afinidad resultaría paralelo a los mismos, quedando determinado por el punto O hallado como antes.

Si, además, los dos ejes AB y $A'B'$ coincidieran, es decir, si se tratara de un simple cambio de escala sin modificar los ejes, los puntos de estos ejes serían comunes a los dos diagramas, y dichos ejes comunes constituirían, por tanto, el propio eje e de afinidad.

Finalmente, si se tratara solamente de cambiar de eje, es decir, por ejemplo, si dado el diagrama AMB (fig. 276) referido al eje oblicuo AB se lo deseara referir, en la misma escala, al eje horizontal $A'B'$, los

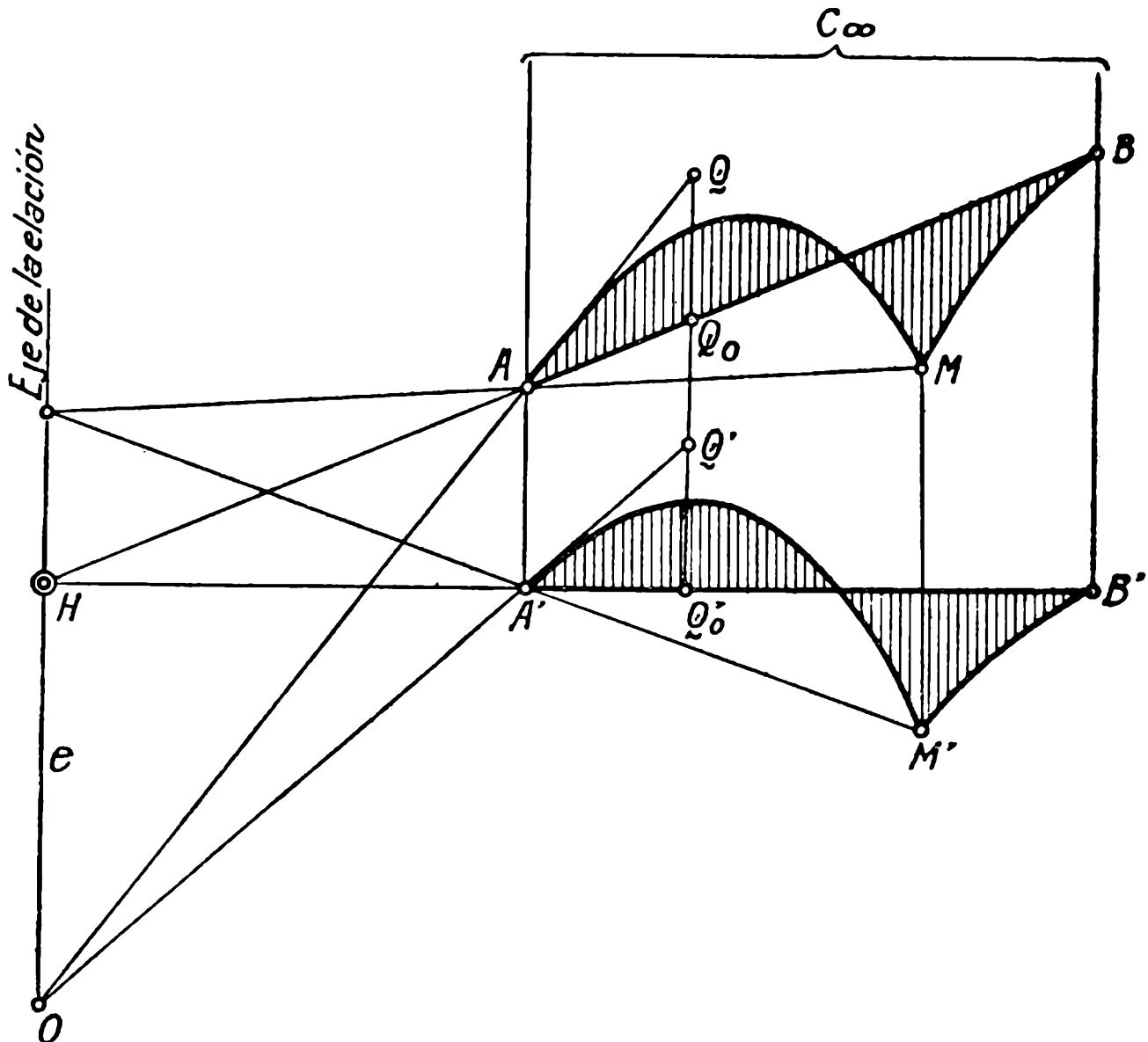


FIG. 276

segmentos $\overline{Q_0Q}$ y $\overline{Q'_0Q'}$ utilizados en el caso general para hallar el punto O del eje de afinidad, serían iguales y del mismo sentido y dicho punto O , intersección de las rectas AQ y $A'Q'$, se encontraría, como es fácil demostrar, en la paralela a la dirección de las ordenadas que pasa por H , es decir, que el eje de afinidad $e \equiv OH$ pasaría, en este caso, por el centro C_∞ de afinidad, o sea que, cuando se trata de cambiar solamente de eje, los dos diagramas están ligados por una elación.

500. — Consideremos, para terminar con un ejemplo, la línea de influencia AMD (fig. 277), referida al eje quebrado $ABCD$, que, en una nueva escala, queremos referir al eje recto y horizontal $A'D'$ y en forma tal que resulte orientada, es decir, que las partes del diagrama primitivo señaladas con el signo positivo, queden hacia abajo de nuevo eje.

Supongamos que al segmento \overline{BP} corresponda en la nueva escala y referido al nuevo eje el $\overline{B'P'}$, que llevamos hacia abajo para tener en cuenta lo pedido con respecto a signos.

Los puntos P y P' serán un par de puntos correspondientes en las afinidades que ligan las dos partes de ejes AB y BC del primitivo diagrama, con las correspondientes del buscado. Por otro lado, a todos los puntos A, B, M, C, N y D situados sobre los primitivos ejes les corresponden los A', B', M', C', N' y D' del $A'D'$.

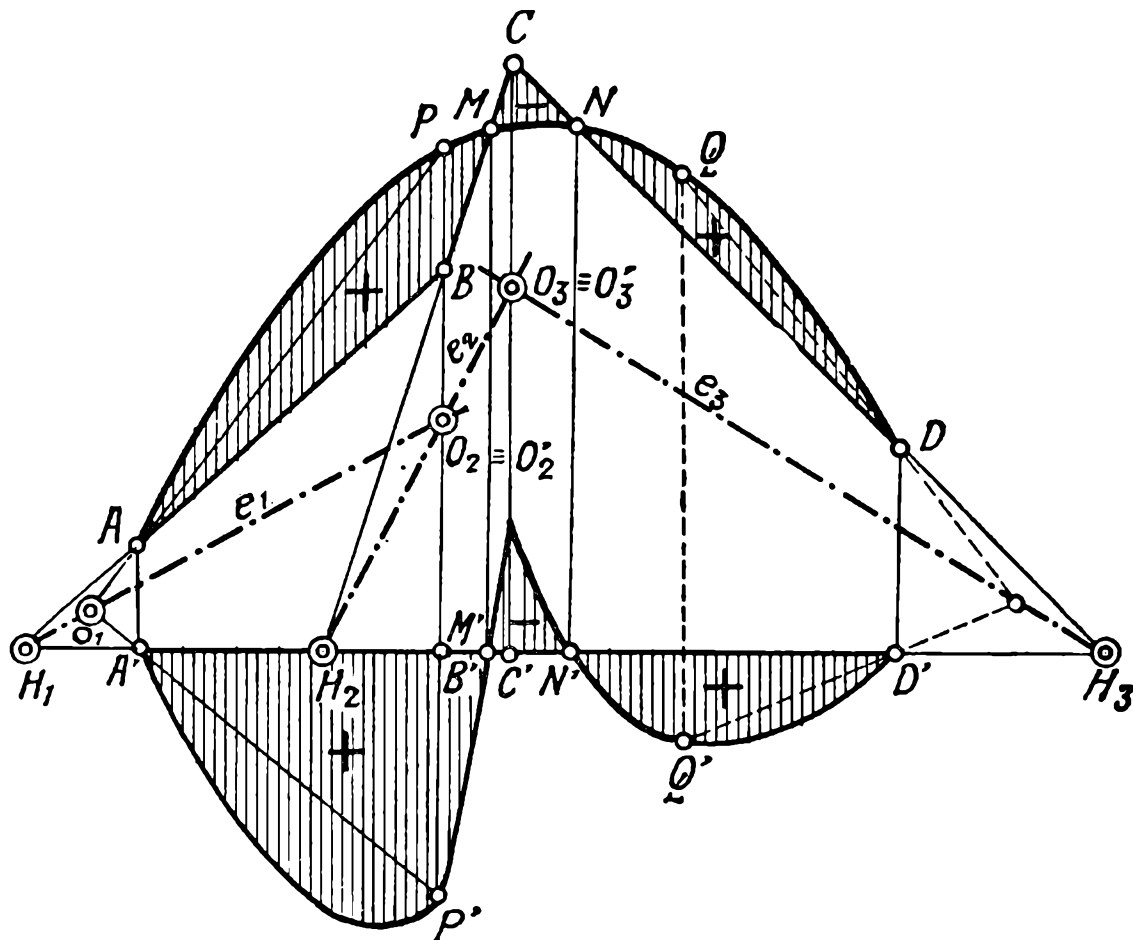


FIG. 277

Los ejes de afinidades e_1, e_2 y e_3 para las partes del diagrama de ejes AB, BC y CD pasan respectivamente por los puntos H_1, H_2 y H_3 de intersección de los mismos con $A'B'$. Por otra parte, correspondiéndose las rectas AP y $A'P'$, su intersección O_1 nos individualiza el primero de dichos ejes de afinidad $e_1 \equiv H_1O_1$.

El punto O_2 en que el eje e_1 corta a la vertical de B , por pertenecer a este eje, es doble; es decir, $O_2 \equiv O_2'$. Como otro tanto debe suceder si lo consideramos como perteneciente a la parte del diagrama de eje BC , desde que sobre la vertical de B la transformación debe ser común para las partes situadas a la izquierda y derecha, por dicho punto O_2 deberá pasar el eje e_2 , es decir, que éste será la recta $e_2 \equiv H_2O_2$.

Finalmente, el punto O_3 de intersección de la e_2 con la vertical de C es también doble, es decir, $O_3 \equiv O_3'$ y, por las mismas razones que en el caso anterior, por él deberá pasar el eje e_3 , que será la recta $e_3 \equiv H_3 O_3$.

Obtenidos los tres ejes de afinidad, el trazado del diagrama pedido no ofrece ninguna dificultad. En la figura se ha dejado con trazos punteados la determinación del punto Q' , correspondiente al Q .

§ 5. — Líneas de influencia de magnitudes estáticas

501. Obtención gráfica de las líneas de influencia de magnitudes estáticas. — Sea ABC (fig. 278 *a*) un sistema cualquiera, isostático o hiperestático, sobre el que actúan cargas móviles de dirección xx , y

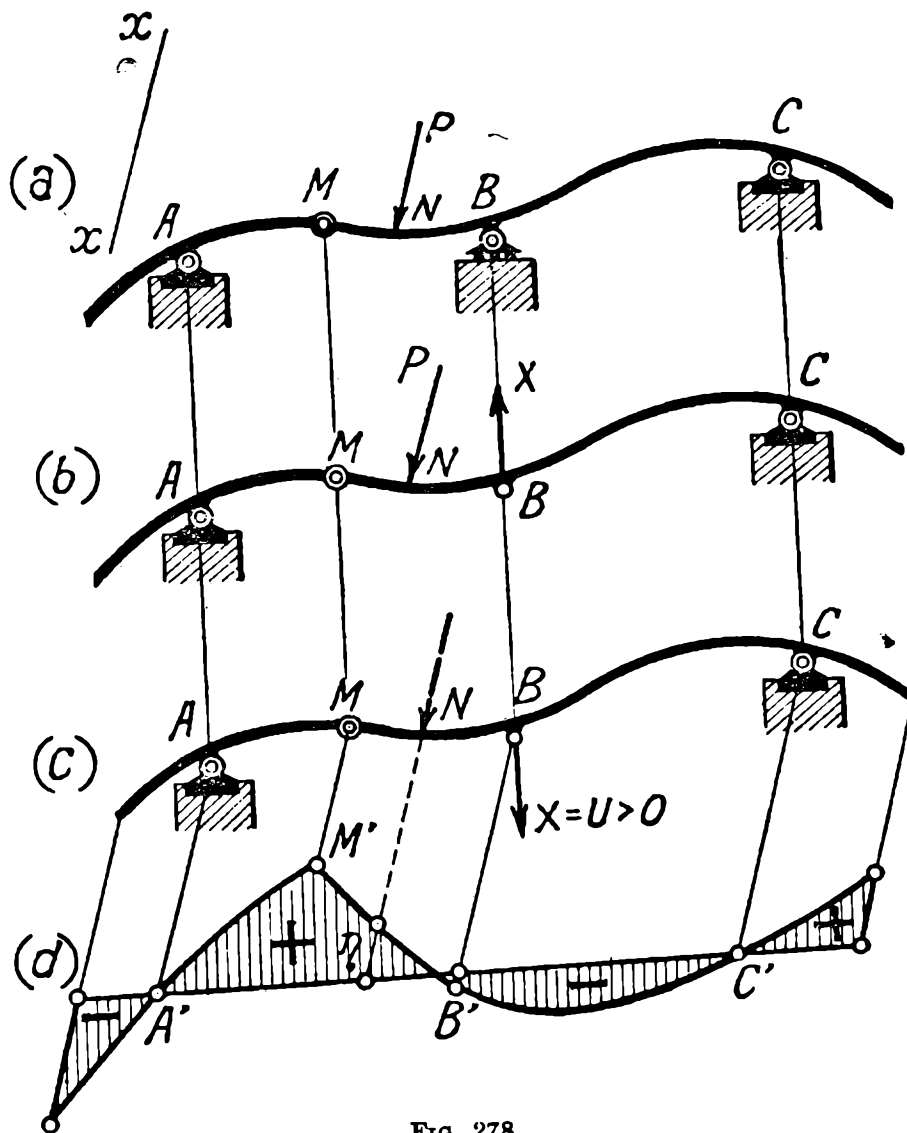


FIG. 278

propongámonos trazar la línea de influencia de las mismas sobre una magnitud estática cualquiera (componente R de la reacción, tensión T en una barra o característica, M^* , N^* , T^* , en una sección de alma llena). Consideremos una posición cualquiera N (fig. 278 *b*) de la carga

móvil P y pongamos en evidencia la incógnita X a calcular, suprimiendo el vínculo respectivo y reemplazándolo por la misma, tal como se ha efectuado en la figura, en la que, para precisar ideas, se ha tomado como incógnita la reacción en B .

Demos ahora, al sistema resultante (es decir, sin el vínculo correspondiente a X) una deformación virtual, constituida, según sabemos, por la que en el mismo, supuesto descargado, origina una fuerza $X = U$ (fig. 278 *c*), de intensidad arbitraria y dirigida según la incógnita X , o, si el sistema dado fuera isostático, por un desplazamiento cualquiera del mecanismo de un grado de libertad que resultaría al suprimir dicho vínculo correspondiente a X .

Sea $A'M'B'C'$ (fig. 278 *d*) la elástica de dirección xx de dicha deformación virtual y llamando η la ordenada de la misma correspondiente a una posición cualquiera N de la carga P y a el desplazamiento virtual correspondiente a la incógnita X considerada, el principio de los trabajos virtuales, dado que las fuerzas X y P (fig. 278 *b*) mantienen en equilibrio el sistema en que actúan, nos dice que debe tenerse

$$Xa + P\eta = 0$$

$$\frac{X}{P} = -\frac{1}{a} \cdot \eta,$$

que, no siendo $\frac{X}{P}$ otra cosa que la ordenada v de la línea de influencia de X buscada, correspondiente a la carga P , desde que es la magnitud que multiplicada por esta carga nos da a X , se convierte en

$$v = -\frac{1}{a} \eta. \quad [a]$$

Como $-\frac{1}{a}$ permanece invariable para cualquier posición de la carga P (*), la expresión anterior nos dice que las ordenadas η de la elástica obtenida multiplicadas por la cantidad constante $-\frac{1}{a}$, o sea, leídas en la es ala $-\frac{1}{a}$, dan las ordenadas v de la línea de influencia de X buscada.

Vale decir, pues, que:

Suprimido en un sistema isostático o hiperestático el vínculo correspondiente a una incógnita estática cualquiera X y trazada la elástica de dirección xx de una cualquiera de las deformaciones virtuales del

(*) Pues no debe olvidarse que a no depende de P , sino del valor arbitrario U adoptado para la obtención de la deformación virtual.

sistema resultante, esta última elástica, leída en una escala adecuada, proporciona la línea de influencia de dicha incógnita X , para cargas de dirección xx .

502. — Prescindiendo de signos, de que nos ocuparemos en el número siguiente, y considerando, por tanto, la escala en valor absoluto (como haremos siempre), ella está dada, según lo establecido anteriormente, por la magnitud $\left| \frac{1}{a} \right|$, siendo a el desplazamiento virtual correspondiente a la incógnita. Es decir:

Obtenida la línea de influencia de una incógnita estática X por la elástica de una deformación virtual del sistema resultante al suprimir el vínculo correspondiente a la misma, la escala (o cantidad por la que se requiere multiplicar las ordenadas de la elástica para obtener las de la línea de influencia) es el valor absoluto de la inversa del desplazamiento virtual correspondiente a la incógnita.

503. — En cuanto al signo de las ordenadas, de la $[a]$ de (501) se deduce que en la parte de la elástica de η positivas, es decir, para una elástica vertical abajo del eje y para una horizontal a la izquierda del mismo, v tiene signo contrario a a . Es decir que:

El signo de la línea de influencia en las partes positivas de la elástica que la constituye es contrario al del desplazamiento virtual correspondiente a la incógnita.

En el caso en que la incógnita sea la tensión en una barra debe tenerse presente que el desplazamiento correspondiente a la incógnita no es la variación de distancia δ entre los puntos de aplicación del par de fuerzas que constituye dicha tensión, sino como hemos establecido en (352), dicha variación con signo contrario ($a = -\delta$). Otro tanto sucede para un esfuerzo normal, en un sistema de alma llena si se adopta la convención de signos establecida en (458) es decir, si se adopta el signo positivo cuando corresponde a un esfuerzo de tracción.

Estas últimas circunstancias pueden dar lugar a confusiones y errores al aplicar la regla arriba establecida para hallar los signos de las líneas de influencia. Por estas razones conviene, una vez que se ha determinado el sentido del desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita (*), trazar en la figura una fuerza U (**) dirigida según dicha incógnita y capaz de producir un desplazamiento de dicho sentido, la que será siempre una fuerza de la dirección del desplazamiento obtenido;

(*) O del desplazamiento relativo del par de puntos, o de la rotación de una chapa o de la rotación relativa de dos chapas cuando la incógnita, en lugar de una fuerza, sea, respectivamente, un par de fuerzas opuestas, una cupla o un par de cuplas opuestas.

(**) O par de fuerzas, o cupla, o par de cuplas, según la naturaleza de la incógnita.

deducir, luego, directamente en la figura el signo que corresponde a los valores de la incógnita cuando está dirigida según dicha fuerza U , y poner signo contrario al mismo en la parte positiva de la elástica que constituye la línea de influencia.

Procederemos siempre en esta última forma que no puede dar lugar a confusiones, es decir, utilizaremos la regla siguiente, que aclararemos más adelante con numerosos ejemplos:

El signo de la línea de influencia de una magnitud estática cualquiera es, en las partes positivas de la elástica que la constituye, contrario al que corresponde a la fuerza arbitraria U (o par de fuerzas opuestas, o cupla, o par de cuplas opuestas, según la naturaleza de la incógnita) que, aplicada según la dirección de dicha magnitud estática, es capaz de producir una deformación del sentido de la que representa la elástica considerada.

504. — En lo anterior hemos supuesto que tanto las ordenadas η de la elástica como el desplazamiento a correspondiente a la incógnita, resulten dados en escala natural. Si, en cambio, en el dibujo la elástica se trazara en la escala $\frac{\alpha}{\text{cm}}$, se tendría

$$\eta = \eta (\text{cm}) \frac{\alpha}{\text{cm}},$$

siendo η (cm.) el segmento leído directamente en centímetros que representa la ordenada η . Análogamente, si a (cm.) es el segmento expresado en centímetros que, en la misma escala, representa el desplazamiento a correspondiente a la incógnita, se tendrá

$$a = a (\text{cm}) \frac{\alpha}{\text{cm}}.$$

Sustituyendo, ahora, en la $[a]$ de (501), resulta

$$v = - \frac{1}{a (\text{cm}) \cdot \frac{\alpha}{\text{cm}}} \eta (\text{cm}) \frac{\alpha}{\text{cm}} = - \frac{1}{a (\text{cm})} \cdot \eta (\text{cm}),$$

es decir, que en lugar de tomar los efectivos valores de las ordenadas η de la elástica y del desplazamiento a , se pueden tomar directamente los segmentos leídos en centímetros que los representan en el dibujo, con prescindencia absoluta de la escala en que están medidos.

505. Ejemplos. — Aclaremos con algunos ejemplos lo que dejamos expuesto sobre determinación gráfica de las líneas de influencia de magni-

tudes estáticas, asunto de mucha importancia, que constituye una de las bases de lo que nos ocupará en los capítulos siguientes.

Consideremos, primeramente, el sistema hiperestático de primer grado representado en la figura 279 *a* y propongámonos hallar la línea de influencia, para cargas verticales, de la reacción en el apoyo móvil horizontalmente *B*. Pongamos en evidencia la incógnita *X* a calcular, reemplazando el apoyo móvil *B*, por la reacción vertical incógnita *X*

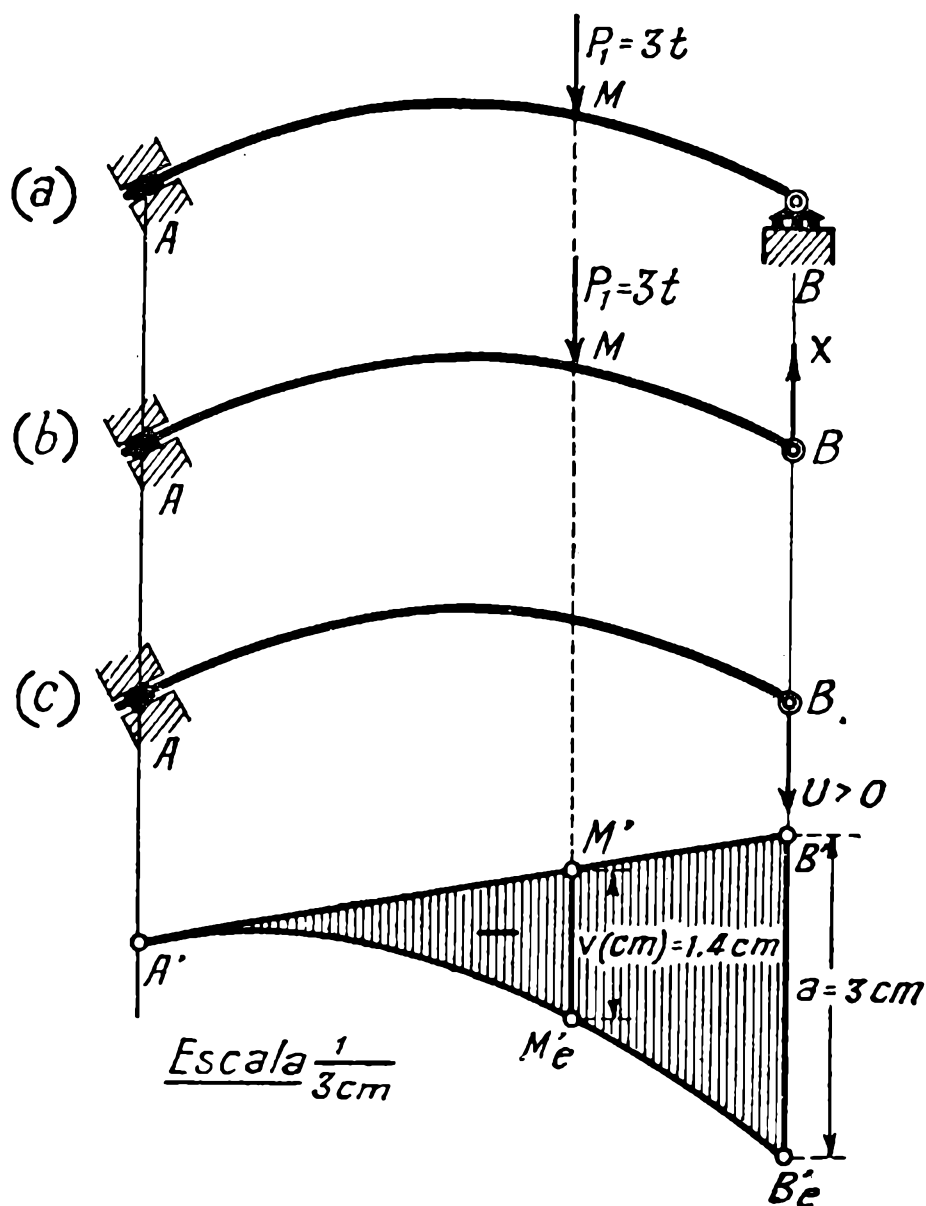


FIG. 279

equivalente (fig. 279 *b*) y demos al sistema así obtenido una deformación virtual, es decir, démosle la deformación que en el mismo, supuesto descargado, origina una fuerza de intensidad arbitraria U aplicada según la dirección de la incógnita X (fig. 279 *c*). La elástica vertical $A'B'e$, correspondiente a esta deformación constituye, según (501), la línea de influencia buscada de X para cargas verticales, en una escala igual a la inversa del valor absoluto del desplazamiento que en la dada deformación virtual corresponde a dicha incógnita. Este desplazamiento

está representado por el segmento $\overline{B'B'_e}$ de la elástica, y midiéndolo, de acuerdo con (504), directamente en centímetros en el dibujo, se tiene

$$a = B'B'_e = 3 \text{ cm}$$

La escala en que las ordenadas de la elástica $A'B'_e$ leídas en centímetros nos dan las de la línea de influencia de X , es, por tanto,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3 \text{ cm}}.$$

En cuanto al signo de esta línea de influencia, estando dirigida hacia abajo la fuerza arbitraria U que ha originado la deformación virtual dada, es decir, siendo *positiva* esta fuerza, en la parte positiva de la elástica, o sea, en la situada debajo del eje, deberá corresponder, según (503), signo *negativo* (contrario a la misma), como se ha marcado en la figura.

Si en el punto M actúa una carga $P_1 = 3 \text{ t.}$, por ejemplo, la reacción X que produce en B , siendo

$$v \text{ (cm)} = M'M_e = -1,4 \text{ cm.}$$

la ordenada correspondiente de la línea de influencia obtenida, leída en centímetros, será

$$X = P v \text{ (cm)} \frac{1}{3 \text{ cm}} = 3 \text{ t} (-1,4 \text{ cm}) \cdot \frac{1}{3 \text{ cm}} = -1,4 \text{ t.}$$

506. — Sea, ahora, (fig. 280 *a*), la viga isostática simplemente apoyada AB , y propongámonos hallar la línea de influencia del momento flector \mathcal{M}^* en el punto M , para cargas verticales. Pongamos en evidencia esta incógnita en la forma que indica la figura 280 *b*, es decir, articulando la viga en el punto M y aplicando en chapas S_1 y S_2 ligadas rígidamente a los elementos adyacentes a dicha articulación, cuplas opuestas ($-\mathcal{M}^*$ y \mathcal{M}^*) de intensidad igual al momento flector buscado. De estas cuplas, según hemos establecido en (461), posee el signo del momento flector \mathcal{M}^* (momento de las fuerzas que quedan a la izquierda de M) la que actúa sobre la chapa S_2 de la derecha.

Sentado lo anterior, tracemos la elástica vertical de una deformación virtual cualquiera del sistema de un grado de libertad así obtenido (*) (fig. 280 *b*), que siendo, $A \equiv O_1$ y $B \equiv O_2$ respectivamente los polos de las chapas AM y MB , estará constituida, por las rectas $A'M'_e$ y M'_eB'

(*) Deformación del mecanismo constituido por las dos chapas AM y MB , de la figura 280 *b*, supuesto descargado.

que se cortan sobre la vertical de M , referidas a la $A'B'$. Esta elástica nos proporciona, de acuerdo con (501) la línea de influencia pedida.

El desplazamiento virtual correspondiente a la incógnita es la rotación relativa $\alpha = \theta_{2,1}$, que la chapa S_2 en que actúa la cupla \mathcal{M}^* ha experimentado con respecto a la S_1 , durante el desplazamiento virtual considerado, rotación que está dada por el ángulo infinitésimo que forman las rectas $[S'_2]$ y $[S'_1]$. Llevando, pues, un segmento horizontal cual-

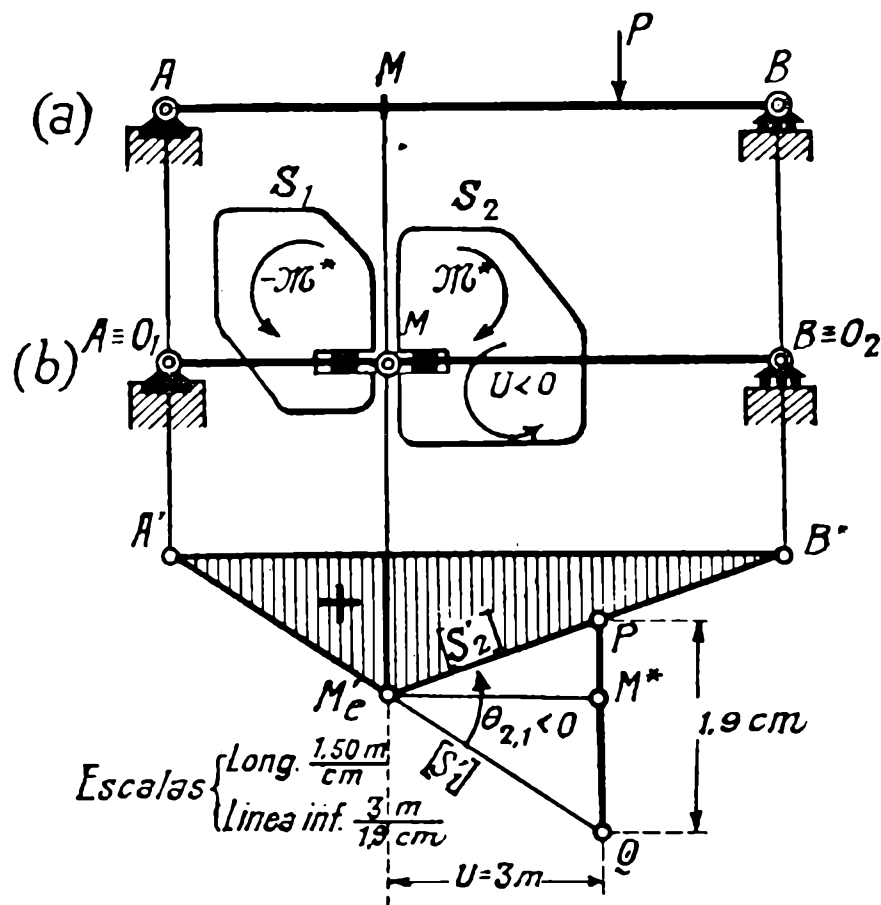


FIG. 280

quiera $M_e'M^*$ que en la escala en que está dibujado el sistema representa una magnitud $u = 3$ m., por ejemplo, y midiendo la ordenada vertical $\overline{PQ} = 1,9$ cm. comprendida entre dichas rectas, se tiene

$$|a| = |\dot{\theta}_{2,1}| = \frac{1,9 \text{ cm}}{3 \text{ m}},$$

y, por consiguiente, la escala de la línea de influencia de \mathcal{M}^* , inversa de dicho desplazamiento, será

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1,9 \text{ cm}}{3 \text{ m}}} = \frac{3 \text{ m}}{1,9 \text{ cm}}.$$

Finalmente, por lo que respecta al signo, observemos que la chapa S_2 de la derecha (sobre la que actúa \mathcal{M}^*) ha experimentado una rotación

negativa con respecto a la S_1 ; la cupla que actuando en S_2 es capaz de producir un desplazamiento del sentido que corresponde a la deformación virtual dada es, por consiguiente, también negativa, como la U dibujada en la figura. La línea de influencia, en su parte situada abajo del eje, es decir, en toda su extensión, tendrá, por tanto, signo contrario, según (503), o sea signo positivo, como también se ha indicado en la figura.

507. — Consideremos, por último, el sistema AB (fig. 281 *a*) y supongamos que se nos da el diagrama $A'M'e_1M'e_2B'$ diciéndonos que constituye la línea de influencia para cargas verticales del esfuerzo tangencial en la sección M . Se nos pide:

- 1º) Demostrar que por la forma del diagrama dado es posible que, en efecto, constituya la línea de influencia de dicho esfuerzo.
- 2º) Hallar la escala y el signo de dicha línea de influencia.

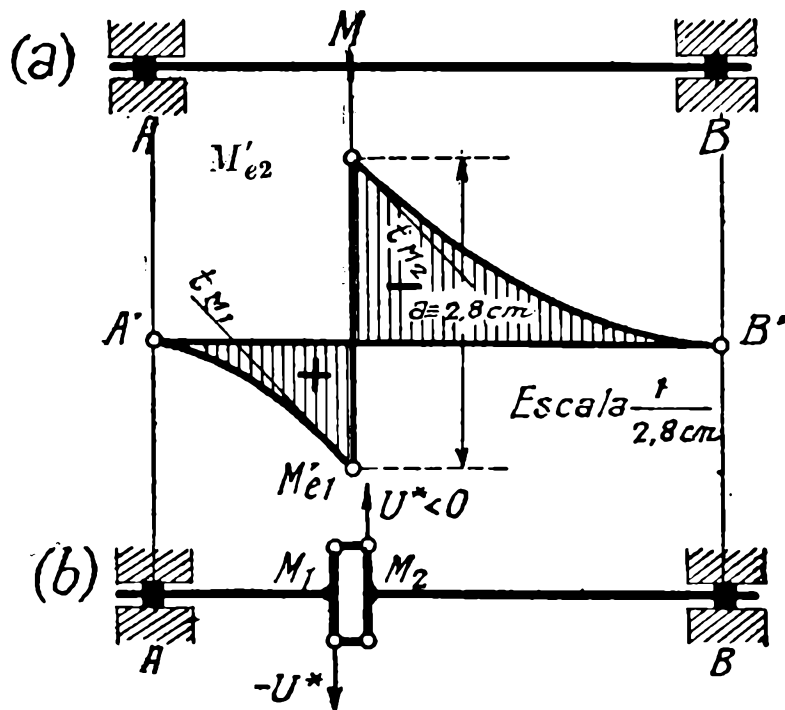


FIG. 281

La línea de influencia del esfuerzo tangencial en el punto M del sistema dado está constituida por la elástica vertical de una cualquiera de las deformaciones virtuales del sistema que resulte al poner en evidencia dicho esfuerzo, sistema este último (fig. 281 *b*) que se obtiene cortando el dado en el punto M y ligando las dos partes así formadas mediante una articulación en el punto impropio de las horizontales. Siendo las deformaciones virtuales de este sistema las originadas por fuerzas opuestas U cualesquiera aplicadas en M_1 y M_2 según la normal a la fibra media, las elásticas respectivas deberán satisfacer a las siguientes

condiciones: *a*) Deberán ser, en virtud de los empotramientos *A* y *B*, tangentes al eje en correspondencia a los mismos; *b*) Estarán constituidas por dos ramas correspondientes respectivamente a las partes AM_1 y BM_2 , y las tangentes t_{M_1} y t_{M_2} , en los puntos M'_{e1} y M'_{e2} , correspondientes respectivamente a los M_1 y M_2 , deberán ser paralelas entre sí, dado que la articulación impropia introducida en *M*, no permite las rotaciones relativas de los elementos de fibra media adyacentes a dichos puntos. Satisfaciendo a todas estas condiciones el diagrama $A'M'_{e1}, M'_{e2}B'$ dado, puede él, en efecto, ser la línea de influencia del esfuerzo tangencial en *M*, lo que no quiere decir, entiéndase bien, que con lo anterior ha quedado demostrado que en realidad lo sea.

Suponiendo, pues, que constituya dicha línea de influencia, para determinar su escala necesitamos hallar el desplazamiento correspondiente a la incógnita U^* , desplazamiento dado por la proyección sobre la dirección de las fuerzas U^* , del desplazamiento relativo del punto M_2 con respecto al M_1 , o sea, por el segmento

$$a = \overline{M'_{e1}M'_{e2}} = 2,8 \text{ cm.}$$

La escala de la línea de influencia, inversa de *a* según lo establecido en (502), es, por consiguiente,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2,8 \text{ cm}}$$

Por lo que respecta al signo, recordemos que según (461) lo proporcional, del par de fuerzas \mathcal{T} que constituye el esfuerzo tangencial, la \mathcal{T}^* que actúa sobre el punto M_2 de la derecha. La dirección de esta fuerza utilizada para obtener la deformación virtual que constituye la línea de influencia dada es, como la U^* indicada en la figura 281 *b* hacia arriba, o sea negativa, ya que en esta dirección se ha desplazado el punto M_2 , en que actúa, con respecto al M_1 en que está aplicada la fuerza opuesta. Según (503), la línea de influencia tendrá signo contrario, es decir, positivo, en las partes situadas abajo del eje, y a la inversa, tal como se ha señalado en la figura 281 *a*.

508. — Muchas veces las elásticas de deformación y, por tanto, las líneas de influencia a que dan origen, no se presentan referidas a un solo eje sino a ejes quebrados, obtenidos al llevar a las condiciones de sustentación las elásticas calculadas previamente como si el sistema estuviera empotrado en su primer elemento. En estos casos debe recordarse que, según (238), el cambio de ejes necesario para llevar la elástica así calculada a las condiciones de sustentación, representa la elástica de

un desplazamiento igual y de sentido contrario al efectivo desplazamiento cinemático que llevaría el sistema deformado a dichas condiciones de sustentación. Esto no debe olvidarse cada vez que se requiera hallar los signos de las líneas de influencia mediante los sentidos de desplazamientos que se determinen sobre los ejes.

Sea, por ejemplo (fig. 282 b), la línea de influencia del momento flector en C del sistema representado en la figura 282 a, obtenida trazando previamente la elástica de deformación $A'B'$ referida a la primera tan-

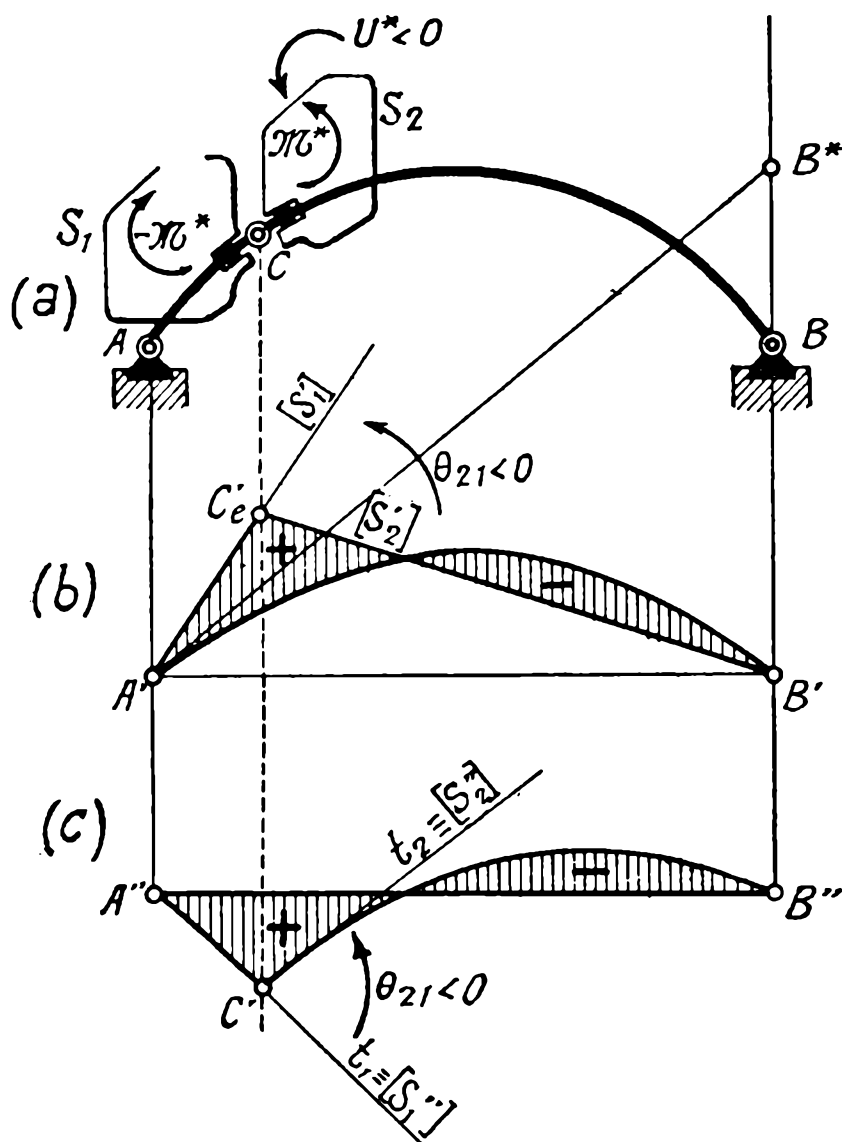


FIG. 282

gente $A'B^*$, como si el sistema estuviera empotrado en A y careciera de la articulación intermedia C , introducida al poner en evidencia la incógnita, y llevándola luego a las condiciones de vínculo, dando a la cadena cinemática de dos chapas AC y CB , un desplazamiento igual y de sentido contrario al requerido. La elástica primitiva, referida a las rectas $A'C'$, y $C'B'$ correspondientes a la debida a este último desplazamiento, ha dado como marca el rayado de la figura, la elástica de la deformación del sistema en sus efectivas condiciones de vínculo.

Sentado lo anterior, si nos proponemos hallar el signo de la línea de influencia que constituye dicha elástica, y notando que la recta $[S'_2] \equiv C'B'$ representa la chapa S_2 y la $[S'_1] \equiv A'C'$ la S_1 , la rotación $\theta_{2,1}$ de aquella con respecto a ésta, en la figura parece ser positiva, pero como esta rotación se mide sobre los ejes, la rotación en realidad es de signo contrario, es decir, negativa como se representa en la misma. La cupla U^* que aplicada sobre la chapa S_2 puede producir una deformación del sentido que corresponde a la elástica dada es, por tanto, también negativa como se indica en la figura, y la línea de influencia que constituye esta elástica posee signo positivo (contrario a U^*) en su parte situada abajo del eje, como también se indica en la figura.

A igual resultado se llega si la elástica, o línea de influencia equivalente, se refiere a un único eje $A''B''$ (fig. 282 c). En este caso la rotación relativa de la chapa S_2 con respecto a la S_1 , está dada por el ángulo infinitésimo de las tangentes $t_2 \equiv [S_2'']$ y $t_1 \equiv [S_1'']$ y, según la figura, es negativa. La cupla U^* a aplicar en S_2 para producir un desplazamiento de este sentido es, pues, negativa como antes y la línea de influencia posee signo contrario (positivo) abajo del eje.

509. Obtención analítica de líneas de influencia de magnitudes estáticas.— Sea (fig. 283) un sistema cualquiera, isostático o hiperestático, sobre el que se desplaza paralelamente a una dirección dada xx

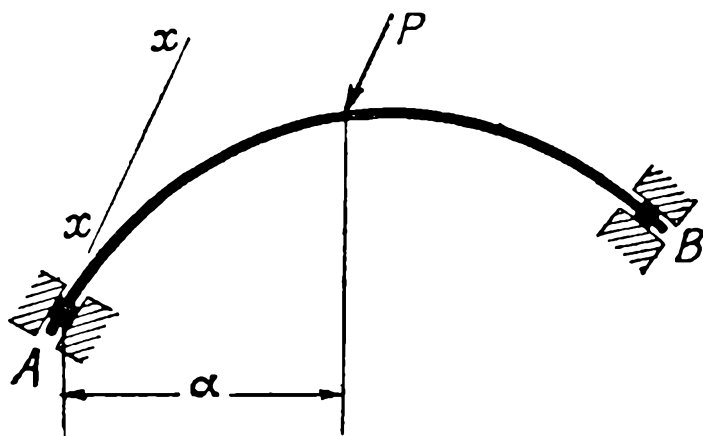


FIG. 283

una fuerza P , cuya posición queda determinada por un parámetro variable α , por ejemplo, por la distancia horizontal al extremo A . Consideremos la fuerza P en una posición arbitraria α y sea M la intensidad de una de las incógnitas estáticas del sistema correspondiente a la misma; esta incógnita M será una cierta función de P , de α y de las dimensiones constantes del sistema, es decir, se tendrá

$$M = f(P, \alpha)$$

función que nos dará el valor de M , para cualquiera fuerza paralela a

xx de intensidad P y abscisa α dadas. Por otra parte, para una misma abscisa α , M es, en virtud del principio de la superposición de los pequeños efectos, proporcional a la intensidad de P , o sea la función anterior puede escribirse

$$M = P \cdot v(\alpha),$$

en la que $v(\alpha)$ es una función que depende de la sola variable α y cuyas constantes quedan determinadas por las dimensiones del sistema.

De la anterior, se deduce finalmente

$$v = \frac{M}{P} = v(\alpha),$$

que nos proporciona la ecuación de la línea de influencia de la incógnita M , para cargas paralelas a xx .

Debe tenerse presente que la línea de influencia de una incógnita cualquiera, en general no es una única función continua para todo el sistema, sino para una determinada parte del mismo, y que, por tanto, deberán determinarse las funciones $v = v(\alpha)$ correspondientes a cada

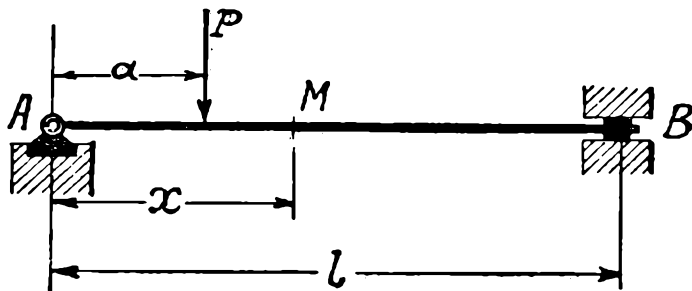


FIG. 284

una de estas partes. Así, en el sistema de la figura 284 la línea de influencia del momento flector en M , para cargas verticales, tendrá ecuación distinta según que se considere las partes AM o MB . El valor de dicho momento originado por una fuerza vertical P distante α del apoyo A es igual, en efecto, para la parte AM , es decir, entre $\alpha = 0$ y $\alpha = x$, al producido por la reacción R_A en A y por la misma fuerza P , mientras que para la parte MB , o sea entre $\alpha = x$ y $\alpha = l$, al producido por la sola reacción R_A .

Aclaremos estas consideraciones generales sobre la obtención analítica de líneas de influencia, aplicándolas a algunos casos concretos (*).

(*) Estas aplicaciones se hacen utilizando directamente el principio de Menabrea-Castigliano, sin indicar las simplificaciones que para cada caso pueden obtenerse siguiendo caminos especiales, simplificaciones de que nos ocuparemos con toda detención al entrar, más adelante, a tratar en particular los diversos sistemas.

510. **Ejemplo I.**— Sea (fig. 285) una viga recta AB simplemente apoyada, y propongámonos hallar la línea de influencia del momento flector \mathcal{M}^* en la sección C distante x del apoyo A .

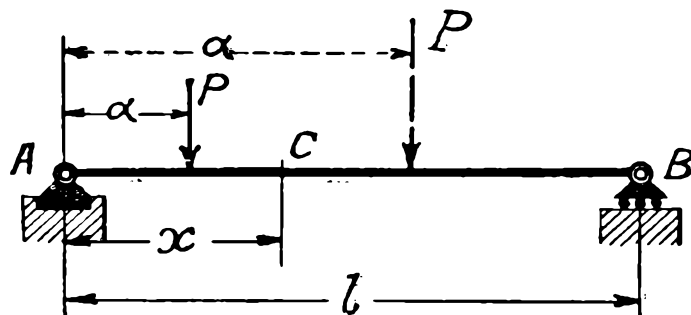


FIG. 285

Aplicemos la fuerza P , primeramente entre A y C , a una distancia variable α del apoyo A . Siendo

$$R_A = - \frac{P (l - \alpha)}{l},$$

la reacción en A , el momento flector \mathcal{M}_1^* en C para dicha carga P variando entre $\alpha = 0$ y $\alpha = x$, está dado por la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^* &= - R_A \cdot x - P (x - \alpha) = \\ &= \frac{P (l - \alpha)}{l} x - P (x - \alpha) = \frac{P (l - x)}{l} \cdot \alpha. \end{aligned} \quad [a]$$

Análogamente, haciendo actuar la carga P a la derecha de C , es decir, entre $\alpha = x$ y $\alpha = l$, el momento flector en C es

$$\mathcal{M}_2^* = - R_A \cdot x = \frac{P \cdot x}{l} (l - \alpha). \quad [b]$$

Dividiendo, pues, las [a] y [b] por P , las ecuaciones de la línea de influencia del momento flector en C son:

Para cargas comprendidas entre $\alpha = 0$ y $\alpha = x$

$$v_1 = \frac{\mathcal{M}_1^*}{P} = \frac{l - x}{l} \cdot \alpha,$$

y, para cargas comprendidas entre $\alpha = x$ y $\alpha = l$,

$$v_2 = \frac{\mathcal{M}_2^*}{P} = \frac{x}{l} (l - \alpha).$$

Nótese que estas ecuaciones dan las líneas de influencia del momento flector en cualquier sección C determinada por un valor particular de la abscisa x .

511. — Apliquemos las líneas de influencia así obtenidas para hallar el valor del momento flector en C originado por una carga uniformemente repartida de intensidad específica p , extendida en toda la viga AB .

Considerando una carga elemental $p d\alpha$ a la distancia α de A , comprendida entre A y C , la parte del momento flector originada por la misma es

$$d\mathcal{M}_1^* = p \cdot v_1 d\alpha = p \frac{l-x}{l} \alpha d\alpha;$$

para otra carga elemental comprendida entre C y B , se tiene

$$d\mathcal{M}_2^* = p \cdot v_2 d\alpha = p \frac{x}{l} (l-\alpha) d\alpha.$$

Para la carga total se tendrá, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \int_0^x d\mathcal{M}_1^* + \int_x^l d\mathcal{M}_2^* = \\ &= \frac{p(l-x)}{l} \int_0^x \alpha d\alpha + \frac{px}{l} \int_x^l (l-\alpha) d\alpha = \frac{p}{2} (xl - x^2), \end{aligned}$$

expresión que para el momento flector en el punto medio de la viga, es decir, para $x = \frac{l}{2}$, nos da la fórmula bien conocida

$$\mathcal{M}^* = \frac{pl^2}{8}.$$

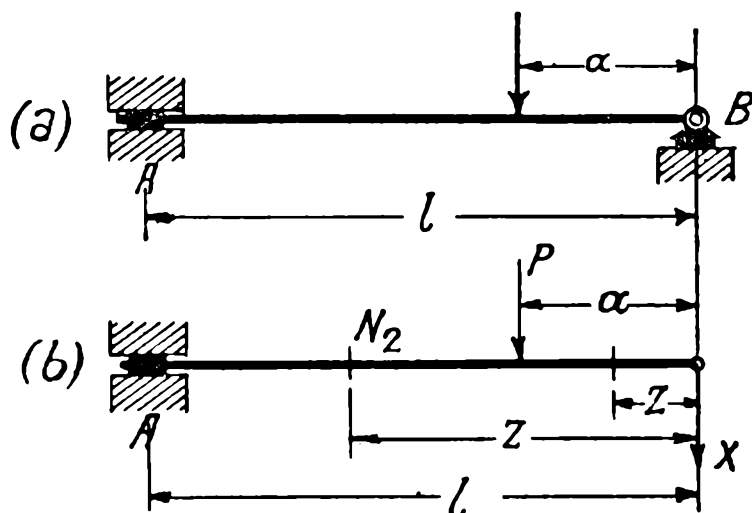


FIG. 286

512. Ejemplo II. — Sea, ahora, el sistema rectilíneo y de sección constante representado en la figura 286 a y propongámonos hallar la ecuación de la línea de influencia de la reacción hiperestática X' en B. De acuerdo con lo anteriormente expuesto debemos, para ello, aplicar una

fuerza P a la distancia variable α del apoyo B y calcular la reacción X' que la misma produce. Para utilizar con este objeto el principio de Menabrea-Castigliano, suprimimos el apoyo B y aplicamos en el sistema isostático resultante (fig. 286 b) y según la dirección de la incógnita, una fuerza de intensidad variable X . Llamando, \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 los momentos flectores en los puntos N_1 y N_2 , de abscisa z respectivamente menor y mayor que α , se dispondrá para calcular la incógnita X' producida por la fuerza P de la ecuación

$$\left(\int_0^\alpha \frac{\mathcal{M}_1}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} dz + \int_\alpha^l \frac{\mathcal{M}_2}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} dz \right)_{X=X'} = 0$$

o, dado que E e I son constantes,

$$\left(\int_0^\alpha \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} dz + \int_\alpha^l \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} dz \right)_{X=X'} = 0 \quad [a]$$

De la figura se deduce que

$$\mathcal{M}_1 = Xz \text{ y } \mathcal{M}_2 = Xz + P(z - \alpha)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} = z \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} = z.$$

Sustituyendo en la [a], y haciendo desde ya $X = X'$, se tiene

$$\int_0^\alpha X' z^2 dz + \int_\alpha^l \left(X' z + P(z - \alpha) \right) z dz = 0$$

$$X' \frac{\alpha^3}{3} + X' \frac{l^3 - \alpha^3}{3} + P \frac{l^3 - \alpha^3}{3} - P\alpha \frac{l^2 - \alpha^2}{2} = 0,$$

o sea, simplificando,

$$v = \frac{X'}{P} = -\frac{1}{2l^3} \alpha^3 + \frac{3}{2l} \alpha - 1, \quad [b]$$

ecuación que nos da, en función de la abscisa α , la línea de influencia de X' buscada.

513. —En el número (425) hemos obtenido para el sistema que acabamos de tratar el valor

$$X' = -\frac{3}{8} pl,$$

como correspondiente a la reacción X' originada por una carga unifor-

mamente repartida de intensidad específica p . Al mismo resultado debemos llegar mediante la ecuación de la línea de influencia.

Siendo, en efecto, $p d\alpha$ la carga infinitésima que actúa en un punto de abscisa α , la parte de la reacción X' producida por la misma, será

$$dX' = v \cdot p d\alpha = p \left(-\frac{1}{2l^3} \alpha^3 + \frac{3}{2l} \alpha - 1 \right) d\alpha,$$

y, para toda la carga, se tendrá

$$X' = \int_0^l dX' = p \int_0^l \left(-\frac{1}{2l^3} \alpha^3 + \frac{3}{2l} \alpha - 1 \right) d\alpha = -\frac{3}{8} pl,$$

como antes.

514. Ejemplo III. — Sea, finalmente (fig. 287 a), un pórtico articulado hiperestático de primer grado, de altura h , luz l y momentos de inercia constantes, I_1 para los dos pilares e I_2 para la viga. Considere-

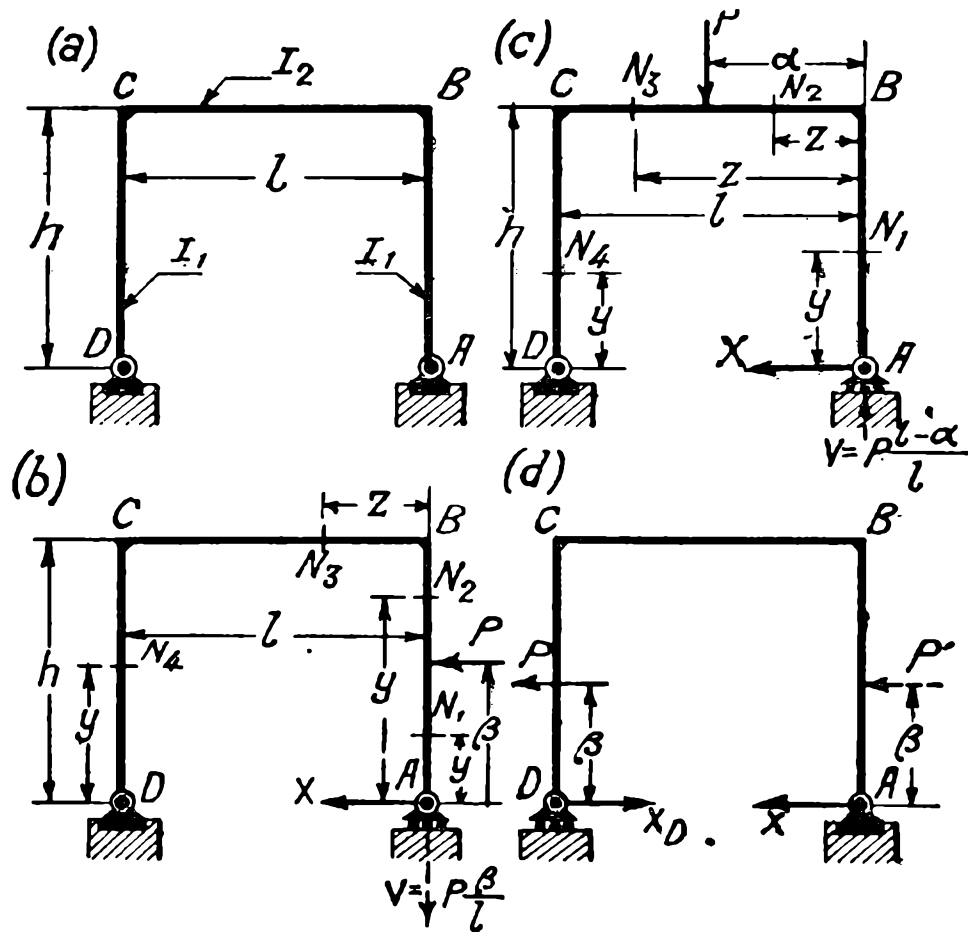


FIG. 287

mos como incógnita hiperestática la componente horizontal X' de la reacción en A , y propongámonos hallar las ecuaciones de sus líneas de influencia para cargas horizontales y verticales que se mueven respectivamente sobre los pilares y sobre la viga.

Consideremos, primeramente, la línea de influencia para cargas horizontales que se mueven sobre el pilar AB . Apliquemos a una distancia variable β de A una fuerza horizontal positiva P (fig. 287 *b*) y a los efectos de calcular mediante el principio de Menabrea-Castigliano la reacción X' que origina, suprimamos el vínculo correspondiente y hagamos actuar según su dirección una fuerza de intensidad variable X . Produciendo la fuerza P , en el apoyo móvil A del sistema isostático así obtenido, una reacción vertical

$$V = \frac{P\beta}{l},$$

los valores de \mathcal{M} y de $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}$ son:

En los puntos N_1 (entre $y = 0$ e $y = \beta$),

$$\mathcal{M}_1 = Xy, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} = y;$$

en los puntos N_2 (entre $y = \beta$ e $y = h$),

$$\mathcal{M}_2 = Xy + P(y - \beta), \quad \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} = y;$$

en los puntos N_3 de la viga,

$$\mathcal{M}_3 = Xh + P(h - \beta) + \frac{P\beta z}{l}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X} = h,$$

y, en los puntos N_4 del pilar izquierdo, distantes y del apoyo D ,

$$\mathcal{M}_4 = Xy + P(y - \beta) + \frac{P\beta}{l} \cdot l, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_4}{\partial X} = y.$$

Sustituyendo en la expresión

$$\left[\frac{1}{EI_1} \int_0^\beta \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} dy + \frac{1}{EI_1} \int_\beta^h \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} dy + \frac{1}{EI_2} \int_0^l \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X} dz + \frac{1}{EI_1} \int_0^h \mathcal{M}_4 \frac{\partial \mathcal{M}_4}{\partial X} dy \right]_{X=X'} = 0,$$

que da a X' , y simplificando, se tiene:

$$v_d = \frac{X'}{P} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{6 I_1} \beta^3 - \left(\frac{hl}{2 I_2} + \frac{h^2}{2 I_1} \right) \beta - m \right) \quad [a]$$

en la que

$$m = - \left(\frac{2}{3} \frac{h^3}{I_1} + \frac{h^2 l}{I_2} \right), \quad [b]$$

que nos proporciona la ecuación de la línea de influencia de X' para cargas horizontales que actúan sobre el pilar AB .

Pasemos a hallar, ahora, la línea de influencia para cargas verticales que actúen sobre la viga. Aplicada a la distancia α del punto B una fuerza vertical positiva P (fig. 287 *c*), suprimido el vínculo correspondiente a la incógnita, puesta según la misma una fuerza de intensidad variable X y siendo

$$V = - \frac{P(l - \alpha)}{l}$$

la reacción isostática que dicha fuerza origina en A , se tiene:

Para los puntos N_1 del pilar derecho,

$$\mathcal{M}_1 = Xy, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} = y,$$

para los puntos N_2 de la viga comprendidos entre $z = 0$ y $z = \alpha$.

$$\mathcal{M}_2 = Xh + Vz = Xh - P \frac{l - \alpha}{l} z, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} = h,$$

para los puntos N_3 de la viga comprendidos entre $z = \alpha$ y $z = l$

$$\mathcal{M}_3 = Xh - P \frac{l - \alpha}{l} z + P(z - \alpha), \quad \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X} = h,$$

y para los puntos N_4 del pilar izquierdo

$$\mathcal{M}_4 = Xy - P \frac{l - \alpha}{l} \cdot l + P(l - \alpha) = Xy, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_4}{\partial X} = y.$$

La ecuación que da a X' para este estado de cargas es

$$\left[\frac{1}{EI_1} \int_0^h \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} dy + \frac{1}{EI_2} \int_0^\alpha \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} dz + \frac{1}{EI_2} \int_\alpha^l \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X} dz + \frac{1}{EI_1} \int_0^h \mathcal{M}_4 \frac{\partial \mathcal{M}_4}{\partial X} dy \right]_{X=X'} = 0,$$

que, observando que según los valores obtenidos

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_4 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{M}_4}{\partial X},$$

se convierte en

$$\left[\frac{2}{I_1} \int_0^h \mathcal{M}_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial X} dy + \frac{1}{I_2} \int_0^\alpha \mathcal{M}_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial X} dz + \frac{1}{I_2} \int_\alpha^l \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial X} dz \right]_{X=X'} = 0,$$

Finalmente, sustituyendo valores, simplificando y haciendo $X = X'$, resulta, para la ecuación de la línea de influencia de X' correspondiente a cargas que actúan sobre la viga,

$$v_h = \frac{X'}{P} = \frac{1}{m} \left(\frac{h}{2 I_2} \alpha^2 - \frac{hl}{2 I_2} \alpha \right), \quad [c]$$

en la que m tiene el valor dado por la [b].

Pasando por último a las cargas P que se mueven sobre el pilar izquierdo, podríamos proceder como antes aplicando la fuerza P (fig. 287 *d*) a la distancia variable β del apoyo D y calculando X' mediante el principio de Menabrea Castigliano. Pero más directamente, podemos llegar al mismo resultado utilizando la línea de influencia para cargas que se mueven sobre el pilar AB dada por la [a]. Observemos, con este objeto, que la reacción horizontal X_D en el apoyo D originada por una carga P sobre el pilar CD distante β de D , es igual en valor y signo a la X' que en el apoyo A produce la P' de igual intensidad y signo que la P , también distante β de A . La línea de influencia de X_D para cargas que se desplazan sobre CD estará dada, por tanto, por la [a], es decir, que

$$\frac{X_D}{P} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{6 I_1} \beta^3 - \left(\frac{hl}{2 I_2} + \frac{h^2}{2 I_1} \right) \beta - m \right).$$

Ahora bien, de la figura 287 *d* se deduce que para que haya equilibrio se requiere que

$$P + X_D + X' = 0$$

$$\frac{X'}{P} = - \frac{X_D}{P} - 1,$$

ecuación que, sustituyendo el valor de $\frac{X_D}{P}$ dado más arriba, nos dice que la línea de influencia de X' para cargas que actúan sobre el pilar CD es

$$v_i = \frac{X'}{P} = - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{6 I_1} \beta^3 - \left(\frac{hl}{2 I_2} + \frac{h^2}{2 I_1} \right) \beta - m \right) - 1$$

o sea, simplificando,

$$v_i = - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{6 I_1} \beta^3 - \left(\frac{hl}{2 I_2} + \frac{h^2}{2 I_1} \right) \beta \right). \quad [d]$$

515. — Apliquemos las líneas de influencia así obtenidas para hallar la expresión que da el empuje X' en A debido al estado de cargas uniformemente repartidas sobre la viga, representado en la figura 288 *a*.

Considerando la carga infinitésima $p d\alpha$ que actúa a la distancia α de B y siendo v_h la ordenada correspondiente de la línea de influencia

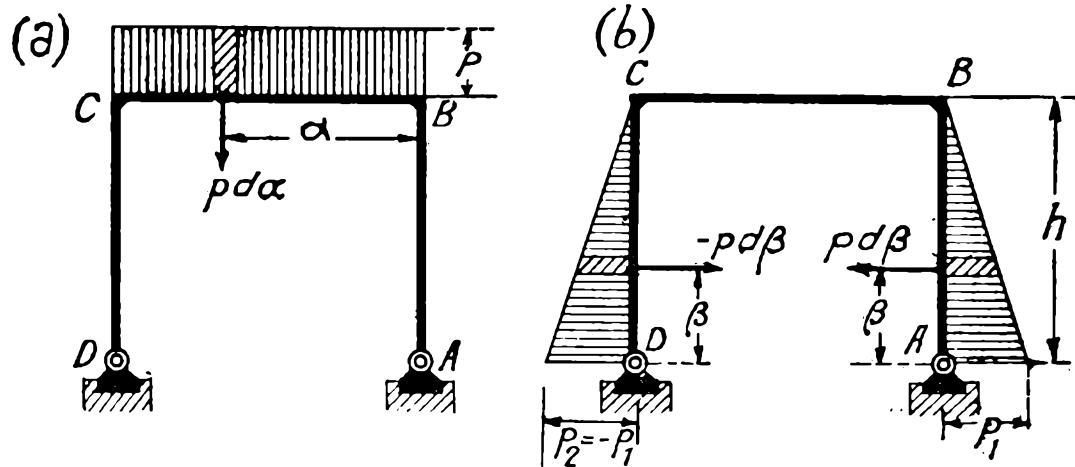


FIG. 288

respectiva, dada por la [c], el valor de X' originado por dicha carga infinitésima es

$$dX' = v_h p d\alpha,$$

y para toda la carga

$$X' = p \int_0^l v d\alpha = \frac{p}{m} \int_0^l \left(\frac{h}{2 I_2} \alpha^2 - \frac{hl}{2 I_2} \alpha \right) d\alpha$$

$$X' = -\frac{p}{m} \cdot \frac{hl^3}{12 I_2} = \frac{pl}{4 \frac{h}{l} \left(2 \frac{I_2 h}{I_1 l} + 3 \right)}$$

que, haciendo

$$k = \frac{\frac{I_2}{l}}{\frac{I_1}{h}} = \frac{I_2 h}{I_1 l},$$

toma la forma

$$X' = \frac{pl^2}{4 h (2 k + 3)}.$$

516. — Análogamente, para el estado de cargas representado en la figura 288 b, considerando las cargas infinitésimas $p d\beta$ y $-p d\beta$ que respectivamente actúan sobre los pilares derecho e izquierdo, a la distancia β de los puntos A y D , se tiene

$$dX' = p d\beta \cdot v_d - p d\beta \cdot v_i = p (v_d - v_i) d\beta$$

que siendo

$$p = p_1 \frac{h - \beta}{h},$$

da

$$dX' = p_1 \frac{h - \beta}{h} (v_d - v_i) d\beta.$$

Y, por tanto, el valor de X' originado por el estado de cargas considerado es

$$X' = \frac{p_1}{h} \int_0^h (h - \beta) (v_d - v_i) d\beta.$$

Por otra parte, de las [a] y [d] se deduce que

$$v_d - v_i = \frac{2}{m} \left(\frac{1}{6 I_1} \beta^3 - \left(\frac{hl}{2 I_2} + \frac{h^2}{2 I_2} \right) \beta \right) - 1,$$

y sustituyendo en la anterior, integrando y simplificando, se tiene, finalmente,

$$X' = - \frac{\frac{11}{20} \frac{I_2 h}{I_1 l} + 1}{2 \frac{I_2 h}{I_1 l} + 3} \cdot p_1 h$$

que, haciendo como antes

$$k = \frac{I_2 h}{I_1 l},$$

toma la forma

$$X' = - \frac{p_1 h}{20} \frac{11 k + 20}{2 k + 3}.$$

517. Observación. — En los ejemplos anteriores, en lugar de hacer actuar una fuerza P de abscisa α y calcular la incógnita X' para obtener, mediante la expresión

$$v = \frac{X'}{P},$$

la ordenada de la línea de influencia, se pudo proceder, más cómoda y directamente, haciendo actuar una fuerza $P = 1$, también de abscisa α , es decir, en realidad un número dirigido según la recta de acción de dicha fuerza, que se tratará como fuerza a los efectos del cálculo de momentos, reacciones, etc.; en esta forma hubiera resultado

$$v = X',$$

o sea, la aplicación directa del principio de Menabrea-Castigliano nos hubiera dado la ordenada de la línea de influencia, ahorrándonos en todas las transformaciones la presencia superflua de la letra P .

De esta última manera procederemos, pues, siempre en adelante.

518. Líneas de influencia de magnitudes estáticas en los sistemas hiperestáticos. — Sea un sistema hiperestático de grado G y supongamos que es hayan obtenido las líneas de influencia de sus incógnitas hiperestáticas X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y que se desee la línea de influencia de una magnitud estática cualquiera (característica \mathcal{M}^* , \mathcal{N}^* o \mathcal{T}^* , tensión en una barra T , componente de reacción R , etc.). Llamemos v_i las ordenadas de las líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas X_i y apliquemos en un punto cualquiera una fuerza P . Si M es la intensidad de la magnitud estática cuya línea de influencia se busca, que origina esta fuerza P , la ordenada correspondiente de esta línea de influencia será

$$v_M = \frac{M}{P}. \quad - [a]$$

Por otra parte, la fuerza P produce en el sistema hiperestático considerado reacciones hiperestáticas de intensidades dadas por los productos

$$X_i = v_i P,$$

de dicha fuerza por las ordenadas v_i que le corresponden en las líneas de influencia respectivas. Conociendo estas reacciones, podemos suprimir los vínculos superfluos correspondientes, poniéndolas en su reemplazo, y nos quedará así el sistema hecho isostático y sujeto a la fuerza P y a las G reacciones X_i . De acuerdo con la [a] de (484), M estará dada por la expresión

$$M = M_o + \sum_{i=1}^G \alpha_{M,i} X_i,$$

siendo M_o la intensidad de la magnitud M que la fuerza P produce en dicho sistema isostático y $\alpha_{M,i}$ los coeficientes de influencia sobre la misma de las incógnitas hiperestáticas X_i , o sea, los valores de dicha magnitud M originados por fuerzas X_i ($i = 1, 2, \dots, G$) unitarias actuando en el sistema hecho isostático. Reemplazando en la [a], resulta, pues,

$$v_M = \frac{M_o}{P} + \sum_{i=1}^G \alpha_{M,i} \frac{X_i}{P}$$

Pero $\frac{M_o}{P}$ es la ordenada v_o de la línea de influencia de M en el sistema isostático, y

$$v_i = \frac{X_i}{P},$$

son, a su vez, las ordenadas v_i conocidas, de las líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas. La anterior da, por consiguiente,

$$v_M = v_o + \sum_{i=1}^G \alpha_{M,i} v_i, \quad [b]$$

que es la ecuación buscada de la línea de influencia de M .

Las líneas de influencia v_i constituyen elásticas de deformación, es decir, en general, curvas, y la sumatoria de la expresión anterior representará, por consiguiente, una nueva curva. En cambio, v_o , línea de influencia de M en el sistema hecho isostático, estará constituida por la recta o conjunto de rectas representativas de un desplazamiento cinemático del sistema de un grado de libertad que se obtiene al suprimir en el mismo el vínculo correspondiente a M ; su agregado, pues, a la sumatoria, implicará un simple cambio de ejes de referencia de la curva que constituye.

Como, por otro lado, la línea de influencia de M debe ser la elástica de una deformación virtual del sistema que se obtiene al suprimir, en el hiperestático considerado, el vínculo correspondiente a dicha incógnita, la curva dada por la sumatoria de la [b] representará esta elástica, y el cambio de ejes a que equivale el agregado de las ordenadas v_o , será el requerido para llevarla a las condiciones de vínculo que corresponden a dicho sistema.

Resumiendo tenemos, pues, que:

Conocidas en un sistema hiperestático de grado G las líneas de influencia de sus incógnitas hiperestáticas X_i ($i = 1, 2, \dots, G$), la línea de influencia de una magnitud estática cualquiera M se obtiene mediante la suma de las ordenadas de aquellas líneas multiplicadas por los respectivos coeficientes de influencia $\alpha_{M,i}$ de las incógnitas hiperestáticas correspondientes sobre dicha magnitud y cambiando los ejes de la curva resultante de modo que ella quede en las condiciones de una elástica de deformación virtual del sistema que se obtiene al suprimir en el dado el vínculo correspondiente a M . Este último cambio de ejes, por otra parte, representa la línea de influencia de M para el sistema isostático que resulta al suprimir en el dado los vínculos superfluos.

519. — Si las líneas de influencia de X_i se han obtenido mediante elásticas de deformación, llamando η_i las ordenadas de estas últimas y $a_{i,i}$ los desplazamientos que en dichas deformaciones corresponden a las respectivas incógnitas X_i se tendrá, según la [a] de (501),

$$v_i = - \frac{\eta_i}{a_{i,i}}$$

y, sustituyendo en la [b] del número anterior, resulta

$$v_M = v_o + \sum_{i=1}^G \left(-\alpha_{M,i} \frac{\eta_i}{a_{i,i}} \right),$$

o, haciendo,

$$\beta_{M,i} = -\frac{\alpha_{M,i}}{a_{i,i}}, \quad [a]$$

$$v_M = v_o + \sum_{i=1}^G \beta_{M,i} \eta_i. \quad [b]$$

§ 6. — Líneas de influencia de desplazamientos

520. Obtención gráfica de líneas de influencia de desplazamientos.

— Sea (fig. 289 a) un sistema cualquiera, isostático o hiperestático, sobre el que actúan una fuerza móvil P paralela a xx , que, para cada posición e intensidad, originará en dicho sistema una determinada deformación.

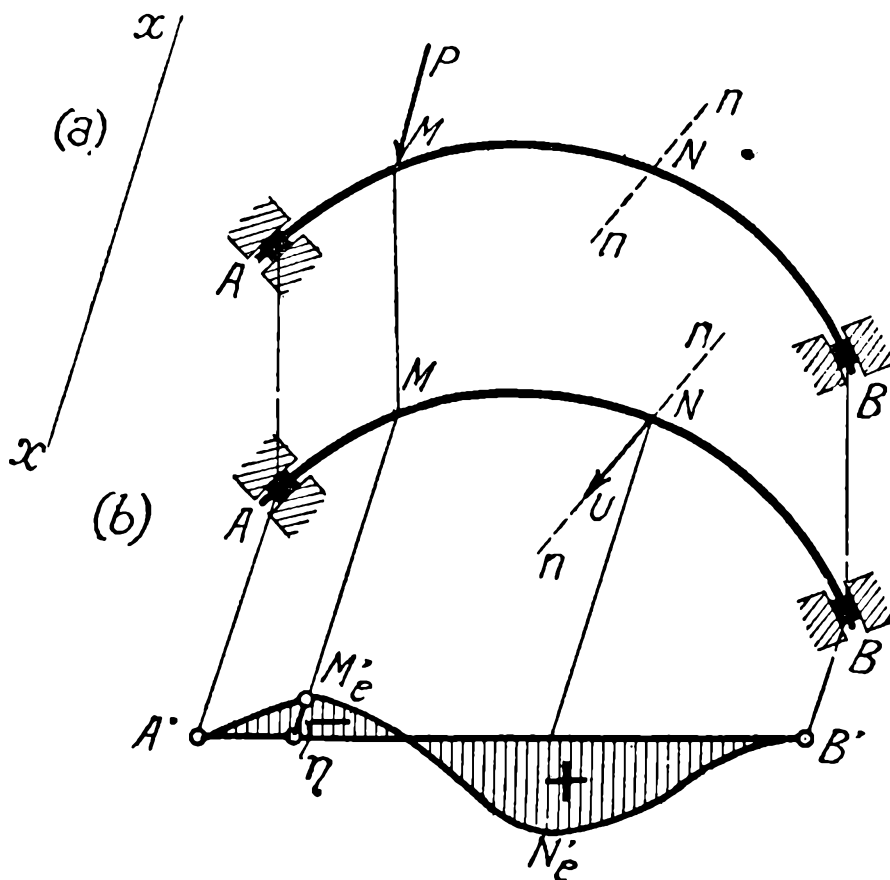


FIG. 289

Sea, además, a un desplazamiento debido a esta deformación (proyección sobre una dirección del desplazamiento de un punto del sistema, o rotación de una sección de alma llena o de la dirección de una barra, o rotación relativa de dos secciones de alma llena o de las direcciones de

dos barras) y propongámonos hallar la línea de influencia del mismo para dichas cargas paralelas a xx . A fin de precisar ideas, supongamos que a sea la proyección sobre nn del desplazamiento del punto N .

Si en un punto cualquiera M aplicamos la fuerza P y a es, en la deformación que la misma produce, la proyección sobre nn del desplazamiento que experimenta el punto N , la ordenada correspondiente al punto M de la línea de influencia buscada será, por definición,

$$v = \frac{a}{P}.$$

Sentado esto, apliquemos, con el criterio establecido en (370), sobre el sistema descargado (fig. 289 *b*) un esfuerzo auxiliar U según la dirección del desplazamiento a calcular (en el caso considerado una fuerza U de intensidad arbitraria aplicada en N , según la dirección nn) y tracemos la elástica $A'M_e'N_e'B'$ de dirección paralela a xx debida a la deformación que ella origina; sea η la ordenada correspondiente a la fuerza P , o lo que es lo mismo, el desplazamiento que la fuerza U origina según la dirección de P . Siendo, por otra parte, el desplazamiento a que buscamos el que la fuerza P origina según la dirección de U , aplicando la ley de Betti, tenemos que

$$Ua = P\eta$$

$$v = \frac{a}{P} = \frac{1}{U} \eta, \quad [a]$$

es decir, que las ordenadas η de la elástica obtenida, multiplicadas por la constante $\frac{1}{U}$, dan las ordenadas v de la línea de influencia del desplazamiento a buscado. Como, por otra parte, el raciocinio anterior es completamente independiente de la naturaleza del desplazamiento a , pues al mismo resultado hubiéramos llegado para cualquier otro (variación de distancia, rotación relativa, etc.) con tal de haber hallado la elástica de dirección xx producida por el esfuerzo auxiliar U correspondiente (par de fuerzas opuestas, cuplas, par de cuplas opuestas, etc.), resulta que:

La línea de influencia para cargas de una dirección determinada de un desplazamiento absoluto o relativo cualquiera, está dada, en cierta escala, por la elástica de dicha dirección correspondiente a la deformación que en el sistema produce un esfuerzo auxiliar de intensidad arbitraria, aplicado según el desplazamiento considerado.

521. — Por lo que respecta a la escala, observemos que si $\frac{\alpha}{\text{cm}}$ es la escala de la elástica trazada y η (cm.) su ordenada leída directamente en el dibujo en centímetros, se tiene que

$$\eta = \eta (\text{cm}) \frac{\alpha}{\text{cm}},$$

de donde, según la [a] del número anterior, resulta

$$v = \eta (\text{cm}) \frac{1}{U} \frac{\alpha}{\text{cm}},$$

o sea que la escala en que dicha elástica representa a la línea de influencia es

$$\frac{1}{U} \frac{\alpha}{\text{cm}}.$$

Vale decir que:

La escala de la línea de influencia de un desplazamiento está dada por la escala de la elástica que la constituye dividida por la intensidad del esfuerzo auxiliar U utilizado para obtenerla.

Si, para precisar ideas, suponemos que se trata de la línea de influencia de la rotación de una sección de un sistema de alma llena o de la dirección de una barra de reticulado y que se ha empleado como esfuerzo auxiliar una cupla de intensidad $U = 1 \text{ tm.}$, y que la elástica de la deformación que ella origina se ha trazado en la escala

$$\frac{200 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}},$$

la escala de la línea de influencia de dicha rotación será

$$\frac{1}{U} \frac{200 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = \frac{1}{1 \text{ tm}} \frac{200 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = \frac{200 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}}$$

522. — Finalmente, en cuanto al signo de la línea de influencia, la [a] de (520) nos dice que v tiene signo igual o contrario a las ordenadas η de la elástica, según que el esfuerzo auxiliar U utilizado sea positivo o negativo. O sea que:

Si se toma cuidado de adoptar un esfuerzo auxiliar U positivo, los signos de la línea de influencia coinciden con los de la elástica, y ella resulta, por tanto, orientada.

En cambio, si por cualquier circunstancia fuera menester emplear un esfuerzo auxiliar U negativo, habría que cambiar los signos de la elástica para obtener los de la línea de influencia.

523. Ejemplos. — Propongámonos hallar la línea de influencia de la proyección $a_{N,M}$ sobre la recta xx que une los puntos M y N , (fig. 290) del desplazamiento relativo de éste con respecto a aquél. El esfuerzo auxiliar correspondiente es, según (370), un par de fuerzas opuestas U , aplicadas en los puntos M y N . Por comodidad les daremos una intensidad, igual a 1 t y como buscamos la proyección del desplazamiento relativo del punto N con respecto al otro, aplicaremos en él la fuerza $U = 1$ t positiva.

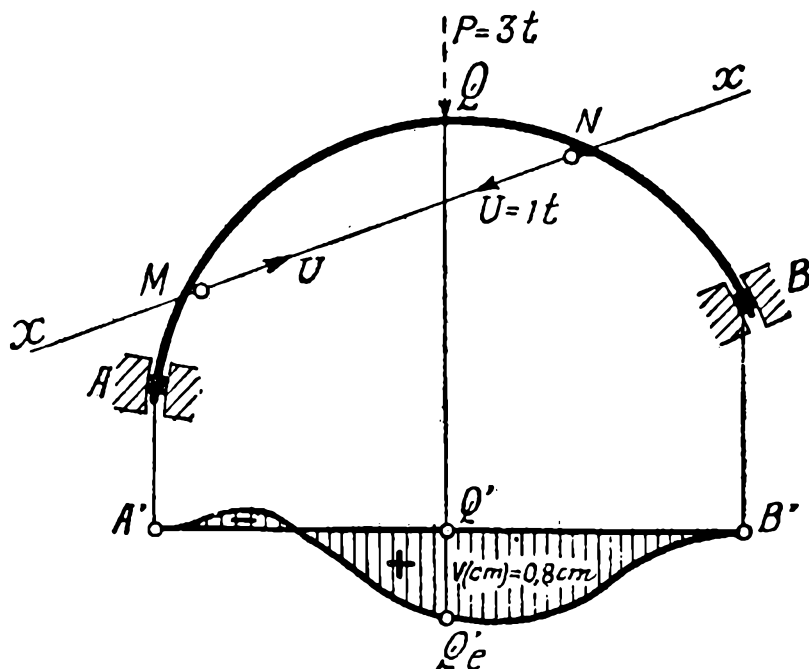


Fig. 290

Supongamos que la elástica de la deformación que en el sistema AB originan estas fuerzas opuestas U esté dada, en la escala

$$\frac{1000 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}},$$

por el diagrama $A'Q'e'B'$. La línea de influencia pedida del desplazamiento $a_{N,M}$ será, pues, según (521), este mismo diagrama, leído en la escala

$$\frac{1}{U} \cdot \frac{1000 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = \frac{1000 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}}{\text{cm}}.$$

Por otra parte, habiendo adoptado un esfuerzo auxiliar U positivo, ella resulta orientada, es decir, tiene signo positivo abajo del eje, y a la inversa, como se ha marcado en la figura.

Si en el punto Q actúa una fuerza $P = 3$ t, la proyección $a_{N,M}$ sobre NM del desplazamiento relativo del punto N con respecto al M , durante la deformación que ella origina, siendo

$$v(\text{cm}) = 0,8 \text{ cm}$$

la ordenada que le corresponde, será

$$a_{N,M} = P \cdot v \text{ (cm)} \frac{1000 \times 10^{-6} t^{-1} \text{ m}}{\text{cm}} =$$

$$= 3 t \cdot 08 \text{ cm} \frac{1000 \times 10^{-6} t^{-1} \text{ m}}{\text{cm}} = 2400 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

En lugar de buscar la línea de influencia de la proyección $a_{N,M}$ del desplazamiento relativo del punto N con respecto al M , es más cómodo hallar directamente la de la variación de distancia entre dichos puntos

$$\delta_{M,N} = - a_{N,M},$$

igual y de sentido contrario a dicha proyección, ya que cuando $a_{N,M}$ es positivo, el punto N se desplaza con respecto a M hacia la derecha, y se produce, de consiguiente, un acortamiento de distancia entre dichos puntos (variación negativa).

El esfuerzo auxiliar correspondiente a dicha variación de distancia es también un par de fuerzas opuestas, y será positivo cuando ellas tengan la misma dirección que una variación de distancia positiva, es decir, cuando se alejen una de otra.

524. — Sea, ahora, el sistema de alma llena ABC (fig. 291) y propongámonos hallar la línea de influencia, para cargas verticales, de la rotación relativa $\theta_{1,2}$ de la sección 1-1 con respecto a la 2-2. El esfuerzo auxiliar correspondiente a este desplazamiento está dado, según (370),

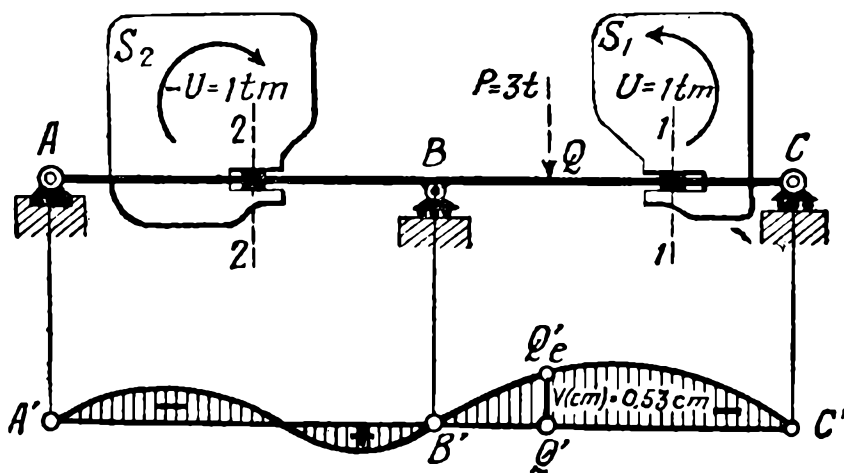


FIG. 291

por un par de cuplas opuestas aplicadas en chapas S_1 y S_2 ligadas rígidamente con los elementos correspondientes a las secciones 1-1 y 2-2. Adoptamos para las mismas, por comodidad, una intensidad $U = 1 \text{ tm}$ y aplicamos la positiva sobre la chapa S_1 cuya rotación se busca con

respecto a la S_2 , a fin de que, según (522), nos resulte orientada la línea de influencia.

Sea, en la escala

$$\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}},$$

$A' B' Q_e' C'$ la elástica vertical de la deformación que este par de cuplas opuestas U origina en el sistema. Ella nos da la línea de influencia pedida de $\vartheta_{1,2}$, en la escala

$$\frac{1}{U} \cdot \frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = \frac{500 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}},$$

y con el signo positivo abajo del eje, como se ha marcado en la figura, dada la precaución adoptada de hacer actuar sobre al chapa S_1 cuyo desplazamiento relativo se busca con respecto a la S_2 , la cupla positiva U .

Si en el punto Q actúa una fuerza $P = 3 \text{ t}$, la rotación relativa $\vartheta_{1,2}$ de la sección 1-1 con respecto a la 2-2, en la deformación que ella produce en el sistema, es, siendo

$$v \text{ (cm)} = -0,53 \text{ cm}$$

la ordenada, leída en centímetros, que le corresponde en la línea de influencia,

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,2} &= P \cdot v \text{ (cm)} \frac{500 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = \\ &= 1 \text{ t} (-0,53 \text{ cm}) \frac{500 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = -265 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

525. — Consideremos, finalmente, un sistema de reticulado (fig. 292) y propongámonos hallar la línea de influencia de la rotación ϑ de la dirección de la barra MN , para cargas verticales P que actúan sobre el cordón inferior AB . Según (370), el esfuerzo auxiliar correspondiente a esta rotación ϑ está dado por una cupla U , aplicada sobre la chapa S vinculada al sistema como indica la figura. Por comodidad, adoptamos una cupla $U = 1 \text{ tm}$, positiva a los efectos de que la línea de influencia pedida resulte, de acuerdo con (522), orientada. Esta cupla transmite a los nudos M y N del reticulado dos fuerzas P_N y P_M , iguales en valor absoluto a

$$\left| P_N \right| = \left| P_M \right| = \left| \frac{U}{s} \right|,$$

y de las direcciones indicadas en la figura.

Suponiendo que el diagrama $A' Q_e' B'$ represente, en la escala

$$\frac{2000 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}},$$

la elástica vertical del cordón inferior de la deformación debida estas fuerzas, nos dará la línea de influencia buscada de la rotación ϑ de la dirección de la barra MN , en la escala

$$\frac{1}{U} \cdot \frac{2000 \times 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = \frac{2000 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}},$$

y con signo positivo abajo del eje como se ha marcado en la figura, dado el sentido positivo adoptado para el esfuerzo auxiliar U .

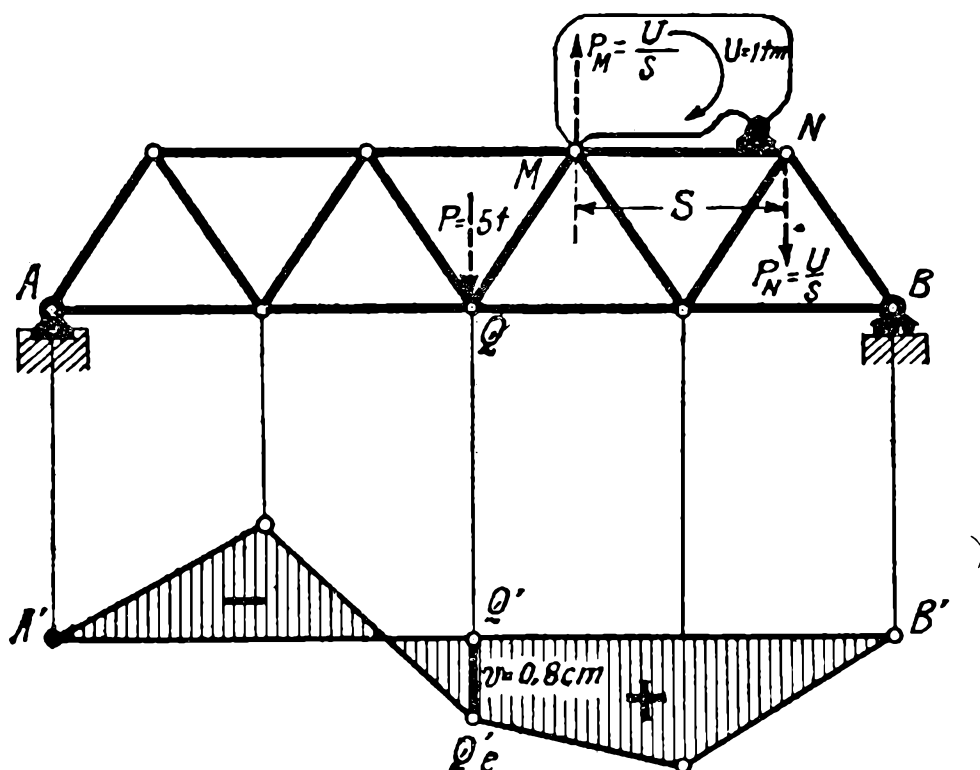


FIG. 292

Si en el nudo Q actúa, por ejemplo, una fuerza $P = 5 \text{ t}$, la dirección de la barra MN experimentará una rotación que, siendo

$$v \text{ (cm)} = 0,8 \text{ m}$$

la ordenada que le corresponde en la línea de influencia obtenida, tendrá una intensidad

$$\vartheta = 5 \text{ t} \cdot 0,8 \text{ cm} \frac{2000 \times 10^{-6} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = 8000 \times 10^{-6}.$$

526. Obtención analítica de líneas de influencia de desplazamientos. — Dado un sistema isostático o hiperestático, sujeto a cargas móviles de dirección determinada, la línea de influencia de uno cualquiera α de sus

desplazamientos, absoluto o relativo, se puede obtener analíticamente, de manera análoga a la expuesta para las líneas de influencia de magnitudes estáticas, haciendo actuar en una posición determinada por una abscisa α una carga P de dicha dirección y calculando, mediante el teorema de Castigliano, el desplazamiento a que origina. Dado que, para una posición de P , a es proporcional a su intensidad, se llegará así a una expresión

$$a = P : v(\alpha), \quad [a]$$

en la que $v(\alpha)$ es una función de la magnitud α que fija la posición de dicha fuerza. De ella se deduce que la ecuación de la línea de influencia de a será

$$v = \frac{a}{P} = v(x). \quad [b]$$

Si, en lugar de aplicar una fuerza P de intensidad cualquiera determinada por la abscisa α , se hubiera hecho actuar, de acuerdo a lo expuesto en (517), una $P = 1$, se tendría, según la [b], $v = a$ y el desplazamiento a calculado, daría directamente la ordenada de la línea de influencia.

En general la expresión $v = v(\alpha)$ así obtenida no constituirá la línea de influencia del desplazamiento considerado para todo el sistema, sino que tendrá validez dentro de ciertos valores de α , por análogas razones a las dadas en (509), para las líneas de influencia de magnitudes estáticas. En estos casos se requerirá aplicar la fuerza $P = 1$ en cada una de las partes del sistema para las que la línea de influencia del desplazamiento buscado esté dada por ecuaciones distintas y calcular, para obtener estas últimas, según la forma indicada, mediante el teorema de Castigliano, los desplazamientos $v = a$ correspondientes a cada posición.

527. Ejemplo I.—Sea la viga simplemente apoyada AB (fig. 293 a), y propongámonos hallar la línea de influencia, para cargas verticales, del desplazamiento vertical que experimenta el punto M , distante x del apoyo A . Apliquemos, según lo establecido, una fuerza $P = 1$ a la distancia α de dicho apoyo, y el desplazamiento que ella origine será la ordenada v de la línea de influencia correspondiente a la abscisa α . La expresión que da esta ordenada v será distinta según que la fuerza $P = 1$ actúe a la izquierda o a la derecha de M .

Comencemos por considerar el primer caso (fig. 293 b). Aplicada la fuerza $P = 1$, para calcular el desplazamiento vertical v que origina en el punto M , debemos hacer actuar el esfuerzo auxiliar U respectivo,

- constituído por una fuerza vertical U de intensidad variable aplicada en dicho punto. La expresión que da los momentos flectores que las fuerzas $P = 1$ y U originan, es distinta según que se considere puntos N_1 , N_2 y N_3 , respectivamente comprendidos entre $z = 0$ y $z = \alpha$, $z = \alpha$

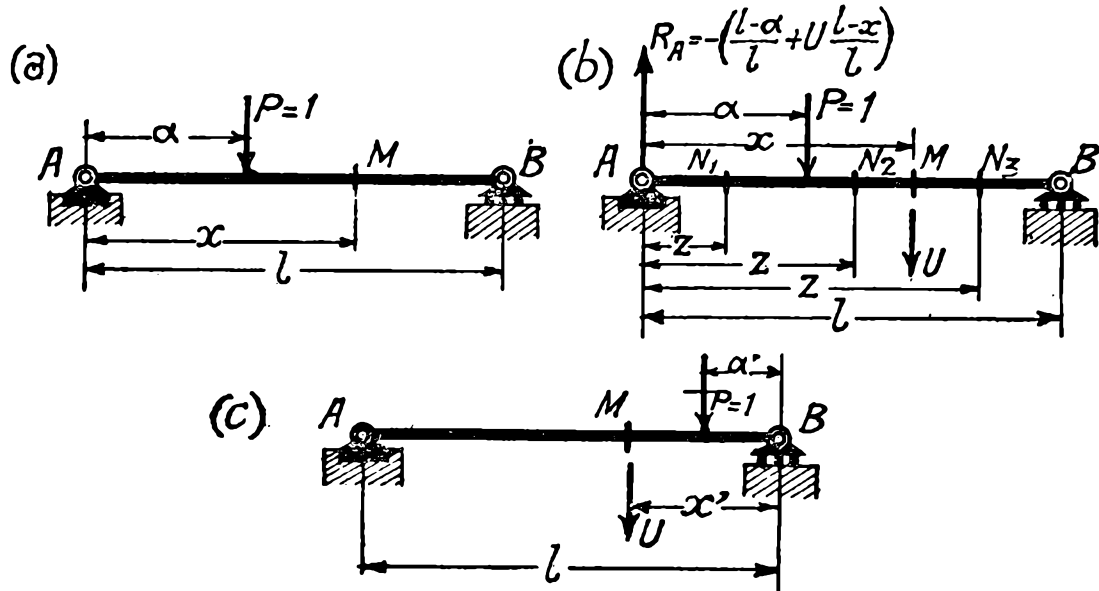


FIG. 293

y $z = x$, $z = x$ y $z = l$; llamando, respectivamente, \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 y \mathcal{M}_3 estos momentos, el desplazamiento v está dado, según el teorema de Castigliano, por la expresión

$$v_i = \left[\sum_{i=1}^3 \int \frac{\mathcal{M}_i}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial U} dz \right]_{\dot{U}=0} \quad [a]$$

siendo E el módulo de elasticidad e I el momento de inercia constante de la viga.

Las reacciones que en A y B originan las cargas $P = 1$ y U son, respectivamente,

$$R_A = - \left(1 \frac{l - \alpha}{l} + U \frac{l - x}{l} \right)$$

y

$$R_B = - \left(1 \frac{\alpha}{l} + \frac{Ux}{l} \right),$$

y, por tanto, los valores de \mathcal{M}_i y $\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial U}$, resultan:

Para los puntos N_1 , comprendidos entre $z = 0$ y $z = \alpha$,

$$\mathcal{M}_1 = -R_A \cdot z = \left(\frac{l - \alpha}{l} + U \frac{l - x}{l} \right) z; \quad \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} = \frac{l - x}{l} z;$$

para los puntos N_2 , comprendidos entre $z = \alpha$ y $z = x$,

$$\mathcal{M}_2 = -R_A \cdot z - 1 \quad (z - \alpha) = \left(\frac{l - \alpha}{l} + U \frac{l - x}{l} \right) z - z + \alpha;$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} = \frac{l - x}{l} z;$$

y para los puntos N_3 , comprendidos entre $z = x$ y $z = l$,

$$\mathcal{M}_3 = -R_B (l - z) = \left(\frac{\alpha}{l} + \frac{Ux}{l} \right) (l - z); \quad \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial U} = (l - z) \frac{x}{l}.$$

Sustituyendo en la [a], se obtiene

$$v_i = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^\alpha \left(\frac{l - \alpha}{l} + U \frac{l - x}{l} \right) z \cdot \frac{l - x}{l} z \cdot dz + \right.$$

$$+ \int_\alpha^x \left[\left(\frac{l - \alpha}{l} + U \frac{l - x}{l} \right) z - z + \alpha \right] \cdot \frac{l - x}{l} z \cdot dz +$$

$$\left. + \int_x^l \left(\frac{\alpha}{l} + \frac{Ux}{l} \right) (l - z) \cdot (l - z) \frac{x}{l} \cdot dz \right\}_{U=0}$$

y, haciendo $U = 0$,

$$v_i = \frac{1}{EI} \left[\int_0^\alpha \frac{l - \alpha}{l} z \cdot \frac{l - x}{l} z \cdot dz + \int_\alpha^x \left(\frac{l - \alpha}{l} z - z + \alpha \right) \cdot \frac{l - x}{l} z \cdot dz + \right.$$

$$\left. + \int_x^l \frac{\alpha}{l} (l - z) \cdot (l - z) \frac{x}{l} \cdot dz \right],$$

que, integrando y simplificando, nos da, finalmente

$$v_i = \frac{x - l}{6 EI l} [\alpha^3 + (x^2 - 2 xl) \alpha], \quad [b]$$

que constituye la ecuación de la línea de influencia buscada del desplazamiento vertical del punto M para cargas que actúen a la izquierda del mismo.

Cuando la fuerza $P = 1$ actúe a la derecha de M , haciendo actuar siempre en M la fuerza auxiliar U a los efectos de aplicar el teorema de Castigliano, se llega al estado de cargas representado en la figura 293 c. Si determinamos el punto M y la fuerza $P = 1$ por sus distancias x' y α' al apoyo derecho, este estado de cargas resulta completamente análogo al de la figura 293 b utilizado para calcular a v_i . La línea de influencia para cargas que actúan a la derecha de M , se obtendrá, por

tanto, directamente de la [b], mediante la sustitución de α por α' y x por x' , es decir, será

$$v_d = \frac{x' - l}{6 EI l} [\alpha'^3 + (x'^2 - 2 x' l) \alpha']. \quad [c]$$

Si se desea expresar también esta última mediante las abscisas α y x , referidas al apoyo izquierdo, bastará notar que

$$x' = l - x \quad \text{y} \quad \alpha' = l - \alpha,$$

y sustituir en la misma.

528. — Supongamos, ahora, que actúe sobre la viga una carga uniformemente repartida en toda su extensión de intensidad específica p , y propongámonos hallar el desplazamiento η_M que origina en el punto M , o, lo que es lo mismo, la ordenada η_M de la elástica de la deformación correspondiente.

Para una faja infinitésima distante α del apoyo izquierdo, situada a la izquierda de M , siendo $p \cdot d\alpha$ la carga que actúa sobre la misma, el desplazamiento que origina en M será

$$v_i p d\alpha.$$

Análogamente, considerando una carga infinitésima $p d\alpha'$ situada a la derecha de M , a una distancia α' de B , el desplazamiento respectivo será

$$v_d p d\alpha'.$$

Por consiguiente, para el desplazamiento η_M buscado, resulta

$$\eta_M = \int_0^x v_i p d\alpha + \int_0^{x'} v_d p d\alpha' = \frac{p}{6 EI l} \left\{ \int_0^x (x - l) [\alpha^3 + (x^2 - 2 x l) \alpha] d\alpha + \int_0^{x'} (x' - l) [\alpha'^3 + (x'^2 - 2 x' l) \alpha'] d\alpha' \right\},$$

que integrando, sustituyendo x' y α' por sus valores en función de x y α y simplificando, nos da

$$\eta_M = \frac{pl^4}{24 EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right), \quad [a]$$

expresión igual a la hallada directamente en (258).

529. Ejemplo II. — Consideremos el sistema hiperestático AB (fig. 294 a) y propongámonos hallar la línea de influencia para cargas verticales, del desplazamiento vertical del punto M , distante x del apoyo B .

La ecuación de dicha línea de influencia tendrá una expresión distinta según que se considere la parte del sistema que queda de uno u otro lado del punto M .

Comencemos por hallar la que corresponde a cargas que actúan a la derecha de dicho punto.

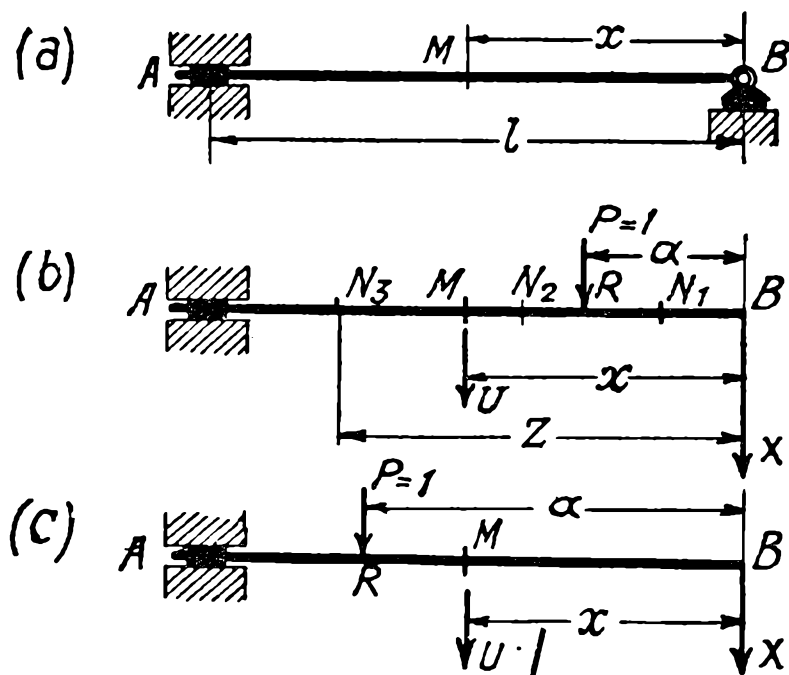


FIG. 294

Para ello, apliquemos según lo establecido, una fuerza vertical $P = 1$ a la distancia α del apoyo B y, a los efectos de calcular el desplazamiento vertical que origina en el punto M , desplazamiento que constituirá la ordenada v_d de la línea de influencia buscada, apliquemos en M el esfuerzo auxiliar correspondiente a este desplazamiento, constituido por una fuerza vertical U (fig. 294 b) de intensidad variable, y suprimamos el vínculo superfluo B , haciendo actuar según la dirección de la incógnita hiperestática respectiva una fuerza X también de intensidad variable. Llamando \mathcal{M}_i ($i = 1, 2, 3$) los momentos flectores que las fuerzas P , U , y X , producen respectivamente en los puntos corridos N_i ($i = 1, 2, 3$) dicho desplazamiento v_d está dado, según el teorema de Castigliano, por la expresión

$$v_d = \left[\sum_{i=1}^3 \int \frac{\mathcal{M}_i}{EI} \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial U} dz \right]_{U=0, X=X'} \quad [a]$$

siendo I el momento de inercia constante del sistema.

Como, por otra parte, los momentos flectores \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 en N_1 y N_2 son independientes de U , se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial U} = \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial U} = 0,$$

y, por tanto, considerando además los límites de las integrales, la $[a]$ toma la forma

$$v_d = \left[\frac{1}{EI} \int_x^l \mathcal{M}_3 \frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial U} dz \right]_{U=0}^{X=X'}$$

que, siendo

$$\mathcal{M}_3 = Xz + (z - \alpha) + U(z - x)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{M}_3}{\partial U} = z - x,$$

nos da

$$v_d = \left\{ \frac{1}{EI} \int_x^l [Xz + (z - \alpha) + U(z - x)] (z - x) dz \right\}_{U=0}^{X=X'}$$

Haciendo $U = 0$ y $X = X'$, resulta

$$v_d = \frac{1}{EI} \int_x^l (X'z + z - \alpha)(z - x) dz,$$

e, integrando y simplificando,

$$v_d = \frac{1}{EI} \left[X' \left(\frac{l^3}{3} + \frac{x^3}{6} - \frac{xl^3}{2} \right) + \frac{l^3}{3} + \frac{x^3}{6} - \frac{\alpha l^2}{2} + \frac{xl^2}{2} + \alpha xl - \frac{\alpha xl}{2} \right]$$

Por otra parte, X' , reacción en B originada por la carga $P = 1$, es la ordenada de la línea de influencia de dicha reacción dada por la $[b]$ de (512), y sustituyendo y simplificando se tiene, finalmente,

$$v_d = \frac{l^3}{12 EI} \left[\left(3 \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} - 2 \right) \frac{\alpha^3}{l^3} + 3 \left(\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{\alpha}{l} \right]. \quad [b]$$

Por lo que respecta a la línea de influencia v_i para las cargas que actúen a la izquierda de M , observemos que el estado de cargas para aplicar el teorema de Castigliano (fig. 294 c) se deduce del anterior (fig. 294 b) cambiando el punto M por el R y a la inversa, es decir, permutando α por x . La expresión que da $v_i(\alpha)$ se obtendrá, por tanto, haciendo esta permutación en la $]b]$, es decir, será

$$v_i = \frac{l^3}{12 EI} \frac{x}{l} \left[\left(3 - \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{\alpha^3}{l^3} - 6 \frac{\alpha^2}{l^2} + 3 \left(1 + \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{\alpha}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right]. \quad [c]$$

530. Observación. — En los ejemplos anteriores se habría podido hallar más cómodamente las líneas de influencia buscadas, si, en lugar

de emplear directamente el teorema de Castigliano, se utilizara la expresión

$$v = \sum \int \frac{\overline{\mathcal{M}}}{EI} \mathcal{M}' ds$$

que como consecuencia del mismo, se halla fácilmente siguiendo el camino empleado para obtener las [b] de (440). En este caso $\overline{\mathcal{M}}$ representaría el momento flector que en los puntos de abscisa z del sistema tratado (isostático e hiperestático) originaría una fuerza $P = 1$ de abscisa α , y \mathcal{M}' el momento flector que en los mismos puntos de abscisa z produciría un esfuerzo auxiliar $U = 1$ actuando en el sistema hecho isostático.

Este es el camino que directamente emplearemos en las aplicaciones que haremos más adelante.

§ 7. — Consideraciones complementarias sobre la obtención analítica de líneas de influencia de sistemas rectilíneos

531. Elección de coordenadas y notaciones. — La obtención analítica de líneas de influencia, tanto de incógnitas estáticas como de desplazamientos, tiene mucha importancia en el caso de sistemas rectilíneos de momento de inercia constante, o de sistemas formados por partes rectilíneas con momentos de inercia constantes. Conviene, por ello, adoptar notaciones generales para los elementos que en dichas líneas figuran, e indicar algunas consideraciones referentes a la elección de coordenadas, que permitan simplificar notablemente la forma de las expresiones correspondientes.

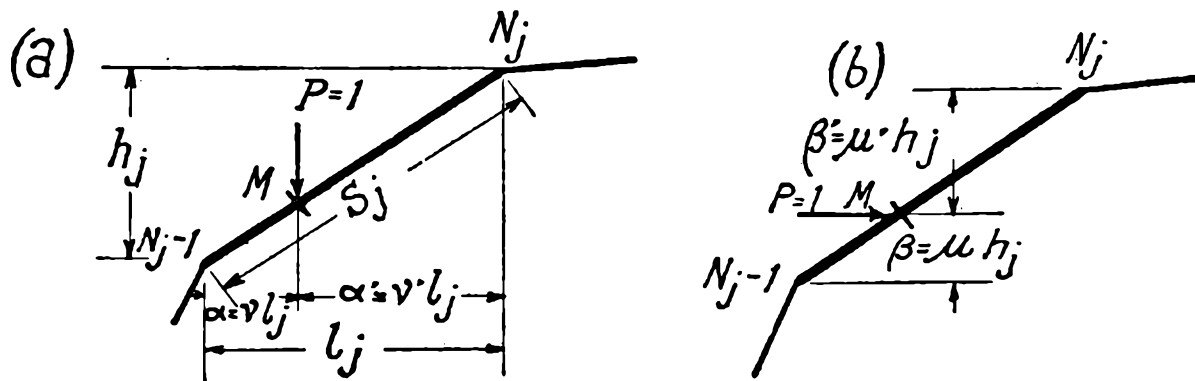


FIG. 295

Sea $N_{j-1}N_j$ (fig. 295 a), una pieza recta de momento de inercia constante I_j perteneciente a un sistema formado por la reunión de una serie de piezas análogas, también rectilíneas, con momentos de inercia constantes. Llamaremos, en general, l_j y h_j , respectivamente a las proyecciones

horizontal y vertical de la pieza genérica $N_{j-1} N_j$, cuya longitud será a su vez s_j .

Todas estas longitudes las consideramos en general como positivas. En algunas aplicaciones, en que convenga atribuirles signos, consideraremos la longitud de la pieza como un vector dirigido de acuerdo con convenciones que haremos en cada caso; cuando esto suceda, designaremos a dicha longitud y a sus proyecciones con las anotaciones s_j^* , l_j^* y h_j^* .

Las ordenadas de las líneas de influencia verticales y horizontales las llamaremos respectivamente v y w .

Para obtener una línea de influencia vertical de una incógnita cualquiera, sabemos que debemos hacer actuar en un punto cualquiera M una fuerza $P = 1$ (fig. 291 *a*) con posición determinada por una abscisa variable, abscisa que a su vez, constituirá la variable independiente de la función que representa a la línea de influencia buscada. Como abscisa tomaremos siempre la distancia horizontal entre el punto M y uno de los extremos N_{j-1} o N_j de la pieza. Designaremos, respectivamente, por α y α' , a esta abscisa, según que se la refiera al extremo izquierdo o al derecho, como indica la figura 295 *a*.

Análogamente para las líneas de influencia horizontales (fig. 295 *b*) tomaremos como variable independiente, que fija la posición de la fuerza horizontal $P = 1$ que se requiere hacer actuar, la distancia vertical entre la misma y los extremos N_{j-1} o N_j , designándola respectivamente β o β' según que se tome como origen el extremo inferior o superior de la pieza considerada.

532. — En lugar de tomar como abscisas para las líneas de influencia verticales directamente las longitudes α o α' de las distancias horizontales entre el punto de aplicación de la fuerza variable y los extremos, conviene tomar relaciones, v o v' entre dichas longitudes y la proyección horizontal l_j de la pieza considerada, es decir, los números

$$v = \frac{\alpha}{l_j} \quad \text{o} \quad v' = \frac{\alpha'}{l_j}. \quad [a]$$

Con estas variables v y v' , las expresiones que proporcionan a las líneas de influencia se simplifican notablemente y se reduce mucho el trabajo de su integración para los distintos estados de carga. Tomaremos, pues, siempre como variables independientes a estos números v y v' .

En igual forma, y por razones análogas, tomaremos como variables independientes para las líneas de influencia horizontales a los números

$$\mu = \frac{\beta}{h_j} \quad \text{o} \quad \mu' = \frac{\beta'}{h_j}, \quad [b]$$

iguales a las relaciones entre las abscisas β y β' y la proyección vertical h_j de la pieza.

Debe notarse que, adoptando como variables independientes los números ν , ν' , μ o μ' , la longitud de un elemento infinitésimo horizontal o vertical, es, respectivamente,

$$d\alpha = l_j d\nu = l_j d\nu'$$

y

$$d\beta = h_j d\mu = h_j d\mu'. \quad [c]$$

Además, la longitud ds del elemento de la pieza se deduce de las relaciones

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{s}{l_j} \quad \text{o} \quad \frac{ds}{d\beta} = \frac{s}{h_j}$$

que, sustituyendo $d\alpha$ por su valor dado por las [c], se convierten en

$$\frac{ds}{l_j d\nu} = \frac{ds}{l_j d\nu'} = \frac{s}{l_j}$$

o

$$\frac{ds}{h_j d\mu} = \frac{ds}{h_j d\mu'} = \frac{s}{h_j}$$

o

$$ds = s d\nu = s d\nu'$$

o

$$ds = s d\mu = s d\mu'. \quad [d]$$

Además, la expresión de la masa elástica total,

$$\rho_j = \frac{s}{EI_j},$$

de la pieza considerada, al reemplazar s por su valor deducido de las [d], toma la forma

$$\rho_j = \frac{1}{EI_j} \cdot \frac{ds}{d\nu} = \frac{1}{EI_j} \cdot \frac{ds}{d\nu'}$$

o

$$\rho_j = \frac{1}{EI_j} \cdot \frac{ds}{d\mu} = \frac{1}{EI_j} \cdot \frac{ds}{d\mu'}. \quad [e]$$

533. — Para comprobar que las expresiones correspondientes a las líneas de influencia se simplifican con la introducción de las variables ν o μ , consideremos cualquiera de las líneas de influencia halladas en las aplicaciones hechas en este capítulo. Por ejemplo, en el número (529)

hemos obtenido como línea de influencia del desplazamiento allí considerado, para cargas que actúan a la izquierda del punto M , la siguiente:

$$v_i = \frac{l^3}{12 EI} \frac{x}{l} \left[\left(3 - \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{\alpha^3}{l^3} - 6 \frac{\alpha^2}{l^2} + 3 \left(1 + \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{\alpha}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right].$$

Adoptando la variable independiente

$$v = \frac{\alpha}{l}$$

y siendo

$$\bar{x} = \frac{x}{l}$$

el valor de dicha variable que fija la posición del punto M , esta línea de influencia toma la forma, mucho más simple,

$$v_i = \frac{l}{12 EI} \bar{x} \left[\left(3 - \bar{x}^2 \right) v^3 - 6 v^2 + 3 \left(1 - \bar{x}^2 \right) v - 2 \bar{x}^2 \right].$$

534. — Otra simplificación importante, de la que ya hemos hecho uso algunas veces, se obtiene introduciendo en las expresiones las relaciones de las masas elásticas entre sí, en lugar de hacerlas figurar directamente. Suponiendo que el sistema tenga n piezas de masas elásticas totales ρ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) en lugar de hacer figurar estas cantidades en las expresiones, las sustituiremos en función de sus relaciones a la masa ρ_1 , de la primer pieza, por ejemplo, relaciones que designaremos

$$k_{j,1} = \frac{\rho_j}{\rho_1} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Esta simplificación es de importancia principalmente cuando el sistema tiene pocas piezas de masa elástica distinta, dos o tres solamente. En caso de dos piezas de masas elásticas

$$\rho_1 = \frac{s_1}{EI_1} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{s_2}{EI_2}$$

tendremos

$$k_{1,1} = 1 \quad \text{y} \quad k_{2,1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{I_1}{I_2}; \quad [a]$$

y no pudiendo presentarse confusión posible, llamaremos directamente k a esta última relación $k_{2,1}$. La simplificación que de esta manera se ob-

tiene ya la hemos utilizado, entre otros casos, para obtener la expresión que da a X' en (515) y (516), por ejemplo.

535. — Apliquemos todas estas simplificaciones a la línea de influencia de la reacción hiperestática X del pórtico recto articulado, obtenidas en (514) para cargas horizontales.

Para cargas que actúan sobre el pilar derecho la línea de influencia está dada, según la [a] de dicho número y llamando, de acuerdo con lo convenido w_a su ordenada, ya que se trata de una línea de influencia horizontal, por la expresión

$$w_a = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{6 I_1} \beta^3 - \left(\frac{hl}{2 I_2} + \frac{h^2}{2 I_1} \right) \beta - m \right],$$

en la que

$$m = - \left(\frac{2}{3} \frac{h^3}{I_1} + \frac{h^2 l}{I_2} \right).$$

Análogamente, la línea de influencia para cargas horizontales que actúan sobre el pilar izquierdo, es, según la [d] del mismo número,

$$w_i = - \frac{1}{m} \left[\frac{1}{6 I_1} \beta^3 - \left(\frac{hl}{2 I_2} + \frac{h^2}{2 I_1} \right) \beta \right].$$

La relación entre las masas elásticas,

$$\rho_1 = \frac{h}{EI_1} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{l}{EI_2},$$

respectivamente de los pilares y de la viga superior, es

$$k = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{l}{h} \cdot \frac{I_1}{I_2};$$

haciendo figurar este valor k en las expresiones anteriores y adoptando la variable independiente

$$\mu = \frac{\beta}{h},$$

ellas toman las formas mucho más sencillas

$$w_a = - \frac{1}{2 (3k+2)} [\mu^3 - 3(k+1)\mu + 2(3k+2)]$$

y

$$w_i = \frac{1}{2 (3k+2)} [\mu^3 - 2(k+1)\mu]$$

536. Forma general de las líneas de influencia y su integración para diversos estados de carga. — Las líneas de influencia son, según hemos visto, simples elásticas de deformación, originadas por fuerzas unitarias aplicadas en la dirección de las incógnitas hiperestáticas o por esfuerzos auxiliares, según que se trate, respectivamente, de magnitudes estáticas o de desplazamientos. En los sistemas rectilíneos estas fuerzas unitarias o esfuerzos auxiliares, producen en las diversas piezas, o en trozos de las mismas, diagramas lineales de momentos flectores y, por tanto, las líneas de influencia, o elásticas correspondientes, serán, según lo establecido en (261), en general, parábolas cúbicas.

Las expresiones generales, pues, de las líneas de influencia verticales y horizontales serán

$$v = K_1 (A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3),$$

y

$$w = K_2 (B_0 + B_1 \mu + B_2 \mu^2 + B_3 \mu^3)$$
[a]

en las que K_1 y K_2 representan coeficientes constantes, que puedan sacarse como factores comunes de todos los términos.

En particular cuando A_3 o B_3 sean nulos, las líneas de influencia serán parábolas de segundo grado, correspondiendo al caso en que el diagrama de momentos flectores que origina las elásticas que ellas constituyen, sea de ordenadas constantes. Finalmente, si A_3 y A_2 o B_3 y B_2 son nulos, las líneas de influencia se reducen a rectas, correspondiendo a sistemas o piezas de sistemas, para las que la incógnita considerada es estáticamente determinada.

Las [a], pues, que pueden tomar la forma abreviada

$$v = K_1 \sum_{i=0}^3 A_i v^i$$

y

$$w = K_2 \sum_{i=0}^3 B_i \mu^i,$$
[b]

representan las ecuaciones de las líneas de influencia para sistemas rectilíneos de momento de inercia constante, en su forma más general.

537. — Consideremos una pieza rectilínea $N_{j-1} N_j$ (fig. 296 a) y sea

$$v = K_1 \sum_{i=0}^3 A_i v^i$$
[a]

la línea de influencia vertical, correspondiente a la misma, de una incógnita X cualquiera. Sobre el sistema actúa una carga continua trape-

zoidal, representada en la figura, y nos proponemos hallar la expresión general que dé el valor de la incógnita X por ella originada.

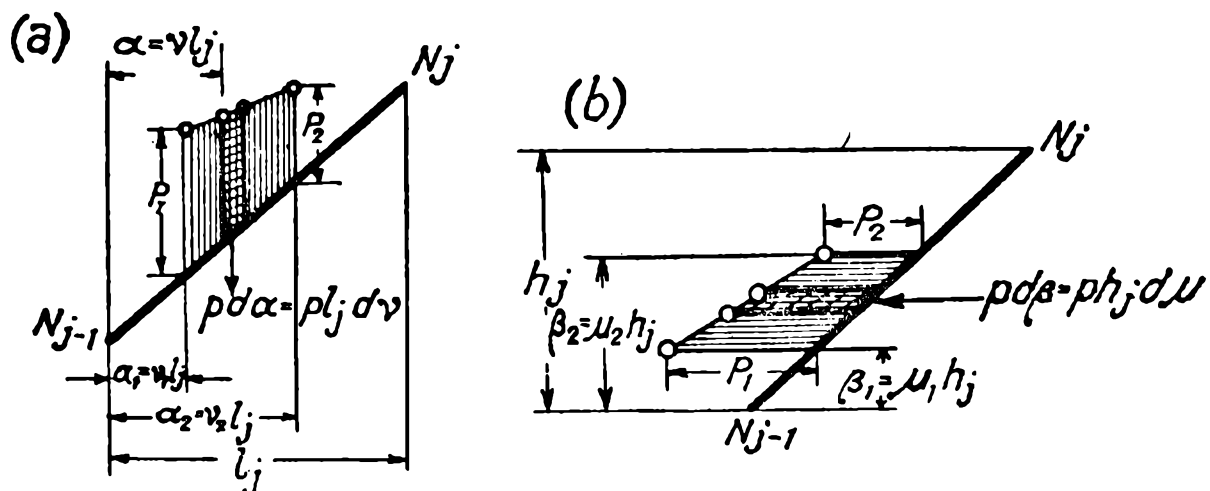


FIG. 296

Considerando una carga elemental $p d\alpha = p l_j d\nu$, aplicada a la distancia $\alpha = \nu l_j$ del apoyo izquierdo, ella produce un valor de la incógnita, de intensidad

$$dX = \nu p l_j d\nu,$$

siendo ν la ordenada de la línea de influencia de X correspondiente a la carga $p d\alpha$, ordenada dada por la [a]. Sustituyendo, pues, resulta

$$dX = K_1 l_j \sum_{i=0}^3 p A_i \nu^i d\nu \quad [b]$$

Por otra parte, de la figura se deduce que

$$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{\nu_2 l_j - \nu_1 l_j} (\nu l_j - \nu_1 l_j),$$

o, simplificando,

$$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{\nu_2 - \nu_1} (\nu - \nu_1)$$

y reemplazando en la [b],

$$dX = K_1 l_j \sum_{i=0}^3 A_i \left[p_1 + \frac{p_2 - p_1}{\nu_2 - \nu_1} (\nu - \nu_1) \right] \nu^i d\nu.$$

La intensidad total X de la incógnita buscada, estará dada por la

integral de la expresión anterior, extendida entre los límites v_1 y v_2 es decir, será

$$\begin{aligned} X &= \int_{v_1}^{v_2} dX = K_1 l_j \int_{v_1}^{v_2} \sum_{i=0}^3 A_i \left[p_1 + \frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} (v - v_1) \right] v^i dv = \\ &= K_1 l_j \sum_{i=0}^3 A_i \left[\frac{p_1 v^{i+1}}{i+1} + \frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} \frac{v^{i+2}}{i+2} - \frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} v_1 \frac{v^{i+1}}{i+1} \right]_{v=v_1}^{v=v_2} = \\ &= K_1 l_j \sum_{i=0}^3 A_i \left[p_1 \frac{v_2^{i+1} - v_1^{i+1}}{i+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} \frac{v_2^{i+2} - v_1^{i+2}}{i+2} - \frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} v_1 \frac{v_2^{i+1} - v_1^{i+1}}{i+1} \right], \end{aligned}$$

expresión que, simplificada, da, finalmente,

$$\begin{aligned} X &= \frac{K_1 l_j}{v_2 - v_1} \sum_{i=0}^3 A_i \left[(p_1 v_2 - p_2 v_1) \frac{v_2^{i+1} - v_1^{i+1}}{i+1} + \right. \\ &\quad \left. + (p_2 - p_1) \frac{v_2^{i+2} - v_1^{i+2}}{i+2} \right], \end{aligned} \quad [b]$$

fórmula general buscada, que proporciona la intensidad de la incógnita originada por una carga trapezoidal cualquiera. Si la carga trapezoidal, en vez de estar dirigida verticalmente, como hemos supuesto, lo estuviera horizontalmente (fig. 296 b), la expresión correspondiente la obtendríamos cambiando K_1 , l_j , A_i , v_1 y v_2 respectivamente por K_2 , h_j , B_i , μ_1 y μ_2 , es decir, sería

$$\begin{aligned} X &= \frac{K_2 h_j}{\mu_2 - \mu_1} \sum_{i=1}^3 B_i \left[(p_1 \mu_2 - p_2 \mu_1) \frac{\mu_2^{i+1} - \mu_1^{i+1}}{i+1} + \right. \\ &\quad \left. + (p_2 - p_1) \frac{\mu_2^{i+2} - \mu_1^{i+2}}{i+2} \right]. \end{aligned} \quad [c]$$

Obtenidas estas expresiones [b] y [c], se pueden deducir como casos particulares (haciendo en ellas $v_1 = 0$ ó $v_2 = 1$, o a la vez $v_1 = 0$ y $v_2 = 1$, o $p_1 = 0$ ó $p_2 = 0$, etc.) todas las fórmulas que proporcionan los valores de la incógnita X para cargas repartidas según funciones lineales cualesquiera.

A continuación damos cuadros que agrupan estas fórmulas para todos los casos posibles. En ellas se han considerado únicamente cargas verticales; las expresiones análogas para cargas horizontales se deducen de las de dichos cuadros mediante la simple sustitución de letras a que hemos hecho mención.

CARGAS TRAPEZOIDALES

Ecuación de la línea de influencia: $\varphi = K_1 \sum_{i=0}^3 A_i v^i = K_1 (A + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3)$

<p style="text-align: center;">a</p>	$X = \frac{K_1 l_j}{v_2 - v_1} \sum_{i=0}^3 A_i \left[(p_1 v_2 - p_2 v_1) \frac{v_2^{i+1} - v_1^{i+1}}{i+1} + (p_2 - p_1) \frac{v_2^{i+2} - v_1^{i+2}}{i+2} \right] =$ $= \frac{K_1 l_j}{v_2 - v_1} \left[(p_1 v_2 - p_2 v_1) \left(\frac{A_0}{1} (v_2 - v_1) + \frac{A_1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{A_2}{3} (v_2^3 - v_1^3) + \frac{A_3}{4} (v_2^4 - v_1^4) \right) + \right.$ $\left. + (p_2 - p_1) \left(\frac{A_0}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{A_1}{3} (v_2^3 - v_1^3) + \frac{A_2}{4} (v_2^4 - v_1^4) + \frac{A_3}{5} (v_2^5 - v_1^5) \right) \right]$
<p style="text-align: center;">b</p>	$X = K_1 l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+2} \left(p_2 + \frac{p_1}{i+1} \right) v_2^{i+1} =$ $= K_1 l_j \left[\frac{A_0}{2} \left(p_2 + \frac{p_1}{1} \right) v_2 + \frac{A_1}{3} \left(p_2 + \frac{p_1}{2} \right) v_2^2 + \frac{A_2}{4} \left(p_2 + \frac{p_1}{3} \right) v_2^3 + \frac{A_3}{5} \left(p_2 + \frac{p_1}{4} \right) v_2^4 \right]$
<p style="text-align: center;">c</p>	$X = \frac{K_1 l_j}{1 - v_1} \sum_{i=0}^3 A_i \left[(p_1 - p_2 v_1) \frac{1 - v_1^{i+1}}{i+1} + (p_2 - p_1) \frac{1 - v_1^{i+2}}{i+2} \right] =$ $= \frac{K_1 l_j}{1 - v_1} \left[(p_1 - p_2 v_1) \left(\frac{A_0}{1} (1 - v_1) + \frac{A_1}{2} (1 - v_1^2) + \frac{A_2}{3} (1 - v_1^3) + \frac{A_3}{4} (1 - v_1^4) \right) + \right.$ $\left. + (p_2 - p_1) \left(\frac{A_0}{2} (1 - v_1^2) + \frac{A_1}{3} (1 - v_1^3) + \frac{A_2}{4} (1 - v_1^4) + \frac{A_3}{5} (1 - v_1^5) \right) \right]$
<p style="text-align: center;">d</p>	$X = K_1 l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+2} \left(p_2 + \frac{p_1}{i+1} \right) =$ $= K_1 l_j \left[p_2 \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{4} + \frac{A_3}{5} \right) + \frac{p_1}{2} \left(A_0 + \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{6} + \frac{A_3}{10} \right) \right]$

Cuadro N° 2

CARGAS TRIANGULARES (CON ORDENADA NULA A LA IZQUIERDA)

Ecuación de la línea de influencia: $v = K_1 \sum_{i=0}^3 A_i v^i = K_1 (A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3)$

<p style="text-align: center;">a</p>	$X = \frac{K_1 p_2 l_j}{v_2 - v_1} \sum_{i=0}^3 A_i \left(\frac{v_2^{i+2} - v_1^{i+2}}{i+2} - v_1 \frac{v_2^{i+1} - v_1^{i+1}}{i+1} \right) =$ $= \frac{K_1 p_2 l_j}{2(v_2 - v_1)} \left[A_0 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2) + \frac{A_1}{3} (v_1^3 + 2v_2^3 - 3v_1 v_2^2) + \frac{A_2}{6} (v_1^4 + 3v_2^4 - 4v_1 v_2^3) + \right.$ $\left. + \frac{A_3}{10} (v_1^5 + 4v_2^5 - 5v_1 v_2^4) \right]$
<p style="text-align: center;">b</p>	$X = K_1 p_2 l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+2} v_2^{i+1} = K_1 p_2 l_j \left(\frac{A_0}{2} v_2 + \frac{A_1}{3} v_2^2 + \frac{A_2}{4} v_2^3 + \frac{A_3}{5} v_2^4 \right)$
<p style="text-align: center;">c</p>	$X = \frac{K_1 p_2 l_j}{1 - v_1} \sum_{i=0}^3 A_i \left(\frac{1 - v_1^{i+2}}{i+2} - v_1 \frac{1 - v_1^{i+1}}{i+1} \right) =$ $= \frac{K_1 p_2 l_j}{2(1 - v_1)} \left[A_0 (1 - 2v_1 + v_1^2) + \frac{A_1}{3} (2 - 3v_1 + v_1^3) + \frac{A_2}{6} (3 - 4v_1 + v_1^4) + \frac{A_3}{10} (4 - 5v_1 + v_1^5) \right]$
<p style="text-align: center;">d</p>	$X = K_1 p_2 l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+2} = K_1 p_2 l_j \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{4} + \frac{A_3}{5} \right)$

CARGAS TRIANGULARES (CON ORDENADA NULA A LA DERECHA)

Ecuación de la línea de influencia: $v = K_1 \sum_{i=0}^3 A_i v^i = K_1 (A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3)$

<p style="text-align: center;">a</p>	$X = \frac{K_1 p_1 l_j}{v_2 - v_1} \sum_{i=0}^3 A_i \left(v_2 \frac{v_2^{i+1} - v_1^{i+1}}{i+1} - \frac{v_2^{i+2} - v_1^{i+2}}{i+2} \right) =$ $= \frac{K_1 p_1 l_j}{2 (v_2 - v_1)} \left[A_0 (v_2^2 + v_1^2 - 2 v_2 v_1) + \frac{A_1}{3} (v_2^3 + 2 v_1^3 - 3 v_2 v_1^2) + \right.$ $\left. + \frac{A_2}{6} (v_2^4 + 3 v_1^4 - 4 v_2 v_1^3) + \frac{A_3}{10} (v_2^5 + 4 v_1^5 - 5 v_2 v_1^4) \right]$
<p style="text-align: center;">b</p>	$X = K_1 p_1 l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{(i+1)(i+2)} v_2^{i+1} = \frac{K_1 p_1 l_j}{2} \left(A_0 v_2 + \frac{A_1}{3} v_2^2 + \frac{A_2}{6} v_2^3 + \frac{A_3}{10} v_2^4 \right)$
<p style="text-align: center;">c</p>	$X = \frac{K_1 p_1 l_j}{1 - v_1} \sum_{i=0}^3 A_i \left(\frac{1 - v_1^{i+1}}{i+1} - \frac{1 - v_1^{i+2}}{i+2} \right) =$ $\frac{K_1 p_1 l_j}{2(1-v_1)} \left[A_0 (1 - 2v_1 + v_1^2) + \frac{A_1}{3} (1 - 3v_1^2 + 2v_1^3) + \frac{A_2}{6} (1 - 4v_1^3 + 3v_1^4) + \frac{A_3}{10} (1 - 5v_1^4 + 4v_1^5) \right]$
<p style="text-align: center;">d</p>	$X = K_1 p_1 l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{(i+1)(i+2)} = \frac{K_1 p_1 l_j}{2} \left(A_0 + \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{6} + \frac{A_3}{10} \right)$

Cuadro N° 4

CARGAS UNIFORMEMENTE REPARTIDAS

Ecuación de la línea de influencia: $v = K_1 \sum_{i=0}^3 A_i v^i = K_1 (A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3)$

	$X = K_1 p l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+1} (v_2^{i+1} - v_1^{i+1}) =$ $= K_1 p l_j \left[A_0 (v_2 - v_1) + \frac{A_1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{A_2}{3} (v_2^3 - v_1^3) + \frac{A_3}{4} (v_2^4 - v_1^4) \right]$
	$X = K_1 p l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+1} v_2^{i+1} = K_1 p l_j \left(A_0 v_2 + \frac{A_1}{2} v_2^2 + \frac{A_2}{3} v_2^3 + \frac{A_3}{4} v_2^4 \right)$
	$X = K_1 p l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+1} (1 - v_1^{i+1}) =$ $= K_1 p l_j \left[A_0 (1 - v_1) + \frac{A_1}{2} (1 - v_1^2) + \frac{A_2}{3} (1 - v_1^3) + \frac{A_3}{4} (1 - v_1^4) \right]$
	$X = K_1 p l_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+1} = K_1 p l_j \left(A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{4} \right)$

539. — Como ejercicio, apliquemos las expresiones de los cuadros anteriores a la viga empotrada en B y apoyada en A que representa la figura 297. En (512) hemos encontrado, para la línea de influencia de la reacción hiperestática X en A , la función

$$v = -\frac{1}{2l^3} \alpha^3 + \frac{3}{2l} \alpha - 1,$$

que, introduciendo la variable independiente

$$v = \frac{\alpha}{l},$$

toma la forma

$$v = -\frac{1}{2} v^3 + \frac{3}{2} v - 1.$$

Comparando con la expresión general

$$v = K_1 (A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3),$$

tenemos que, en este caso, es

$$K_1 = 1;$$

$$A_0 = -1; \quad A_1 = \frac{3}{2}; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = -\frac{1}{2}.$$

Como, además,

$$l_j = l,$$

se tiene, para el estado de cargas de la figura 297 b , aplicando la expresión [d] del cuadro N° 4, que le corresponde,

$$\begin{aligned} X &= K_1 pl_j \left(A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{4} \right) = \\ &= pl \left(-1 + \frac{\frac{3}{2}}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{4} \right) = -\frac{3}{8} pl. \end{aligned}$$

Para el estado de cargas de la figura 297 c , al que corresponde la expresión [b] del cuadro N° 4, se tiene,

$$\begin{aligned} X &= K_1 pl_j \left(A_0 v_2 + \frac{A_1}{2} v_2^2 + \frac{A_2}{3} v_2^3 + \frac{A_3}{4} v_2^4 \right) = \\ &= pl \left(-v_2 + \frac{3}{4} v_2^2 - \frac{1}{8} v_2^4 \right). \end{aligned}$$

En el caso en que la carga se extienda en la mitad de la longitud l de la viga, es decir, en que $v_2 = \frac{1}{2}$, resulta

$$X = pl \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{1}{2^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^4} \right) = -\frac{41}{128} pl.$$

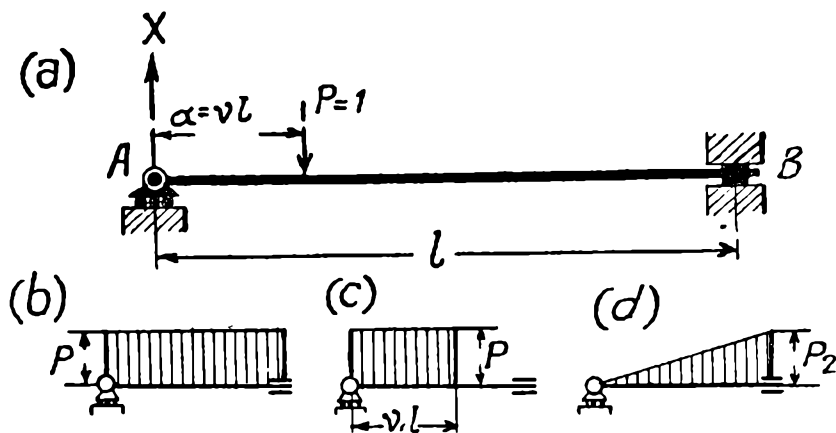


FIG. 297

Análogamente, para el estado de cargas de la figura 297 *d*, aplicando la [d] del cuadro N° 2 que le corresponde, se tiene

$$\begin{aligned} X &= K_1 p_2 l_j \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{4} + \frac{A_3}{5} \right) = \\ &= pl \left(\frac{-1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{3} + \frac{-\frac{1}{2}}{5} \right) = -\frac{pl}{10} \end{aligned}$$

540. Obtención gráfica y analítica de las líneas de influencia de piezas rectilíneas, mediante las ordenadas y tangentes correspondientes a sus extremos. — Como veremos más adelante, en algunos casos, en lugar de obtener directamente las ecuaciones de las líneas de influencia de las piezas rectilíneas $N_{j-1} N_j$, conviene calcular las ordenadas v_{j-1} y v_j , y las tangentes trigonométricas de las tangentes a dichas curvas, $tg \epsilon_{j-1}$ y $tg \epsilon_j$, correspondientes a sus puntos extremos N_{j-1} y N_j (fig. 298).

En posesión de estos elementos v_{j-1} , v_j , $tg \epsilon_{j-1}$ y $tg \epsilon_j$ se puede obtener con facilidad las líneas de influencia, tanto gráfica como analíticamente.

Tomando, en efecto, la recta $N'_{j-1} N'_j$ como eje para construir la elástica, los puntos N''_{j-1} y N''_j de esta última pueden determinarse mediante las ordenadas v_{j-1} y v_j conocidas. Además, utilizando las tangentes $tg \epsilon_{j-1}$ y $tg \epsilon_j$, también conocidas, pueden trazarse la primera y la última tangente t_1 y t_2 , es decir las tangentes extremas de la elástica correspondiente a la pieza recta considerada. Prolongando estas tangentes hasta cortar en P y Q las tercias, se tiene en PQ el lado intermedio del polígono.

de las tercias y la elástica puede trazarse por puntos y tangentes siguiendo el camino expuesto en (268).

En igual forma, analíticamente, si suponemos $K_1 = 1$ la ecuación de la elástica es

$$v = \sum_{i=0}^3 A_i v^i = A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3, \quad [a]$$

y las cuatro constantes A_i pueden determinarse en función de los cuatro elementos v_{j-1} , v_j , $tg \epsilon_{j-1}$, $tg \epsilon_j$.

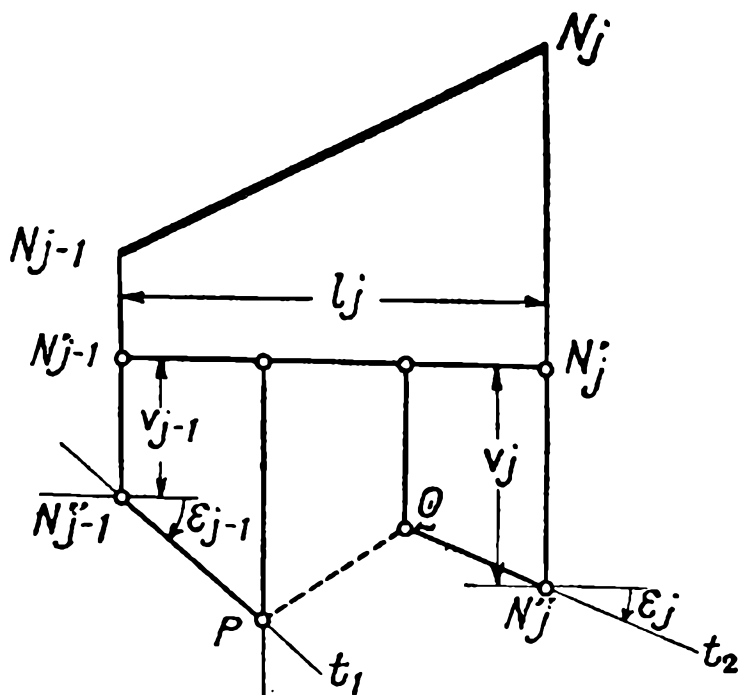


FIG. 298

Así, para $v = 0$ y $v = 1$, debe tenerse, respectivamente, $v = v_{j-1}$ y $v = v_j$ es decir

$$\begin{aligned} v_{j-1} &= A_0 \\ v_j &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned} \quad [b]$$

Por otra parte, las tangentes $tg \epsilon_{j-1}$ y $tg \epsilon_j$, son, respectivamente,

$$\begin{aligned} tg \epsilon_{j-1} &= \left(\frac{dv}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}, \\ tg \epsilon_j &= \left(\frac{dv}{d\alpha} \right)_{\alpha=l_j}; \end{aligned}$$

derivando la [a] con respecto a α y recordando que

$$v = \frac{\alpha}{l_j},$$

se tiene

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{dv}{dv} \cdot \frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{l_j} \cdot \frac{dv}{dv} = \frac{1}{l_j} (A_1 + 2 A_2 v + 3 A_3 v^2).$$

Por consiguiente, resulta

$$tg \varepsilon_{j-1} = \left(\frac{dv}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{1}{l_j} \left(\frac{dv}{dv} \right)_{v=0} = \frac{A_1}{l_j}$$

y

$$tg \varepsilon_j = \left(\frac{dv}{d\alpha} \right)_{\alpha=l_j} = \frac{1}{l_j} \left(\frac{dv}{dv} \right)_{v=1} = \frac{1}{l_j} (A_1 + 2 A_2 + 3 A_3).$$

[c]

Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones lineales entre las cuatro incógnitas A_i ($i = 0, 1, 2, 3$) que proporcionan las [b] y [c], se tiene, finalmente,

$$\begin{aligned} A_0 &= v_{j-1} \\ A_1 &= l_j \cdot tg \varepsilon_{j-1} \\ A_2 &= 3 (v_j - v_{j-1}) - l_j (2 tg \varepsilon_{j-1} + tg \varepsilon_j) \\ A_3 &= l_j (tg \varepsilon_{j-1} + tg \varepsilon_j) - 2(v_j - v_{j-1}), \end{aligned}$$

[d]

expresiones que nos dan los coeficientes de la línea de influencia buscada.

Análogamente, para una línea de influencia horizontal, conocidas las ordenadas w_{j-1} y w_j , así como las tangentes $tg \varepsilon_{j-1}$ y $tg \varepsilon_j$, correspondientes a sus extremos N_{j-1} y N_j , se tendrá que los coeficientes B_i de su ecuación

$$w = \sum_{i=0}^3 B_i \mu^i,$$

son

$$\begin{aligned} B_0 &= w_{j-1} \\ B_1 &= h_j tg \varepsilon_{j-1} \\ B_2 &= 3 (w_j - w_{j-1}) - h_j (2 tg \varepsilon_{j-1} + tg \varepsilon_j) \\ B_3 &= h_j (tg \varepsilon_{j-1} + tg \varepsilon_j) - 2 (w_j - w_{j-1}). \end{aligned}$$

[d']

541. — Conocidas las cuatro magnitudes v_{j-1} , v_j , $tg \varepsilon_{j-1}$ y $tg \varepsilon_j$, se pueden obtener directamente las expresiones que proporcionan el valor de la incógnita para cualquier estado lineal de cargas, sin necesidad de calcular previamente los coeficientes A_i .

Hagámoslo para el caso más sencillo y más frecuente de una carga uniformemente repartida en toda la extensión de la viga. Según la fórmula [d] del cuadro N° 4 de (538), se tiene, haciendo $K_1 = 1$,

$$X = pl_j \sum_{i=0}^3 \frac{A_i}{i+1},$$

que, sustituyendo los valores de A_i dados por las $[d]$ del número anterior, se convierte en

$$X = pl_j \left[v_{j-1} + \frac{l_j}{2} \operatorname{tg} \epsilon_{j-1} + v_j - v_{j-1} - \frac{1}{3} l_j (2 \operatorname{tg} \epsilon_{j-1} + \operatorname{tg} \epsilon_j) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} l_j (\operatorname{tg} \epsilon_{j-1} + \operatorname{tg} \epsilon_j) - \frac{1}{2} (v_j - v_{j-1}) \right]$$

y, simplificando,

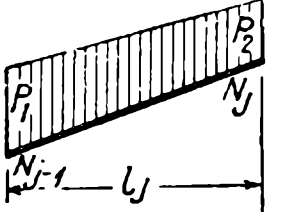
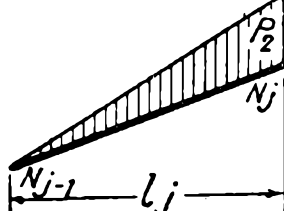
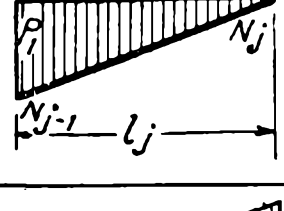

$$X = \frac{pl_j}{12} \left[6 (v_j + v_{j-1}) + l_j (\operatorname{tg} \epsilon_{j-1} - \operatorname{tg} \epsilon_j) \right]. \quad [a]$$

Para una carga uniformemente repartida horizontal se tendría, análogamente,

$$X = \frac{ph_j}{12} \left[6 (w_j + w_{j-1}) + h_j (\operatorname{tg} \epsilon_{j-1} - \operatorname{tg} \epsilon_j) \right].$$

El cuadro N° 1 da las expresiones análogas para los casos de cargas lineales verticales extendidas en toda la extensión de la pieza. Las expresiones para los mismos casos de cargas horizontales se deducen de las de dicho cuadro cambiando las letras l y v respectivamente por h y w .

Cuadro N° 1

<p>a</p> 	$X = \frac{l_j}{60} \left[p_2 (9v_{j-1} + 21v_j + 2l_j \operatorname{tg} \epsilon_{j-1} - 3l_j \operatorname{tg} \epsilon_j) + \right. \\ \left. + p_1 (21v_{j-1} + 9v_j + 3l_j \operatorname{tg} \epsilon_{j-1} - 2l_j \operatorname{tg} \epsilon_j) \right]$
<p>b</p> 	$X = \frac{p_2 l_j}{60} \left(9v_{j-1} + 21v_j + l_j (2 \operatorname{tg} \epsilon_{j-1} - 3 \operatorname{tg} \epsilon_j) \right)$
<p>c</p> 	$X = \frac{p_1 l_j}{60} \left(21v_{j-1} + 9v_j + l_j (3 \operatorname{tg} \epsilon_{j-1} - 2 \operatorname{tg} \epsilon_j) \right)$
<p>d</p> 	$X = \frac{p l_j}{12} \left[6 (v_{j-1} + v_j) + l_j (\operatorname{tg} \alpha_{j-1} - \operatorname{tg} \alpha_j) \right]$

542. — A propósito de integración de líneas de influencia de sistemas rectilíneos, para cargas distribuidas linealmente, conviene recordar de qué manera puede determinarse gráficamente la ordenada media v_{med} de las parábolas cúbicas que ellas constituyen. Para el caso de una carga uniformemente repartida en toda la extensión de la viga de intensidad total igual a P , la intensidad de la incógnita por ella originada es igual, como sabemos según (495), al producto de P por esta ordenada media.

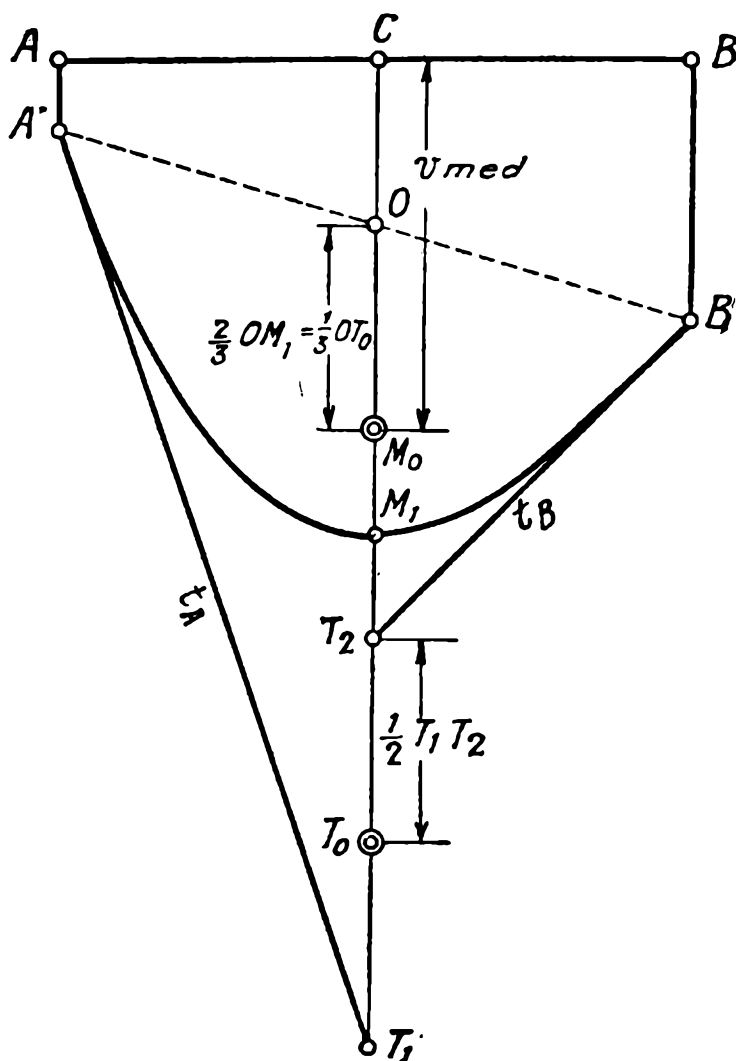


FIG. 299

Sea $A'M_1B'$ (fig. 299) una elástica vertical, constituida por una parábola cúbica referida al eje AB . Determinemos el punto medio C de AB y hagamos pasar por él la vertical CM_1 ; tracemos la línea $A'B'$ y determinemos el punto O en que corta a dicha vertical. Llevando un segmento

$$\overline{OM_0} = \frac{2}{3} \overline{OM_1},$$

se determina un punto M_0 tal que

$$\overline{CM_0} = v_{med}.$$

Para emplear la construcción anterior se requiere conocer el punto M_1 , el que puede hallarse directamente, cuando se poseen las tangentes t_A y t_B correspondientes a los extremos, bien mediante el procedimiento conocido (68) de puntos y tangentes, bien en la forma siguiente:

Se determinan los puntos T_1 y T_2 en que las tangentes t_A y t_B cortan a la CM_1 y se halla el punto T_0 medio de $\overline{T_1T_2}$; se tiene así

$$\overline{OT_0} = 2 \overline{OM_1},$$

es decir, M_1 es el punto medio de $\overline{OT_0}$. Conocido M_1 puede emplearse el procedimiento anterior consistente en llevar un segmento $\overline{OM_0} = 2/3 \overline{OM_1}$. Pero puede también determinarse directamente el punto M_0 , que da la ordenada media, notando que (*)

$$\overline{OM_0} = \frac{1}{3} \overline{OT_0}.$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO VII

I. — Obtención gráfica de líneas de influencia de desplazamientos

Datos. — Se da el sistema isostático constituido por un arco con tres articulaciones representado en la lámina XI; las dimensiones de sus barras y respectivos coeficientes de alargamiento se consignan en el cuadro N° 1 siguiente:

CUADRO N° 1

Barra i, j	$s_{i,j}$ m	$\Omega_{i,j}$ $m^2 \times 10^{-4}$	$e_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{E\Omega_{i,j}}$ $t^{-1} m \times 10^{-6}$	Barra i, j	$s_{i,j}$ m	$\Omega_{i,j}$ $m^2 \times 10^{-4}$	$e_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{E\Omega_{i,j}}$ $t^{-1} m \times 10^{-6}$
0-1; 17-18	8,52	178	2,39	4-5; 13-14	4,21	42,5	4,95
0-2; 16-18	6,35	185	1,72	4-6; 12-14	4,72	183	1,39
1-2; 16-17	3,87	42,5	4,55	5-6; 12-13	2,35	20	5,87
1-3; 15-17	4,65	53,5	4,34	5-7; 11-13	4,13	80	2,58
2-3; 15-16	6,08	66	4,61	6-7; 11-12	3,00	21,7	6,91
2-4; 14-16	5,47	212	1,29	6-8; 10-12	4,15	187	1,11
3-4; 14-15	2,85	32	4,45	7-8; 10-11	2,25	52,5	2,14
3-5; 13-15	4,35	118	1,84	7-9; 9-11	4,00	137	1,46
				8-9; 9-10	2,43	122	0,996

Las cargas se transmiten al arco mediante el puente superior $MN... ST$.
Se pide resolver los siguientes problemas:

(*) La demostración de estas propiedades referentes a las parábolas cúbicas puede verse en MAURICE D'OCAGNE, *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique*, tomo II, pág. 205.

1. — Trazar la línea de influencia de la rotación θ_{8-9} de la barra 6-8, para cargas verticales que actúan sobre el tablero superior.

De acuerdo a lo establecido, sobre la chapa *S* vinculada a los nudos 6 y 8 del sistema en la forma que indica la lámina, debemos aplicar como esfuerzo auxiliar una cupla $U = 1 \text{ tm}$, y la elástica vertical de la deformación que la misma produzca constituirá la línea de influencia pedida.

Dicha elástica la hemos obtenido en la lámina mediante el auxilio de un diagrama de Williot-Mohr. Para ello, previo cálculo de las reacciones que la cupla $U = 1 \text{ tm}$ origina en las articulaciones *A* y *C*, se ha hallado, por un diagrama de Cremona, que, por simplificación, no se ha trazado en la lámina, las tensiones $T_{i,j}$ en las barras del sistema. Estas tensiones se dan en el cuadro N° 2, conjuntamente con los alargamientos $\Delta s_{i,j}$ que originan en las barras del reticulado.

CUADRO N° 2

Barra <i>i,j</i>	$\epsilon_{i,j}$ $t^{-1}m \times 10^{-6}$	$T_{i,j}$ t.	$\Delta s_{i,j} =$ $= \epsilon_{i,j} T_{i,j}$ $m \times 10^{-5}$	Barra <i>i,j</i>	$\epsilon_{i,j}$ $t^{-1}m \times 10^{-6}$	$T_{i,j}$ t.	$\Delta s_{i,j} =$ $= \epsilon_{i,j} T_{i,j}$ $m \times 10^{-5}$
0-1	2,39	+ 0,108	+ 0,258	9-10	0,996	- 0,0517	- 0,0515
0-2	1,72	- 0,100	- 0,172	9-11	1,46	+ 0,1070	+ 0,0102
1-2	4,55	- 0,0767	- 0,349	10-11	2,14	+ 0,0192	+ 0,0411
1-3	4,34	+ 0,0750	+ 0,325	10-12	1,11	- 0,0667	- 0,0734
2-3	4,61	+ 0,130	+ 0,599	11-12	6,91	- 0,0250	- 0,173
2-4	1,29	- 0,197	- 0,254	11-13	2,58	+ 0,0417	+ 0,107
3-4	4,45	- 0,117	- 0,521	12-13	5,87	- 0,00834	- 0,0489
3-5	1,84	+ 0,206	+ 0,379	12-14	1,29	- 0,0817	- 0,105
4-5	4,95	+ 0,152	+ 0,752	13-14	4,95	—	—
4-6	1,29	- 0,352	- 0,454	13-15	1,84	+ 0,0364	+ 0,0670
5-6	5,87	- 0,193	- 1,13	14-15	4,45	- 0,0167	- 0,0743
5-7	2,58	+ 0,442	+ 1,14	14-16	1,29	- 0,0791	- 0,102
6-7	6,91	- 0,356	- 2,46	15-16	4,61	+ 0,0187	+ 0,0862
6-8	1,11	- 0,163	- 0,181	15-17	4,34	+ 0,0175	+ 0,0759
7-8	2,14	+ 0,312	+ 0,668	16-17	4,55	- 0,0177	- 0,0805
7-9	1,46	- 0,0850	- 0,124	16-18	1,72	- 0,0667	- 0,115
8-9	0,996	+ 0,0620	+ 0,0617	17-18	2,39	+ 0,0250	+ 0,0597

Con estos elementos se ha construído un Williot de polo *p*. Para la chapa izquierda del arco, se ha supuesto fijos el punto *B* y la dirección de la barra 7-9; para la chapa de la derecha, se ha tomado fijos el mismo punto *B* y la dirección de la barra 9-11. En la lámina se ha dejado la construcción del diagrama de Williot-Mohr de la chapa izquierda; para la chapa derecha se han marcado únicamente los puntos $9w, 11w, 13w, 15w, 17w$ y $18w \equiv Cw$, correspondientes a los nudos de cordón superior, a fin de no complicar la figura.

El diagrama de Williot-Mohr, así obtenido, no corresponde a las condiciones de vínculo del sistema y para llevarlo a las mismas, sabemos, según (285), que debemos construir un nuevo Williot, correspondiente a un desplazamiento de la cadena cinemática de dos chapas *AB* y *BC* consideradas como rígidas y articuladas en *B*, dando los vectores que van de los puntos de este nuevo Williot a los del primitivo, los desplazamientos efectivos originados por la deformación del sistema en sus condiciones de vínculo. Según esto, los puntos *A'w* y *C'w* del nuevo Williot deberán ser congruentes con *Aw* y *Cw*, ya que los puntos *A* y *C*, por las condiciones de sustentación, no pueden desplazarse. Por otra parte, en el Williot del desplazamiento de la chapa izquierda, considerada como rígida, a la recta *AB* le corresponderá una perpendicular *A'w B'w* que pasa por *Aw* y, análogamente, considerando la chapa de la derecha, a la recta *BC* le corresponderá otra perpendicular *B'w C'w* que pasa por *C'w*. El punto *B'w* de intersección de estas dos perpendiculares nos da, pues, el correspondiente, en el nuevo Williot, al *B* del sistema; el desplazamiento resultante de la articulación intermedia *B* está dado, en consecuencia, por el vector *B'w Bw*.

Como hemos construído el diagrama de Williot-Mohr a los solos efectos de obtener la elástica vertical del sistema, no nos interesa completar la construcción de Williot correspondiente a este segundo desplazamiento cinemático requerido para llevarlo a las condiciones de vínculo, bastándonos con los puntos *A'w B'w* y *C'w* en base a los cuales podemos obtener los correspondientes de la elástica; estos últimos nos determinarán las rectas que constituyen las elásticas verticales de las chapas para dicho desplazamiento cine-

mático, rectas que, por otra parte, serán los ejes de referencia de la elástica buscada del sistema dado en sus efectivas condiciones de vínculo.

Esta elástica la hemos trazado referida a un único eje $A'C'$. Para ello, ha sido necesario proyectar los puntos de Williot de manera que los correspondientes a $A'w$, $B'w$ y $C'w$ caigan, respectivamente, en A' , B' y C' . Hemos procedido en la forma siguiente:

Hemos proyectado horizontalmente en $A^* \equiv 0^*, 1^*, 3^*, 5^*, 7^*, 9^* \equiv B^*$ y B'^* los puntos Aw , $1w$, $3w$, $5w$, $7w$, $9w$ y $B'w$ correspondientes a los nudos del cordón superior de la chapa izquierda; los segmentos así obtenidos dan las proyecciones verticales de los desplazamientos relativos entre los respectivos puntos de dicha chapa. Análogamente, hemos proyectado en B'^* , B^* , 11^* , 13^* , 15^* , 17^* y C^* los puntos $B'w$, Bw , $11w$, $13w$, $15w$, $17w$ y Cw correspondientes a los nudos superiores de la chapa derecha. Hemos llevado, luego, sobre las verticales de A y C , respectivamente, las dos series de segmentos así obtenidos, de tal manera que los puntos A^{**} y C^{**} , correspondientes a los A^* y C^* , coincidan, respectivamente, con los A' y C' del eje $A'C'$ adoptados para la elástica. Hemos unido, luego, el punto B'^{***} correspondiente del B'^* con B' y proyectado los puntos A^{**} , 1^{**} , 3^{**} , 5^{**} , 7^{**} y 9^{**} paralelamente a $B'^{***}B'$ hasta cortar respectivamente a las verticales de A , 1 , 3 , 5 , 7 y 9 en los puntos A' , $1e$, $3e$, $5e$, $7e$ y $9e$, que nos dan los puntos de la elástica del cordón superior de la chapa izquierda, referida al eje $A'C'$. En igual forma, hemos unido el punto B'^{***} correspondiente al B'^* con B' y proyectado los puntos 9^{**} , 11^{**} , 13^{**} , 15^{**} , 17^{**} y C^{**} paralelamente a $B'^{***}B'$ hasta cortar, respectivamente, a las verticales de 9 , 11 , 13 , 15 , 17 y C , obteniendo los puntos $9e$, $11e$, $13e$, $15e$, $17e$ y C' de la elástica del cordón superior de la chapa derecha, referida al mismo eje $A'C'$.

El polígono $A'1e3e...9e11e...17eC'$ referido al eje $A'C'$ da, por consiguiente, la elástica del cordón superior del arco correspondiente a la deformación originada por la cupla $U = 1 \text{ tm}$, en la misma escala

$$\frac{4 \times 10^{-5} \text{ m}}{\text{cm}}$$

del Williot.

Como las cargas actúan sobre el puente $MN...T$ nos interesa la elástica de este último, que podemos obtener fácilmente en función de la anterior. En primer lugar, no habiéndose deformado por la acción de la cupla $U = 1 \text{ tm}$ las chapas MN , $NP...$ que lo constituyen, sus elásticas verticales serán rectas y, en segundo, como tampoco se han deformado las columnas $1N$, $5P...$, los desplazamientos verticales de los puntos N , $P...$ serán respectivamente iguales a los de los nudos 1 , 5 , $9...$, del reticulado, es decir, se tendrá $Ne \equiv 1e$, $Pe \equiv 5e...$ Además, por las condiciones de vínculo, los puntos M y T no se desplazan verticalmente; en la elástica vertical les corresponderán, por consiguiente, los puntos M' y T' del eje $A'C'$. El polígono $M'NePeQeReSeT'$ referido al eje $M'T'$ como indica el rayado de la lámina, constituye, pues, en la escala

$$\frac{4 \times 10^{-5} \text{ m}}{\text{cm}},$$

la elástica vertical de los desplazamientos del puente superior originados por el esfuerzo auxiliar U , y por tanto, la línea de influencia buscada de la rotación de la barra 6-8 en la escala

$$\frac{4 \times 10^{-5} \text{ m}^2}{\text{cm } U} = \frac{4 \times 11^{-5} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}},$$

En cuanto al signo de esta línea de influencia, es positivo abajo del eje, como indica la lámina, ya que se ha utilizado un esfuerzo auxiliar U también positivo.

2. — *Calcular la intensidad de la rotación θ de la barra 6-8 originada por una carga permanente uniformemente repartida, $g = 1,5 \text{ tm}^{-1}$ que actúa sobre el puente superior.*

Medida con un planímetro el área del diagrama rayado que constituye la línea de influencia, se ha obtenido $S = 0,394 \text{ cm}^2$. Como, por otra parte, la longitud en centímetros entre $M'T'$ es $M'T' = 12 \text{ cm}$, la ordenada media total de la línea de influencia es

$$v_{med} = \frac{0,394 \text{ cm}^2}{12 \text{ cm}} = 0,0328 \text{ cm}.$$

La carga total que actúa sobre el puente es

$$G = gl_1 = 1,5 \text{ tm}^{-1} \times 48,0 \text{ m} = 72,0 \text{ t},$$

y, por consiguiente, la rotación por ella originada,

$$\theta = Gv_{med} \frac{4 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = 72 \text{ t} \times 0,0328 \text{ cm} \cdot \frac{4 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = 9,43 \times 10^{-5}.$$

3. — Calcular la intensidad de las rotaciones máxima y mínima (máxima negativa) originadas por una carga accidental $p = 7,6 \text{ tm}^{-1}$.

La máxima rotación positiva tendrá lugar cuando la carga actúe sobre la parte $L' T'$ de la línea de influencia, cuya área, medida directamente en centímetros en la figura, es $S' = 3,59 \text{ cm}^2$, y a la que, siendo $\overline{L' T'} = 7 \text{ cm}$, también leída en centímetros en la figura, corresponde una ordenada media

$$v'_{med} = \frac{3,59 \text{ cm}^2}{7 \text{ cm}} = 0,513 \text{ cm.}$$

Análogamente, la máxima rotación negativa tendrá lugar cuando la carga actúe solamente sobre la parte $M' L'$ de la línea de influencia, cuya área es, directamente leída en centímetros en la figura, $S'' = -3,2 \text{ cm}^2$. Como, además, la longitud en centímetros en la figura, es 5 cm , la ordenada media correspondiente a esta parte negativa es

$$v''_{med} = -\frac{3,2 \text{ cm}^2}{5 \text{ cm}} = -0,640 \text{ cm.}$$

Las partes $x_1 = L' T'$ y $x_2 = M' L'$ son, expresadas en metros, respectivamente, $x_1 = 28 \text{ m}$ y $x_2 = 20 \text{ m}$, y las cargas accidentales que a las mismas corresponden

$$G' = px_1 = 7,6 \cdot 28 = 215 \text{ t}$$

y

$$G'' = px_2 = 7,6 \cdot 20 = 152 \text{ t.}$$

Por consiguiente, las rotaciones máxima y mínima pedidas, son

$$\theta_{max} = G' v'_{med} \frac{4 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = 439 \times 10^{-5}$$

y

$$\theta_{min} = G'' v''_{med} \frac{4 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = 390 \times 10^{-5}.$$

4. — Calcular la rotación θ originada por la carga trapezoidal representada en la lámina.

Dividida dicha carga en 6 fajas de igual ancho $\lambda = 4 \text{ m}$, se ha calculado las cargas P_1, P_2, \dots, P_6 que les corresponden; se ha hallado, además, como indica la lámina, las rectas de acción de dichas cargas que pasan por los centros de gravedad de los trapecios respectivos. En el cuadro N° 3 se consignan las inten-

CUADRO N° 3

i	P_i t	v_i (cm) cm	$P_i v_i$ (cm) t cm
1	20,0	-0,607	-12,1
2	18,8	-1,16	-21,7
3	17,5	-0,587	-10,3
4	16,2	+0,725	+11,7
5	14,8	+0,200	+17,7
6	13,6	+0,725	+9,85
$\sum_{i=1}^6 P_i v_i \text{ (cm)} = -4,85 \text{ t cm}$			

sidades de las cargas P_i ; así como también, las ordenadas v_i (cm) directamente leídas en centímetros y con su respectivo signo, que les corresponden en la línea de influencia de la rotación de la barra 6-8. En el mismo cuadro se calcula los productos $P_i v_i$ (cm) y su suma resulta

$$\sum_{i=1}^6 P_i v_i \text{ (cm)} = -4,85 \text{ t cm.}$$

Por consiguiente, la rotación buscada, que se obtendrá multiplicando esta suma por la escala de la línea de influencia, es

$$\theta = \sum_{i=1}^6 P_i v_i = \sum_{i=1}^6 P_i v_i (\text{cm}) \frac{4 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1}}{\text{cm.}} = -4,85 \text{ t. cm} \frac{4 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1}}{\text{cm.}} = -19,4 \times 10^{-5}$$

5. — Trazar la línea de influencia de la variación de distancia δ_{1-15} entre los nudos 1 y 15, para cargas verticales que actúen sobre el puente superior.

Dicha línea de influencia estará dada por la elástica vertical de la deformación originada por el esfuerzo auxiliar U correspondiente a la variación de distancia entre los nudos 1 y 15 de que se trata, esfuerzo auxiliar que está constituido por un par de fuerzas opuestas aplicadas en los mismos. Se ha adoptado las fuerzas $U = 1 \text{ t}$ representadas en la lámina, que corresponden, según lo establecido en (523), a un esfuerzo auxiliar negativo (ya que tienen la dirección de un acortamiento de distancia o variación negativa).

Para hallar la elástica vertical de la deformación originada por este par de fuerzas $U = 1 \text{ t}$ se ha procedido exactamente como en el problema (1).

Calculadas las reacciones que las fuerzas U originan en las articulaciones A y C , se ha hallado las tensiones $T_{i,j}$ en las barras, por un diagrama de Cremona que no se ha trazado en la lámina, para no complicarla. Dichas tensiones se consignan en el cuadro N° 4, en el que, además, se calculan los alargamientos $\Delta s_{i,j}$ que originan en las barras del sistema.

CUADRO N° 4

Barra i, j	$\epsilon_{i,j}$ $\text{t}^{-1} \text{ m} \times 10^{-5}$	$T_{i,j}$ t	$\Delta s_{i,j} = \epsilon_{i,j} T_{i,j}$ $\text{m} \times 10^{-5}$	Barra i, j	$\epsilon_{i,j}$ $\text{t}^{-1} \text{ m} \times 10^{-5}$	$T_{i,j}$ t	$\Delta s_{i,j} = \epsilon_{i,j} T_{i,j}$ $\text{m} \times 10^{-5}$
0-1	2,39	-0,550	-1,326	9-10	0,966	+0,310	+0,308
0-2	1,72	+0,685	+1,18	9-11	1,46	-0,953	-1,39
1-2	4,55	-0,0500	-0,227	10-11	2,14	-0,130	-0,278
1-3	4,34	-1,28	-5,55	10-12	1,11	+0,388	+0,431
2-3	4,61	+0,325	+1,50	11-12	6,91	+0,415	+2,87
2-4	1,29	+0,395	+0,510	11-13	2,58	-1,38	-3,56
3-4	4,45	-0,0600	-0,267	12-13	5,87	-0,0250	-0,147
3-5	1,84	-1,03	-1,90	12-14	1,29	+0,785	+1,01
4-5	4,95	+0,270	+1,34	13-14	4,95	+0,380	+1,88
4-6	1,29	+0,142	+0,183	13-15	1,84	-1,68	-3,09
5-6	5,87	-0,0750	-0,441	14-15	4,45	+0,0260	+0,116
5-7	2,58	-0,780	-2,01	14-16	1,29	+1,13	+1,46
6-7	6,91	+0,15	+1,21	15-16	4,61	-0,607	-2,80
6-8	1,11	-0,0650	-0,0722	15-17	4,34	-0,385	-1,67
7-8	2,14	+0,0220	+0,0471	16-17	4,55	+0,392	+1,78
7-9	1,46	-0,660	-0,965	16-18	1,72	+0,685	+1,18
8-9	0,996	-0,0500	-0,0498	17-18	2,39	-0,550	-1,32

Con estos elementos se ha construido, en la escala

$$\frac{8 \times 10^{-5} \text{ m}}{\text{cm}}$$

un diagrama de Williot-Mohr de la deformación originada por el esfuerzo auxiliar U . Para la chapa izquierda se ha comenzado por suponer fijos el punto B y la dirección de la barra 7-9; para la chapa derecha se ha supuesto fijos el mismo punto B y la dirección de la barra 9-11. En la lámina se ha dejado completo el diagrama de Williot-Mohr correspondiente a la chapa izquierda, así obtenido; para la chapa derecha, a fin de no complicar la figura, se han marcado únicamente los puntos $9w, 11w, \dots, Cw$ que han resultado para el cordón superior.

Para llevar el Williot a las condiciones de sustentación del sistema y proyectarlo de modo a obtener la elástica correspondiente, se ha procedido en forma completamente igual a la del problema (1). Como se han guardado las mismas notaciones, valen para este caso literalmente las explicaciones allí dadas.

La línea $A' 1e 3e \dots 9e 11e \dots 17e C'$, referida al eje $A' C'$, representa, pues, en la escala

$$\frac{8 \times 10^{-5} \text{ m}}{\text{cm}}$$

del Williot, la elástica vertical del cordón superior de la deformación originada por el par de fuerzas opuestas U .

En función de las mismas se ha obtenido, como en el problema (1), la elástica vertical $M' Ne \dots Se T'$, del puente superior, rayado en la figura, elástica, que en la escala

$$\frac{8 \times 10^{-5} \text{ m}}{U \cdot \text{cm}} = \frac{8 \times 10^{-5} \text{ m}}{1 \text{ t} \cdot \text{cm}} = \frac{8 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1} \cdot \text{m}}{\text{cm}}$$

ha dado la línea de influencia buscada de la variación de distancia δ_{1-15} entre los nudos 1 y 15, para cargas que actúan sobre el puente superior.

En cuanto al signo, es negativo abajo del eje, como se ha marcado en la lámina, ya que se ha adoptado un esfuerzo auxiliar U negativo.

6. — *Calcular la variación de distancia δ_{1-15} originada por la carga trapezoidal representada en la lámina.*

CUADRO N° 5

P_i	P_i t	v_i (cm) cm	$P_i v_i$ (cm) t cm
1	20,0	— 0,050	— 7,00
2	18,8	+ 0,0950	+ 1,79
2	17,5	+ 0,950	+ 16,6
4	16,2	+ 2,25	+ 36,5
5	14,8	+ 1,85	+ 27,2
6	13,6	— 0,270	— 3,68

$$\sum_{i=1}^6 P_i v_i \text{ (cm)} = 71,4 \text{ t cm}$$

En el cuadro N° 5 se dan las seis fuerzas P_i en que se ha dividido la carga trapezoidal, así como las ordenadas v_i (cm) que, en centímetros, les corresponden en la línea de influencia. En el mismo cuadro se calculan los productos $P_i v_i$ (cm), resultando para su suma

$$\sum_{i=1}^6 P_i v_i \text{ (cm)} = 71,4 \text{ t cm.}$$

Por consiguiente, la variación de distancia originada por la carga trapezoidal es

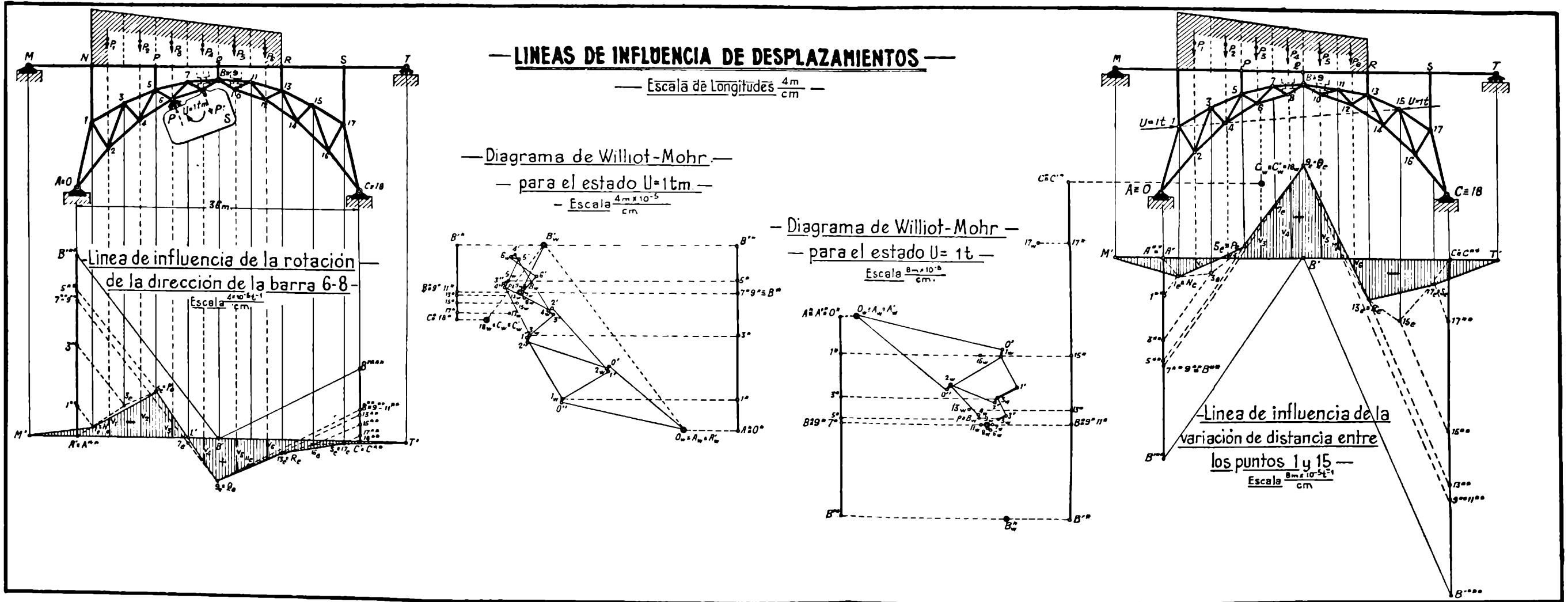
$$\delta_{1-15} = \sum_{i=1}^6 P_i v_i \text{ (cm)} \frac{8 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1} \text{ m}}{\text{cm}} = 71,4 \text{ t cm} \frac{8 \times 10^{-5} \text{ t}^{-1} \cdot \text{m}}{\text{cm}} = 571 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

II. — Obtención gráfica de líneas de influencia de desplazamientos de sistemas rectilíneos

Datos. — Se da la viga recta simplemente apoyada AB (Lám. XII), de luz $l = 8 \text{ m}$ y momento de inercia constante $I = 1,25 \times 10^{-4} \text{ m}^4$.

Se pide resolver los siguientes problemas:

RESOLUCION ESTATICA DE SISTEMAS PLANOS



1. — Hallar gráficamente la línea de influencia del desplazamiento vertical del punto M_1 , distante 2 m del apoyo izquierdo A .

El esfuerzo auxiliar correspondiente al desplazamiento pedido está constituido por una fuerza vertical U aplicada en M_1 . Haciendo actuar, pues, una $U = 1$ t, como indica la lámina, la elástica vertical de la deformación que ella origine en el sistema AB , nos dará la línea de influencia buscada.

Para trazar esta elástica necesitamos el diagrama de momentos flectores, $AM_1^*B_1$, que dicha fuerza $U = 1$ t produce en el sistema. Este diagrama, dibujado en la lámina en la escala

$$\frac{1 \text{ tm}}{\text{cm}}$$

queda determinado por el momento \mathcal{M}_1 en M_1 , de valor

$$\mathcal{M}_1 = R_B 6 \text{ m} = \frac{-1 \text{ t} \cdot 2 \text{ m}}{8 \text{ m}} \cdot 6 \text{ m} = -1,5 \text{ tm}.$$

Los momentos flectores son, además, negativos, porque se considera, a los efectos de trazar la elástica, los momentos de las fuerzas que quedan a la derecha.

A los dos triángulos de momentos $AM_1M_1^*$ y $M_1M_1^*B_1$, corresponden rotaciones totales, de intensidades

$$\theta_1 = \frac{\mathcal{M}_1 \cdot 2 \text{ m}}{2 EI} = \frac{1,5 \text{ tm} \times 2 \text{ m}}{2 \times 2000 \times 10^4 \text{ tm}^{-2} \times 1,25 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 6 \times 10^{-4}$$

y

$$\theta_2 = \frac{\mathcal{M}_1 \cdot 6 \text{ m}}{2 EI} = \frac{1,5 \text{ tm} \times 6 \text{ m}}{2 \times 2000 \times 10^4 \text{ tm}^{-2} \times 1,25 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 18 \times 10^{-4}$$

cuyas elaciones verticales, trazadas en la lámina, pasan por los centros de gravedad de los mismos.

Construido, en la escala

$$\frac{10 \times 10^{-4}}{\text{cm}}.$$

un polígono 0 1 2 de estas elaciones, se ha trazado, con polo O , el funicular $A'CD B'$ de las mismas, cuyos lados nos dan las tangentes en correspondencia a los puntos A , M_1 y B , de la elástica de la viga. El trazado de esta elástica se ha completado, en la forma conocida, por puntos y tangentes, utilizando los triángulos de momentos como diagramas de cargas. Finalmente, se la ha referido al eje $A'B'$ para llevarla a las condiciones de sustentación.

El diagrama $A'M_1B'$ así obtenido, referido al eje $A'B'$, constituye, pues, la elástica vertical de la deformación originada en la viga por la fuerza $U = 1$ t, en una escala igual al producto de la distancia polar $k = 2$ m por la escala adoptada para construir el polígono 0 1 2 de las elaciones, es decir, en la escala

$$\frac{10 \times 10^{-4}}{\text{cm}} \cdot 2 \text{ m} = \frac{2 \times 10^{-3} \text{ m}}{\text{cm}}.$$

Según lo establecido en (520), nos da, asimismo, la línea de influencia buscada del desplazamiento vertical α del punto M_1 , en la escala

$$\frac{2 \times 10^{-3} \text{ m}}{U \cdot \text{cm}} = \frac{2 \times 10^{-3} \text{ m t}^{-1}}{\text{cm}}$$

En cuanto al signo, habiéndose adoptado un esfuerzo auxiliar U positivo, es, según lo establecido en (522), positivo abajo del eje, como se ha marcado en la lámina.

2. — Hallar gráficamente la línea de influencia de la rotación relativa $\theta_{1,2}$ de la sección M_1 distante 2 m del apoyo A , respecto de la M_2 , distante 3 m del B .

El esfuerzo auxiliar correspondiente a la rotación relativa $\theta_{1,2}$ cuya línea de influencia se pide, está constituido por dos cuplas opuestas U aplicadas en chapas S_1 y S_2 , rígidamente ligadas a los elementos de fibra media M_1 y M_2 . Dándoles una intensidad absoluta $U = 1$ tm, como indica la lámina, el diagrama de momentos que producen en el sistema es el $M_2M_2^*M_1^*M_1$. Las reacciones en A y B_2 son, en efecto, nulas, ya que las dos cuplas U se equilibran entre sí, y, por consiguiente, el momento flector (de las fuerzas que quedan a la derecha) es nulo desde B hasta M_2 ; desde M_2 hasta M_1 es igual al valor constante de la cupla $U = -1$ tm que queda a su derecha, y, finalmente, desde M_1 hasta A es otra vez nulo.

La rotación total de la parte M_1M_2 de la viga es

$$\theta = \frac{U \cdot 3 \text{ m}}{EI} = \frac{-1 \text{ tm} \times 3 \text{ m}}{2 \times 2000 \times 10^4 \text{ tm}^{-2} \times 1,25 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = -12 \times 10^{-4},$$

y el desplazamiento que su elación vertical θ produce en el punto B , siendo $x = 4,5$ m la distancia entre su recta de acción y este punto, es igual a

$$\theta \cdot x = -12 \times 10^{-4} \times 4,50 \text{ m} = -54 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Para obtener, con estos elementos, la elástica vertical de la viga, referida al eje horizontal $A'B'$, se ha procedido como sigue:

En la escala

$$\frac{20 \times 10^{-4} \text{ m}}{\text{cm}}$$

adoptada para la elástica, se ha llevado un segmento $B''B'$ representativo de $\theta \cdot x$ y se ha unido, luego, B'' con A' y hallado el punto C en que esta recta corta a la θ , para unirlo, finalmente, con el B' . Las rectas $A'C$ y CB' constituyen un funicular de la elación θ , y nos dan las tangentes correspondientes a los puntos M_1 y M_2 de la elástica buscada. Entre estos puntos la elástica, consistente en una parábola de segundo grado, se ha trazado por puntos y tangentes, utilizando el diagrama de momentos como diagrama de cargas. Finalmente, entre M_1 y A , y M_2 y B , la elástica se prolonga según las tangentes $A'M_{1e}$ y $M_{2e}B'$, en M_{1e} y M_{2e} , respectivamente.

El diagrama $A'M_{1e}M_{2e}B'$ así obtenido, referido al eje $A'B'$, constituye, pues, la elástica vertical de la deformación que en el sistema originan las cuplas U , y, por tanto, también, en la escala

$$\frac{20 \times 10^{-4} \text{ m}}{U \text{ cm}} = \frac{20 \times 10^{-4} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}}$$

la línea de influencia pedida, de la rotación relativa $\theta_{1,2}$ de la sección M_1 respecto de la M_2 .

En cuanto al signo de esta línea de influencia, es positivo abajo del eje, como se ha marcado en la lámina, ya que se ha adoptado, para el esfuerzo auxiliar, la cupla positiva sobre la chapa S_1 cuya rotación relativa se busca con respecto a la S_2 .

III. — Obtención analítica de líneas de influencia de desplazamientos

Datos. — Se da la viga recta, simplemente apoyada, de luz l y el momento de inercia constante I , representada en la figura 300. Se pide resolver los siguientes problemas:

1. — Hallar la ecuación de la línea de influencia de la rotación θ de la sección xx , correspondiente al punto M distante v_1 del apoyo izquierdo A .

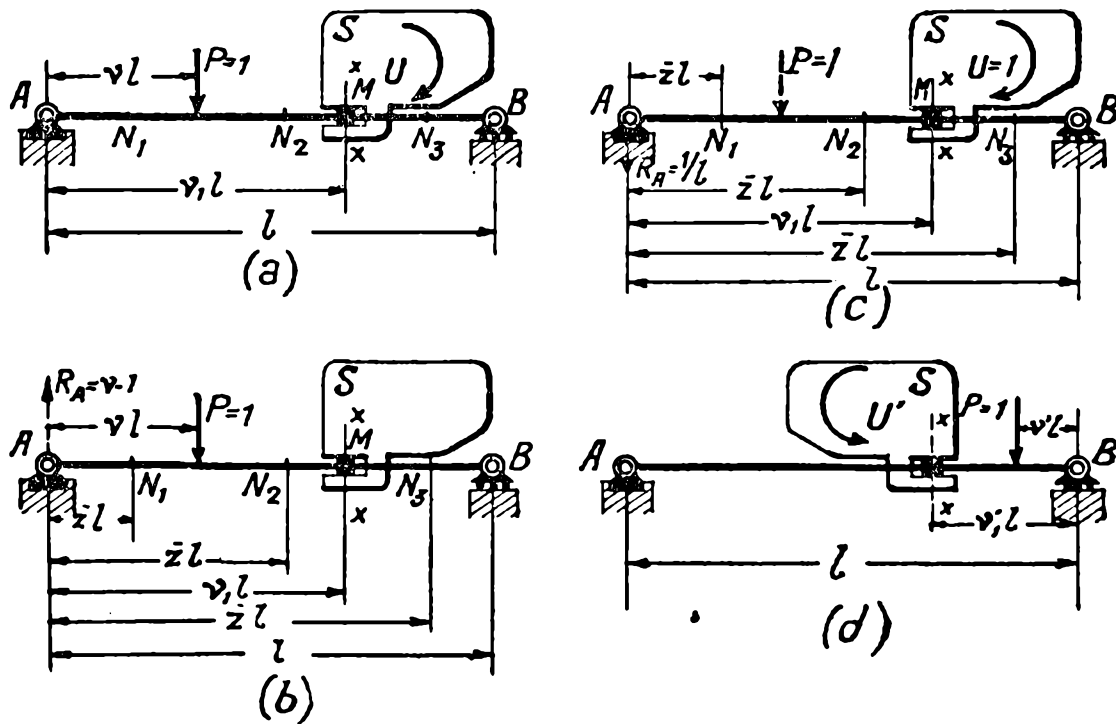


FIG. 300

El esfuerzo auxiliar U correspondiente a este desplazamiento está dado por una cupla aplicada en una chapa S ligada rígidamente al elemento de fibra media de la sección xx . Haciendo actuar, pues, una fuerza $P = 1$ a la distancia vl de A y una cupla de intensidad variable U sobre la chapa rígida S (fig. 300 a),

la ordenada v de la línea de influencia pedida, según el teorema de Castigliano y lo establecido en (326), estará dada por la derivada respecto de \bar{U} , para $U = 0$, del trabajo de deformación originado por las mismas.

Como la expresión del trabajo de deformación será distinta según que la fuerza $P = 1$ actúe a la izquierda o a la derecha de la sección xx , también será distinta la ecuación de la línea de influencia.

Comenzaremos por hallar la ecuación de la parte AM situada a la izquierda de xx . Según dijimos en (530), la derivada del trabajo de deformación para el estado de cargas de la figura 300 a , correspondiente a un valor de $U = 0$, es decir, la línea de influencia, queda dada directamente por la expresión

$$v = \sum_i \int \overline{M}_{0,i} \overline{M}'_i \rho_i' ds_i, \quad [a]$$

en la que $\overline{M}_{0,i}$ representa los momentos flectores que en los puntos corridos N_i de la viga origina la fuerza $P = 1$ (fig. 300 b) y \overline{M}'_i los momentos flectores en los mismos puntos debidos a la fuerza $U = 1$ (fig. 300 c). Las expresiones de estos momentos flectores varían según que se consideren puntos N_1 , N_2 o N_3 , respectivamente comprendidos entre A y el punto de aplicación de la fuerza $P = 1$ (de $z = 0$ a $z = v$), entre esta fuerza y la sección xx (de $z = v$ a $z = v_1$) y entre esta sección y el apoyo B (de $z = v_1$ a $z = 1$). La sumatoria de la [a] se extiende por tanto a tres integrales, y, dejando constancia en los límites y observando que

$$\rho_i' = \frac{1}{EI} \quad \text{y} \quad ds_i = l \bar{dz},$$

se escribe

$$v = \frac{l}{EI} \left[\int_0^v \overline{M}_{0,1} \overline{M}'_1 \bar{dz} + \int_v^{v_1} \overline{M}_{0,2} \overline{M}'_2 \bar{dz} + \int_{v_1}^1 \overline{M}_{0,3} \overline{M}'_3 \bar{dz} \right]. \quad [b]$$

De la figura 300 b se deduce que

$$\overline{M}_{0,1} = (v-1) \bar{z} l; \quad \overline{M}_{0,2} = \overline{M}_{0,3} = (v-1) \bar{z} l + l(\bar{z}-v) = l v (\bar{z}-1).$$

Análogamente de la figura 300 c se deduce que

$$\overline{M}'_1 = \overline{M}'_2 = \bar{z} \quad \overline{M}'_3 = 1 - \bar{z}.$$

Sustituyendo en la [b] se tiene, por consiguiente,

$$v = \frac{l}{EI} \left[\int_0^v (v-1) \bar{z}^2 l \bar{dz} + \int_v^{v_1} l v (\bar{z}-1) \bar{z} \bar{dz} + \int_{v_1}^1 l v (\bar{z}-1)^2 \bar{dz} \right],$$

que, integrando y simplificando, da

$$v = \frac{l^2}{6 EI} [v^3 + (3 v_1^2 - 6 v_1 + 2) v], \quad [c]$$

que nos proporciona la ecuación buscada de la línea de influencia de la rotación θ de la sección xx para cargas que actúan a la izquierda de la misma.

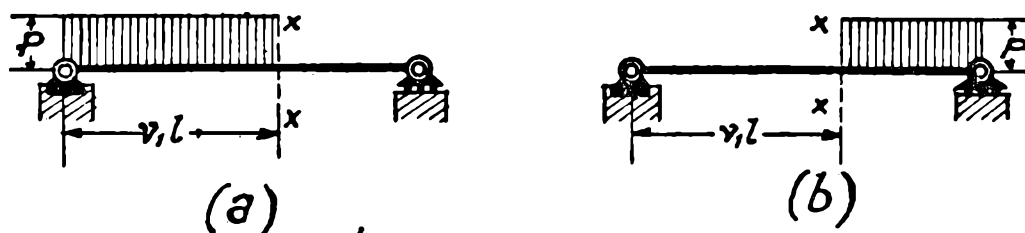


FIG. 301

Para obtener la línea de influencia para cargas que actúan a la derecha de xx , observemos que si referimos la fuerza $P = 1$ y la sección xx al apoyo B , mediante sus distancias $v' l$ y $v_1' l$, y si, al mismo tiempo, adoptamos un esfuerzo auxiliar U' de signo contrario al del caso anterior (fig. 300 d), el estado de cargas es completamente igual al de este caso (fig. 300 a), y la ordenada v' de la línea de influencia quedaría dada por la misma [c] con sólo cambiar v y v_1 por v' y v_1' . Pero esta línea de influencia sería la de la rotación θ de la chapa S contada positivamente en el sentido de la cupla U' . Para obtenerla en el mismo sentido que

anteriormente, habría, pues, que cambiar, además, el signo, resultando, por consiguiente, la línea de influencia para cargas que actúan a la derecha de xx , dadas por la expresión

$$v' = \frac{-l^2}{6 EI} [v'^3 + (3 v_1'^2 - 6 v_1' + 2) v'] \quad [d]$$

Si para esta última quiere adoptarse también las abscisas v y v_1 , contadas a partir de A , bastará observar que

$$v' = 1 - v \text{ y } v_1' = 1 - v_1$$

y sustituir en la misma, con lo que, luego de simplificar, toma la forma

$$v' = \frac{l^2}{6 EI} [v^3 - 3 v^2 + (3 v_1^2 + 2) v - 3 v_1^2] \quad [e]$$

2. — Hallar la expresión que da a la rotación θ de la sección xx para una carga uniformemente repartida y extendida sobre toda la viga AB .

Escrita en la forma

$$v = K_1 (A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3)$$

la [c] correspondiente a la línea de influencia para las cargas situadas a la izquierda de xx , nos da

$$K_1 = \frac{l^2}{6 EI} \quad A_0 = 0; \quad A_1 = 3 v_1^2 - 6 v_1 + 2; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = 1.$$

Para la carga uniforme situada a la izquierda de xx el valor de la rotación θ' se obtiene con la fórmula [b] del cuadro N° 4 de (537), es decir, es

$$\theta' = K_1 pl \left(A_0 v_1 + \frac{A_1}{2} v_1^2 + \frac{A_2}{3} v_1^3 + \frac{A_3}{4} v_1^4 \right),$$

que sustituyendo los valores anteriores, nos da

$$\theta' = \frac{l^2}{6 EI} pl \left(\frac{3 v_1^2 - 6 v_1 + 2}{2} v_1^2 + \frac{1}{4} v_1^4 \right) = \frac{pl^3}{24 EI} (7 v_1^4 - 12 v_1^3 + 4 v_1^2).$$

Para la línea de influencia [e] correspondiente a cargas que actúan a la derecha de xx se tiene

$$K_1 = \frac{l^2}{6 EI}; \quad A_0 = -3 v_1^2; \quad A_1 = 3 v_1^2 + 2; \quad A_2 = -3; \quad A_3 = 1,$$

y, correspondiendo a las cargas uniformes extendidas a la derecha de xx la fórmula [c] del cuadro N° 4 de (537), el valor θ'' de la rotación debida a estas últimas, será

$$\theta'' = \frac{l^2}{6 EI} pl \left[-3 v_1^2 (1 - v_1) + \frac{3 v_1^2 + 2}{2} (1 - v_1^3) - \frac{3}{3} (1 - v_1^3) + \frac{1}{4} (1 - v_1^4) \right] = \frac{pl^3}{24 EI} (-7 v_1^4 + 16 v_1^3 - 10 v_1^2 + 1)$$

Por consiguiente, la rotación total debida a la carga uniformemente repartida extendida sobre toda la viga es

$$\theta = \theta' + \theta'' = \frac{pl^3}{24 EI} (4 v_1^3 - 6 v_1^2 + 1) \quad [a]$$

3. — Hallar la ecuación de la línea de influencia de la rotación del extremo B de la viga.

Esta ecuación se obtiene haciendo $v_1 = 1$ en la [c] del problema (1) que da la línea de influencia general para cargas que actúan a la izquierda de xx . Atribuyendo, pues, este valor v_1 , resulta

$$v = \frac{l^2}{6 EI} (v^3 - v), \quad [a]$$

que nos resuelve el problema.

4. — Hallar la ecuación de la línea de influencia de la rotación de la sección situada en la mitad de la luz AB de la viga.

Para cargas que actúan en la mitad izquierda de la viga, esta ecuación se obtiene haciendo $v_1 = \frac{1}{2}$ en la [c] del problema (1) y es

$$v = \frac{l^3}{6 EI} \left(v^3 - \frac{v}{4} \right)$$

Para cargas que actúan en la mitad derecha de la viga, la ecuación se obtiene, análogamente, haciendo $v_1 = \frac{1}{2}$ en la [e] del problema (1) y resulta

$$v' = \frac{l^3}{6 EI} \left[v^3 - 3 v^2 + \frac{1}{4} v - \frac{3}{4} \right].$$

Por otra parte, en este caso, esta mitad derecha de la línea de influencia es simétrica con la mitad izquierda y de signo contrario.

5. — Hallar las expresiones que dan la rotación total de la sección extrema B y de la sección media, debidas a una carga uniformemente repartida p extendida en toda la viga.

Estas expresiones las podríamos obtener mediante las líneas de influencia deducidas en los dos problemas anteriores. Pero directamente resultan de la [a] del problema (2), haciendo en ella respectivamente $v_1 = 1$ y $v_1 = \frac{1}{2}$.

La rotación total de la sección extrema B , resulta así,

$$\theta = \frac{pl^3}{24 EI} (4 - 6 + 1) = - \frac{pl^3}{24 EI}. \quad [a]$$

Análogamente, la rotación total de la sección media es

$$\theta = \frac{pl^3}{24 EI} \left(\frac{4}{8} - \frac{6}{4} + 1 \right) = 0, \quad [b]$$

nula, como debe ser, dada la simetría del sistema y de las cargas.

6. — Aplicar las ecuaciones arriba obtenidas a la viga de luz $l = 8$ m y momento de inercia $I = 1,25 \times 10^{-4}$ m⁴, representada en la lámina XII, calculando y construyendo las líneas de influencia de las rotaciones de las secciones M , C y B , marcadas en la mitad derecha de la lámina.

Sustituyendo en las [c] y [e] del problema (1) los valores l e I y siendo

$$E = 2000 \times 10^4 \text{ tm}^{-2}$$

el módulo de elasticidad que corresponde a la viga, las ecuaciones generales de la línea de influencia de la rotación de una sección distante $v_1 l$ del apoyo A , son, para cargas que actúan a la izquierda de la sección,

$$\begin{aligned} v &= \frac{8^3}{6 \times 2000 \times 10^4 \times 1,25 \times 10^{-4}} [v^3 + (3 v_1^2 - 6 v_1 + 2) v] t^{-1} = \\ &= 427 [v^3 + (3 v_1^2 - 6 v_1 + 2) v] 10^{-6} t^{-1} \end{aligned} \quad [a]$$

y, para cargas que actúan a la derecha,

$$v' = 427 [v^3 - 3 v^2 + (3 v_1^2 + 2) v - 3 v_1^3] 10^{-6} t^{-1}.$$

En el caso particular de la sección M , siendo $v_1 = \frac{1}{4}$, se tiene

$$v = (427 v^3 + 294 v) 10^{-6} t^{-1}$$

y

$$v' = (427 v^3 - 1280 v^2 + 935 v - 80) 10^{-6} t^{-1}.$$

CUADRO N° 1

Ordenadas a la izquierda de M_1

v	$427 v^3$ $10^{-6} t^{-1}$	$294 v$ $10^{-6} t^{-1}$	v $10^{-6} t^{-1}$
0,1	+ 0,427	+ 29,4	+ 29,8
0,2	+ 3,42	+ 58,8	+ 62,2
0,25	+ 6,67	+ 73,5	+ 80,2

Ordenadas a la derecha de M_1

v	$427 v^3$ $10^{-6} t^{-1}$	$-1280 v^2$ $10^{-6} t^{-1}$	$934 v$ $10^{-6} t^{-1}$	-80 $10^{-6} t^{-1}$	v $10^{-6} t^{-1}$
0,25	6,67	— 80,0	234	— 80	+ 80,6
0,3	11,5	— 115	280	— 80	+ 96,5
0,4	27,3	— 205	374	— 80	+ 116
0,5	53,5	— 320	468	— 80	+ 121
0,6	92,2	— 461	561	— 80	+ 112
0,7	146	— 628	655	— 80	+ 93,0
0,8	218	— 820	748	— 80	+ 66,0
0,9	311	— 1040	842	— 80	+ 33,0
1,0	427	— 1280	934	— 80	+ 0,00

En el cuadro N° 1 adjunto se calculan las ordenadas v para los puntos correspondientes a v igual a 0,1 y 0,2 y 0,25, y v' para los valores 0,3, 0,4, 0,5, ..., 0,9 y 1 de v . Con los valores así obtenidos se ha trazado en la lámina, en la escala

$$\frac{10^{-6} t^{-1}}{\text{cm}}$$

la línea de influencia pedida de la rotación de la sección M .

CUADRO N° 2

v	$427 v^3$ $10^{-6} t^{-1}$	$-107 v$ $10^{-6} t^{-1}$	v $10^{-6} t^{-1}$
0,1	0,427	— 10,7	— 10,4
0,2	3,42	— 21,4	— 18,0
0,3	11,5	— 32,1	— 20,6
0,4	27,3	— 42,8	— 15,5
0,5	53,5	— 53,5	0

Análogamente, para la sección media C , haciendo $v_1 = \frac{1}{2}$ en la [a] anterior, se tiene

$$v = 427 \left[v^3 + \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{2} + 2 \right) v \right] 10^{-6} t^{-1} = (427 v^3 - 107 v) 10^{-6} t^{-1}.$$

En el cuadro N° 2 se calculan estas ordenadas para cinco posiciones equidistantes de la mitad izquierda de la viga. Las ordenadas para la mitad derecha se deducen por simetría. En la lámina se ha trazado la línea de influencia de la rotación de la sección *C*, utilizando las ordenadas así calculadas.

Finalmente, para la sección extrema *B*, haciendo en la [a] $v_1 = 1$, se obtiene

$$\theta = 427 [v^3 + (3 - 6 + 2) v] 10^{-5} t^{-1} = (427 v^3 - 427 v) 10^{-5} t^{-1}.$$

En el cuadro N° 3 se calculan las ordenadas de esta línea de influencia correspondientes a diez posiciones equidistantes, y en la lámina se ha trazado, mediante ellas, la línea de influencia pedida de la rotación de la sección extrema *B*.

CUADRO N° 3

v	$427 v^3$ $10^{-5} t^{-1}$	$-427 v$ $10^{-5} t^{-1}$	θ $10^{-5} t^{-1}$
0,1	0,427	— 42,7	— 42,3
0,2	3,42	— 85,4	— 82,0
0,3	11,5	— 128	— 116
0,4	27,3	— 171	— 144
0,5	53,5	— 213	— 160
0,6	92,2	— 256	— 164
0,7	146	— 299	— 153
0,8	212	— 341	— 123
0,9	311	— 384	— 73,0
1,0	427	— 427	0

7. — Calcular la rotación de la sección extrema *B* que en la viga anterior origina una carga uniformemente repartida en toda su extensión, de intensidad $p = 2 \text{ tm}^{-1}$.

Esta rotación se obtiene mediante la [a] del problema (5). Sustituyendo, pues, los valores correspondientes, resulta

$$\theta = \frac{pl^3}{24 EI} = \frac{2 \times 8^3}{24 \times 2000 \times 10^4 \times 1,25 \times 10^{-4}} = 171 \times 10^{-4}.$$

8. — Utilizar la ecuación de la línea de influencia de la sección extrema *B*, para construir a esta última gráficamente por puntos y tangentes.

Según lo establecido en (540), nos bastará determinar las tangentes de la parábola cúbica que constituye la línea de influencia en cuestión, en correspondencia a los puntos extremos *A* y *B*. Ante todo, de la ecuación [a] del problema (3) se deduce que las ordenadas de la línea de influencia son nulas para *A* y *B* (para $v = 0$ y $v = 1$). De la misma, diferenciando respecto de $\alpha = vl$, sale

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{l} \cdot \frac{dv}{dv} = \frac{l}{6 EI} (3 v^2 - 1),$$

que para $v = 0$ da

$$\text{tg } \alpha_A = - \frac{l}{6 EI}$$

y para $v = 1$,

$$\text{tg } \alpha_B = \frac{l}{3 EI}.$$

Sustituyendo valores se tiene

$$\text{tg } \alpha_A = - \frac{8}{6 \times 2000 \times 10^4 \times 1,25 \times 10^{-4}} = - 53,4 \times 10^{-5} t^{-1} m^{-1}$$

y

$$\text{tg } \alpha_B = \frac{8}{3 \times 2000 \times 10^4 \times 1,25 \times 10^{-4}} = 107 \times 10^{-5} t^{-1} m^{-1}.$$

En la lámina se ha trazado, referidas al eje A^*B^* , y en función de estos datos, las tangentes en A y B de la línea de influencia. Para ello a partir de A^* se ha llevado un segmento A^*A^{**} que, en la escala de longitudes en que está dibujada la viga, representa 1 m, y sobre A^{**} se ha medido una ordenada $A^{**}A^{***}$ que, en la escala

$$\frac{10^{-3} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}},$$

que será la de la línea de influencia, representa a $53,4 \times 10^{-3} \text{ t}^{-1}$. En forma análoga se ha procedido para la tangente en B , como ilustra la figura.

Prolongando las tangentes t_A y t_B hasta cortar las tercias en C y D se ha obtenido el lado intermedio CD del polígono de las tercias, que, referido a la recta A^*B^* que une los puntos de tangencia de las tangentes consideradas, nos da, según (268), un diagrama afín del de momentos flectores a utilizarse como diagrama de cargas. Pasando el lado intermedio CD por el punto A^* , el diagrama de cargas está constituido en este caso por el triángulo PA^*B^* . Obtenido este diagrama, se ha seguido el procedimiento conocido (263), para trazar por puntos y tangentes la elástica que constituye la línea de influencia. En la figura se ha dejado la construcción de la tangente y punto de tangencia correspondiente al N de la viga.

9. — Calcular la rotación total de la sección B debida a una carga uniformemente repartida $p = 2 \text{ tm}^{-1}$, utilizando solamente las tangentes t_A y t_B , obtenidas en el problema anterior.

Según (542), prolongando estas tangentes hasta cortar en C_A y C_B la ordenada correspondiente al punto C medio de la luz de la viga y hallando el punto C_0 medio del segmento $C_A C_B$, se tiene que la ordenada media de la línea de influencia, leída directamente en centímetros en la lámina, es

$$v_{med} (\text{cm}) = \frac{1}{3} C' C_0 = \frac{1}{3} \times 3,2 \text{ cm} = 1,07 \text{ cm}.$$

Siendo la carga total que actúa sobre la viga,

$$P = 2 \text{ tm}^{-1} \cdot 8 \text{ m} = 16 \text{ t}$$

y

$$\frac{10^{-3} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}}$$

la escala de la línea de influencia, la rotación pedida, que dicha carga origina en la sección B , será

$$\theta = P \cdot v_{med} (\text{cm}) \frac{10^{-3} \text{ t}^{-1}}{\text{cm}} = 16 \times 1,07 \times 10^{-3} = 17,1 \times 10^{-3}$$

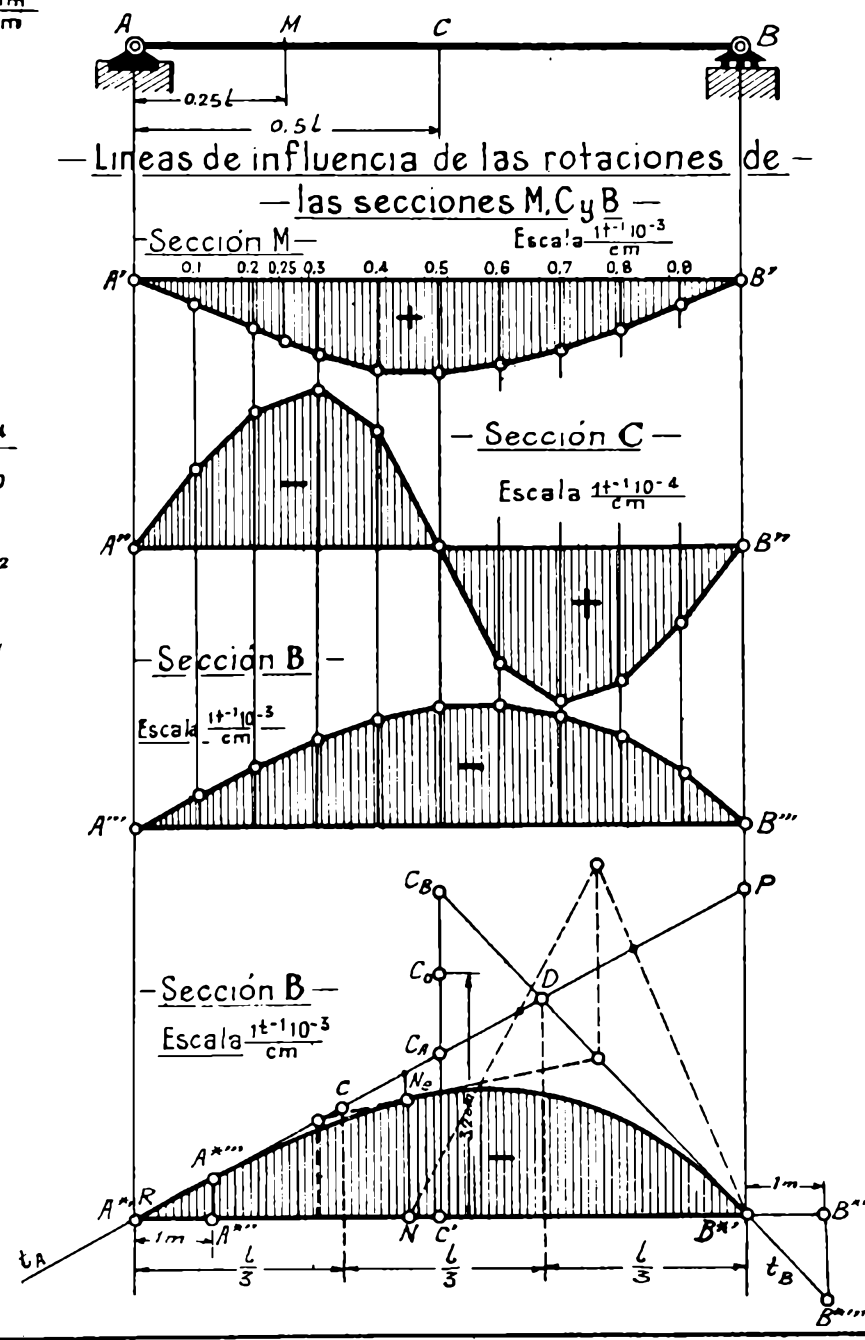
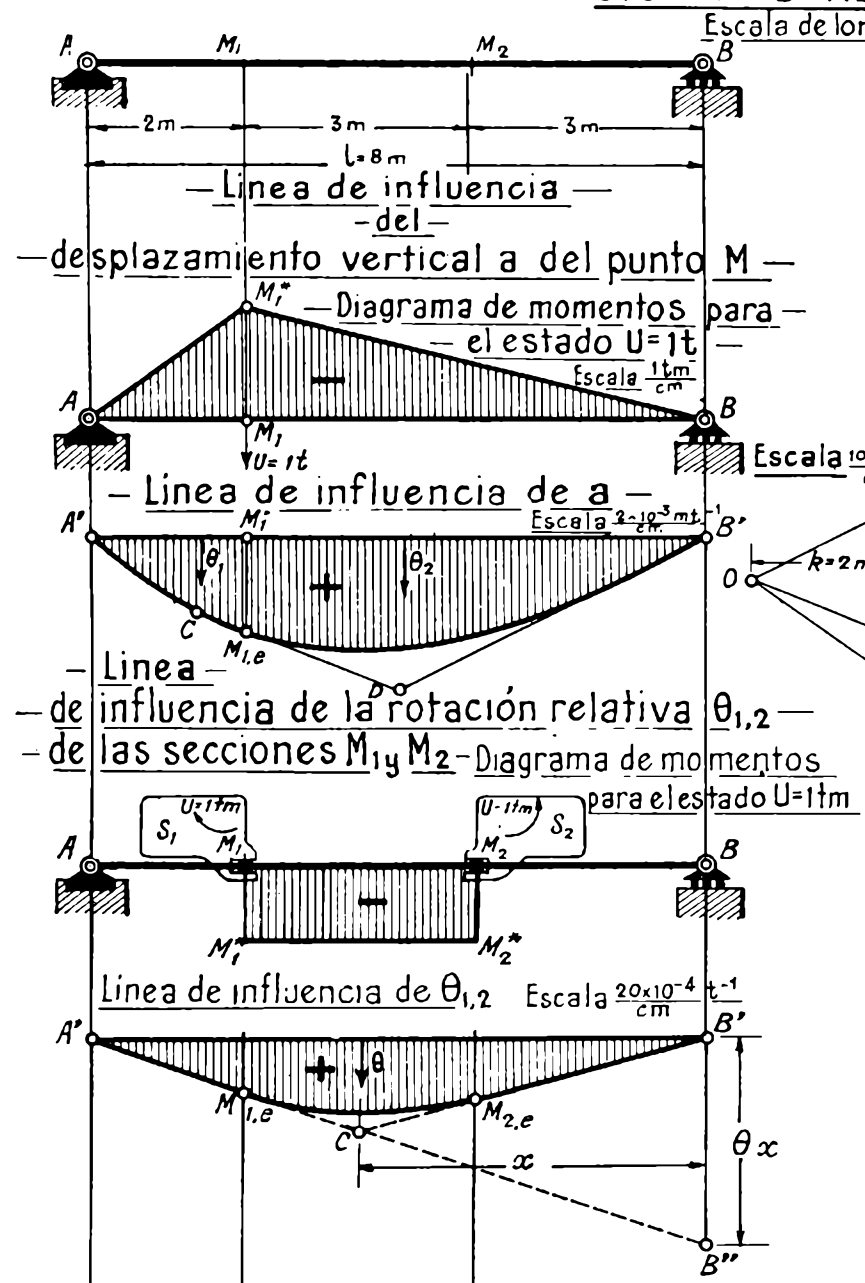
En el problema (7) hemos hallado analíticamente para esta rotación, el mismo valor

$$\theta = 171 \times 10^{-4}.$$

RESOLUCION ESTATICA DE SISTEMAS PLANOS

— LINEAS DE INFLUENCIA DE DESPLAZAMIENTOS DE —

— SISTEMAS RECTILINEOS —



CAPITULO VIII

RESOLUCION DE SISTEMAS ISOSTATICOS. RESOLUCION DE LINEAS DE INFLUENCIA POR EL METODO CINEMATICO

§ 1. — Líneas de influencia de componentes de reacción

543. Generalidades. — En el parágrafo 2 del capítulo anterior hemos visto como se efectúa el cálculo de la influencia de las cargas permanentes y accidentales sobre los sistemas isostáticos. Dijimos, a este respecto, que se comenzaba por obtener, mediante los recursos de la estática, las reacciones de vínculo externo, y que, conocidas éstas, se suponía libre el sistema, en equilibrio bajo la acción conjunta de las mismas y de las cargas; se terminaba, luego, el problema, hallando mediante un Cremona, o por cualquier otro procedimiento de la estática gráfica, las tensiones T en las barras, si se trataba de un sistema de reticulado o, mediante curvas de presiones o diagramas de características, estas últimas M^* , N^* y T^* , si era de alma llena.

Sólo nos resta ocuparnos, pues, de la influencia de las cargas móviles, es decir, de la obtención de líneas de influencia de magnitudes estáticas. Daremos con todo detalle, valiéndonos de algunos casos concretos, los procedimientos generales a seguir, y expondremos, además, las principales particularidades que puedan presentarse. Elegiremos, para no complicar las explicaciones, ejemplos sencillos; pero debe entenderse que los procedimientos así expuestos son completamente generales. Para cada caso especial sólo variará la manera de obtener las elásticas de deformación virtual de los mecanismos de un grado de libertad que resultan al poner en evidencia, mediante la supresión de los vínculos respectivos, las incógnitas a calcular; estas últimas elásticas, como hemos establecido en (501), constituirán las líneas de influencia de dichas incógnitas. El trazado de las elásticas de estos mecanismos de un grado de libertad, se efectúa, por lo demás, de acuerdo a lo expuesto en los capítulos I y II de la parte primera de esta obra (*).

(*) En la exposición de ejemplos concretos utilizados se encontrarán numerosas repeticiones, sobre todo en lo que respecta a la determinación de escalas y signos, pues hemos querido dejar tratado por completo cada uno de dichos ejemplos. Recomendamos al lector que trate de resolver por sí mismo, con croquis a mano levantada, los problemas correspondientes y que recurra al texto solamente a los efectos de salvar las dudas que puedan presentársele.

Comenzamos, a continuación, ocupándonos de la obtención de las líneas de influencia de componentes de reacciones de vínculo externo. Estas líneas de influencia podrán servir, no sólo para calcular dichas reacciones debidas a las cargas móviles, sino también para obtener las que producen las cargas permanentes y accidentales; estas últimas reacciones se calculan, por lo general, mediante las líneas de influencia con mucha mayor comodidad que recurriendo a los procedimientos ordinarios de la estática.

544. Líneas de influencia de la reacción en un apoyo móvil. — Sea el sistema isostático representado en la figura 302 *a*, sujeto a una carga móvil vertical P , del que nos proponemos hallar la línea de influencia de la reacción R_B en el apoyo móvil B .

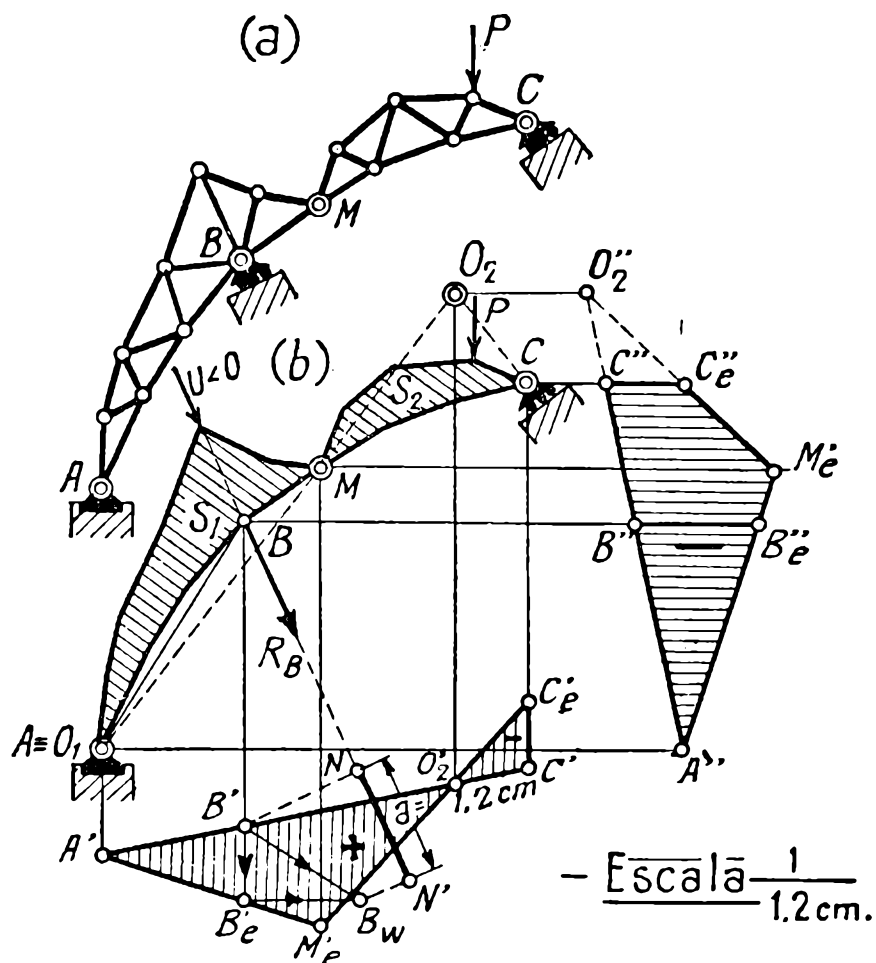


FIG. 302

545. — *Forma de la línea de influencia.* Pongamos en evidencia la reacción a calcular, suprimiendo el apoyo móvil B y haciendo actuar en su reemplazo una fuerza normal a su dirección R_B , de intensidad incógnita igual a la de la reacción originada por P (fig. 302 *b*). Según lo demostrado en (501), la elástica vertical de un desplazamiento virtual del mecanismo de un grado de libertad así obtenido, nos da, en cierta escala, la línea de influencia pedida.

Para trazar esta elástica, observemos que los puntos $O_1 \equiv A$ y O_2 son los polos de las dos chapas S_1 y S_2 del mecanismo, y tomemos la recta cualquiera $A'B'C'$ como eje de referencia. Siendo el desplazamiento virtual uno cualquiera de los desplazamientos posibles del sistema, la elástica de la primera chapa S_1 , estará dada por una recta cualquiera $A'M'_e$, que pasa por el punto A' del eje, situado en correspondencia del polo O_1 . Prolongando esta recta hasta la vertical de M y uniendo con el punto O'_2 el M'_e de intersección con la misma, se obtiene la elástica de la chapa S_2 .

El diagrama $A'M'_eC'_eC'$ referido al eje $A'B'C'$, rayado en la figura, es, pues, la elástica vertical de un desplazamiento virtual del mecanismo de la figura 302 *b* y, por tanto, la línea de influencia pedida de la reacción R_B .

546. — *Escala*. En cuanto a la escala de esta línea de influencia, sabemos, de acuerdo a lo demostrado en (502), que está dada por la inversa del desplazamiento a , directamente leído en centímetros, que, en la deformación virtual anterior, corresponde a la fuerza R_B , o sea, de la proyección sobre esta última del desplazamiento experimentado por el punto B .

Según la elástica obtenida, la proyección vertical del desplazamiento de B está dada por el segmento $\overline{B'B'_e}$, y como su dirección debe ser normal a la recta BA que une dicho punto con el polo de la chapa a que pertenece, si por B' trazamos una normal $B'B_w$ a dicha dirección y por M'_e una horizontal hasta cortar la anterior en el punto B_w , el desplazamiento de B resulta dado en magnitud y sentido por el vector $\overrightarrow{B'B_w}$.

Proyectándolo sobre la dirección de R_B , se tiene en $\overline{NN'}$ el desplazamiento correspondiente a la incógnita R_B , o sea, la inversa a de la escala.

Leído el segmento $\overline{NN'}$ directamente en centímetros en la figura, puesto que en igual forma leeremos, de acuerdo a lo establecido en (504), las ordenadas η de la elástica, se tiene $a = 1,2$ cm; por consiguiente, la escala en que las ordenadas de dicha elástica, leídas en centímetros, nos dan las de la línea de influencia de R_B , es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,2 \text{ cm}} .$$

547. — *Signo*. En la parte positiva de la elástica, es decir, en la parte situada abajo del eje, el signo de la línea de influencia es, según (503), contrario al de una fuerza U aplicada según la R_B en el sistema de la figura 302 *b* y capaz de producir un desplazamiento del mismo sentido que el virtual considerado.

Como el punto B se ha desplazado según el vector $B' B_w$, es decir, \longrightarrow hacia la derecha, la fuerza U capaz de producir un desplazamiento de dicho sentido también estará dirigida hacia la derecha, como la señalada en la figura; es decir, será de signo negativo (por ser de este signo su proyección horizontal). Por consiguiente, el signo de la línea de influencia en la parte situada abajo del eje, debe ser contrario al de esta fuerza U , es decir, positivo, como se ha marcado en la figura.

548. — *Caso en que las cargas móviles puedan tener direcciones cualesquiera.* En lo que antecede hemos supuesto que sobre el sistema sólo actúen cargas móviles verticales; si, en cambio, estas cargas fueran de dirección cualquiera, se requeriría hallar, además de la línea de influencia de R_B para cargas verticales obtenida, la que corresponde a cargas horizontales, a fin de calcular con cada una de ellas, respectivamente, las partes de R_B debidas a las componentes verticales y horizontales de las cargas, y obtener, con su suma, la intensidad de la reacción resultante, tal como se ha establecido en (493).

En la figura 302 se ha trazado la línea de influencia para cargas horizontales, dada por la elástica horizontal de un desplazamiento virtual del mecanismo de la figura 302 b que resulta al poner en evidencia la reacción R_B a calcular. Se ha adoptado la elástica horizontal de la misma deformación virtual empleada para obtener la línea de influencia vertical, a cuyo efecto, eligiendo como eje una recta $A''B''$ normal a $A'B'$, el lado de la elástica correspondiente a S_1 es la perpendicular $A''M_e''$ a la $A'M_e'$. Hallado el punto M_e'' , la elástica horizontal de la chapa S_2 queda dada por la recta $M_e'' O_2''$.

La escala en que esta última elástica horizontal da a la línea de influencia de R_B para cargas horizontales, es la misma $\frac{1}{12 \text{ cm}}$ encontrada para la línea de influencia vertical, ya que ambas líneas de influencia corresponden a la misma deformación virtual, en la que el punto B experimenta el desplazamiento dado por el vector $B' B_w$.

El signo de la línea de influencia horizontal queda \longrightarrow determinado también como el de la vertical. En esta última encontramos signo positivo para la parte de la elástica positiva; en correspondencia a las ordenadas positivas de la elástica horizontal, es decir, de las ordenadas dirigidas según las z positivas (hacia la izquierda), el signo de la línea de influencia obtenida sería también positivo. Como en ella han resultado ordenadas negativas, su signo será, por consiguiente, negativo en toda su extensión, como se ha marcado en la figura.

549. — *Caso en que las cargas móviles son oblicuas, pero de dirección constante.* Si sobre el sistema actuaran cargas móviles oblicuas, pero de dirección constante paralela a xx (fig. 303), es más cómodo hallar directamente la línea de influencia de la reacción R_B pedida para fuerzas de dicha dirección; ella se obtiene, como indica en forma suficientemente explícita la figura 303, mediante una elástica $A'M_eC_eC'$ de dirección xx correspondiente a una deformación virtual del sistema que se obtiene al suprimir, en el dado, el apoyo B .

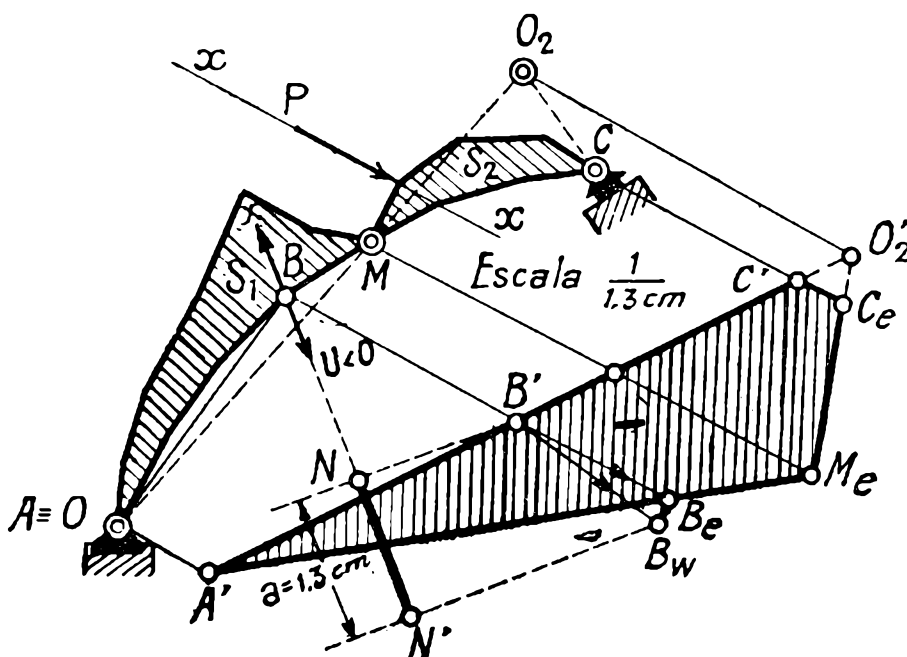


FIG. 303

Siendo $B'B_e$ la proyección sobre xx del desplazamiento de B y la normal a O_1B la dirección de este último, su intensidad se determina trazando por B' una perpendicular a O_1B y por B_e otra a xx ; hallado, en efecto, el punto B_w de intersección de estas rectas, el vector $B'B_w$ da a dicho desplazamiento. Proyectando este vector sobre la dirección de R_B , se determina en $\overline{NN'} = a = 1,3$ cm, el desplazamiento correspondiente a esta incógnita, o sea, la inversa de la escala de la línea de influencia. Esta última es, por tanto,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,3 \text{ cm}}$$

La fuerza U que, actuando según R_B sobre el sistema, produciría un desplazamiento virtual del sentido del obtenido, está dirigida, como la marcada en la figura, hacia la derecha, pues en este sentido es el desplazamiento $B'B_w$ del punto B . Siendo negativa esta fuerza U , en la parte de la elástica de ordenadas positivas (arriba del eje en el caso de la figura) correspondería en la línea de influencia signo positivo (con-

trario). Como las ordenadas de la elástica han dado resultado todas negativas, en la línea de influencia corresponde signo negativo en toda su extensión.

550. Líneas de influencia de las proyecciones de la reacción producida por una articulación fija. — La reacción que se produce en una articulación fija, variable en dirección e intensidad, queda perfectamente conocida cuando se dan sus proyecciones R_x y R_y (fig. 304 a) sobre dos direcciones cualesquiera Ax y Ay . En general, por simplicidad, convenirá tomar como direcciones, las horizontal y vertical, en cuyo caso las proyecciones de la reacción R (fig. 304 b) coinciden con sus componentes según dichas direcciones perpendiculares entre sí.

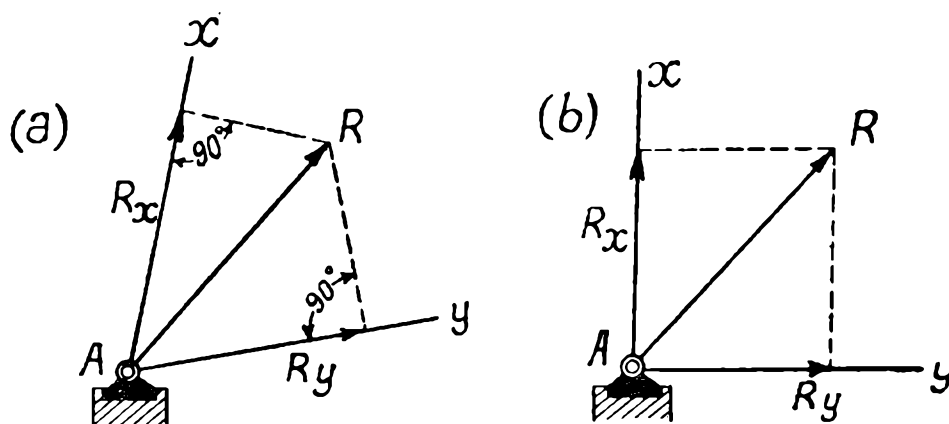


FIG. 304

Consideremos el sistema de la figura 305 a, del que nos proponemos hallar las líneas de influencia de las componentes (o proyecciones) horizontal y vertical $R_{A,z}$ y $R_{A,y}$ de la reacción en la articulación fija A .

551. — *Línea de influencia de la proyección horizontal $R_{A,z}$.* Comencemos por la primera $R_{A,z}$, con cuyo objeto suprimiremos el vínculo correspondiente a esta incógnita, convirtiendo la articulación fija A en un apoyo móvil horizontal y manteniendo el equilibrio mediante una fuerza incógnita $R_{A,z}$ (fig. 305 b) igual a la proyección horizontal de la reacción que la fuerza P produce en A .

En el mecanismo de un grado de libertad resultante, los puntos $O_2 \equiv B$ y O_1 , intersección de la vertical de A con la BC , son, respectivamente, los polos de las chapas S_2 y S_1 , y el diagrama $A' C_e B'$, referido al eje $A'B'$, nos da la elástica vertical de una deformación virtual del mismo, o sea, según sabemos, en determinada escala, la línea de influencia buscada, de la componente $R_{A,z}$ para cargas móviles verticales.

El desplazamiento a correspondiente a la incógnita, desplazamiento horizontal del punto A , lo determinamos observando que la chapa S_1 ha

girado de un ángulo infinitésimo θ_1 , dado por la recta $A'C_e$ referida al eje $A'B'$, en torno al polo O_1 . Llamando x la distancia O_1A se tiene

$$a = x \cdot \theta_1,$$

o, gráficamente, llevando según una horizontal una distancia $\overline{A'M} \equiv \overline{O_1A}$ y trazando, por su extremo una vertical, el segmento \overline{MN} , comprendido

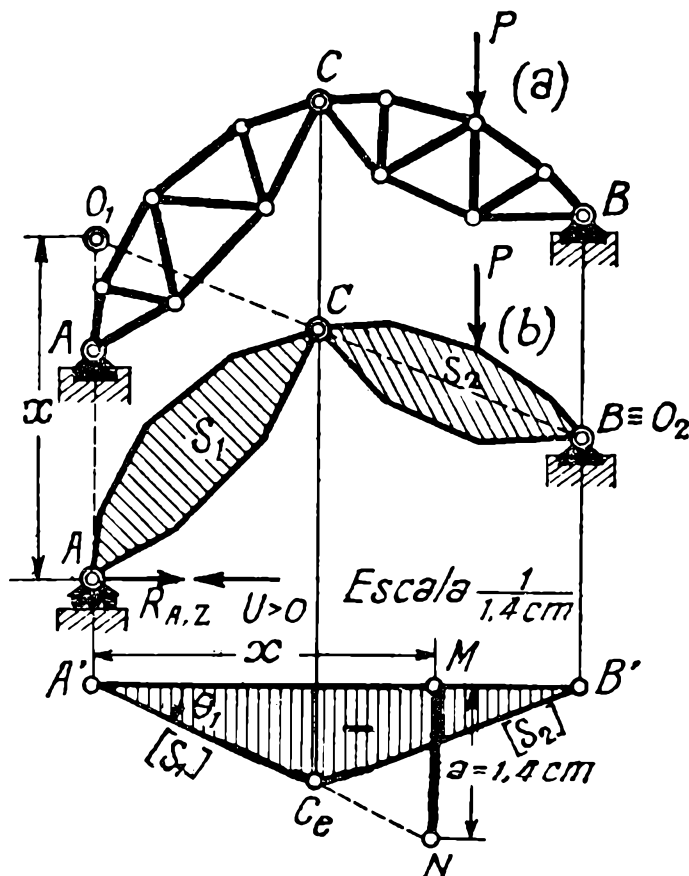


FIG. 305

entre $A'B'$ y $A'C_e$, proporciona precisamente a a . Leyéndolo en la figura en centímetros, se tiene $a = \overline{MN} = 1,4$ cm., y, por tanto, la escala en que el diagrama obtenido da a la línea de influencia de $R_{A,z}$, es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,4 \text{ cm}}.$$

En cuanto al signo, observemos que, siendo positiva la rotación θ_1 , de la chapa S en torno a O_1 , el punto A se ha desplazado hacia la izquierda, y, por tanto, la fuerza U de dirección $R_{A,z}$ que produciría un desplazamiento de dicho sentido en el mecanismo descargado, sería, como la dibujada en la figura, también dirigida hacia la izquierda, o sea, positiva. En la parte positiva de la elástica corresponde, pues, para la línea de influencia, signo contrario, es decir, negativo, como se ha marcado en la figura.

552. — *Línea de influencia de la proyección vertical $R_{A,y}$.* En igual forma se halla la línea de influencia de la proyección vertical de la reacción en A . Comenzamos por ponerla en evidencia, reemplazando por la misma al vínculo respectivo, es decir, convirtiendo la articulación fija A en un apoyo móvil verticalmente (fig. 306) y manteniendo el equilibrio con la fuerza $R_{A,y}$, proyección vertical incógnita de la reacción originada en A por la carga P .

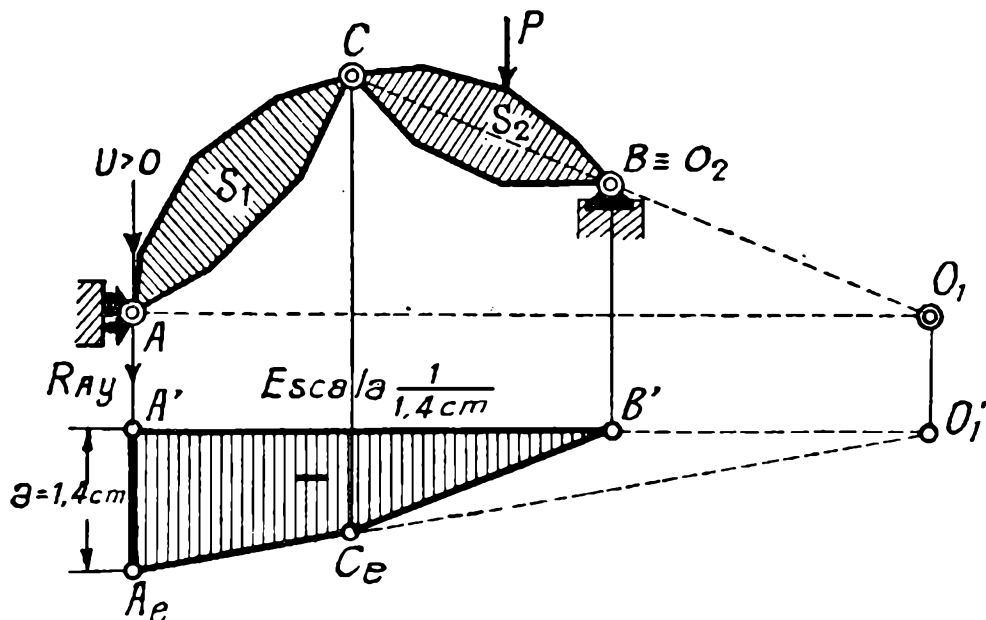


FIG. 306

En la figura se han determinado los polos O_1 y O_2 de las chapas del mecanismo de un grado de libertad así obtenido y trazado, además, la elástica vertical $A' A_e C_e B'$ de uno de sus desplazamientos posibles, que constituye la línea de influencia de $R_{A,y}$, en la escala $\frac{1}{a}$. Siendo a , desplazamiento correspondiente a $R_{A,y}$, es decir, desplazamiento vertical del punto A , igual al segmento $\overline{A A_e} = 1,4 \text{ cm.}$, la escala es, pues,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,4 \text{ cm}}$$

La fuerza U que origina un desplazamiento del sentido del obtenido es positiva, o sea, dirigida hacia abajo, desde que en esta dirección se ha desplazado el punto A . Abajo del eje de la elástica corresponde, pues, para la línea de influencia, signo contrario, es decir, negativo.

553. **Líneas de influencia de las componentes de la reacción en una articulación fija, según dos direcciones cualesquiera.** — La reacción en una articulación A también puede determinarse mediante las dos componentes X_1 y X_2 según dos direcciones cualesquiera $A 1$ y $A 2$ determi-

nadas de antemano (fig. 307 *a*). Las componentes X_1 y X_2 impiden los desplazamientos del punto A normales a sus respectivas direcciones y son, por tanto, equivalentes a apoyos móviles normales a las mismas, como se ha dibujado en la fig. 307 *b*. Para hallar la línea de influencia de la componente X_1 habrá que suprimir, pues, el apoyo móvil normal a ella y quedará el mecanismo de la figura 308 con un apoyo móvil en A de dirección perpendicular a X_2 y en equilibrio bajo la acción de las fuerzas P y X_1 . Análogamente, para hallar la línea de influencia de la componente X_2 se deberá suprimir el vínculo respectivo, constituido por el apoyo móvil en A de dirección perpendicular a X_2 , y quedará el mecanismo de la figura 309, con un apoyo móvil en A de dirección perpendicular a X_1 y en equilibrio bajo la acción de las fuerzas X_2 y P .

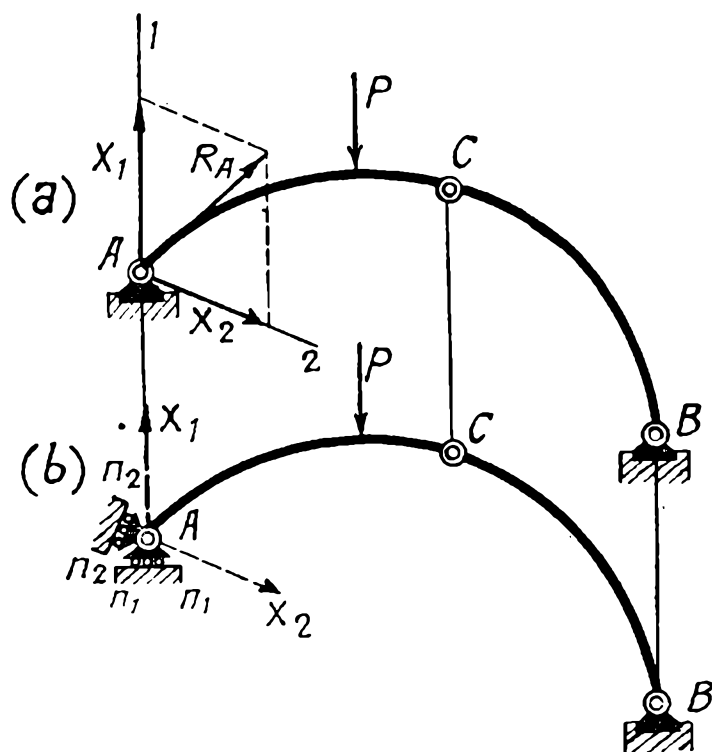


FIG. 307

Estas consideraciones no tienen mayor importancia práctica, por cuanto, por lo común se determina la reacción en una articulación mediante las líneas de influencia de sus proyecciones según dos direcciones normales entre sí (generalmente horizontal y vertical), en cuyo caso las componentes de la reacción según estas direcciones coinciden, como queda dicho, con las proyecciones mismas.

Pasamos, sin embargo, para aclarar estos conceptos, a trazar directamente las líneas de influencia de dos componentes, no normales entre sí, de la reacción en una articulación. Recurriremos a este efecto al mismo sistema de la figura 307 *a*, buscando las líneas de influencia de las componentes de la reacción en A según las direcciones X_1 y X_2 , a las que corresponden, según hemos dicho, como vínculos, respectivamente apoyos móviles de direcciones $n_1 n_1$ y $n_2 n_2$ normales a las mismas (fig. 307 *b*);

este par de apoyos móviles reemplaza, por otra parte, a la articulación fija A .

554. — *Línea de influencia de la componente X_1 .* Comencemos por la componente X_1 . Para ello pongámosla en evidencia suprimiendo el vínculo que la origina, constituido, como acabamos de decir, por el apoyo móvil de dirección $n_1 n_1$. Nos queda el sistema de un grado de libertad de la figura 308. En ella se determinan los polos O_1 y O_2 de las chapas S_1 y S_2 y se traza en $A' A_e C_e B'$, referida a $A'B'$, la elástica vertical de

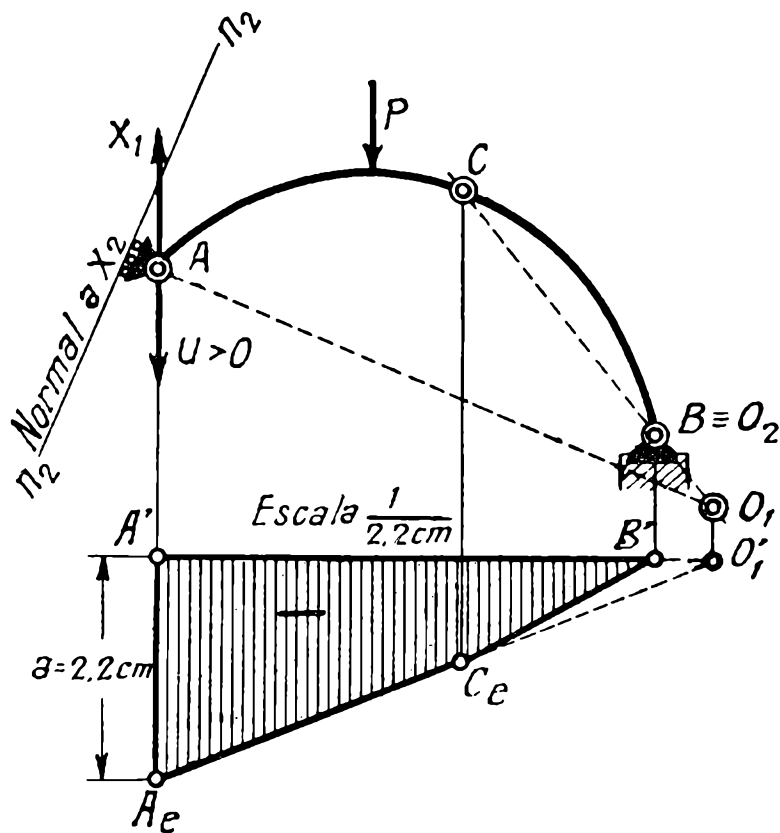


FIG. 308

uno de sus desplazamientos posibles, que nos da la línea de influencia de X_1 , en la escala

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{A'A_e} = \frac{1}{2,2 \text{ cm}}$$

La fuerza U capaz de producir un desplazamiento del sentido obtenido es, como la marcada en la figura, positiva; abajo del eje, la línea de influencia tendrá, por tanto, signo negativo.

555. — *Línea de influencia de la componente X_2 .* Para hallar la línea de influencia de la otra componente X_2 , se ha suprimido el apoyo móvil de dirección $n_2 n_2$ normal a la misma, que constituye el vínculo que la origina, obteniéndose el sistema de un grado de libertad de la figura 309.

Como se deduce fácilmente de la misma, la elástica vertical de uno de sus desplazamientos posibles está dada por el diagrama $A' C_e B'$.

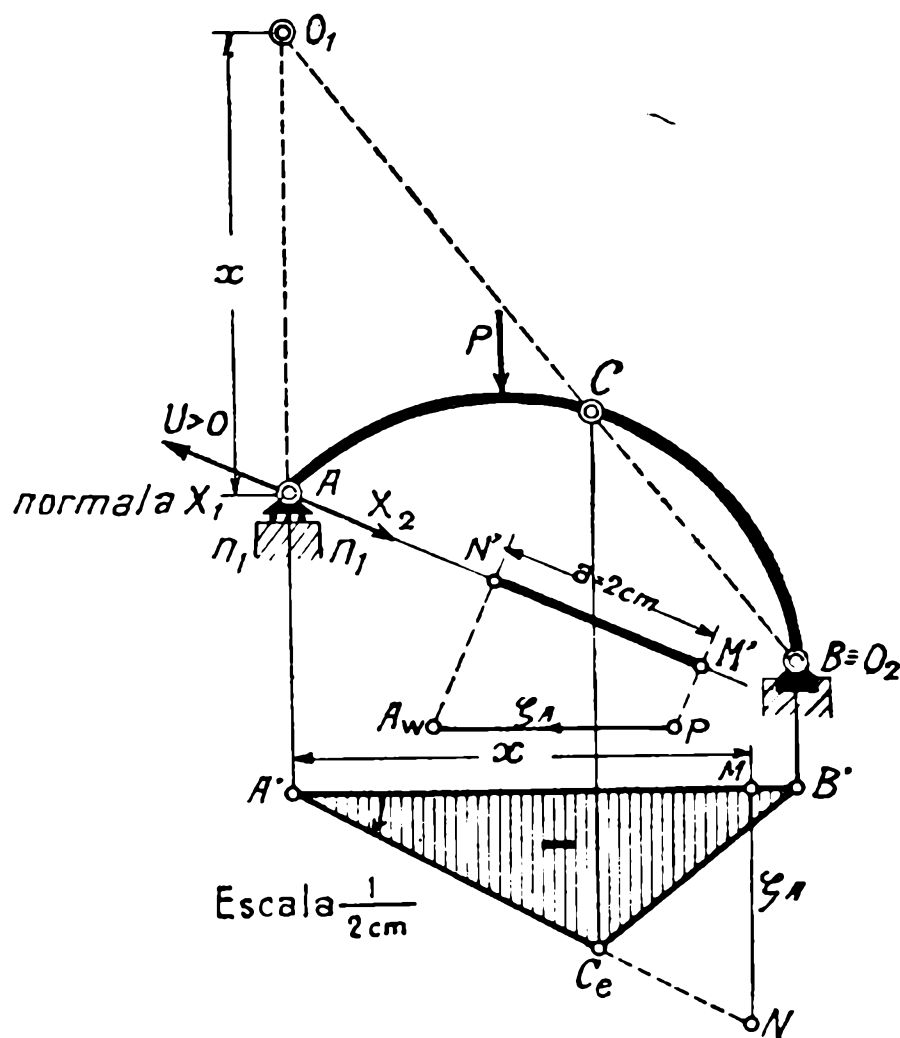


FIG. 309

Para hallar el desplazamiento a correspondiente a X_1 , se ha comenzado por determinar el desplazamiento horizontal ξ_A del punto A , que, por experimentar la chapa S_1 , a que pertenece, una rotación infinitésima θ_1 , en torno al punto O_1 , distante x de A , es

$$\xi_A = \theta_1 x.$$

Llevando un segmento horizontal $\overline{A'M} = x$, la ordenada \overline{MN} , determinada como indica la figura, da el desplazamiento ξ_A horizontal del punto A .

En la figura se lo ha llevado según su dirección en pA_w , y proyectado luego en $\overline{M'N'}$ sobre la dirección de la incógnita $\overrightarrow{X_2}$. El segmento $\overline{M'N'} = a = 2 \text{ cm}$. es el desplazamiento correspondiente a la incógnita X_2 , y, por tanto, la escala en que la elástica obtenida $A' C_e B'$ da a la línea de influencia de la misma es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2 \text{ cm}}$$

En cuanto al signo, siendo positiva la O_1 , el punto A se ha desplazado hacia la izquierda y la fuerza U capaz de producir un desplazamiento de este sentido es positiva, como la dibujada en la figura. Abajo del eje la línea de influencia tendrá, por consiguiente, signo negativo.

556. Línea de influencia de la proyección, según una dirección dada, de la reacción en un empotramiento. — Sea (fig. 310 *a*) un sistema isostático del que nos proponemos hallar la línea de influencia, para cargas verticales, de la proyección sobre xx de la reacción R_A en el empotramiento A .

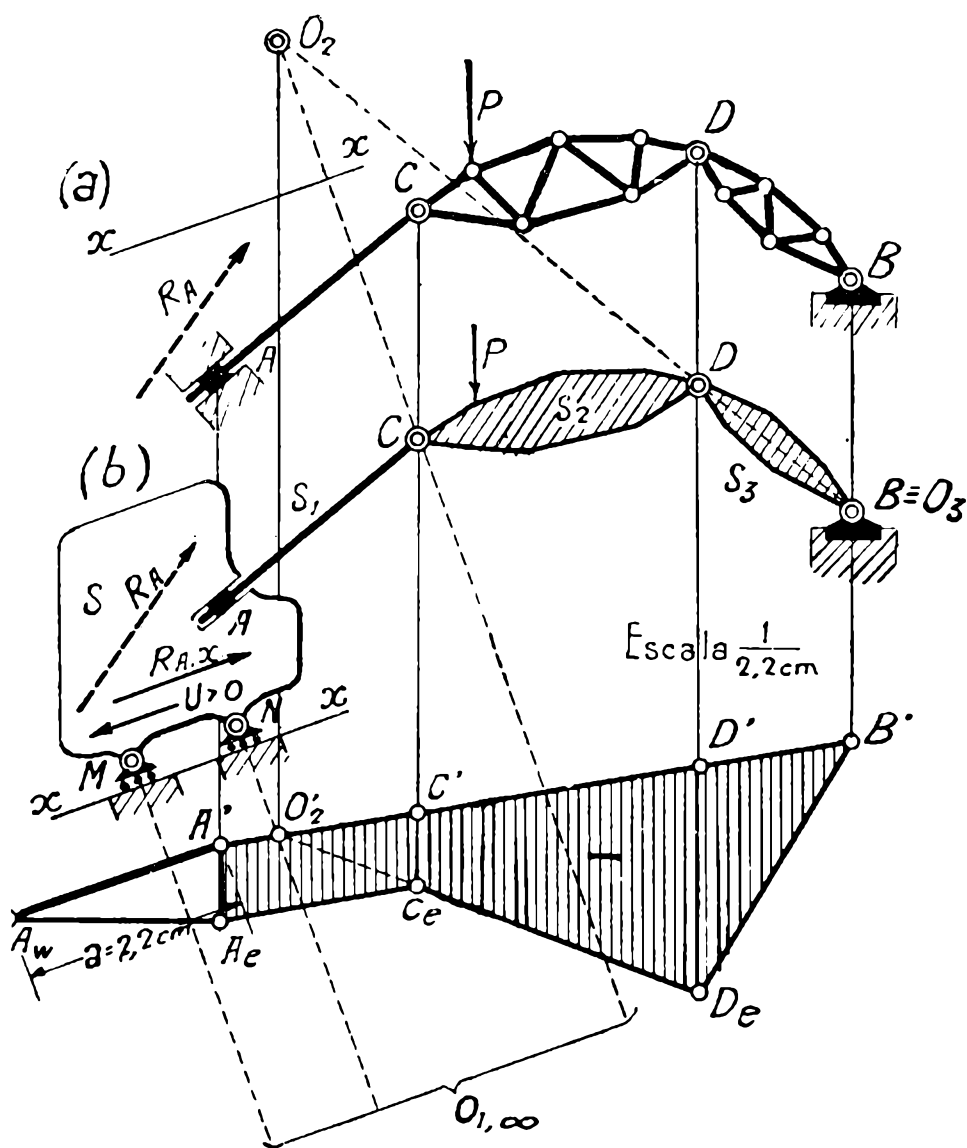


FIG. 310

Si fijamos en A (fig. 310 *b*) una chapa rígida sujeta a dos apoyos móviles M y N , de dirección paralela a la xx dada, tanto esta chapa como el primer elemento A del sistema sólo podrán experimentar desplazamientos de esta dirección; actuando una carga P cualquiera, para mantener el equilibrio se requerirá aplicar en un punto arbitrario de dicha chapa una fuerza $R_{A,x}$ igual a la proyección incógnita sobre xx de la

reacción R_A que aquélla origina en el empotramiento A . El mecanismo de un grado de libertad de la figura 310 b es, por consiguiente, el que pone en evidencia a dicha proyección, y, por tanto, la elástica vertical de uno de sus desplazamientos virtuales nos dará la línea de influencia buscada.

El polo de la chapa S , ligada rígidamente con la S_1 , es el punto impropio $O_{1,\infty}$ de las normales a la dirección xx de los apoyos M y N ; como por otra parte, $O_3 \equiv B$, resulta O_2 dado por la intersección de $BD \equiv O_3D$ con $CO_{1,\infty}$.

Tomada la recta $A'B'$ como eje de la elástica, un desplazamiento cualquiera de la chapa S_1 queda dado por la recta A_eC_e , paralela a la misma, ya que dicha chapa S_1 se traslada (gira alrededor del punto impropio $O_{1,\infty}$). El resto de la elástica está constituido, como es fácil ver, por las rectas C_eD_e y D_eB' .

Siendo $A'A_e$, la proyección vertical del desplazamiento del punto A de la chapa S_1 y experimentando esta última una traslación paralela a xx , si por A' trazamos una recta de esta última dirección y por A_e una horizontal, su punto de intersección A , nos determinará el vector $A'A_w$ representativo de dicha traslación, y, por tanto, el desplazamiento correspondiente a la incógnita $R_{A,x}$. En la figura se tiene $a = \overline{A'A_w} = 2,2$ cm. y, por consiguiente, la escala en que la elástica obtenida da a la línea de influencia de $R_{A,x}$ es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2,2 \text{ cm}}$$

En cuanto al signo, obsérvese que la chapa S_1 se ha trasladado en el sentido $A'A_w$ y que la fuerza U capaz de producir en el mecanismo descargado un desplazamiento de este sentido es, como la dibujada en la figura, positiva. Abajo del eje, la línea de influencia tendrá, por consiguiente, signo contrario, es decir, negativo.

557. Línea de influencia del momento de la reacción en un empotramiento con respecto a un punto cualquiera. — Sea el mismo sistema de la figura 310 a , del que nos proponemos hallar la línea de influencia vertical del momento \mathcal{M} de la reacción R_A en el empotramiento A , con respecto al punto Q .

Si sobre el último elemento A fijamos una chapa rígida S (fig. 311) provista de una articulación fija en Q , para mantener el equilibrio bajo la acción de una carga P , se requerirá aplicar sobre esta chapa una cupla \mathcal{M} de intensidad igual precisamente al momento respecto de Q de la

reacción R_A producida por dicha carga. El sistema de la figura 311, por consiguiente, es el que pone en evidencia a este momento.

Los polos de las tres chapas son los puntos O_1 , O_2 y O_3 marcados en la figura, y la obtención de la elástica vertical de uno de sus desplazamientos posibles, referida al eje $A'B'$, que se detalla en la misma, no ofrece mayor dificultad.

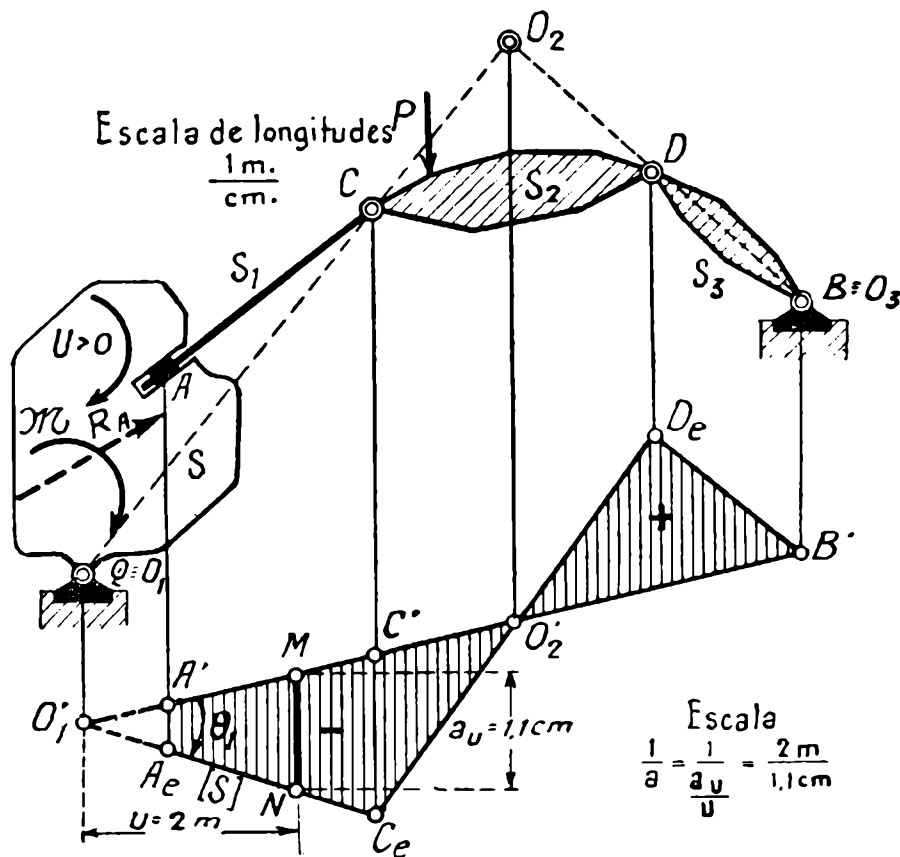


FIG. 311

La escala en que esta elástica da a la línea de influencia de M , es la inversa del desplazamiento a correspondiente a esta incógnita, constituido por la rotación ϑ_1 de la chapa en que actúa. En la figura se ha llevado, a partir de la vertical de O_1 y leída en la escala de longitudes en que se ha dibujado el sistema, una distancia horizontal (cualquiera) $u = 2 \text{ m}$. y se ha determinado la ordenada \overline{MN} que las rectas $A'B'$ y A_eC_e , que dan a ϑ_1 , determinan en correspondencia a su extremo; este segmento ha resultado $\overline{MN} = a_u = 1,1 \text{ cm.}$, y, por tanto, el desplazamiento correspondiente a la incógnita es

$$a = \theta_1 = \frac{a_u}{u} = \frac{1,1 \text{ cm}}{2 \text{ m}},$$

y la escala de la línea de influencia,

$$\frac{1}{a} = \frac{2 \text{ m}}{1,1 \text{ cm}}.$$

Por lo que respecta al signo, siendo positiva la rotación ϑ_1 de la chapa S_1 , la cupla que aplicada sobre la misma produciría un desplazamiento del sentido de la deformación virtual obtenida es también de este signo, como la U marcada en la figura. Abajo del eje la línea de influencia tiene, por tanto, signo negativo.

558. Determinación de la reacción en un empotramiento mediante las líneas de influencia de sus proyecciones sobre dos direcciones cualesquiera y de su momento con respecto a un punto dado. — Sabiendo, de acuerdo con lo que antecede, hallar las líneas de influencia de la proyección de la reacción en un empotramiento según una dirección cualquiera y de su momento con respecto a un punto, estamos en condiciones de obtener las líneas de influencia de los elementos requeridos para determinarla. Nos bastará hallar las de sus proyecciones sobre dos direcciones dadas y de su momento con respecto a un punto. Con las dos proyecciones, en efecto, queda determinado un vector equipolente de la misma y mediante su momento flector con respecto al punto adoptado, se fija su recta de acción.

Prácticamente se toma, por lo común, las proyecciones vertical y horizontal, y el momento con respecto al mismo punto A (fig. 310 *a*) de la sección de empotramiento. En este caso, como es fácil ver, estos tres elementos coinciden con las componentes de dicha reacción dirigida según la horizontal y la vertical que pasan por A y según la recta en el infinito del plano.

Pasamos a ocuparnos de esta última forma de hallar la reacción de un empotramiento, aplicándola al sistema de la figura 310 *a*.

559. — Línea de influencia de la proyección vertical $R_{A,y}$. — Esta proyección queda puesta en evidencia reemplazando el empotramiento (fig. 312) por una chapa rígidamente unida al elemento A y provista de dos apoyos móviles verticales, y equilibrando la carga P con la fuerza incógnita $R_{A,y}$ vertical aplicada en la misma.

El polo de la chapa S_1 es el punto $O_{1,\infty}$ impropio de las horizontales y el de la S_3 el punto B de articulación. El de la S_2 está dado por la intersección de las $CO_{1,\infty}$ y BD .

La elástica vertical del mecanismo de un grado de libertad obtenido, se halla sin mayor dificultad. Debe notarse solamente que la elástica de la primera chapa S_1 es una paralela $A_e C_e$ al eje, por tener esta chapa un polo impropio.

El desplazamiento correspondiente a $R_{A,y}$, desplazamiento vertical de la chapa S_1 en que actúa, es $a = \overline{A'A_e} = 1,3$ cm.; por consiguiente la

escala en que la elástica trazada da a la línea de influencia de dicha incógnita es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,3 \text{ cm}}$$

La fuerza U capaz de producir en el mecanismo descargado un desplazamiento del sentido del virtual obtenido, está dirigida, como la dibujada.

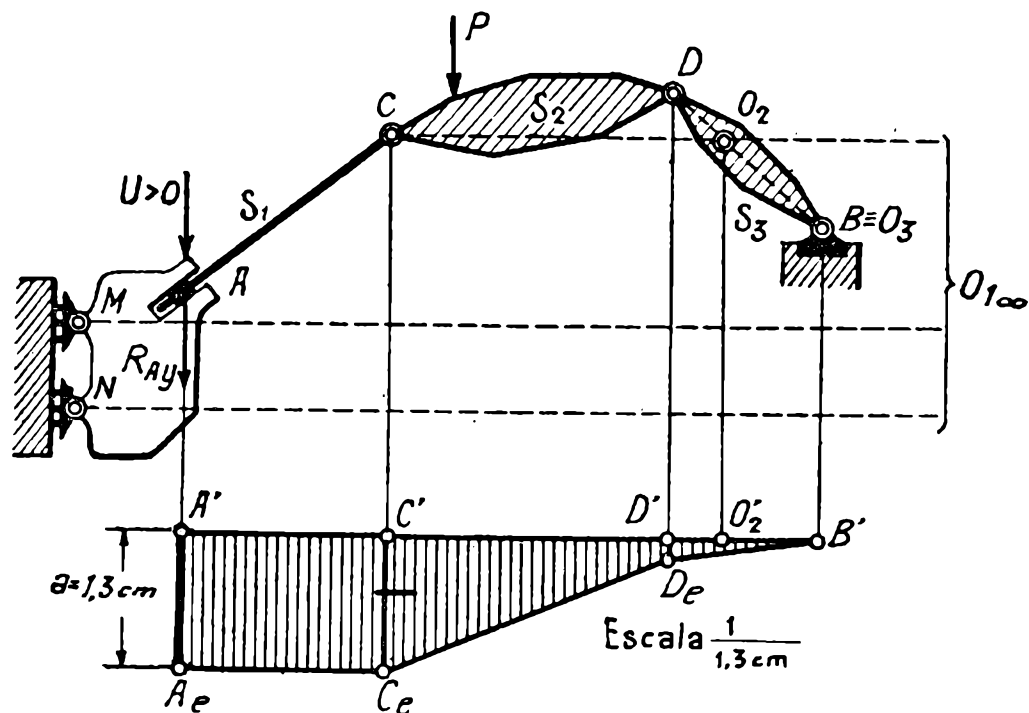


FIG. 312

en la figura, hacia abajo, es decir, es positiva. Abajo del eje la línea de influencia tiene, por consiguiente, signo negativo.

560. — *Línea de influencia de la proyección horizontal $R_{A,x}$.* — El mecanismo que pone en evidencia a la proyección horizontal $R_{A,x}$ de la reacción en A, es el dado en la figura 313.

El polo de la chapa S_1 es el $O_{1,\infty}$ impropio de las verticales, y los O_2 y O_3 se determinan claramente en la figura.

La elástica vertical de la chapa S_1 coincide con el eje $A'B'$, dado que dicha chapa se traslada horizontalmente; el resto de la elástica se determina como indica la figura.

El desplazamiento a correspondiente a la incógnita, es el desplazamiento horizontal de la chapa S_1 . Perteneciendo a esta chapa el punto C, queda determinado por el que éste experimenta. Siendo O_2 el polo de la chapa S_2 , a la que también pertenece el C, y ϑ_2 su rotación, se tiene

$$a = \vartheta_2 \cdot x.$$

En la figura se lo ha obtenido gráficamente llevando, a partir de la vertical de O_2 , un segmento horizontal $x = \overline{C'M}$ y hallando el segmento $a = \overline{MN} = 1,1$ cm. que, sobre la vertical de su extremo, determina las

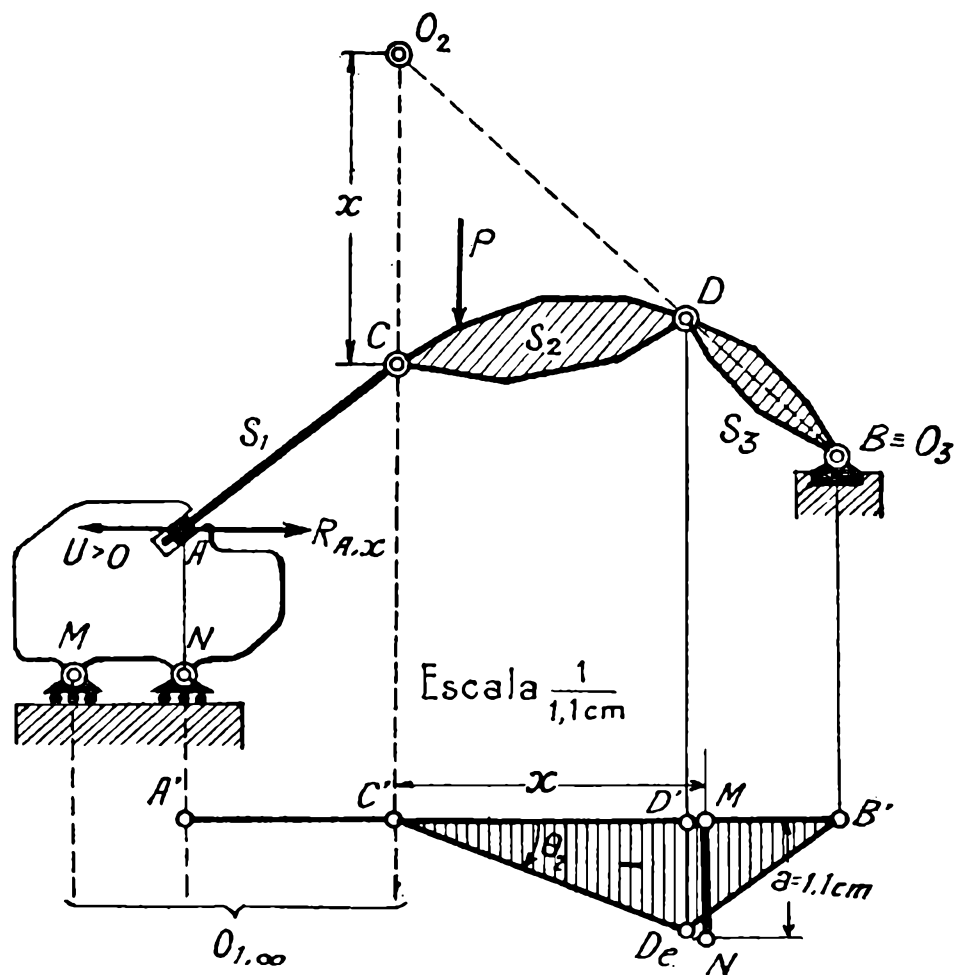


FIG. 313

rectas $A'B'$ y $C'D_e$ que forman dicha rotación. La escala en que la elástica trazada da a la línea de influencia de $R_{A,x}$ es, por tanto,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,1 \text{ cm}}.$$

Siendo positiva la rotación ϑ_2 , el punto C y, por consiguiente, la chapa S_1 , se trasladan hacia la izquierda. La fuerza U capaz de producir en el mecanismo descargado un desplazamiento de este sentido es, como la dibujada en la figura, positiva. Abajo del eje la línea de influencia tendrá, por consiguiente, signo negativo.

Nótese, de paso, que habiendo resultado de ordenadas nulas la parte de la línea de influencia correspondiente a la chapa S_1 , nula tiene que ser la componente $R_{A,x}$ originada por cargas verticales P que actúen sobre la misma.

561. — *Línea de influencia del momento \mathcal{M}_A^* en A.* — Hallemos, por último, la línea de influencia del momento de la reacción en el empotramiento tomado con respecto al punto A, momento que, conjuntamente con las dos proyecciones arriba obtenidas, nos determinan a aquélla sin ambigüedad alguna.

El sistema de la figura 314 pone en evidencia a dicho momento \mathcal{M}_A^* , que, por otra parte, no es otra cosa que el momento flector en el punto A.

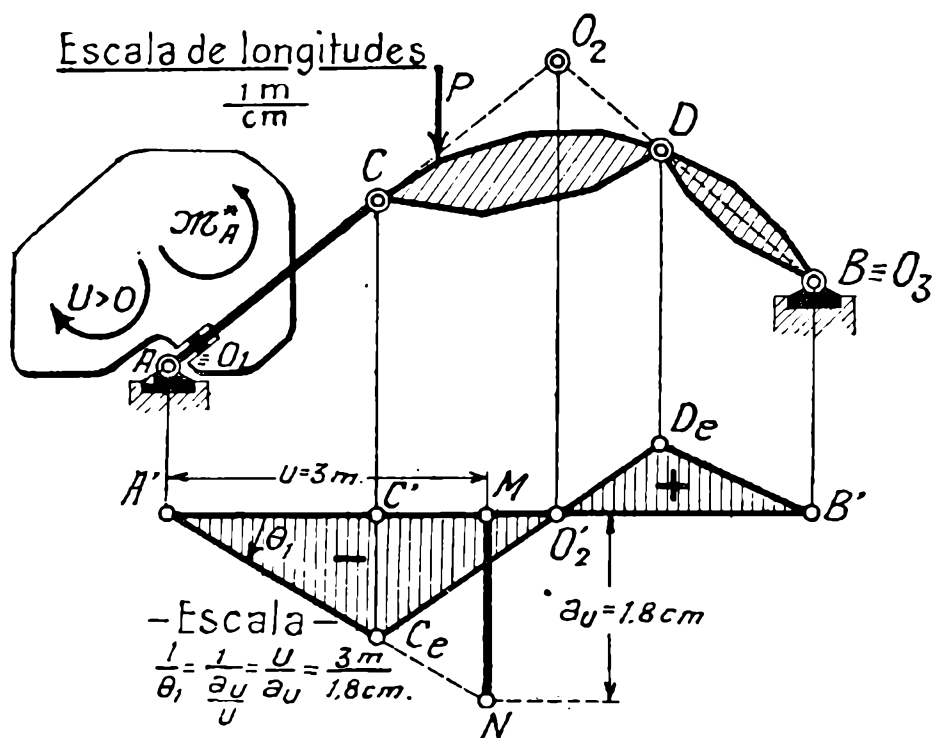


FIG. 314

La obtención de los polos y de la elástica vertical, hecha en la figura, no ofrece ninguna particularidad.

El desplazamiento a correspondiente a la cupla \mathcal{M}_A^* es la rotación ϑ_1 de la chapa S_1 en que actúa. En la figura, llevando, en la escala de longitudes en que ha sido dibujado el sistema y a partir de la vertical de O_1 , una distancia horizontal (arbitraria) $u = 3 \text{ m}$., se ha determinado, entre las rectas $A'B'$ y $A'C_e$ que dan a dicha rotación, un segmento $a_u = \overline{MN} = 1,8 \text{ cm}$., y, por tanto, el desplazamiento correspondiente a la incógnita es

$$a = \vartheta_1 = \frac{a_u}{u} = \frac{1,8 \text{ cm}}{3 \text{ m}};$$

finalmente, la escala en que la elástica trazada da a la línea de influencia de \mathcal{M}_A^* es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1,8 \text{ cm}}{3 \text{ m}}} = \frac{3 \text{ m}}{1,8 \text{ cm}}.$$

Siendo positiva la rotación ϑ_1 , también lo será la cupla U capaz de producir un desplazamiento del sentido del virtual obtenido. En las partes de la elástica situadas abajo del eje, la línea de influencia tendrá, por consiguiente, signo negativo, como se ha marcado en la figura.

562. Determinación de la reacción en un empotramiento mediante las líneas de influencia de sus componentes según tres direcciones cualesquiera dadas de antemano. — La forma más cómoda para determinar la reacción en un empotramiento y que por lo común se utiliza en las aplicaciones, es la que acabamos de exponer, mediante sus proyecciones

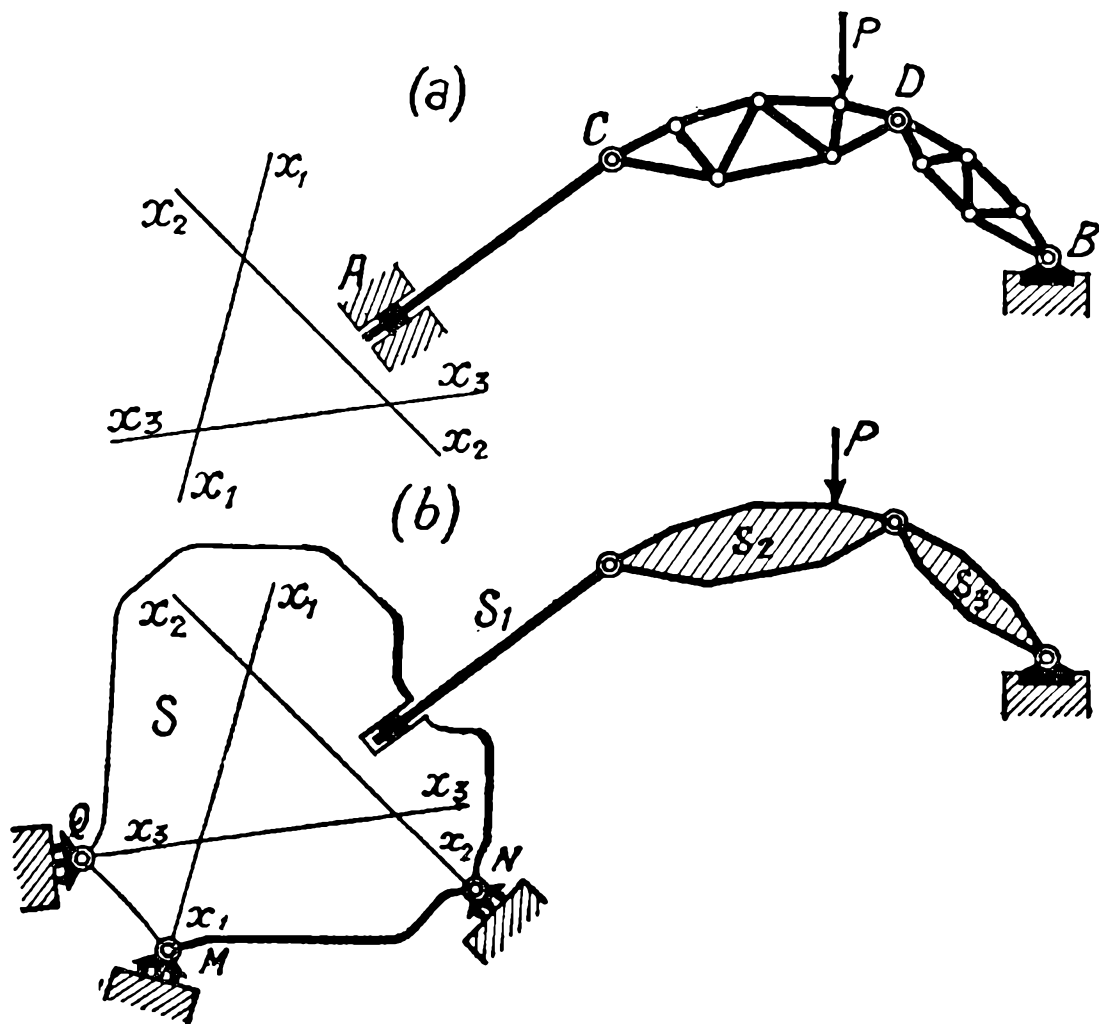


FIG. 315

vertical y horizontal y su momento con respecto al punto de fibra media de la sección de empotramiento, que, como también hemos dicho, coinciden con las componentes de la reacción según las direcciones horizontal y vertical que pasan por este último punto y según la recta en el infinito.

En algunos casos, sin embargo, puede ser conveniente determinar la reacción en un empotramiento A (fig. 315 a) por sus componentes según tres rectas de direcciones $x_1 x_1$, $x_2 x_2$ y $x_3 x_3$ cualesquiera, dadas de antemano.

Reemplazando el empotramiento por una chapa S (fig. 315 *b*) ligada rígidamente al elemento A y sujeta al vínculo del desplazamiento idéntico mediante tres apoyos móviles en los puntos M , N y Q de las rectas $x_1 x_1$, $x_2 x_2$ y $x_3 x_3$ y de direcciones normales a las mismas, se pone de manifiesto que las componentes pedidas R_1 , R_2 y R_3 de la reacción R_A según aquellas direcciones, no son otra cosa que las reacciones que se producen en dichos apoyos móviles.

Suprimiendo uno cualquiera de estos últimos y trazando una elástica de dirección vertical de uno de los desplazamientos posibles del mecanismo de un grado de libertad resultante, obtendremos, por consiguiente, la línea de influencia para cargas verticales de la componente respectiva.

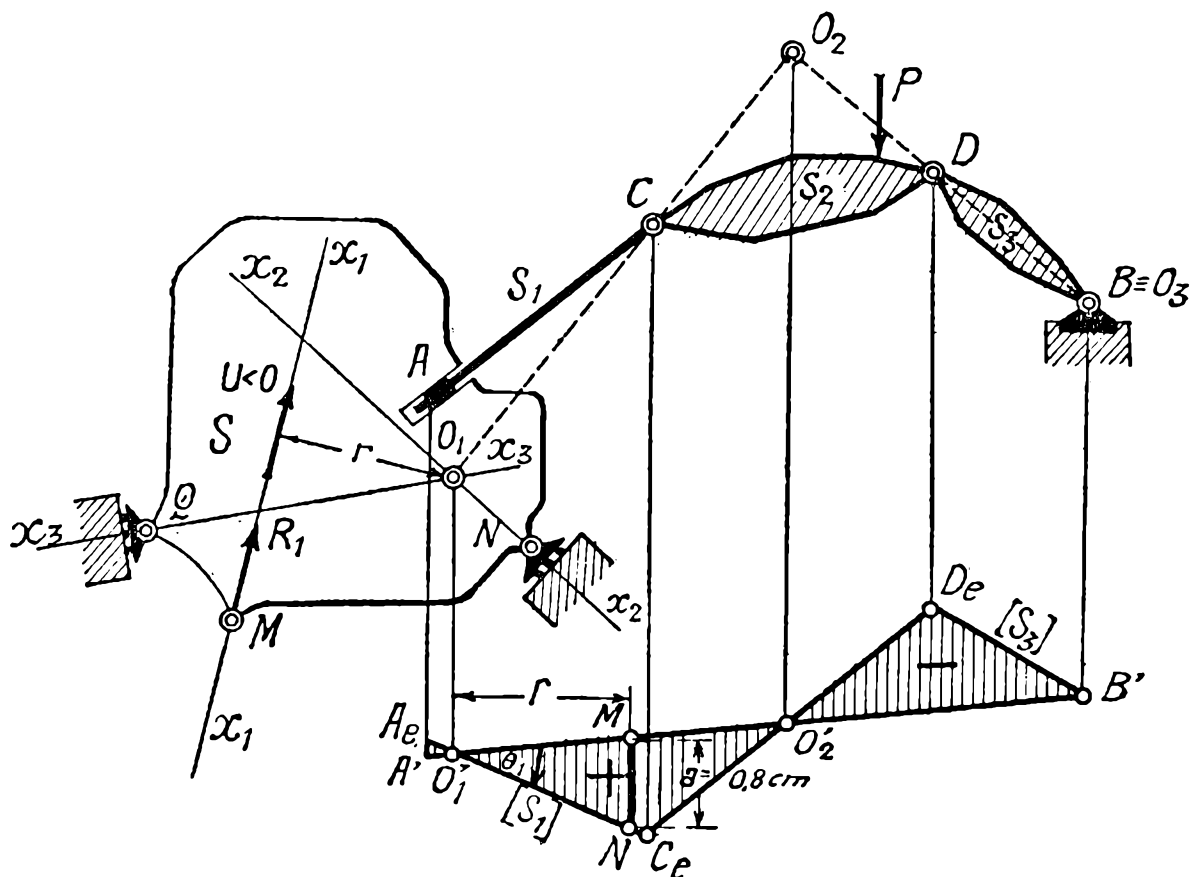


FIG. 316

563. — En la figura 316 se ha hallado la línea de influencia, para cargas verticales, de la componente R_1 , que ha sido puesta en evidencia reemplazando por la misma el apoyo móvil M normal a $x_1 x_1$ de la fig. 315 *b*.

El polo de la chapa $S \equiv S_1$ (fig. 316) es el punto O_1 en que se cortan las normales $x_2 x_2$ y $x_3 x_3$ a los apoyos móviles Q y N . Los restantes polos quedan determinados como se ve en la figura. Igualmente, la figura es suficientemente explícita en lo que se refiere al trazado de la elástica vertical $A' A, C, D, B'$ de uno de los desplazamientos posibles de dicho mecanismo.

El desplazamiento a correspondiente a la incógnita R_1 es igual al producto de la rotación θ de la chapa S_1 por la distancia r entre el polo O_1 y la recta de acción de R_1 , y se lo ha hallado gráficamente en la figura, mediante la ordenada \overline{MN} , determinada por las rectas $A_e C_e$ y $A' B'$ a una distancia horizontal r de la vertical de O_1 . Teniéndose, en la figura, $a = \overline{MN} = 0,8$ cm., la escala en que la elástica obtenida da a la línea de influencia de R_1 es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,8 \text{ cm}}.$$

En cuanto al signo, siendo positiva la rotación de la chapa S , la fuerza U de dirección R_1 capaz de originarla es del sentido de la dibujada en la figura, es decir, negativa (por serlo su proyección sobre el eje de las z). En la parte de la elástica situada abajo del eje, la línea de influencia tendrá, por consiguiente, signo positivo.

§ 2. — Sistemas de alma llena. Líneas de influencia de características

564. Líneas de influencia de momentos flectores. — Sea un sistema isostático de alma llena (fig. 317 *a*) del que se pide la línea de influencia para cargas verticales del momento flector \mathcal{M}_N^* en el punto N de su fibra media. De acuerdo con lo establecido en (364), para poner en evidencia a este momento flector articulamos el sistema en el punto N (fig. 317 *b*) y sobre dos chapas S_1 y S_2 , ligadas rígidamente a los elementos inmediatos anterior y posterior a dicha articulación, aplicamos un par de cuplas opuestas $-\mathcal{M}_N^*$ y \mathcal{M}_N^* , de intensidad absoluta incógnita igual al momento flector originado por la carga P , es decir, tales que, en el mecanismo de un grado de libertad resultante, equilibren a la fuerza P .

Una elástica vertical de una deformación cualquiera del mecanismo de un grado de libertad de la figura 317 *b* nos dará, por consiguiente, la línea de influencia buscada. Tanto la obtención de los polos de las tres chapas de dicho mecanismo como el trazado de la elástica, se detallan en la figura y no ofrecen mayor dificultad.

El desplazamiento a correspondiente al par de cuplas opuestas $-\mathcal{M}_N^*$ y \mathcal{M}_N^* que constituyen la incógnita a calcular, es la rotación relativa $\theta_{2,1}$ de la chapa S_2 con respecto a la S_1 , dada en la elástica por el ángulo infinitésimo $C_e N_e Q$. Llevando, a partir de la vertical de N un seg-

mento horizontal que, leído en la escala en que está dibujado el sistema, represente una longitud $u = 1$ m. (u otra longitud arbitraria) y siendo

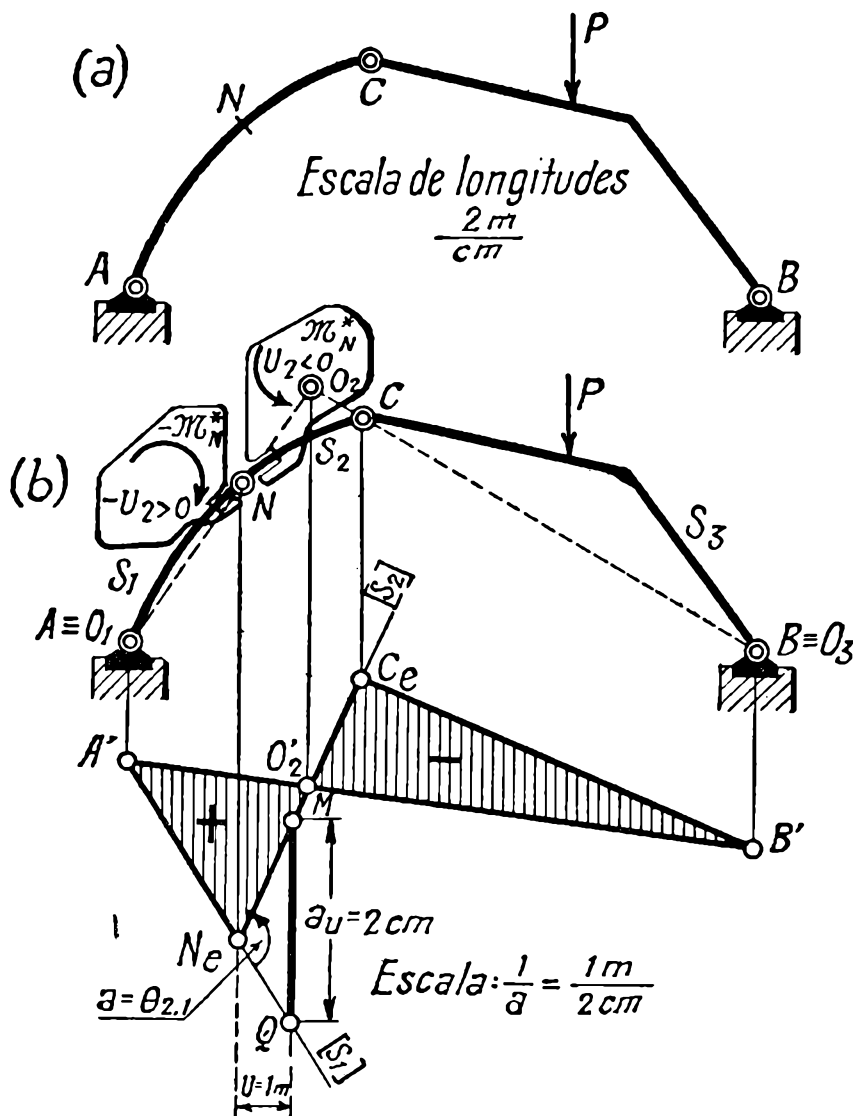


FIG. 317

la ordenada correspondiente a su extremo, comprendida entre las rectas $[S_1]$ y $[S_2]$, $\overline{MN} = a_u = 2$ cm., la rotación será

$$a = \theta_{2,1} = \frac{a_u}{u} = \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ m}},$$

y, por tanto, la escala en que la elástica obtenida da a la línea de influencia del momento flector en N, resulta

$$\frac{1}{a} = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}.$$

Por lo que se refiere al signo, siendo negativa, como indica la flecha de la figura, la rotación $\theta_{2,1}$ de la chapa S_2 con respecto a la S_1 , el par de cuplas U a aplicar en S_2 y S_1 para producir un desplazamiento del sentido del virtual obtenido, será, como el dibujado en la figura, tal que la

cupla U_2 aplicada sobre la S_2 sea también negativa. Ahora bien, como de las dos cuplas U_2 y $U_1 = -U_2$, da el momento flector (de las fuerzas que quedan a la izquierda) la U_2 aplicada sobre la chapa S_2 de la derecha (ligada al extremo izquierdo del trozo NC y que, por tanto, produce el mismo efecto que el momento de las fuerzas que actúan sobre la parte izquierda AN), la línea de influencia tendrá signo contrario a la U_2 , es decir será positiva, en las partes situadas abajo del eje.

565. Líneas de influencia de esfuerzos tangenciales. — Sea el mismo sistema (fig. 317 a) y propongámonos hallar el esfuerzo tangencial en el punto N . Para poner en evidencia a esta incógnita debemos, de acuerdo con (364), cortar el sistema en N (fig. 318) y articular las dos partes S_1 y S_2 en que queda dividida la AC , en el punto impropio de la tangente

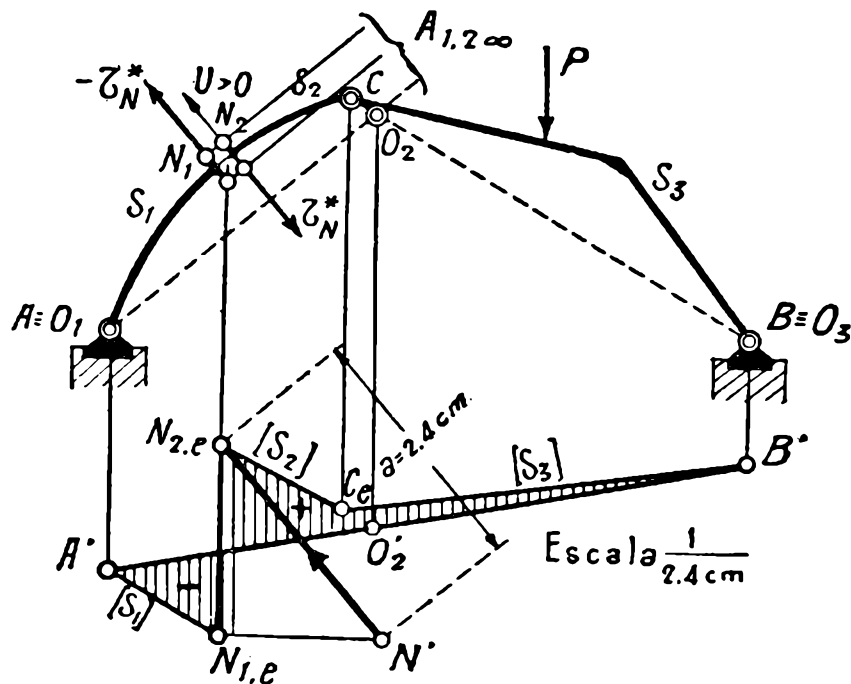


FIG. 318

a la fibra media en N , manteniendo además, el equilibrio con un par de fuerzas incógnitas T_N^* y $-T_N^*$ aplicadas respectivamente en N_2 y N_1 , como indica la figura. Obtenemos así, como en los casos anteriores, un mecanismo de un grado de libertad, la elástica vertical de uno cualquiera de cuyos desplazamientos posibles nos dará la línea de influencia buscada para cargas verticales.

Se tiene $O_1 \equiv A$ y $O_3 \equiv B$; además, el polo O_2 es la intersección de la recta $BC \equiv O_3C$ y de la $AA_{1,2\infty} \equiv O_1A_{1,2\infty}$ paralela por A a la tangente en N a la fibra media.

Tomando una recta $A'B'$ cualquiera como eje para referir la elástica, se ha trazado una recta arbitraria $A'N_{1.e}$ como elástica de la chapa S_1 . La elástica de la chapá S_2 pasa por el punto O_2' , correspondiente del O_2 ,

y es paralela a la anterior, ya que la articulación $A_{1,2\infty}$ que las liga es impropia. La elástica de la chapa S_3 es la $C_e B'$ trazada en la figura.

El desplazamiento correspondiente a la incógnita \mathcal{T}_N^* está dado por la proyección sobre ella del desplazamiento relativo del punto N_2 con respecto al N_1 . Como las chapas S_2 y S_1 experimentan una rotación relativa en torno a $A_{1,2\infty}$, es decir, una traslación relativa normal a $N_2 A_{1,2\infty}$, la dirección del desplazamiento relativo de los puntos N_2 y N_1 , que pertenecen respectivamente a las mismas, será también normal a la $N_2 A_{1,2\infty}$. Siendo por otra parte, $\overline{N_{1,e} N_{2,e}}$ la proyección vertical de dicho desplazamiento relativo, si por $N_{2,e}$ se traza una recta de la dirección del mismo, o sea, perpendicular a $N_2 A_{1,2\infty}$ y por $N_{1,e}$ una horizontal hasta cortar la anterior en N' , se tendrá en $\overline{N' N_{2,e}}$ el vector representativo del desplazamiento relativo buscado, que, siendo de la misma dirección que la incógnita \mathcal{T}_N^* , nos dá directamente el desplazamiento a correspondiente a la misma. Teniéndose en la figura $\overline{N' N_{2,e}} = a = 2,4$ cm., la escala en que la elástica obtenida nos da a la línea de influencia de \mathcal{T}_N^* es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2,4 \text{ cm}}.$$

En cuanto al signo, recordemos, previamente, que de las dos fuerzas \mathcal{T}_N^* y $-\mathcal{T}_N^*$, da el del esfuerzo tangencial (de la resultante de las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección) el de la \mathcal{T}_N^* aplicada en el punto N_2 de la derecha. Como el punto N_2 se ha desplazado con respecto a N_1 en el sentido $\overline{N' N_{2,e}}$, igual sentido, como se ha marcado \longrightarrow en la figura, tiene la fuerza U a aplicarse en N_2 sobre el mecanismo descargado para producir un desplazamiento de sentido del virtual utilizado. Como la U , así dibujada, es positiva (por serlo su proyección sobre el eje de las z), en la parte de la elástica situada abajo del eje, la línea de influencia tendrá signo negativo.

566. Líneas de influencia de esfuerzos normales. — Propongámonos, ahora, hallar la línea de influencia del esfuerzo normal en el mismo punto N del sistema anteriormente tratado (fig. 317 *a*). Para poner en evidencia esta incógnita, de acuerdo a lo establecido en (364), se ha cortado el sistema en N (fig. 319) y unido las dos partes S_1 y S_2 , en que así queda dividida la pieza AC en el punto $A_{1,2\infty}$ impropio de la normal en N a la fibra media, manteniendo el equilibrio mediante el par de fuerzas opuestas incógnitas \mathcal{N}^* y $-\mathcal{N}^*$ que constituyen el esfuerzo a calcular.

En la figura se detalla la determinación de los polos de las tres chapas del mecanismo de un grado de libertad así constituido. Tomando la recta $A'B'$ como eje de una elástica vertical, la $A'N_{1,e}$ da los desplazamientos de la chapa S_1 de uno de sus desplazamientos posibles; la elás-

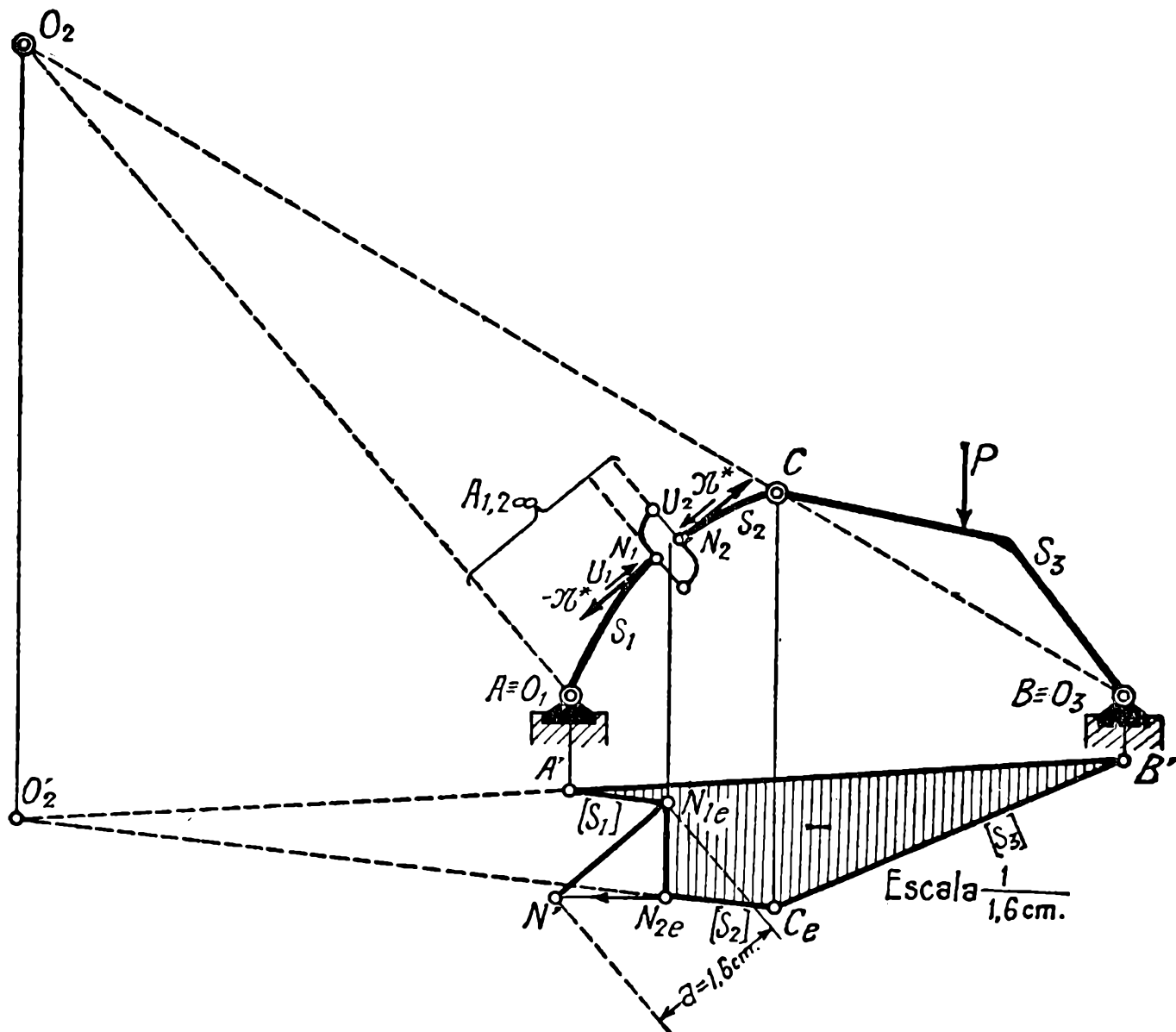


FIG. 319

tica de la chapa S_2 queda determinada por la paralela a la anterior que pasa por el punto O_2' correspondiente al O_2 , y la de la chapa S_3 por la recta $C_e B'$.

El desplazamiento correspondiente a la incógnita es, en este caso, la proyección sobre \mathcal{N}^* del desplazamiento relativo del punto N_2 con respecto al N_1 , desplazamiento este último que es normal a $N_2 A_{1,2\infty}$, por estar las chapas S_2 y S_1 , a que respectivamente ellos pertenecen, articuladas entre sí en el punto $A_{1,2\infty}$ impropio de esta dirección. Siendo, además, $\overline{N_{1,e} N_{2,e}}$ la proyección vertical de dicho desplazamiento relativo, si por $N_{1,e}$ trazamos una recta normal a $N_2 A_{1,2\infty}$ y la cortamos en N' con la horizontal determinada por $N_{2,e}$, se tendrá en $\overrightarrow{N_{1,e} N'}$ un vector re-

presentativo del desplazamiento relativo en cuestión, que, por ser de la misma dirección que \mathcal{N}^* nos da, a su vez, directamente el desplazamiento a correspondiente a esta incógnita. La escala en que la elástica obtenida da a la línea de influencia de \mathcal{N}^* es, por consiguiente,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,6 \text{ cm}} .$$

Como el punto N_2 , según indica el vector $N_{1,e} N'$ se ha desplazado hacia la izquierda con respecto al N_1 , las fuerzas opuestas U_2 y $U_1 = -U_2$ a aplicarse en N_2 y N_1 para producir un desplazamiento del sentido del obtenido, están dirigidas como las dibujadas en la figura. Ahora bien, la fuerza U_2 hace trabajar a la tracción a la parte N_2C sobre la que actúa (lo mismo que la U_1 a la N_1A) y es, por tanto, de acuerdo con la convención de signos adoptada (458), un esfuerzo normal positivo. En la parte de la elástica situada abajo del eje, es decir, para este caso en toda la elástica, corresponde, por consiguiente, signo negativo a la línea de influencia.

567. Líneas de influencia de las tensiones unitarias en las fibras más alejadas del eje neutro. — Sea el sistema de alma llena de la figura 320 *a*, en el que las líneas ab y $a'b'$ representan las fibras exteriores de la pieza AC y mn y $m'n'$ los lugares geométricos de los extremos de los núcleos centrales de sus secciones. Propongámonos hallar la línea de influencia de la tensión unitaria σ_1 en el punto Q_1 de la fibra superior. Sabemos, según lo establecido en (462), que dicha tensión es proporcional al momento flector en el punto Q_1' , extremo opuesto a Q_1 del núcleo central de la sección ss' a que pertenece. Comenzaremos, pues, por hallar la línea de influencia del momento flector en dicho punto Q_1' .

Para poner en evidencia este momento flector, introduzcamos una articulación en el punto Q_1' (fig. 320 *b*) y en dos chapas S_2 y S_1 ligadas rígidamente a los elementos adyacentes, apliquemos cuplas opuestas \mathcal{M}^* y $-\mathcal{M}^*$ de intensidad incógnita, que mantengan en equilibrio el sistema cargado con la fuerza P .

La determinación de los polos de las chapas del mecanismo de un grado de libertad así obtenido y el trazado de la elástica vertical de uno de sus desplazamientos posibles, se efectúan en la figura y no presentan ninguna dificultad.

El desplazamiento correspondiente a la incógnita \mathcal{M}^* es la rotación $\theta_{2,1}$ de la chapa S_2 , en que actúa, respecto a la S_1 ; esta rotación está dada en la elástica por el ángulo infinitésimo $MQ'_{1,e} N$. Midiendo la ordenada

\overline{MN} en correspondencia a una distancia horizontal $u = 2$ m. contada a partir de la vertical del polo relativo Q'_1 , se tiene, en la figura, $a_u = \overline{MN} = 2,2$ cm., y, por tanto,

$$a = \theta_{2,1} = \frac{a_u}{u} = \frac{2,2 \text{ cm}}{2 \text{ m}}.$$

La escala en que la elástica $A'Q'_1, C_e B'$ obtenida da a la línea de influencia del momento flector en el extremo Q'_1 del núcleo central es

$$\frac{1}{a} = \frac{2 \text{ m}}{2,2 \text{ cm}}.$$

Siendo negativa la rotación $\vartheta_{2,1}$ de la chapa S_2 respecto de la S_1 , el par de cuplas opuestas U , capaz de producir un desplazamiento del sentido

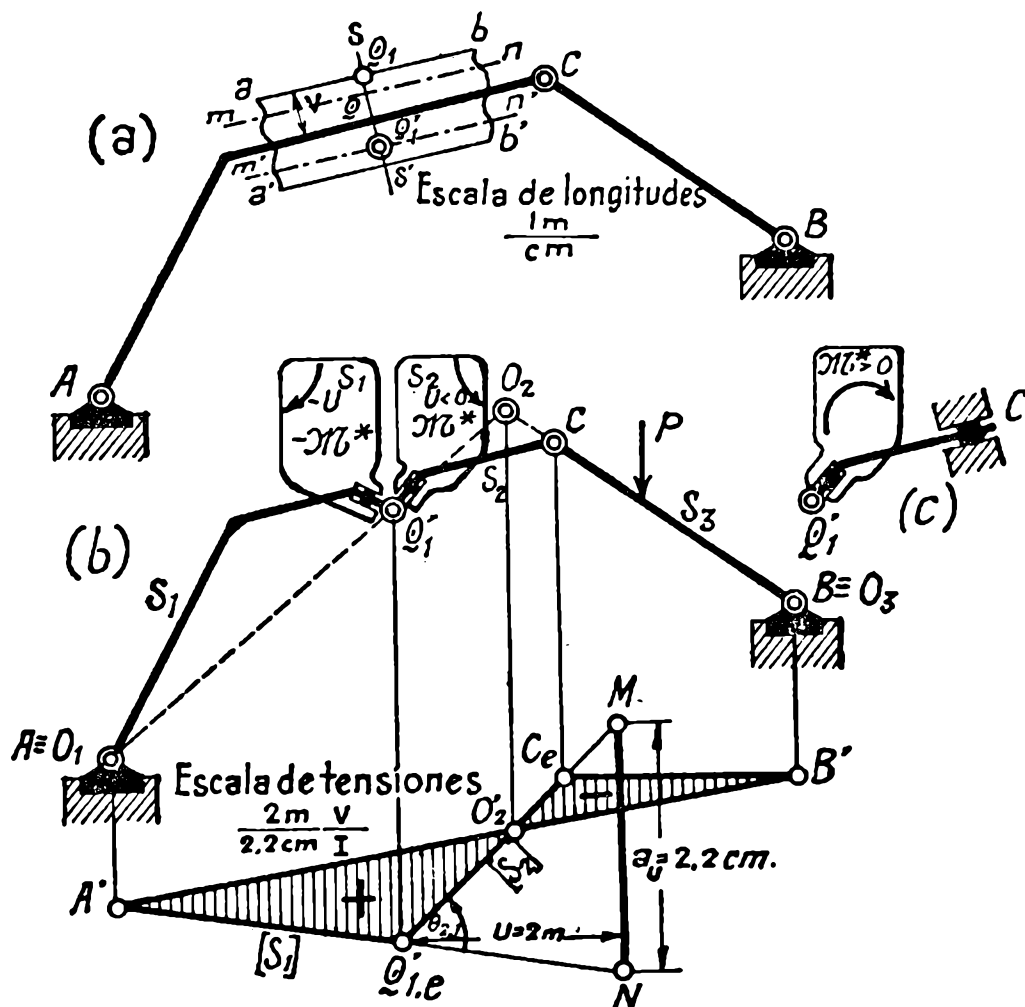


FIG. 320

del virtual utilizado, es como el dibujado en la figura, y le corresponde signo negativo a la cupla aplicada sobre la chapa S_2 . En la parte de la elástica situada debajo del eje, la línea de influencia de M^* tiene, por tanto, signo positivo.

568. — Hallada, como queda dicho, la línea de influencia del momento flector en Q_1' , y calculado el valor de este último correspondiente a un estado cualquiera de cargas, la tensión σ_1 en Q_1 se obtiene directamente, en función del mismo, en la forma establecida en (462): Así, si v es la distancia entre el punto (fig. 320 a) Q de fibra media y el Q_1 e I el momento de inercia de la sección ss' , se tendrá

$$\sigma_1 = \frac{\mathcal{M}^*}{I} \cdot v.$$

Siendo proporcionales σ_1 y \mathcal{M}^* , la línea de influencia de \mathcal{M}^* puede considerarse también como línea de influencia de σ_1 en una nueva escala dada por el producto de la de \mathcal{M}^* por $\frac{v}{I}$, es decir, en la escala

$$\frac{2 \text{ m}}{2,2 \text{ cm}} \cdot \frac{v}{I}.$$

En cuanto al signo de la línea de influencia, considerada como línea de influencia de σ_1 , obsérvese que, como se deduce de la figura 320 c, un momento flector \mathcal{M}^* positivo aplicado en la chapa S_2 origina en las fibras superiores tensiones de compresión, o sea, negativas y que, por tanto, los signos de σ_1 y \mathcal{M}^* son contrarios. Considerando, pues, el diagrama obtenido como línea de influencia de σ_1 , habría que cambiar los signos marcados en el mismo (*).

§ 3. — Sistemas de reticulado. Líneas de influencia de tensiones en las barras

569. Líneas de influencia de tensiones en las barras de cordón. — Sea un sistema de reticulado (fig. 321 a) del que nos proponemos hallar la línea de influencia de la tensión en la barra MN del cordón superior, para cargas verticales que actúen sobre el cordón inferior.

En la fig. 321 b se ha puesto en evidencia a la tensión T en dicha barra, suprimiéndola y haciendo actuar en su reemplazo un par de fuerzas opuestas T , que mantienen el equilibrio en el mecanismo resultante

(*) Si se tratara de la línea de influencia de la tensión en un punto de la fibra inferior, \mathcal{M}^* y σ_1 tendrían en cambio el mismo signo, pues la cupla \mathcal{M}^* (fig. 320 c) positiva hace trabajar a la tracción a dicha fibra inferior.

cargado con la fuerza P (*). En esta forma el sistema se ha convertido en la cadena cinemática de cuatro chapas y de un grado de libertad representada en dicha figura; la determinación de sus polos y el trazado de la elástica vertical de uno de sus desplazamientos posibles, se deduce, sin mayor dificultad, de la misma.

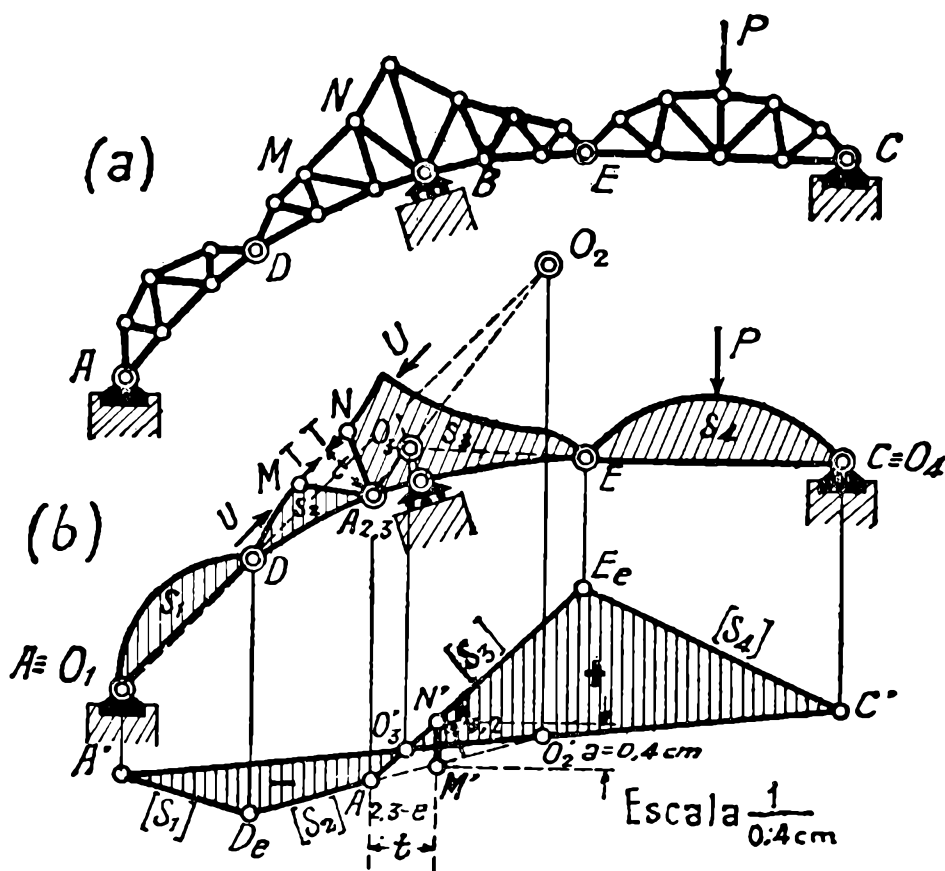


FIG. 321

El desplazamiento a correspondiente a la incógnita, es, en este caso, la variación de distancia entre los puntos M y N . La rotación relativa $\vartheta_{3,2}$ de las chapas S_3 y S_2 a que pertenecen los puntos N y M tiene lugar en torno a la articulación $A_{2,3}$ que las liga y su intensidad está dada en la figura por el ángulo infinitésimo $M' A_{2,3e} N'$ que forman las rectas $[S_3]$ y $[S_2]$, elásticas verticales de dichas chapas; siendo, por otra parte, t la distancia entre el polo relativo $A_{2,3}$ y la recta MN que une los puntos considerados, la variación de distancia buscada estará dada por la ordenada $\overline{M'N'}$ comprendida entre las $[S_2]$ y $[S_3]$, a una distancia horizontal t de la vertical de $A_{2,3}$, como indica la figura. De ésta se deduce que $a = \overline{M'N'} = 0,4$ cm., y, por tanto, la escala en que la elástica $A'D_eE_eC'$ obtenida da a la línea de influencia de la tensión T en la barra MN , es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,4 \text{ cm}}$$

(*) Estas fuerzas no se hacen actuar por intermedio de un resorte equivalente a la barra suprimida, como se ha establecido en (363), por tratarse de un sistema isostático, en cuyo cálculo no entra en cuenta la deformación de dicho resorte.

La rotación relativa de la chapa S_3 respecto de la S_2 es negativa, como se marca en la figura; es decir que, dejando fija la chapa S_2 , la S_3 gira con respecto a ella, en torno a $A_{2,3}$, en sentido negativo. La fuerza U a aplicar en N para producir un desplazamiento de dicho sentido tiene, por tanto, que estar dirigida hacia la izquierda, como se ve en la figura; a la inversa la opuesta que debe aplicarse en M se dirigirá hacia la derecha. Como este par de fuerzas U , por acercarse una a otra, corresponde a una tensión de tracción, o sea, positiva (*), en la parte de la elástica situada debajo del eje, la línea de influencia de T tiene signo negativo, como se ha marcado en la figura.

570. — Sea, ahora, el sistema de la figura 322 *a*, del que hallaremos la línea de influencia de la tensión en la barra MN del cordón inferior para cargas verticales que actúan directamente sobre el mismo.

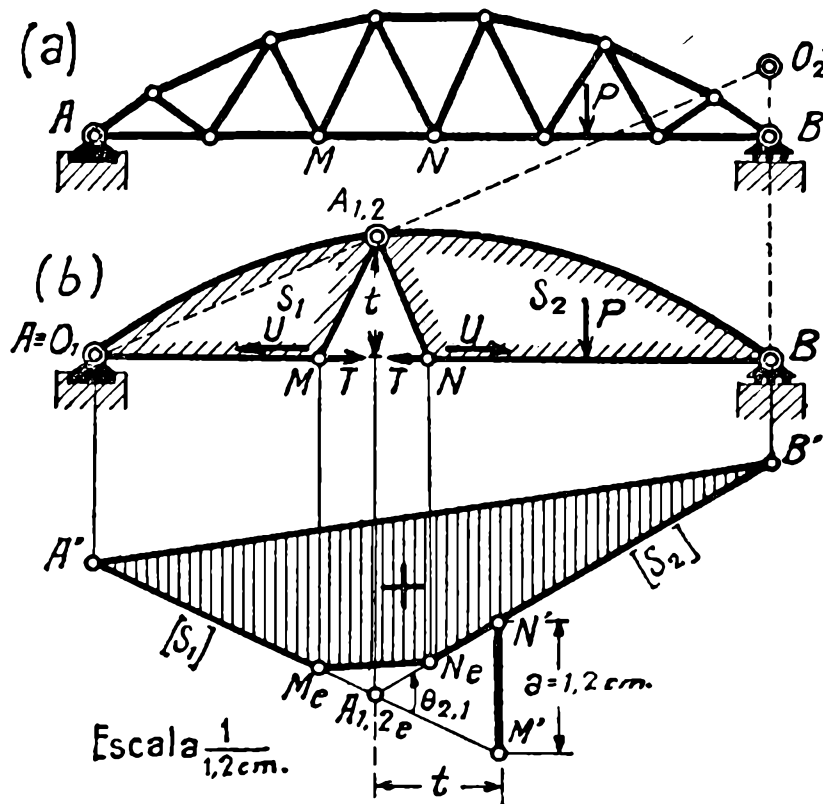


FIG. 322

La figura es suficientemente explícita en lo que respecta a la forma de poner en evidencia la incógnita T y al trazado de la elástica vertical $A'A_{1,2}B'$ de uno de los desplazamientos posibles del mecanismo resultante. Actuando la carga sobre el cordón inferior, las elásticas de las chapas S_1 y S_2 son útiles solamente en las partes $A'M_e$ y $B'N_e$, respectivamente. Entre M_e y N_e , la línea de influencia está dada por la recta $M_e N_e$.

(*) Debe tenerse en cuenta que se trata de las acciones que la barra transmite al reticulado, opuestas a las fuerzas que actúan sobre la barra misma.

El desplazamiento a correspondiente a la incógnita, dado por la variación de distancia entre los puntos M y N , es el segmento $\overline{M'N'} = 1,2$ cm., determinado como se ve en la figura, siendo t la distancia entre el punto $A_{1,2}$ de articulación de las chapas S_1 y S_2 y la recta que une los puntos M y N . La escala de la línea de influencia obtenida es, por consiguiente,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,2 \text{ cm.}}$$

Por lo que respecta al signo, siendo negativa la rotación relativa $\theta_{2,1}$, en torno a $A_{1,2}$ de la chapa S_2 respecto de la S_1 , las fuerzas U aplicadas en M y N capaces de producir un desplazamiento de dicho sentido, corresponden, como las dibujadas en la figura, a una tensión de compresión, o sea, negativa. Abajo del eje, la línea de influencia tendrá, pues, signo positivo.

571. Líneas de influencia de las tensiones en montantes y diagonales. — Sea el sistema de la figura 323 *a*, del que queremos trazar la línea de influencia de la tensión en la diagonal MN . El mecanismo de la figura 323 *b*, es el que se obtiene al poner en evidencia a dicha incógnita. En la misma figura se representa la elástica vertical $A'M_e Q_e C_e B'$ de uno de sus desplazamientos posibles. Suponemos que la línea de influencia que buscamos sea para cargas que actúen sobre el cordón superior; por esta causa las elásticas $[S_1]$ y $[S_2]$ de las chapas S_1 y S_2 , se han limitado a las partes correspondientes a las proyecciones de AM y QC de los cordones superiores de las mismas, y entre los puntos Q_e y M_e se ha trazado la recta $Q_e M_e$, elástica de la barra de cordón $s \equiv MQ$.

El desplazamiento a correspondiente a la incógnita T está dado por la variación de distancia entre los puntos M y N ; la rotación relativa de las chapas S_1 y S_2 a que pertenecen, que tiene lugar en torno a la articulación ficticia $A_{1,2}$, está dada por el ángulo infinitésimo $M'A_{1,2}N'$ que foman las elásticas verticales $[S_1]$ y $[S_2]$ de dichas chapas, y siendo t la distancia entre el punto $A_{1,2}$ y la recta MN , la variación de distancia buscada, queda determinada por el segmento $\overline{M'N'} = 3$ cm., hallado como se indica en la figura, es decir, que determinan las rectas $[S_1]$ y $[S_2]$ a una distancia horizontal t de la vertical de $A_{1,2}$. La escala en que la elástica obtenida da a la línea de influencia de la tensión en la diagonal \overline{MN} es, pues,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3 \text{ cm.}}$$

En cuanto al signo, observemos que la chapa S_2 ha girado respecto de la S_1 en torno al punto $A_{1,2}$, en el sentido negativo, es decir que, dejando fija la S_1 , la S_2 experimenta una rotación en torno a $A_{1,2}$ de sentido negativo, que se obtendría aplicando en N una fuerza U dirigida

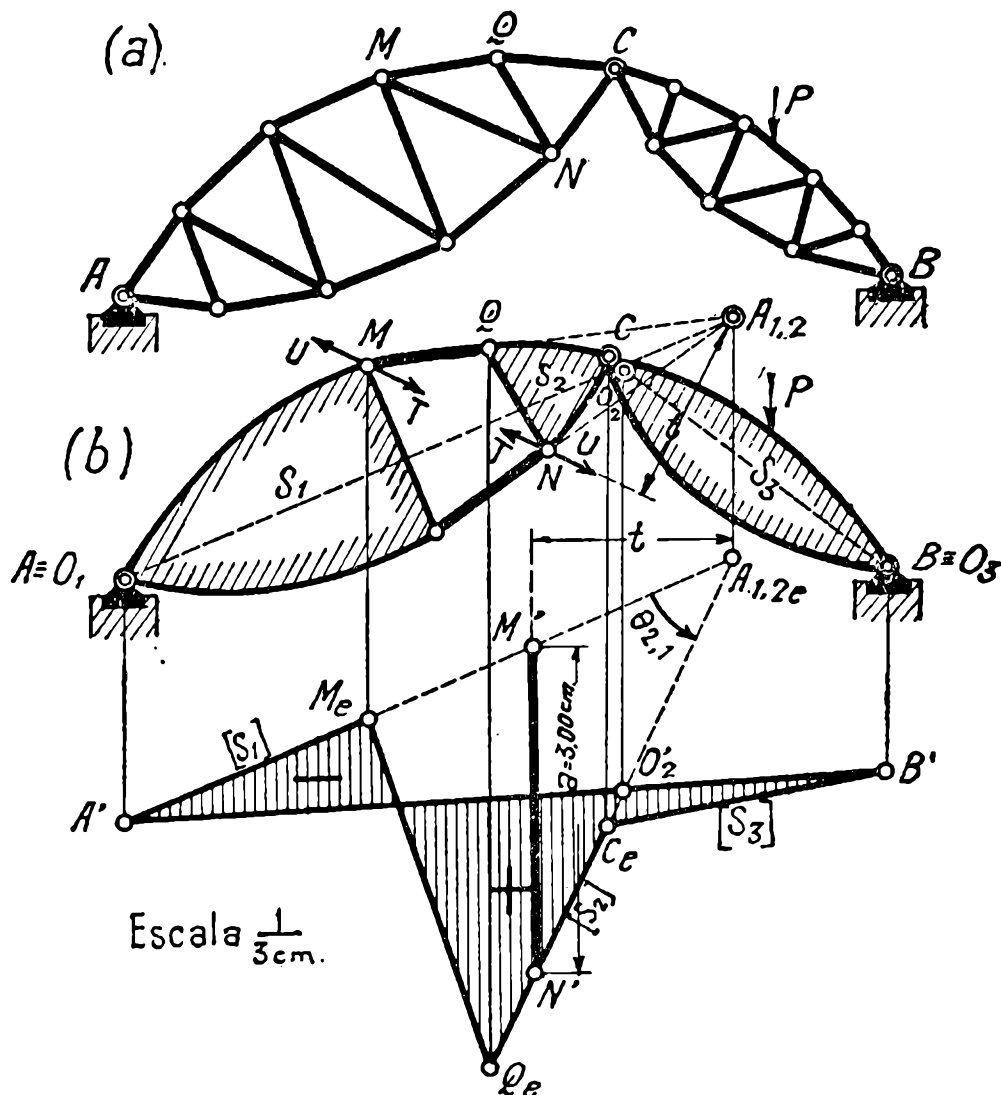


FIG. 323

hacia abajo, como indica la figura. Como la fuerza a aplicar en M debe ser opuesta, las fuerzas U capaces de producir un desplazamiento virtual del sentido utilizado, corresponden a una tensión de compresión, o sea, negativa, y, abajo del eje, la línea de influencia tendrá, por consiguiente, signo positivo.

572. Líneas de influencia de la tensión en una diagonal o montante en el caso en que los cordones sean paralelos. — Sea a determinar la línea de influencia, para cargas verticales que actúan sobre el cordón superior, de la tensión en la diagonal MN (figura 324 a). El sistema de la figura 324 b es el mecanismo de un grado de libertad que se obtiene al suprimir la barra MN para poner en evidencia a la incógnita que se trata de calcular. Como se ve, las chpas S_1

y S_2 resultan articuladas ficticiamente entre sí en el punto impropio $A_{1,2\infty}$ de la dirección común de las barras MR y QN de cordón. La elástica vertical de uno de los desplazamientos posibles del mecanismo así obtenido, constituida por el diagrama $A'M_eR_eC_eB'$, se halla fácilmente, como se deduce con suficiente claridad de la figura.

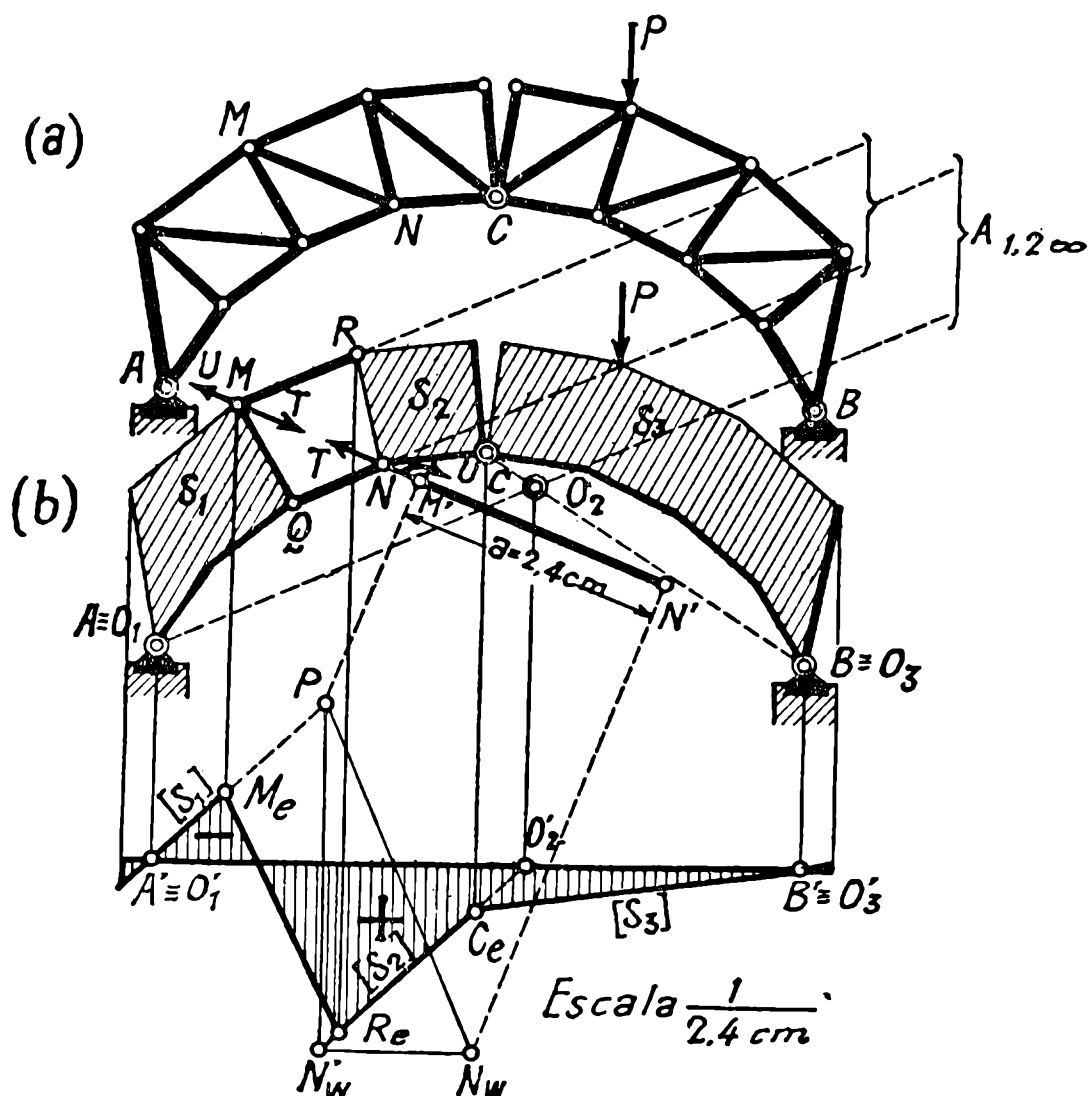


FIG. 324

El desplazamiento a correspondiente a la incógnita es, como en los casos anteriores, la variación de distancia entre los puntos M y N de aplicación de las fuerzas T . La chapa S_2 , en el desplazamiento dado, ha experimentado con respecto a la S_1 una rotación relativa en torno al punto $A_{1,2\infty}$, o sea, una traslación relativa normal a la recta $NA_{1,2\infty}$ cuya proyección vertical está dada por el vector pN'_w , determinado por el segmento vertical comprendido entre las rectas $[S_1]$ y $[S_2]$ representativas de las elásticas de dichas chapas. Trazando por p una perpendicular a $NA_{1,2\infty}$, (paralela a la dirección del desplazamiento relativo) y por N'_w una horizontal hasta cortarla en N_w , el vector pN_w será el representativo de dicho desplazamiento relativo; el punto

→

N , pues, de la chapa S_2 , se ha desplazado, con respecto al mismo punto considerado como perteneciente a la S_1 , según el vector pN_w . La proyección $\overline{N'M'}$ de este vector sobre la dirección MN de la barra suprimida dará la variación de distancia del punto N de la chapa S_2 con respecto al mismo considerado como perteneciente a la S_1 , es decir, la variación de dos puntos cualesquiera de las chapas pertenecientes a la recta MN , dado que éstas experimentan una traslación relativa. La variación de distancia buscada entre los puntos M y N es, por consiguiente, $a = \overline{M'N'} = 2,4$ cm. La escala en que el diagrama obtenido da a la línea de influencia de la tensión T en la diagonal NM es, por tanto,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2,4 \text{ cm}}.$$

Por lo que respecta al signo, el vector pN_w indica que la chapa S_2 se ha desplazado con respecto a la S_1 hacia abajo; la fuerza U a aplicar en N , capaz de producir en el mecanismo de un grado de libertad un desplazamiento de dicho sentido, deberá estar, por tanto, también dirigida hacia abajo, como la marcada en la figura, y de signo contrario será, además, la que corresponda aplicar en M . Como este par de fuerzas U representa una tensión de compresión (negativa), la línea de influencia tendrá signo positivo en las partes situadas abajo del eje.

573. — Si los cordones paralelos son horizontales como los del sistema representado en la figura 325 a , al suprimir la diagonal MN (fig. 325 b) el desplazamiento relativo entre las chapas S_2 y S_3 es vertical y está dado directamente por el segmento vertical $\overline{pN_w} = \overline{pN'_w}$ comprendido entre las rectas $[S_2]$ y $[S_3]$.

La variación de distancia entre M y N es, por tanto, como se indica claramente en la figura, la proyección $\overline{M'N'}$ de $\overline{pN_w}$ sobre la dirección de la barra MN .

574. Líneas de influencia de las tensiones en algunas barras especiales. — Propongámonos hallar la línea de influencia de la tensión en el montante MB (fig. 326 a), para cargas que actúan sobre el cordón inferior. La figura 326 b nos da el mecanismo de un grado de libertad que se obtiene al suprimir la barra MB con el objeto de poner en evidencia la tensión a calcular; asimismo nos proporciona la elástica vertical de uno de los desplazamientos posibles de dicho mecanismo, con

sus lados limitados en correspondencia al cordón inferior, cuya obtención no ofrece ninguna dificultad.

Para hallar el desplazamiento a correspondiente a la incógnita, es decir, la variación de distancia entre los puntos M y B , trazaremos la elástica de la barra MR , que consideraremos como una nueva chapa S_a .

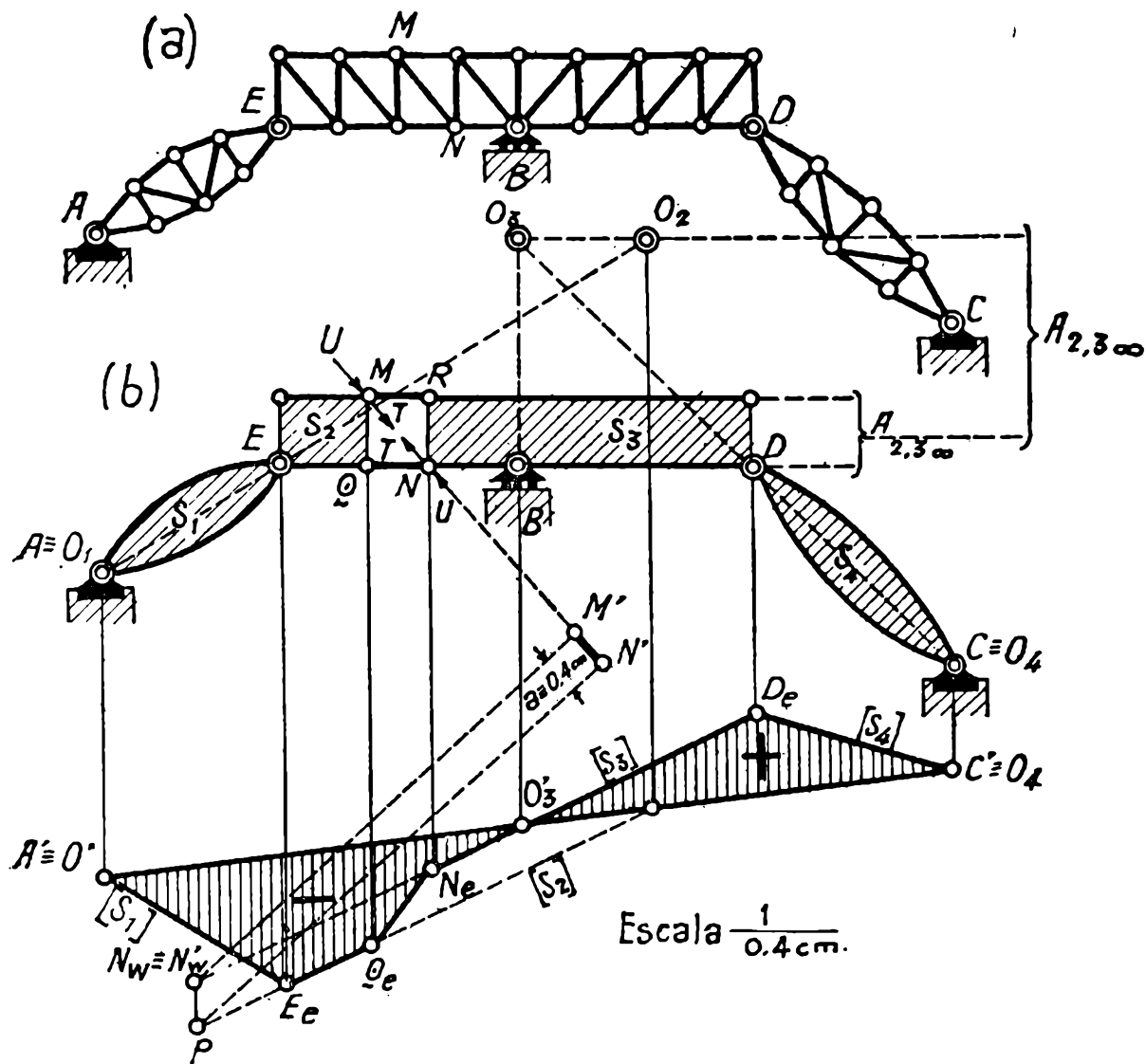


FIG. 325

Estando articulada la S_a con la S_3 en el punto R , su polo se encuentra sobre la RO_3 ; además, por estar la S_a articulada con la S_2 ficticiamente en el punto $A_{2,a}$, su polo también debe encontrarse en la $O_2 A_{2,a}$ y es, por tanto, el punto O_a de intersección de dichas rectas. La elástica $[S_a]$ de la chapa S_a , será, por consiguiente, la $O'_a R_e$. La rotación relativa de las chapas S_a y S_3 en torno a su punto R de articulación, está dada por el ángulo infinitésimo $M' R_e N'$ que forman las rectas $[S_a]$ y $[S_3]$; llevando, pues, a partir de la vertical de R , una distancia horizontal igual a la t existente entre dicho punto y la barra MB , la ordenada $\overline{N'M'} = 0,7$ cm., que dichas rectas determinan en correspondencia de su extremo, nos da la variación de distancia a buscada.

La escala de la línea de influencia obtenida, es, por consiguiente,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,7 \text{ cm.}}$$

En cuanto al signo, siendo negativa la rotación relativa $\theta_{a,3}$, el punto M , en el desplazamiento relativo en torno a R de la chapa S_a a

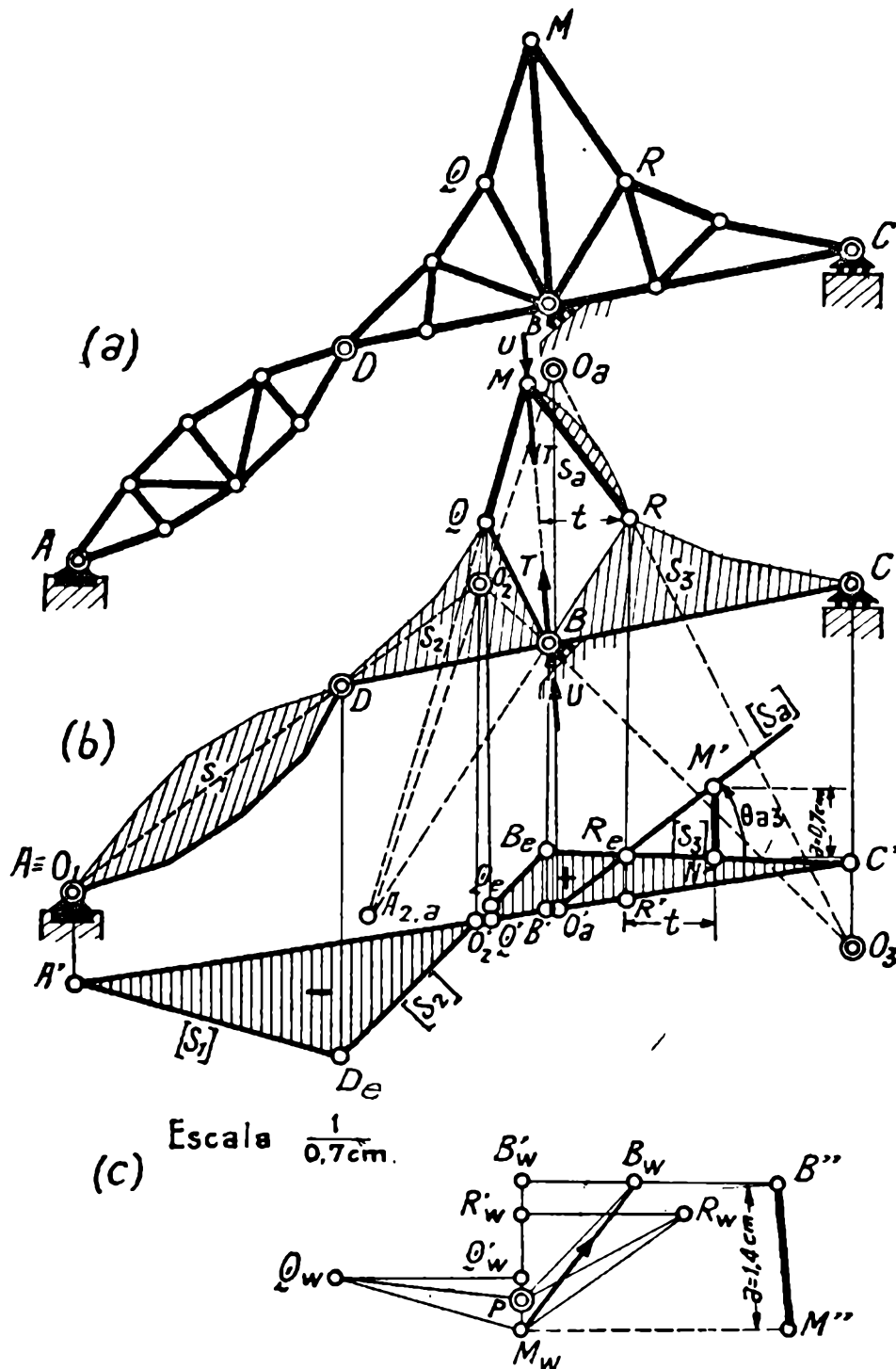


FIG. 326

que pertenece con respecto a la S_3 , se desplaza hacia abajo, y el par de fuerzas U capaz de producir un desplazamiento de dicho sentido co-

responde a una tensión de tracción (positiva). Abajo del eje la línea de influencia tiene, por tanto, signo negativo.

575. — La variación de distancia a entre los puntos M y B de la elástica anterior, es decir, la inversa de la escala de la línea de influencia que constituye, puede también hallarse con comodidad mediante un diagrama auxiliar de Williot-Mohr. Comencemos para ello por representar en un Williot de polo p (fig. 326 *c*) los puntos B_w , Q_w y R_w . El desplazamiento vertical del punto B queda dado por el vector pB'_w igual al segmento $B'B_e$ tomado en la elástica de la figura 326 *b* (*). Por otra parte, el punto B se desplaza normalmente a la BO_3 que lo une con el polo de la chapa a que pertenece y sobre una paralela a dicha normal, trazada por p deberá encontrarse el \bar{B}_w ; siendo $\overline{pB'_w}$ la proyección vertical del desplazamiento de dicho punto, el B_w también deberá encontrarse sobre la horizontal de B'_w y será, por consiguiente, el punto de intersección de dichas rectas. En igual forma se han hallado en la figura los puntos Q_w y R_w ; $\overline{pQ'_w}$ y $\overline{pR'_w}$ son iguales respectivamente a $\overline{Q'Q_e}$ y $\overline{R'R_e}$; además, pQ_w y pR_w son respectivamente perpendiculares a QO_2 y RO_3 .

Obtenidos los puntos Q_w y R_w , el punto M_w , correspondiente al M , ligado con los Q y R mediante barras rígidas, se obtiene trazando por Q_w y R_w rectas respectivamente perpendiculares a QM y RM . El vector $B_w M_w$ da el desplazamiento relativo del punto M con respecto al B , y su proyección $\overline{B''M''}$ sobre la dirección de la barra MB , proporciona, finalmente, la variación de distancia buscada entre dichos puntos.

576. — Propongámonos, ahora, como nuevo ejemplo, hallar la línea de influencia de la tensión en el tensor MN (fig. 327 *a*). La figura 327 *b* representa al mecanismo de un grado de libertad que se obtiene al poner en evidencia dicha incógnita y nos da, además, la elástica vertical $A'D_eB_e$ de uno de sus desplazamientos posibles.

La variación de distancia $a = \overline{N'M'} = 2$ cm., entre los puntos N y M , se determina claramente en la figura, valiéndose de la rotación relativa $\theta_{3,2}$ de las chapas S_3 y S_2 a que pertenecen.

Siendo negativa esta rotación relativa, el punto N se ha desplazado con respecto a la chapa S_2 , supuesta fija, hacia la derecha, y el par de

(*) Para mayor claridad, y dada la pequeñez de los vectores, se han tomado en escala doble de la elástica.

fuerzas U capaces de producir un desplazamiento del sentido del virtual utilizado, corresponden a una tensión de compresión (negativa),

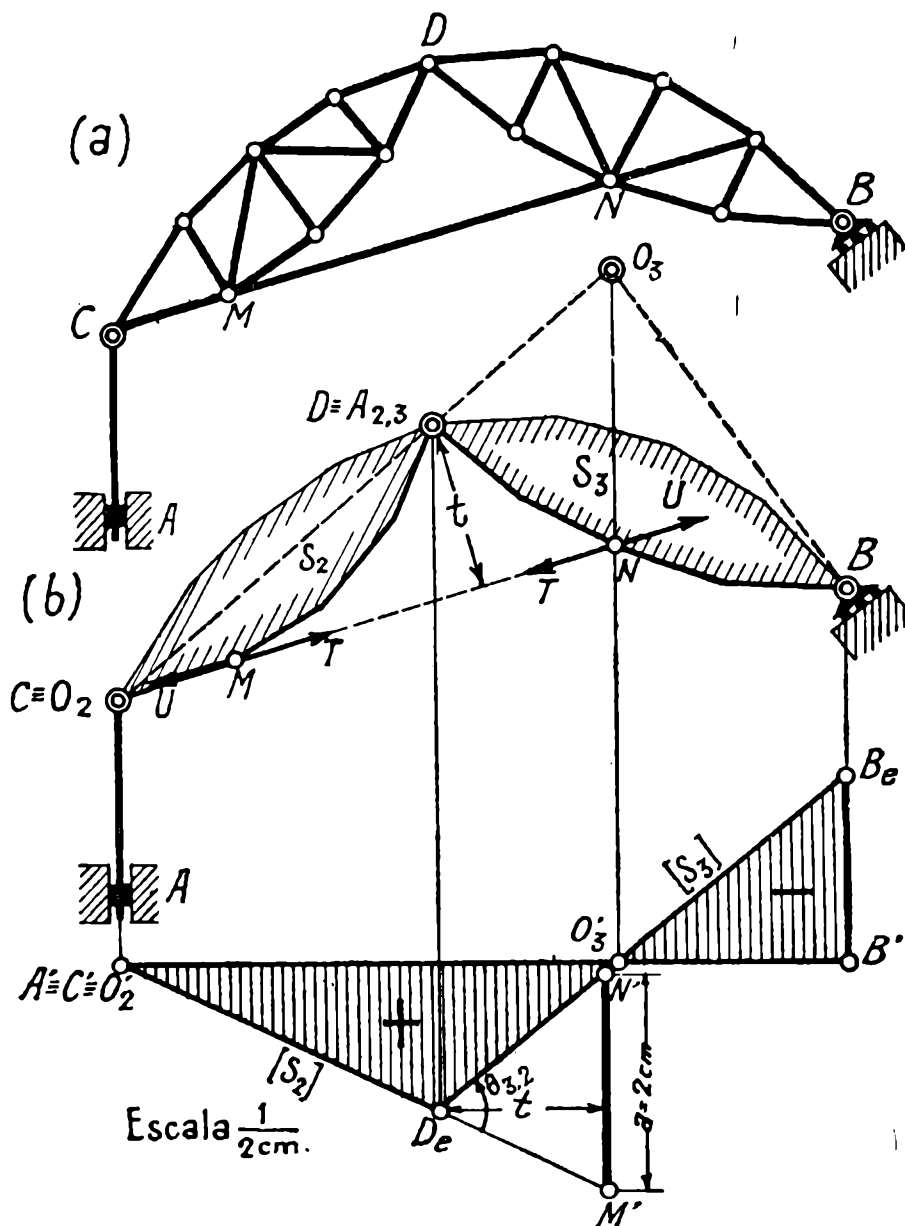


FIG. 327

como las dibujadas en la figura. Abajo del eje, la línea de influencia tiene, por consiguiente, signo positivo.

§ 4. — Casos particulares

577. Casos en que los polos de las chapas caen fuera de los límites del dibujo. — En lo que antecede, nos hemos colocado siempre en el caso en que los polos de las chapas de los mecanismos de un grado de libertad obtenidos al poner en evidencia las incógnitas a calcular, caigan dentro de los límites del dibujo. A continuación aplicamos a diversos ejemplos concretos los procedimientos a seguir cuando ello no se realiza.

No es posible dar al respecto una regla general, dependiendo de las circunstancias de cada ejemplo particular los artificios a que debe recurrirse para salvar la dificultad.

Por lo común, las elásticas se podrán trazar sin conocer los polos que salen fuera de los límites del dibujo, valiéndose de diagramas auxiliares de Williot-Mohr, como se efectúa en algunos de los ejemplos que pasamos a exponer, suficientes para que el lector se forme juicio sobre la marcha a seguir en casos análogos.

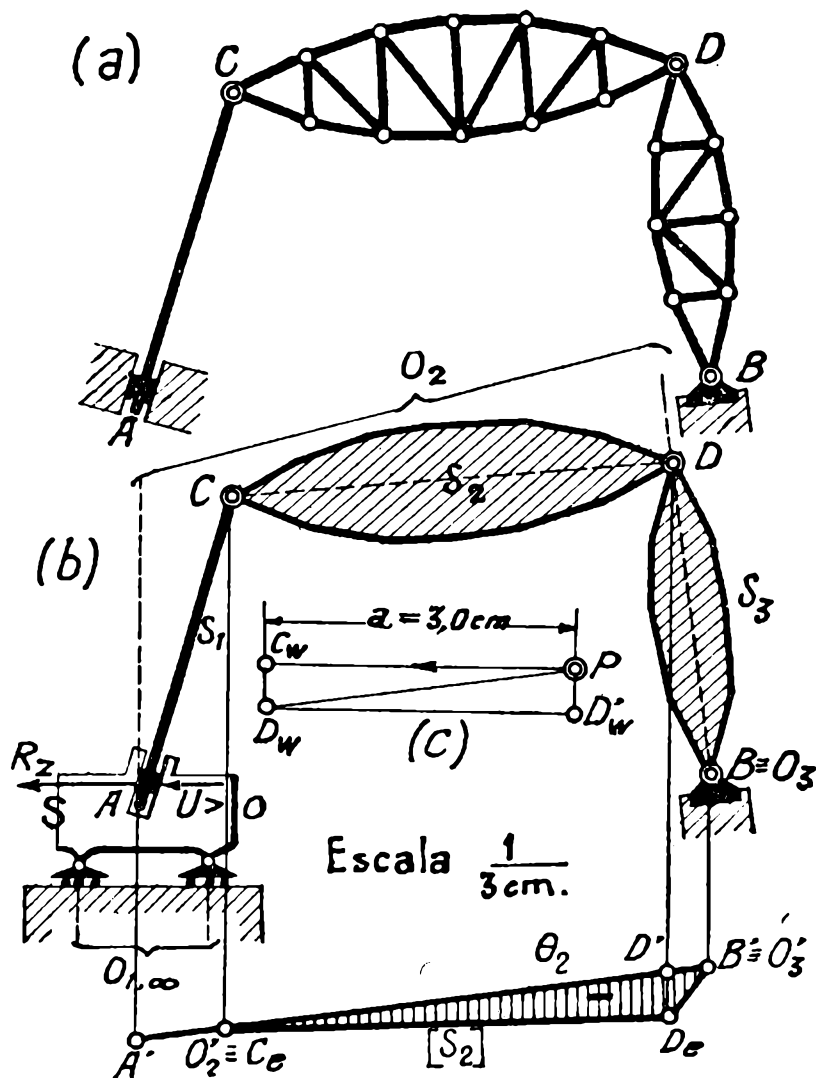


FIG. 328

Sea el sistema de la figura 328 *a*, del que queremos la línea de influencia de la reacción horizontal R_2 en el empotramiento *A*. Se trata del ejemplo estudiado en (560), pero al poner en evidencia la fuerza R_2 a calcular (fig. 328 *b*), el polo O_2 del mecanismo de un grado de libertad resultante, intersección de la vertical $CO_{1\infty}$ y de la BD , cae fuera de los límites del dibujo.

Por lo que respecta al trazado de la elástica, esta circunstancia no ofrece ninguna dificultad, ya que estando el polo O_2 sobre la vertical de *C*, el lado $[S_2]$, correspondiente a la chapa S_2 , pasará por el punto $O'_2 \equiv C_e$, intersección de dicha vertical con el eje $A'B'$.

En cuanto al desplazamiento a correspondiente a la incógnita R_z , dado por el desplazamiento horizontal del punto C , igual al de cualquier otro de las chapas solidarias entre sí S_1 y S , no es posible recurrir para determinarlo al procedimiento expuesto en (560), dado que no se conoce a O_2 . Se salva la dificultad hallando dicho desplazamiento del punto C mediante un Williot. Tomando un punto p como polo para el mismo, el punto D_w debe encontrarse sobre una perpendicular pD_w a la BD por ser ésta la dirección del desplazamiento de D . De la figura se deduce, además, que $\overline{D'D_e}$ es la proyección vertical del desplazamiento de este punto. Llevando, pues, un segmento $\overline{pD'_w} = \overline{D'D_e}$, y trazando por D'_w una horizontal, su intersección con pD_w nos da precisamente a D_w . Obtenido este punto, observemos que el C_w debe encontrarse sobre una normal a DC trazada por D_w , ya que ésta es la dirección del Williot de la recta DC ; a su vez, desplazándose el punto C horizontalmente, por pertenecer a la chapa $S \equiv S_1$, debe encontrarse también sobre la horizontal de p . El punto de intersección de las rectas de estas direcciones nos da, pues, al C_w , y en $\overline{pC_w} = 3 \text{ cm.}$, se tiene el desplazamiento a buscado; la escala de la línea de influencia es, por consiguiente,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3 \text{ cm.}}$$

578: — Consideremos, ahora, el mismo sistema, pero propongámonos hallar la línea de influencia del momento R_3 de la reacción en el empotramiento A , con respecto al punto A . Se trata del caso estudiado en (561); pero puesta en evidencia la incógnita R_3 como indica la figura 329, el polo O_2 de la chapa S_2 sale fuera de los límites del dibujo. Los polos de las otras dos chapas se conocen, siendo $O_1 \equiv A$ y $O_3 \equiv B$.

Salvaremos la dificultad recurriendo también a un Williot auxiliar. Tomada la recta cualquiera $A'B'$ como eje de la elástica, el lado correspondiente a la chapa S_1 es una recta cualquiera $A'C_e$ que pasa por A' . Sea p el polo del Williot y busquemos el punto D_w . Se tiene $p \equiv B_w$; y el punto C_w deberá encontrarse sobre la perpendicular pC_w a la recta AC y, además, llevando un segmento vertical $\overline{pC'_w} = \overline{C'C_e}$, sobre la horizontal $C'_w C_w$, con lo que queda determinado. Conocidos los puntos B_w y C_w , el D_w queda dado por la intersección de las perpendiculares a BD y CD , respectivamente trazadas por los mismos.

Trazando por D_w una horizontal hasta encontrar la vertical de p se tiene en $\overline{pD'_w}$, la proyección vertical del desplazamiento que experimenta el punto D durante el desplazamiento virtual considerado, es de-

cir, durante el desplazamiento para el que la elástica de la primera chapa S_1 es la $A'C_e$ trazada en la figura. Llevando, pues, en correspondencia al punto D un segmento $\overline{D'D_e} = \overline{pD'_w}$, se tendrá el punto D_e de la elástica y las rectas $C_e D_e \equiv [S_2]$ y $D_e B' \equiv [S_3]$ complementarán el trazado de la misma.

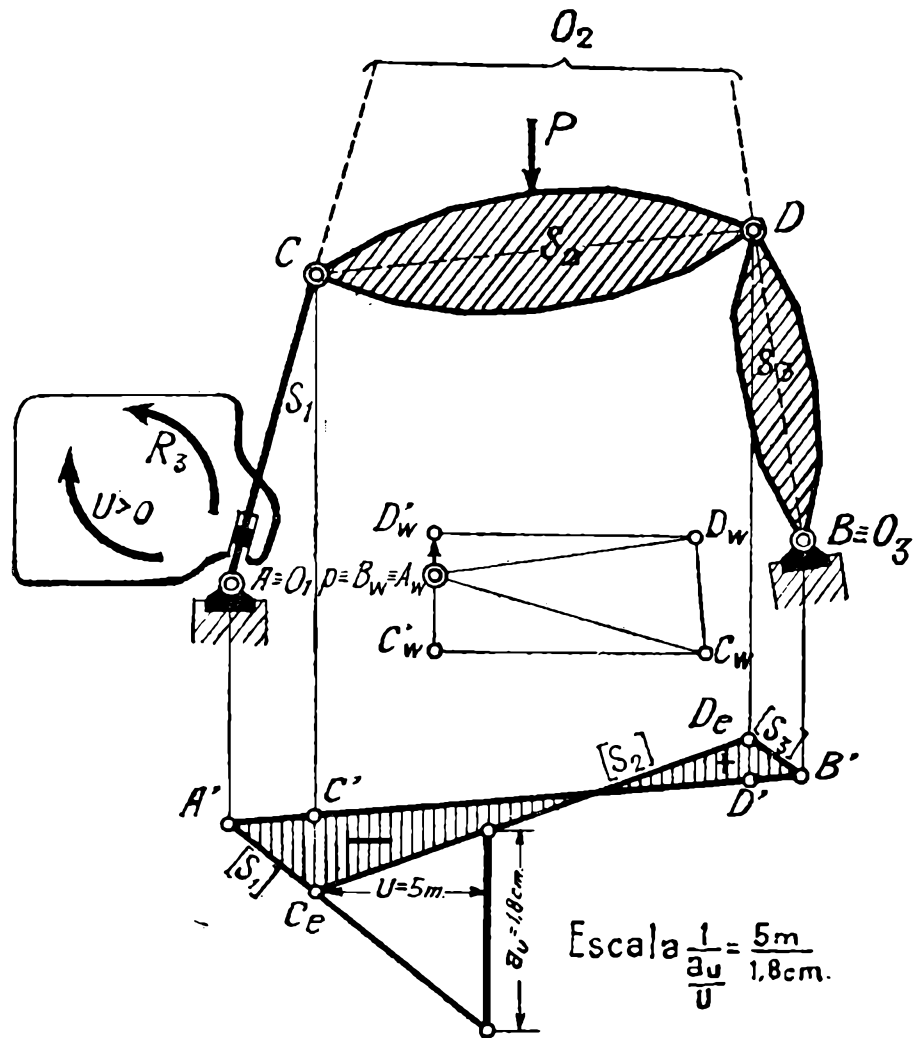


FIG. 329

La obtención de la escala y del signo de la línea de influencia que proporciona esta elástica, no ofrece ninguna particularidad y se deduce fácilmente de la figura.

579. Caso en que los polos relativos de las chapas entre sí (articulaciones ficticias) caen fuera de los límites del dibujo. — La figura 330 *b* representa el mecanismo de un grado de libertad que se obtiene al poner en evidencia la tensión en la diagonal MN del sistema de la figura 330 *a*. La articulación ficticia $A_{1,2}$, que une el polo S_1 y S_2 cae, como se ve, fuera de los límites del dibujo. Para hallar el polo O_2 se requiere trazar la recta $AA_{1,2} \equiv O_1 A_{1,2}$, que une al polo O_1 de la chapa S_1 con la articulación ficticia $A_{1,2}$, y, para ello, en la figura, se ha recurrido al trazado de dos triángulos semejantes; se ha trazado un primer triángulo cualquiera JKA , cuyos dos primeros vértices se en-

se encuentran sobre las rectas MR y QN que determinan a $A_{1,2}$ y cuyo tercer vértice es el punto $A \equiv O_1$, por el que debe hacerse pasar la recta $AA_{1,2}$; se ha trazado, luego, una recta J_1K_1 paralela a JK y construido sobre el segmento que determina su intersección con las MJ y QK , un triángulo $J_1K_1A_1$ semejante y de lados paralelos al JKA ; cortándose en $A_{1,2}$ las rectas JJ_1 y KK_1 que unen a los vértices de los triángulos así obtenidos, también pasará por dicho punto $A_{1,2}$ la AA_1 , que une el par restante de vértices y que, por tanto, nos da la $AA_{1,2}$ sobre la que debe encontrarse el polo O_2 de la chapa S_2 .

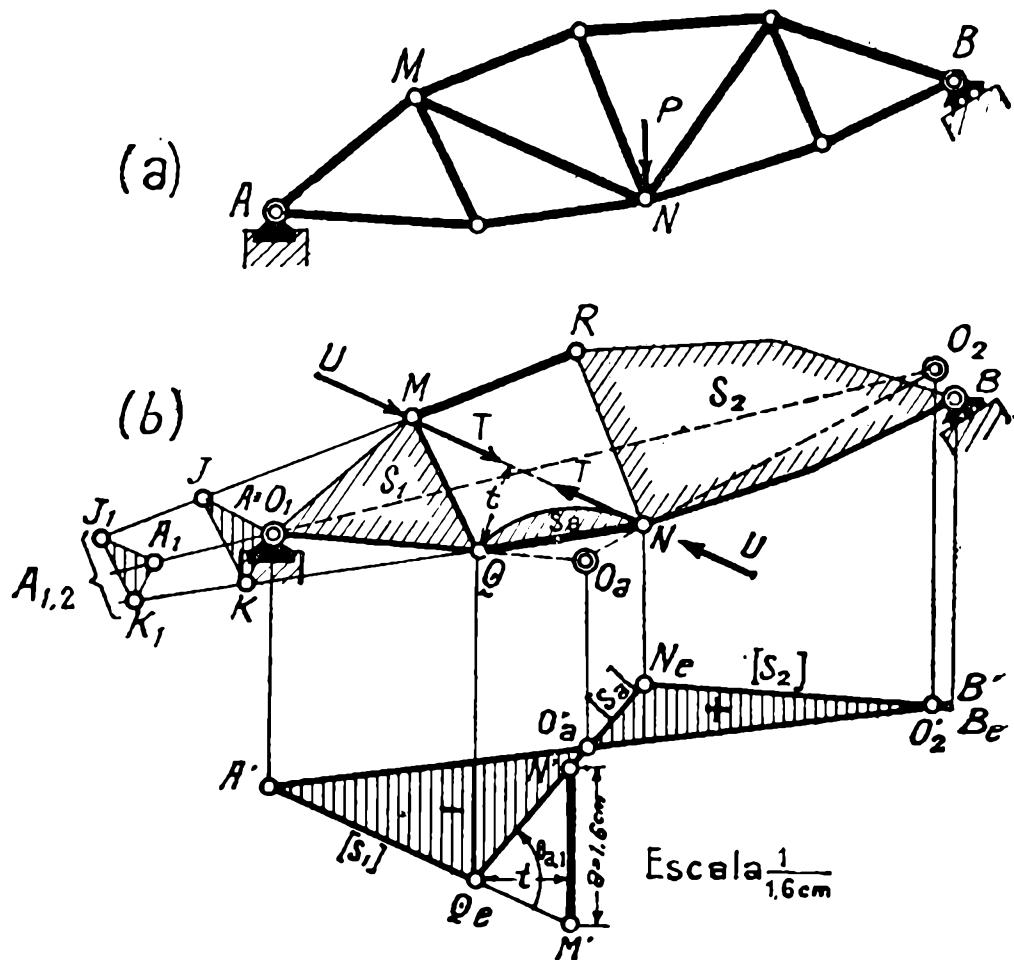


FIG. 330

Trazado el primer lado $[S_1] \equiv A'Q_e$ de la elástica, el $[S_2]$ no puede determinarse aún con los elementos conocidos, por no estar fijada la vertical de $A_{1,2}$ sobre la que deben cortarse las $[S_1]$ y $[S_2]$. Se salva esta nueva dificultad, hallando directamente la elástica de la barra QN considerada como una chapa auxiliar S_a , cuyo polo O_a está dado por la intersección de las O_1Q y O_2N . Determinado el punto O'_a correspondiente a este polo, se tiene $[S_a] \equiv Q_eO'_a$, y la intersección de esta última recta con la vertical de N nos da el punto N_e de la $[S_2]$, que, a su vez, es la $N_eO'_2$, determinada por N_e y el O'_2 correspondiente del polo O_2 .

Para hallar la variación de distancia entre los puntos M y N , que constituye el desplazamiento correspondiente a la incógnita, no pudiéndose utilizar la rotación relativa de las chapas S_1 y S_2 por no conocer el polo $A_{1,2}$, se recurre a la $\theta_{a,1}$ entre las S_a y S_1 , dada por el ángulo infinitésimo $N'Q_eM'$ y cuyo polo es el punto Q . Llevando, pues, a partir de la vertical de Q una distancia horizontal t , igual a la que media entre Q y la recta \overline{MN} , se tiene $a = \overline{M'N'} = 1,6$ cm., siendo $M'N'$ el segmento vertical determinado por las rectas $[S_a]$ y $[S_1]$ en correspondencia de su extremo.

580. Caso en que tanto los polos de las chapas como las articulaciones ficticias que las unen caen fuera de los límites del dibujo. — Sea el sistema representado en la figura 331 *a*, del que nos proponemos hallar la línea de influencia de la tensión en la barra MN . La figura 331 *b* da el mecanismo de un grado de libertad que se obtiene al poner en evidencia esta incógnita; como se ve, la articulación $A_{1,2}$ que liga a las chapas S_1 y S_2 cae fuera de los límites del dibujo. La recta $O_1A_{1,2} \equiv AA_{1,2}$ sobre la que debe estar el polo O_2 , se ha determinado como en el caso anterior, mediante los triángulos semejantes AJK y $A_1J_1K_1$. El polo O_2 , intersección de las $AA_{1,2} \equiv AA_1$ y de la normal en B a la dirección del apoyo móvil respectivo, cae también fuera de los límites del dibujo.

Para poder trazar la elástica, se ha considerado, como en el caso anterior la barra NQ , tratándola como una chapa auxiliar S_a , cuyo polo O_a queda determinado por la intersección de las rectas O_1Q y $NO_2 \equiv NN_1$, hallada esta última, también mediante dos triángulos semejantes LNS y $L_1N_1.S_1$, como se ve claramente en la figura.

Obtenidos estos elementos, se ha trazado en $A'Q_eN_e$ las elásticas de las chapas S_1 y S_a . Para completar la elástica con la parte correspondiente a la chapa S_2 , se ha determinado el desplazamiento del punto B mediante un diagrama de Williot auxiliar. Tomado el punto p como polo se ha llevado un segmento $pN'_w = N'N_e$ representativo de la proyección vertical del desplazamiento del punto N . Como este punto se desplaza normalmente a NN_1 , trazando por p una perpendicular a esta recta y por N'_w una horizontal, su intersección nos da a N_w . Obtenido este punto, puede hallarse B_w , sabiendo que debe encontrarse sobre la paralela a la dirección del apoyo móvil trazada por p y sobre la perpendicular por N_w a NB . Proyectando, finalmente, sobre la vertical de p , el punto B_w en B'_w , mediante la horizontal $B_w B'_w$, se tiene en $\overline{pB'_w}$ la proyección vertical del desplazamiento de B . Llevando, por consiguiente, en $\overline{B'B_e}$ un segmento igual a $\overline{pB'_w}$, se tiene en B_e un punto de la elástica de la chapa S_2 , que queda dada por la recta $N_e B_e$.

La variación de distancia a entre los puntos M y N , podría hallarse mediante un Williot auxiliar en el que se determinarían los puntos correspondientes a los mismos, que nos darían su desplazamiento relativo. Pero más cómodo es valerse de la rotación relativa $\vartheta_{a,1}$ en torno al punto Q , de la barra NQ , considerada como una chapa auxiliar S_a , y de la chapa S_1 . Para ello, observemos que siendo $O'_a Q_e \equiv [S_a]$ la elástica de

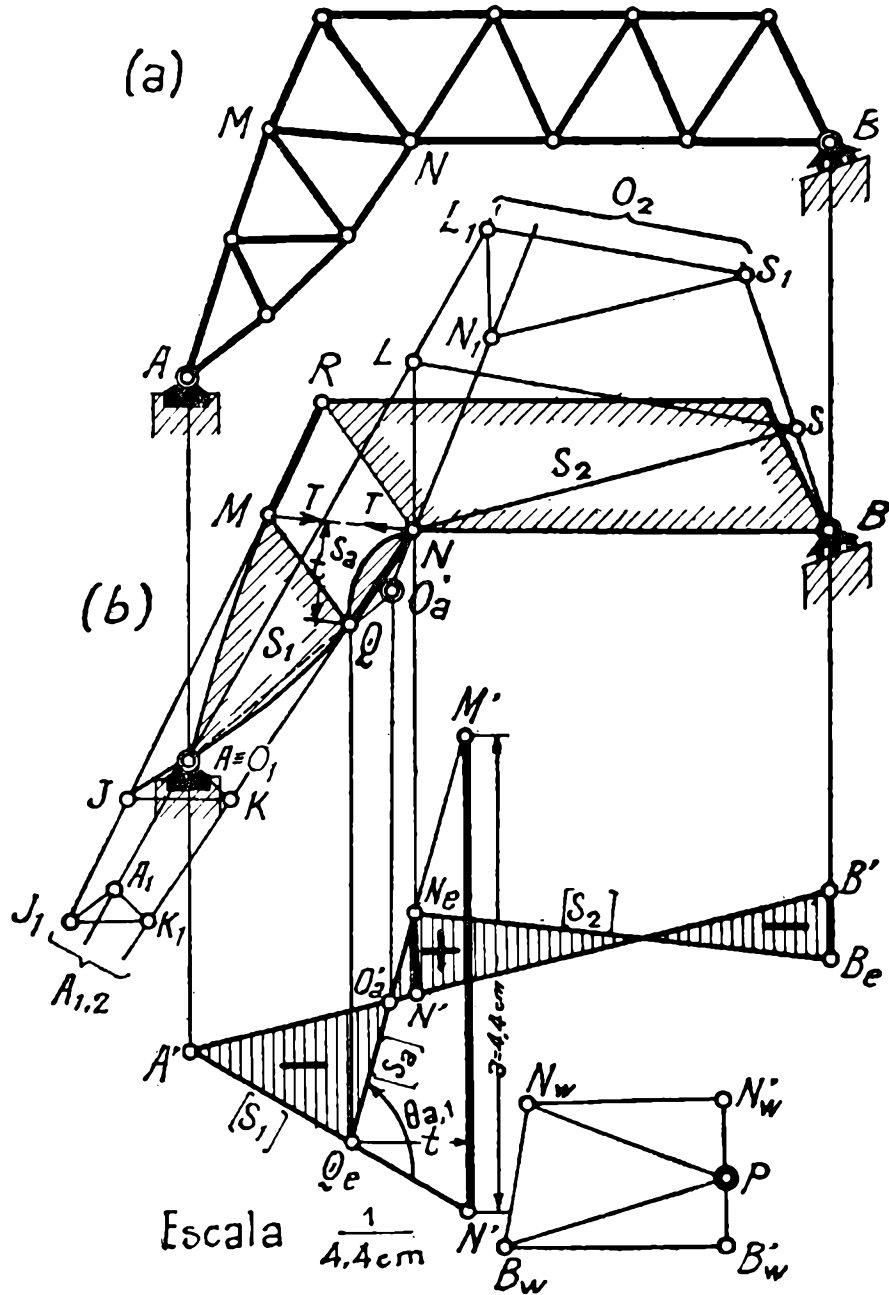


FIG. 331

la chapa S_a , la rotación relativa $\vartheta_{a,1}$ está dada por el ángulo infinitésimo $M'Q_eN'$. Llevando, pues, a partir de la vertical de Q , como indica la figura, una distancia horizontal t , igual a la que media entre Q y la recta MN , la ordenada $\overline{M'N'}$ que en correspondencia a su extremo determinan las rectas $[S_a]$ y $[S_1]$ nos da el desplazamiento a , que, leído directamente en centímetros en la figura, es $a = \overline{M'N'} = 4,4 \text{ cm}$.

581. Caso en que las cargas que actúen en una parte del sistema no tengan influencia sobre la incógnita a calcular. — Sea el sistema representado en la figura 332 *a*, del que nos proponemos hallar la línea de influencia del momento flector \mathcal{M}^* en el punto N . La figura 332 *b* muestra el mecanismo que se obtiene al poner en evidencia a dicha incógnita. Se tiene $O_1 \equiv A$ y el polo de la chapa S_3 es el punto impropio $O_{3\infty}$ de las verticales. El polo O_2 se encuentra, pues, sobre la O_1N y sobre la vertical del punto E , es decir, es el mismo punto E . Como este punto pertenece también a la chapa S_3 , ésta resulta con dos polos O_2 y $O_{3\infty}$ lo que nos dice que no puede desplazarse. Siendo, por consiguiente, fijo el punto F otro tanto sucede con la chapa S_4 .

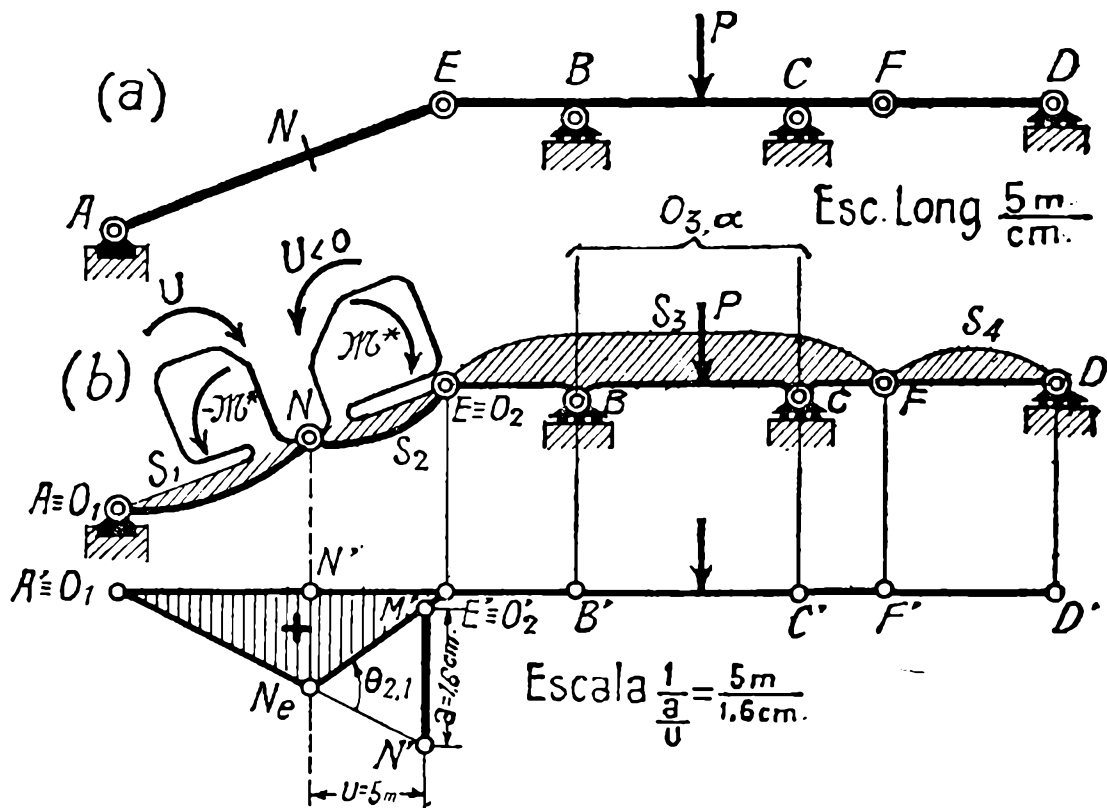


FIG. 332

La elástica vertical de uno de los desplazamientos posibles del sistema se reduce, pues, a las rectas $A'N_e$ y N_eE' , correspondientes a las chapas S_1 y S_2 , siendo de ordenadas nulas para toda la parte situada a la derecha de E . Quiere decir que las cargas que actúan entre E y D no tienen ninguna influencia sobre el momento flector \mathcal{M}^* en el punto N , o sea, producen un momento flector nulo en dicho punto.

Pueden presentarse casos análogos al anterior sin que el resultado sea tan visible de antemano. Así sucede, por ejemplo, para la línea de influencia de la tensión en la diagonal MN del sistema de la figura 333 *a*. El mecanismo de la figura 333 *b* es el que resulta al poner en evidencia dicha incógnita. En él se tiene $A \equiv O_1$ y $B \equiv O_3$, y, por caer la

articulación ficticia $A_{1,2}$, que liga las chapas S_1 y S_2 , sobre la recta O_1C , el polo O_2 , que debe estar en la intersección de las $O_1A_{1,2}$ y O_3C , es el mismo punto C . La chapa S_3 , resulta, pues, con dos polos y no es

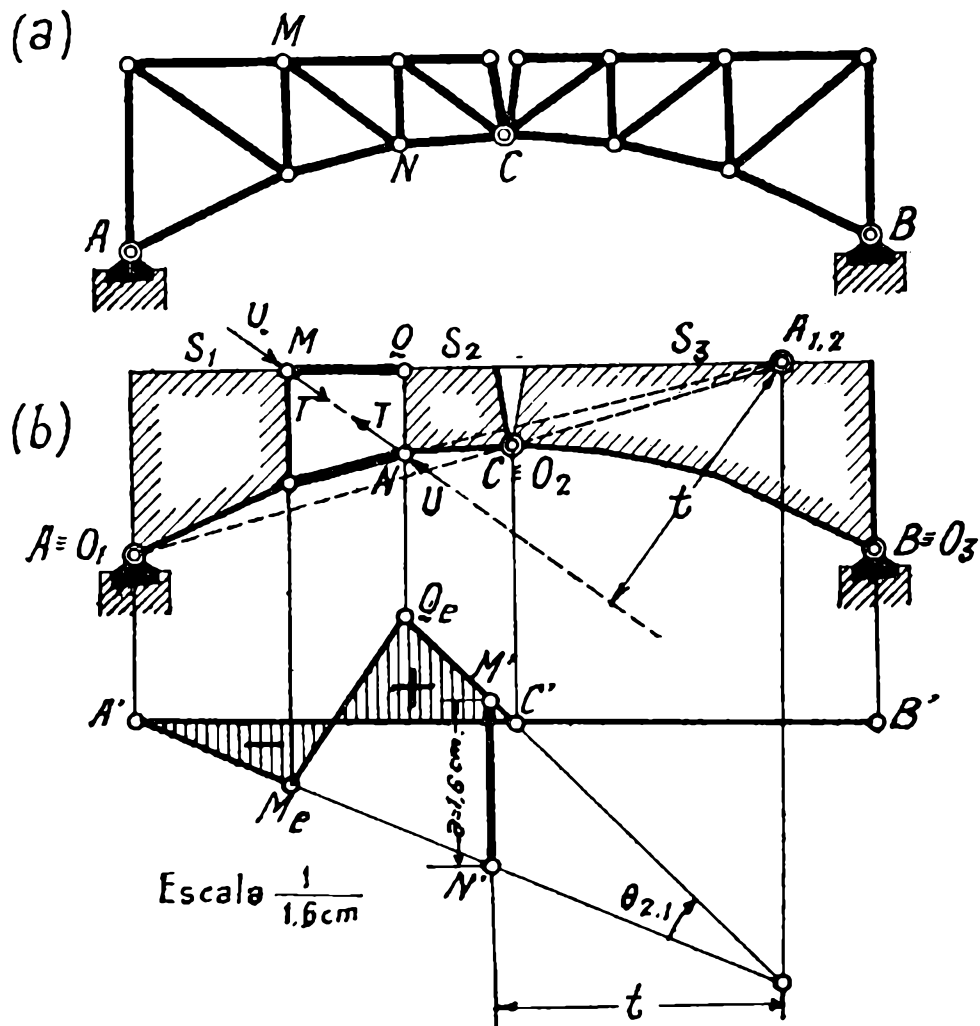


FIG. 333

susceptible de desplazamientos. La elástica vertical del sistema se reduce a la parte rayada en la figura, y, por consiguiente, las cargas que actúan sobre la chapa S_3 no originan tensión alguna en la barra MN .

582. Caso en que el desplazamiento correspondiente a la incógnita resulta infinito. — Sea el sistema de la figura 334 *a* del que nos proponemos hallar la línea de influencia de la tensión en el montante central MN . La figura 334 *b* nos da el mecanismo de un grado de libertad que resulta al poner en evidencia a dicha incógnita. Se tiene $A \equiv O_1$ y el polo O_2 , debiendo encontrarse sobre la AN y sobre la vertical de B , es coincidente con B . La figura 334 *b* da, pues, la elástica vertical de uno de los desplazamientos posibles del mecanismo en cuestión.

Obtenemos la variación de distancia a entre los puntos M y N con un Williot auxiliar. Tomando el punto p del eje $A'B'$ como polo y proyectando los puntos Q_e y R_e en $Q' \equiv R'$, el vector $pQ' = pR'$ da la pro-



yección vertical de los desplazamientos de los puntos Q y R ; como estos desplazamientos están dirigidos según las normales a AQ y a BR , trazando por el polo paralelas a estas normales y cortándolas con la horizontal de $Q' \equiv R'$, se obtienen, respectivamente, los puntos Q_w y R_w . Siendo vertical la dirección del desplazamiento del punto N , el N_w está dado directamente por la proyección horizontal de N_e sobre la vertical de p . El punto M_w , finalmente, se encuentra en la intersección de las

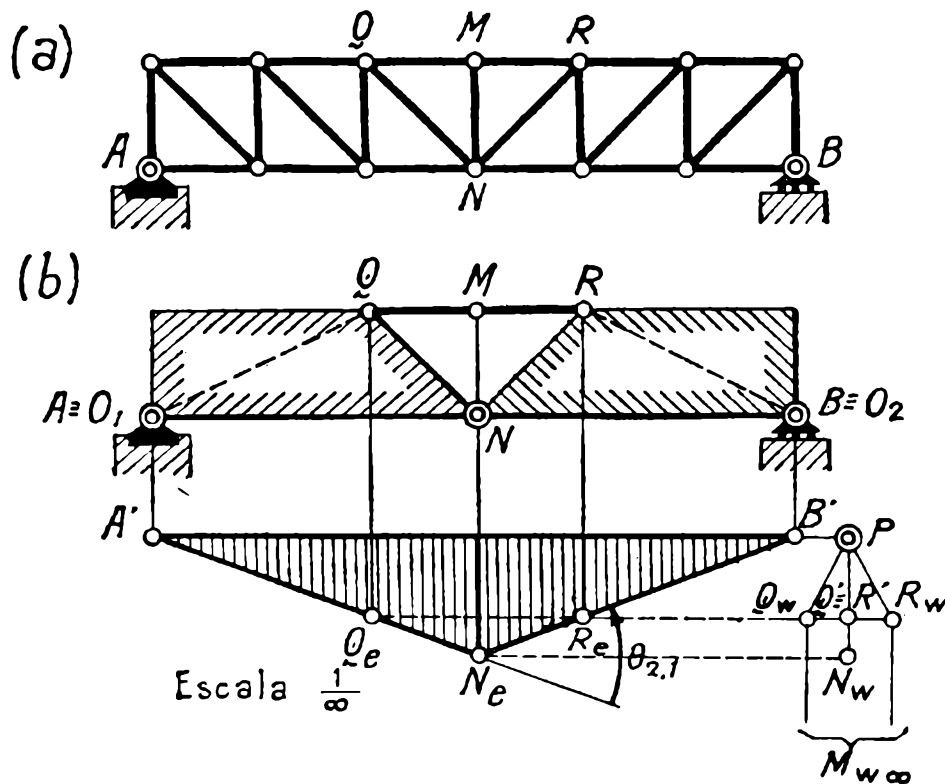


FIG. 334

normales a QM y RM trazadas por Q_w y R_w , que, por ser paralelas, nos dan el punto $M_w \infty$ impropio de las verticales. El desplazamiento relativo del punto M con respecto al N está dado por el vector $N_w M_w \infty$; siendo infinita su proyección sobre la dirección de la barra MN , se tiene, por consiguiente, $a \equiv \infty$. La escala en que la elástica obtenida nos da a la línea de influencia de la tensión en el montante MN es, por tanto,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

vale decir que las ordenadas de la elástica hay que multiplicarlas por las fuerzas P y por cero para obtener la tensión en dicha barra, o, lo que es lo mismo, esta tensión es nula para cualquier carga.

583. — Tratemos de interpretar el resultado a que acabamos de llegar. Por de pronto, el hecho de que la variación de distancia haya resultado infinita no quiere decir que en realidad lo sea, sino simplemente que,

dentro del grado de aproximación de la figura, a es de un orden de magnitud superior al de las cantidades infinitésimas representadas por las ordenadas de la elástica; es decir, que si a es un infinitamente pequeño del primer orden, dichas ordenadas lo serán del segundo. Ahora bien, junto a los desplazamientos de los mecanismos cinemáticos tratados al suprimir un vínculo en los sistemas isostáticos, son magnitudes infinitamente pequeñas de segundo orden despreciables, las que corresponden a las deformaciones de las barras del sistema. La elástica trazada debe ser, pues, del orden de magnitud de estas deformaciones y se requiere que para obtenerla se hayan producido en el mecanismo algunas deformaciones de sus barras. Se ve fácilmente que ello sucede, observando que, por estar en línea recta las barras QM y RM es necesario que ellas experimenten un alargamiento o acortamiento para que sea posible una rotación relativa de las chapas S_1 y S_2 , es decir, para que cambie el ángulo QNR . La rotación $\vartheta_{2,1}$ y, por tanto, toda la elástica $A'NB'$ obtenida, es, pues, del orden de magnitud de las deformaciones, es decir, despreciable tratándose del cálculo de sistemas isostáticos. Prácticamente las ordenadas de la elástica deberían haber resultado nulas, en cuyo caso ya no hubiera sido infinita la variación de distancia entre los puntos M y N , siendo simplemente una cantidad infinitamente pequeña del primer orden.

584. — Por otro camino, más directo, se puede demostrar que las ordenadas de la elástica son en realidad nulas, o sea, que las chapas S_1 y S_2 no pueden desplazarse.

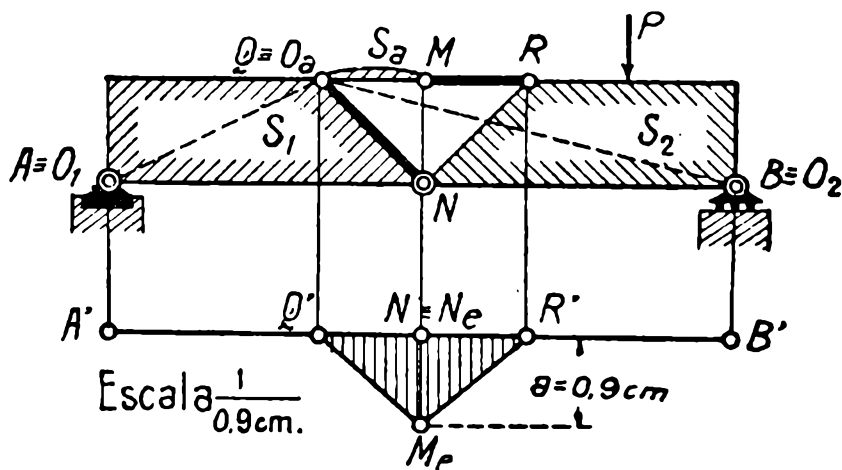


FIG. 335

Determinemos, para ello, el polo de la barra QM (fig. 335), considerada como una chapa auxiliar S_a . Dicho polo debe encontrarse, por de pronto, sobre la $AQ \equiv O_1Q$; además, por estar articuladas ficticiamente las chapas S_a y S_2 , mediante las barras MR y NQ , en el punto Q de intersección de las mismas, también debe encontrarse O_a sobre la

$BQ \equiv O_2Q$, y resulta, por consiguiente, que dicho polo es el mismo punto Q . La chapa S_1 tiene, por tanto, dos polos y no es susceptible de desplazamientos. Como por el mismo camino podríamos demostrar que R es el polo de la barra MR , otro tanto sucede con la S_2 . La elástica del cordón inferior debe, pues, coincidir con el eje y la tensión de la barra MN es nula para cargas que se desplazan sobre el mismo, concordantemente con el resultado encontrado con anterioridad.

Pero, para el cordón superior, siendo fijos los puntos Q y R , el M puede experimentar desplazamientos verticales infinitesimos, y la elástica se reduce a los desplazamientos de las barras QM y MR , tomando la forma $Q'M_eR'$. Por ser fijo el punto N , la variación de distancia entre N y M está dada directamente por la proyección vertical del desplazamiento de este último, es decir, se tiene $a = \overline{N'M_e} = 0,9$ cm., y la escala en que la elástica $Q'M_eR'$ da a la línea de influencia de la tensión en el montante MN para cargas que se mueven en el cordón superior es

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,9 \text{ cm}}$$

Sobre dicho montante tienen influencia, por consiguiente, solamente las cargas que actúan en la parte QR del cordón superior.

585. — Las consideraciones que acabamos de hacer son completamente generales y tienen validez para todos los casos en que se presentan escalas nulas por resultar infinitos los desplazamientos correspondientes a las incógnitas. En todos estos casos debe poderse llegar al mismo resultado, demostrando que, en realidad, el sistema no es susceptible de desplazamientos y que la elástica obtenida es de un orden de magnitud inferior, despreciable en comparación de los desplazamientos infinitesimos considerados en los mecanismos cinemáticos.

586. Caso en que no es posible determinar directamente los polos de las chapas, por presentarse cadenas cinemáticas cerradas. — Algunas veces puede suceder que no sea posible hallar directamente los polos de las chapas del mecanismo de un grado de libertad, que se obtiene al suprimir una barra para poner en evidencia la tensión correspondiente, porque en él se presentan cadenas cinemáticas cerradas, ninguna de cuyas chapas posee las dos condiciones de vínculo externo requeridas para determinar el primer polo que sirva de punto de partida (89).

Tal es lo que pasa en el sistema de la figura 336 *a*, al poner en evidencia la tensión en la barra MN . En el mecanismo resultante (fig. 336 *b*) se conoce el polo O_1 de la chapa S_1 , pero no pueden determinarse,

por los procedimientos comunes, los de las restantes. Las cuatro chapas S_2 , S_3 , S_4 y S_5 constituyen una cadena cinemática cerrada, vinculada en la forma que señala la figura 336 c; en efecto, estando obligado el punto R a desplazarse perpendicularmente a la dirección RO_1 (fig. 336 b) que lo liga con el polo O_1 de la chapa S_1 a que pertenece, la S_2 , de que también forma parte, se encuentra vinculada como si estuviera dotada de un apoyo móvil de dicha dirección, tal como se indica en la figura 336 c.

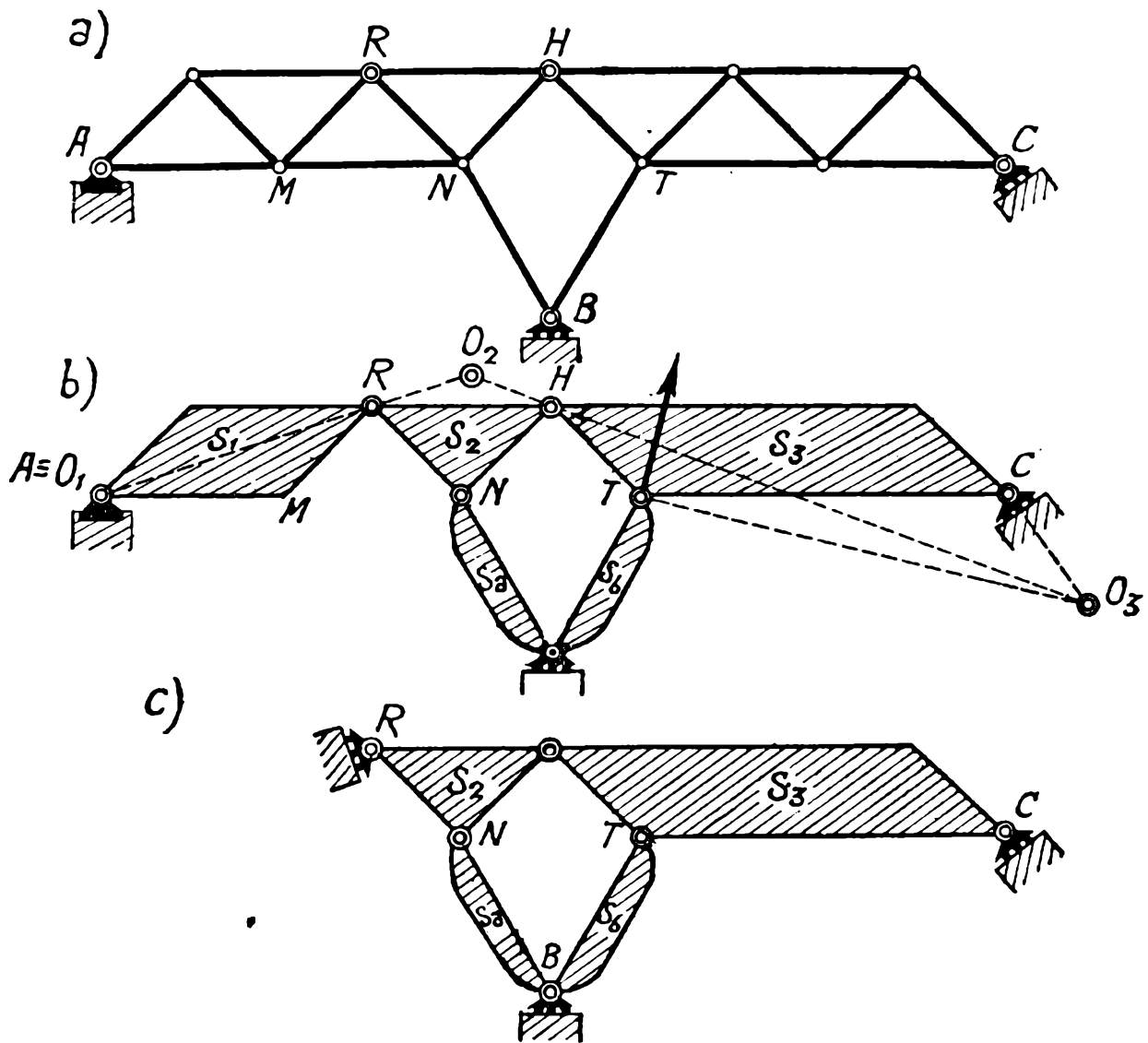


FIG. 336

El problema se reduce, por tanto, a hallar los polos de la cadena cinemática cerrada de la figura 336 c; directamente no es posible efectuarlo, por no tener ninguna de sus chapas el polo determinado por las condiciones de vínculo externo que se necesita para tener un punto de partida.

Salvaremos la dificultad buscando la dirección del desplazamiento de un punto cualquiera, del T por ejemplo; si se obtiene esta dirección, en efecto, el polo de la chapa S_3 quedará determinado por la nueva condición de estar sobre la perpendicular a la misma trazada por T .

Con este fin, determinemos, mediante dos mecanismos auxiliares, un desplazamiento de la cadena cerrada, que satisfaga a sus condiciones de vínculo, es decir, uno de sus desplazamientos posibles. Consideremos, primeramente, el sistema de la figura 337 a), o sea, la cadena cerrada, en la que se ha suprimido el apoyo móvil B y reemplazando el R por una

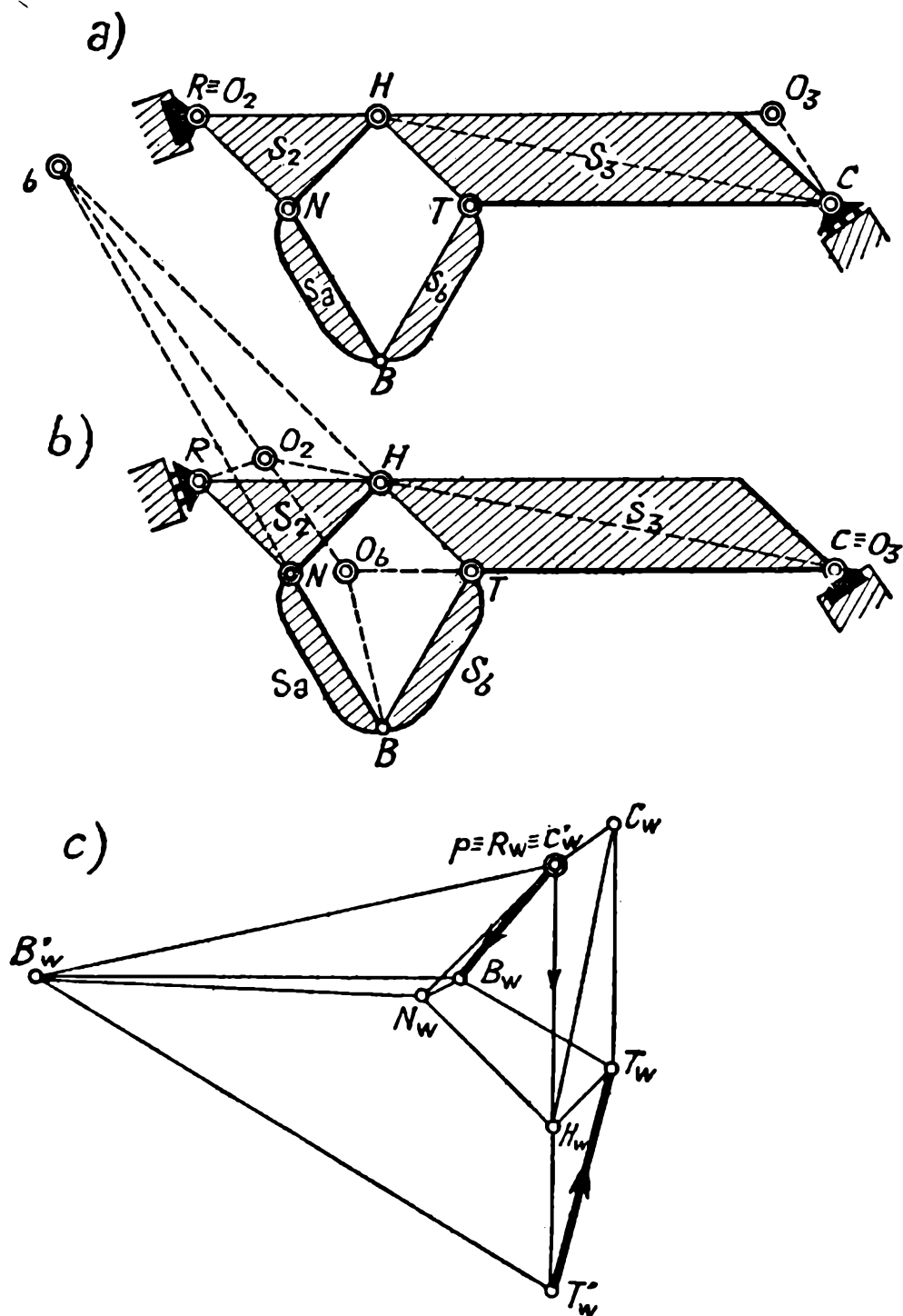


FIG. 337

articulación fija; el polo de la chapa S_3 , es, en este caso, el punto O_3 , determinado en la figura. Tomando un punto p como polo para construir un Williot (fig. 337 c), demos al punto H un desplazamiento arbitrario pH_w que debe ser normal a RH , y completemos el diagrama de Williot buscando los puntos C_w y B_w que corresponden al despla-

miento en cuestión. Como se ve en la figura, el punto B experimenta un desplazamiento pB_w que no corresponde a las condiciones de vínculo de la cadena de la fig. 336 c ; los desplazamientos de los puntos R y C , en cambio, satisfacen a las condiciones de vínculo de esta última.

Hecho lo anterior, tomemos el nuevo mecanismo representado en la figura 337 b , o sea, constituido por la misma cadena cerrada, en la que se ha reemplazado el apoyo móvil C por una articulación fija, dejado subsistente el apoyo R y suprimido el B . Al componer con el desplazamiento de la cadena anterior, uno de este nuevo mecanismo, los puntos R y C quedan siempre en las condiciones de vínculo que corresponden a la cadena de la figura 336 c ; si, además, elegimos el desplazamiento de este último de manera que el desplazamiento resultante del punto B sea de la dirección horizontal que corresponde al apoyo móvil de esta cadena, el desplazamiento que obtendremos, al componer los dos considerados, será uno de los posibles de la misma que buscamos. El punto C'_w del nuevo Williot coincide con el polo p , desde que C es un punto fijo en el sistema de la fig. 337 b ; por otra parte, estando dados los desplazamientos resultantes de los dos considerados por los vectores que van de los puntos del nuevo Williot a los del primitivo (285), el B'_w deberá encontrarse sobre la horizontal de B_w , y, finalmente, siendo O_b (fig. 337 b) el polo de la S_b a que pertenece, también, se hallará sobre la perpendicular por p a $O_b B$, quedando determinado como se ve en la fig. 337 c . Trazando, por último, perpendiculares a BT y CT que pasen, respectivamente por B'_w y C'_w , se obtiene el punto T'_w , y el desplazamiento resultante del punto T resulta dado por el vector $T'_w T_w$. De la dirección de este último, deben ser, pues los desplazamientos que el punto T experimenta en la cadena cerrada de la figura 336 c , o, lo que es lo mismo, en el mecanismo de la figura 336 b . Trazando por T , en este último, una perpendicular a dicha dirección, sobre ella se encontrará el polo O_3 buscado, que queda determinado como se ve en la figura. Hallado este polo, ya no ofrece dificultad la obtención de los restantes, ni el trazado de la elástica correspondiente a uno de sus desplazamientos virtuales, que daría la línea de influencia de la tensión en la barra MN .

587. — De otra manera más directa puede resolverse el problema anterior mediante dos elásticas de los mecanismos de las figuras 337 a y b , normales a la dirección del apoyo B .

Consideremos una elástica, normal a este apoyo, del primer mecanismo que se ha representado nuevamente en la figura 338 a ; sea la $R' H$, T , C , hallada como se indica claramente en la figura. La elástica corres-

pendiente a la chapa S_b es la $[S_b] \equiv O'_b T_e$ y el desplazamiento del punto B normal al apoyo suprimido, y, por tanto, fuera de las condiciones de vínculo del sistema dado, es el $\eta_B = \overline{B' B_o}$.

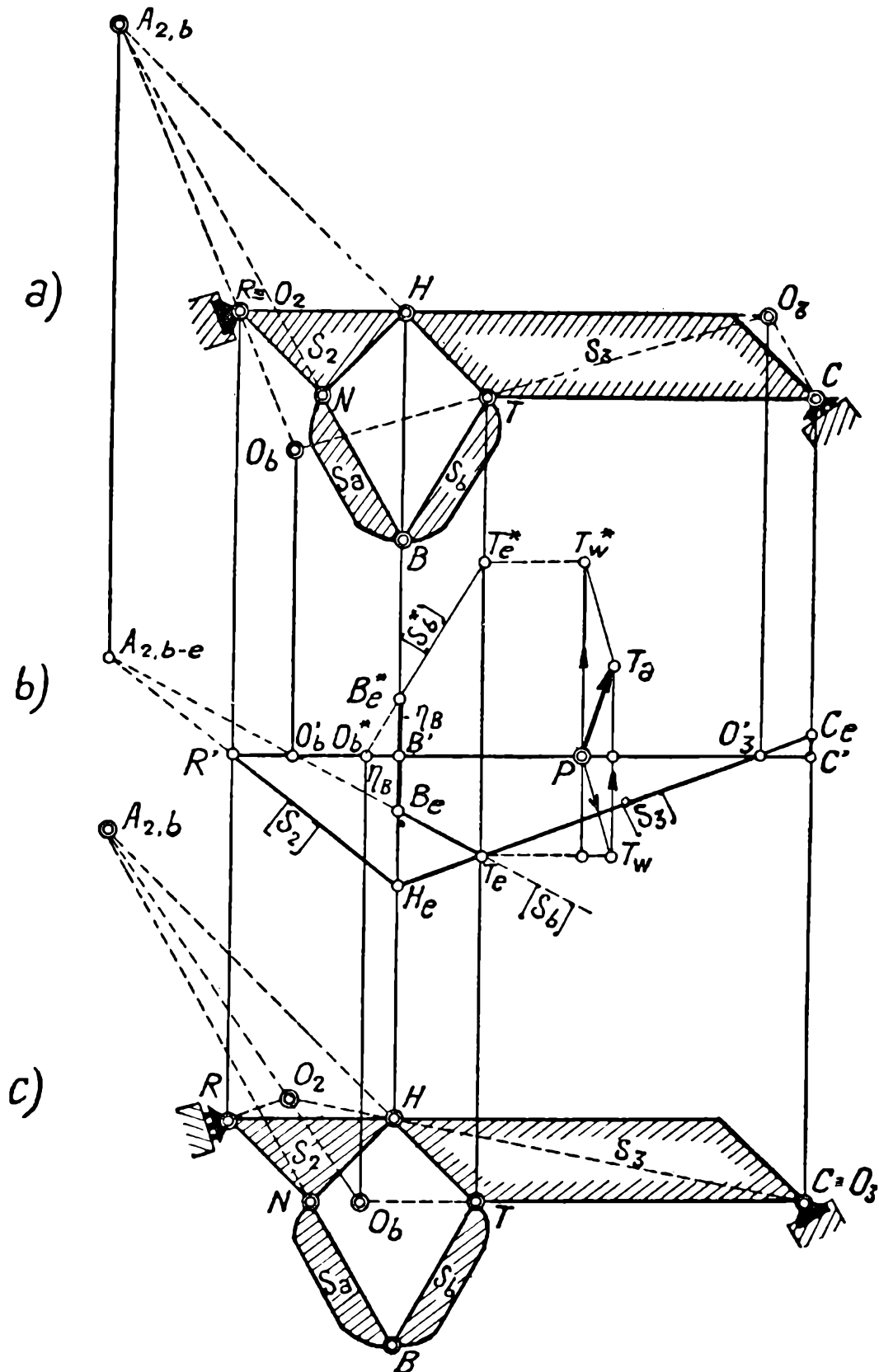


FIG. 338

En el segundo mecanismo (fig. 338 c) el punto O_b , determinado como se indica en la figura, es el polo de la chapa S_b . Para que en el desplazamiento de este segundo mecanismo se anule el η_B , deberá la elástica

$[S_b]^*$ de S_b pasar por el punto B_e^* tal que $\overline{B' B_e^*} = -\eta_B$, y será por consiguiente la $O_b^* B_e^*$, que acusa para el punto T un desplazamiento dado por el punto T_e^* .

A partir del punto p se han llevado en $p T_w$ y $p T_w^*$, los desplazamientos que al punto T corresponden durante los dos considerados; este último es vertical (normal a CT) (fig. 338 *c*) y el primero es perpendicular a $O_3 T$ (fig. 338 *a*). Componiendo finalmente estos dos desplazamientos, lo que en la figura se ha hecho llevando por T_w un vector $T_w T_a$ equipolente al $p T_w^*$, se ha obtenido en $p T_a$ el desplazamiento resultante del punto T , que es paralelo al marcado en la figura 336 *b*, y sobre cuya normal debe encontrarse el polo O_3 .

CAPITULO IX

VIGAS SIMPLES ISOSTATICAS

§ 1. — Ménsulas empotradas

588. Preliminar. — Pasamos a aplicar a las principales estructuras constructivas que se presentan en la práctica ingenieril, lo que dejamos expuesto sobre obtención de líneas de influencia de sistemas isostáticos.

Las figuras con que se ilustran los distintos casos que tratamos son lo suficientemente explícitas para no exigir mayores explicaciones; en cada una de ellas damos, en efecto, para las diversas incógnitas consideradas, conjuntamente con el mecanismo que las pone en evidencia y sus respectivos polos, la obtención de la elástica que proporciona la línea de influencia, así como la escala y signo de esta última.

En el texto nos limitamos, por tanto, a simples consideraciones aclaratorias de dichas figuras, y detallamos la marcha a seguir sólo en los casos especiales de determinación de polos o de obtención de escalas, que puedan ofrecer alguna dificultad.

Comenzamos, a continuación, con las ménsulas empotradas.

589. Ménsula empotrada de alma llena. — El sistema está representado en la figura 339. Consiste en una viga de alma llena empotrada en su extremo *A* y libre en el otro.

590. — *Líneas de influencia de momentos flectores y esfuerzos tangenciales*. Su obtención se deduce directamente de la figura. En los mecanismos que resultan al poner en evidencia estas incógnitas, la chapa que queda a la izquierda de la articulación propia o impropia introducida, no es susceptible de desplazamientos; las ordenadas de las líneas de influencia son, por tanto, nulas a la izquierda de la sección considerada.

No se ha hallado línea de influencia de esfuerzos normales, por ser nulos para cargas verticales. Para cargas horizontales, estos esfuerzos normales están dados en valor absoluto por la suma de las fuerzas que quedan a la derecha de la sección considerada.

Ménsula empotrada de alma llena

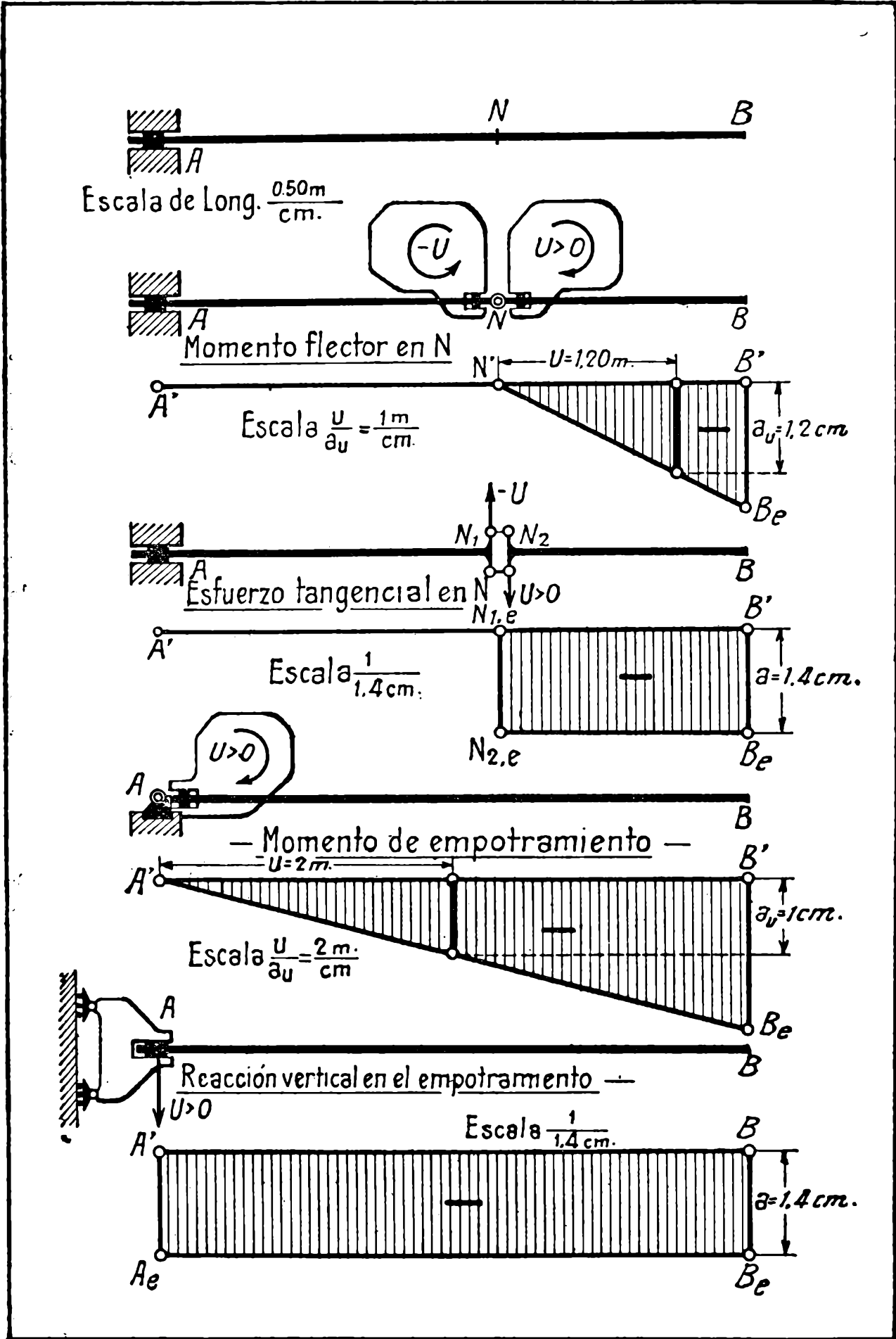


FIG. 339

Ménsula empotrada de cordones paralelos

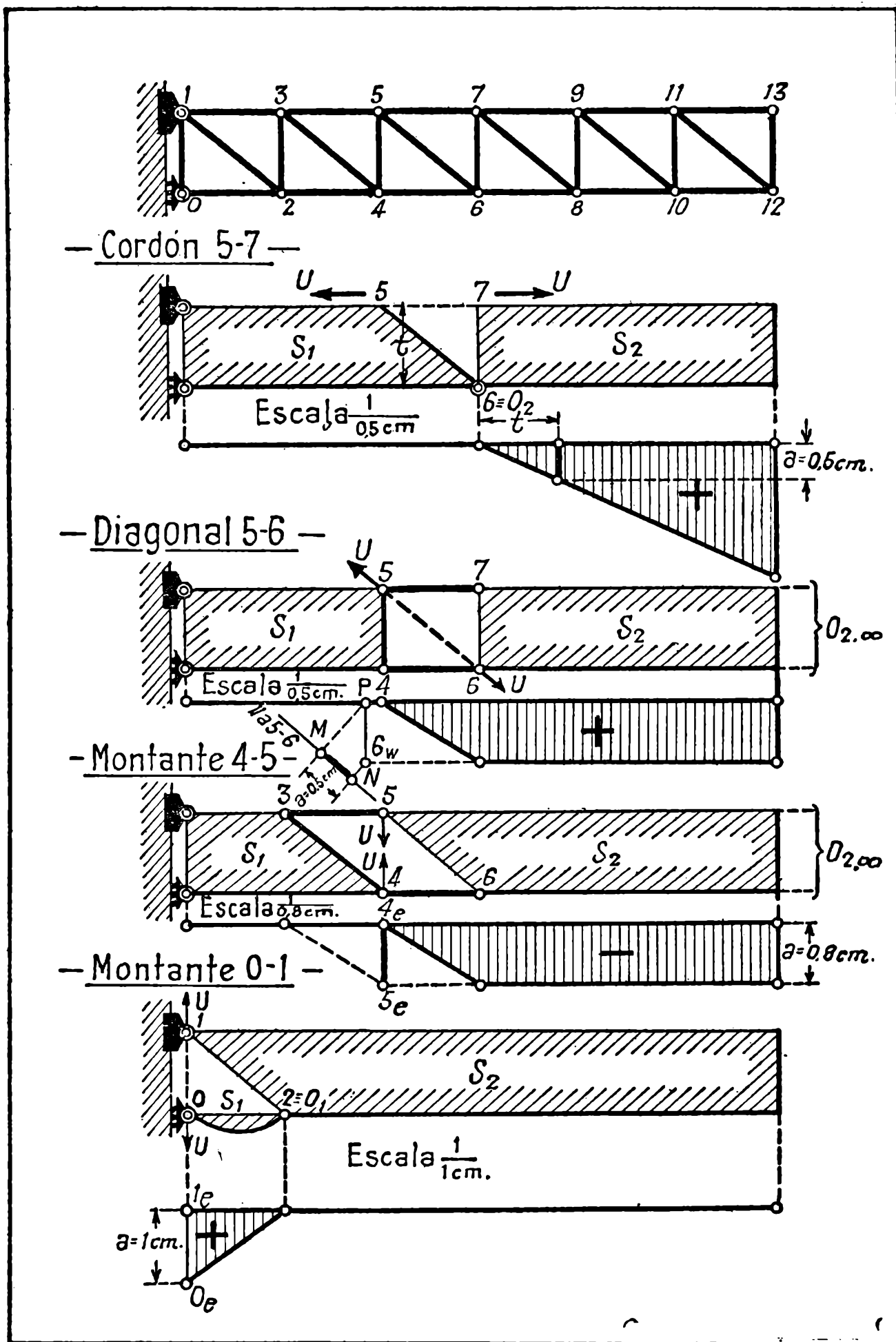


FIG. 340

Ménsula empotrada de cordones paralelos (continuación)

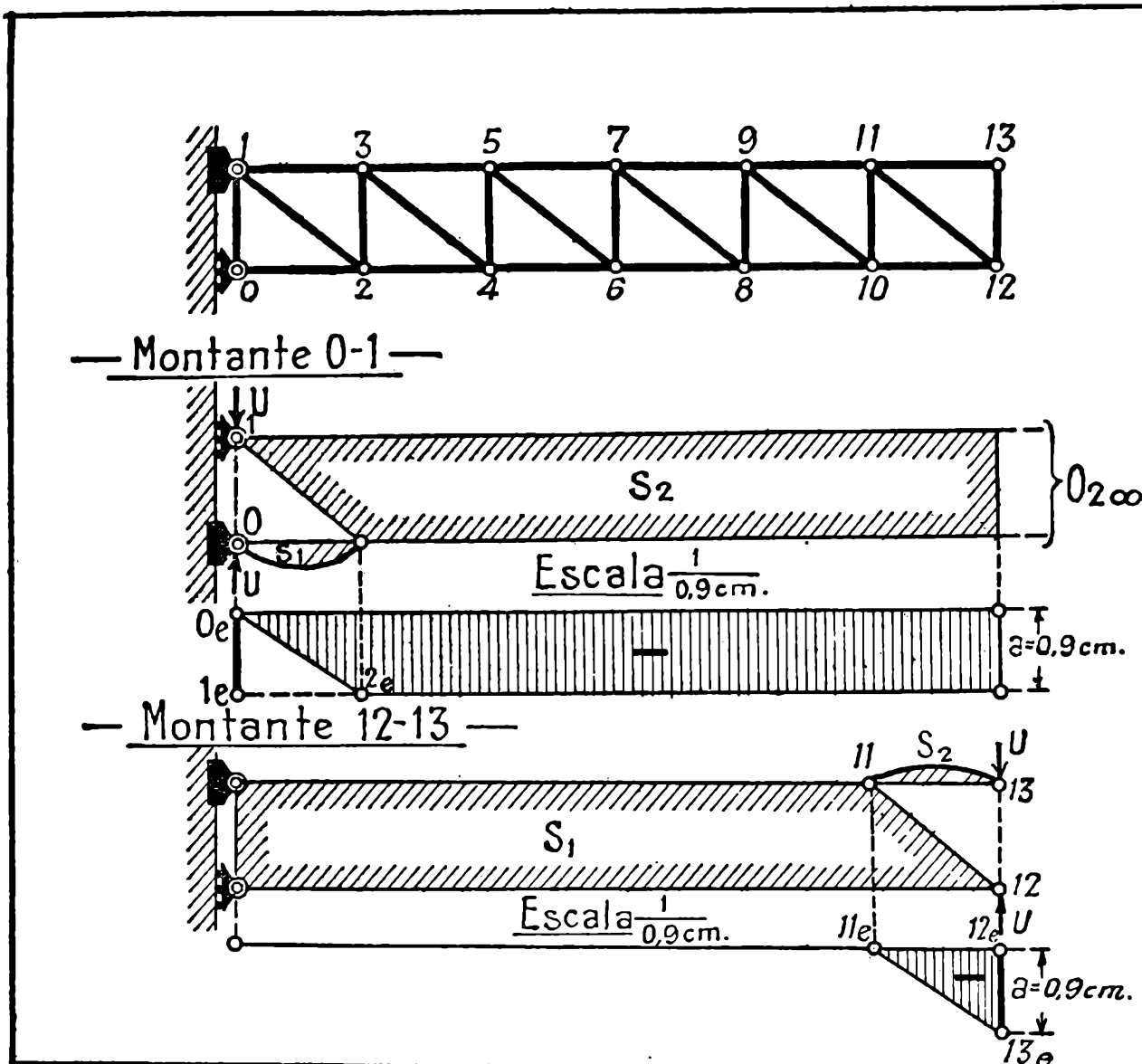


FIG. 341

591. — *Líneas de influencia de las componentes de la reacción en el empotramiento A.* En la figura se ven las líneas de influencia del momento de empotramiento y de la componente vertical de la reacción en el mismo. La componente horizontal de esta reacción es nula para cargas verticales; para cargas horizontales es directamente igual y de sentido contrario a su suma.

592. *Ménsula empotrada de cordones paralelos.* — El sistema está representado en la figura 340 y las cargas pueden actuar tanto en el cordón inferior, como en el superior. Cuando no hagamos indicación especial a este respecto, se entenderá que actúan en el cordón inferior; además, cuando no nos refiramos a cargas del cordón superior, será porque no cambian para las mismas las líneas de influencia obtenidas en la hipótesis de que actúen sobre el inferior.

593. — *Cordones*. En la figura se ha hallado la línea de influencia del cordón 5-7. En forma absolutamente análoga se hallaría para cualquiera otra barra de cordón, tanto superior como inferior.

594. — *Diagonales y montantes*. La figura muestra la línea de influencia de la diagonal 5-6. La inversa a de la escala se obtiene proyectando sobre la dirección de la barra 5-6, la traslación relativa vertical $p 6_w$ de las chapas S_2 y S_1 . \longrightarrow

La línea de influencia del montante 4-5, que también se da en la figura, es completamente igual, en cuanto a su forma, a la de la diagonal 5-6. Sólo difiere en la escala y en el signo. Si las cargas actuaran en el cordón superior, la línea de influencia sería la marcada con puntos en la figura, y coincidiría, como se ve fácilmente, con la de la diagonal 3-4.

595. — *Montante 1-0*. En la figura se ha trazado la línea de influencia para cargas que actúan sobre el cordón inferior; la chapa S_2 permanece fija. Para cargas que actúan sobre el cordón superior, la línea de influencia sería, por tanto, de ordenadas nulas en toda su extensión.

Para hallar la línea de influencia representada en la figura se ha supuesto que el empotramiento se obtenga con una articulación fija en 1 y un apoyo móvil (o corredora) en 0. Si fuera a la inversa, dicha línea tendría la forma que se da en la figura 341, con trazos llenos para cargas que actúan sobre el cordón superior y con trazos punteados para las que inciden en el inferior.

596. — *Montante 12-13*. Como se deduce de figura 341, la chapa S_1 no puede desplazarse. La línea de influencia tiene ordenadas nulas en toda su extensión cuando las cargas actúen en el cordón inferior. Si las cargas inciden en el cordón superior, toma la forma que señala la figura.

597. — *Cordón 11-13*. La línea de influencia de esta barra tiene ordenadas nulas en todos los casos.

598. *Ménsula empotrada de altura variable*. — La figura 342 representa un sistema de este tipo, en el que las cargas actúan en el cordón superior. Las líneas de influencia de la barra 0-1 y de los cordones, se obtienen en forma completamente análoga al caso anterior.

Se han trazado las líneas de influencia de la diagonal 2-3 y del cordón inferior 0-2. Las figuras respectivas no requieren mayor explicación.

Ménsula empotrada de altura variable

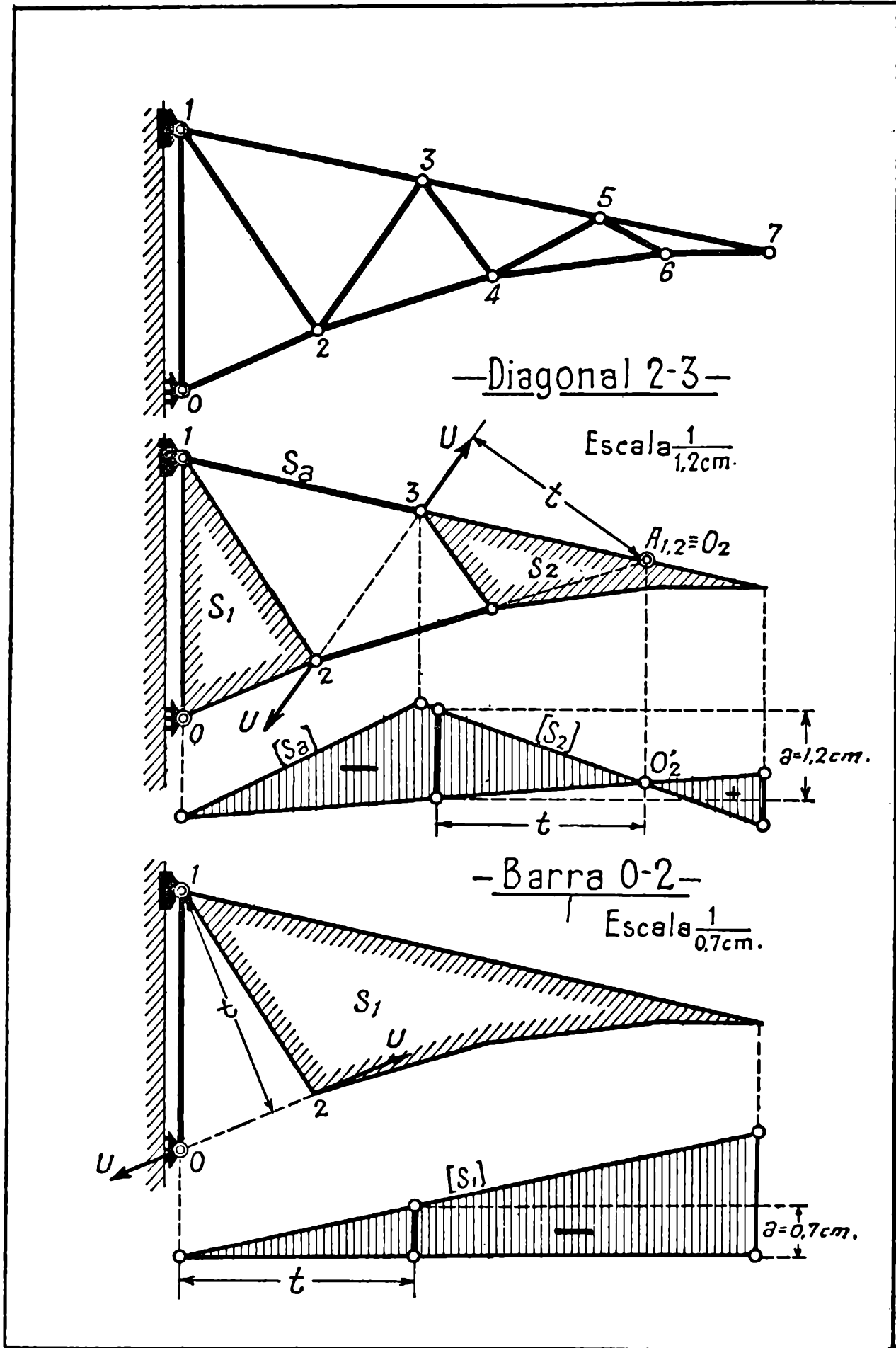


FIG. 342

§ 2. — Vigas simplemente apoyadas. Reticulados simples

599. **Vigas de alma llena.** — La figura 343 representa una viga de alma llena simplemente apoyada (con una articulación fija en A y un apoyo móvil en B), dotada de tramos extremos en voladizo.

En ella se dan las líneas de influencia de ambas reacciones y del momento flector y esfuerzo tangencial en la sección N .

La componente horizontal de la reacción en A es nula para cargas verticales. Para cargas horizontales, es igual y de signo contrario a la suma de las que actúan sobre la viga.

El esfuerzo normal en N es nulo para cargas verticales. Para cargas horizontales es igual, en valor absoluto a la suma de las que actúan a la derecha de dicho punto.

600. — *Características en los tramos en voladizo.* Los tramos en voladizo se comportan exactamente como ménsulas empotradas; el de la derecha BC , por ejemplo, es equivalente a una ménsula empotrada en B y libre en C . Las características en la sección N_1 , se obtienen, por tanto, de la misma manera que en el caso de la ménsula empotrada.

601. — *Caso en que la viga carezca de tramos en voladizo.* Si la viga carece de tramos en voladizo, la parte de las líneas de influencia comprendida entre los puntos de apoyo A y B , no cambia en nada. Se requiere, por tanto, solamente suprimir las prolongaciones de las rectas fuera del tramo central AB .

602. **Viga en N, o Prat.** — En las vigas de reticulado que pasamos a tratar, prescindimos de tramos en voladizo. Ya sabemos, por lo que acabamos de decir, que en el caso de presentarse estos voladizos, las partes respectivas de las líneas de influencia, se obtendrían simplemente prolongando los primero y último lados de las que corresponden a la viga sin ellos. Además, las líneas de influencia de las tensiones de las barras en los voladizos, se obtendrían como en el caso de las ménsulas empotradas.

Comenzamos por la viga Prat, que es la de cordones paralelos representada en la figura 344. La obtención de las líneas de influencia de las tensiones en los cordones, como se deduce de la misma, no presenta ninguna particularidad.

603. — *Diagonales y montantes.* La figura da las líneas de influencia de la diagonal 3-4 y del montante 4-5.

Si las cargas actuaran sobre el cordón superior, la línea de influencia de la diagonal 3-4 no variaría en nada. En cambio, la del montante

Viga simplemente apoyada de alma llena

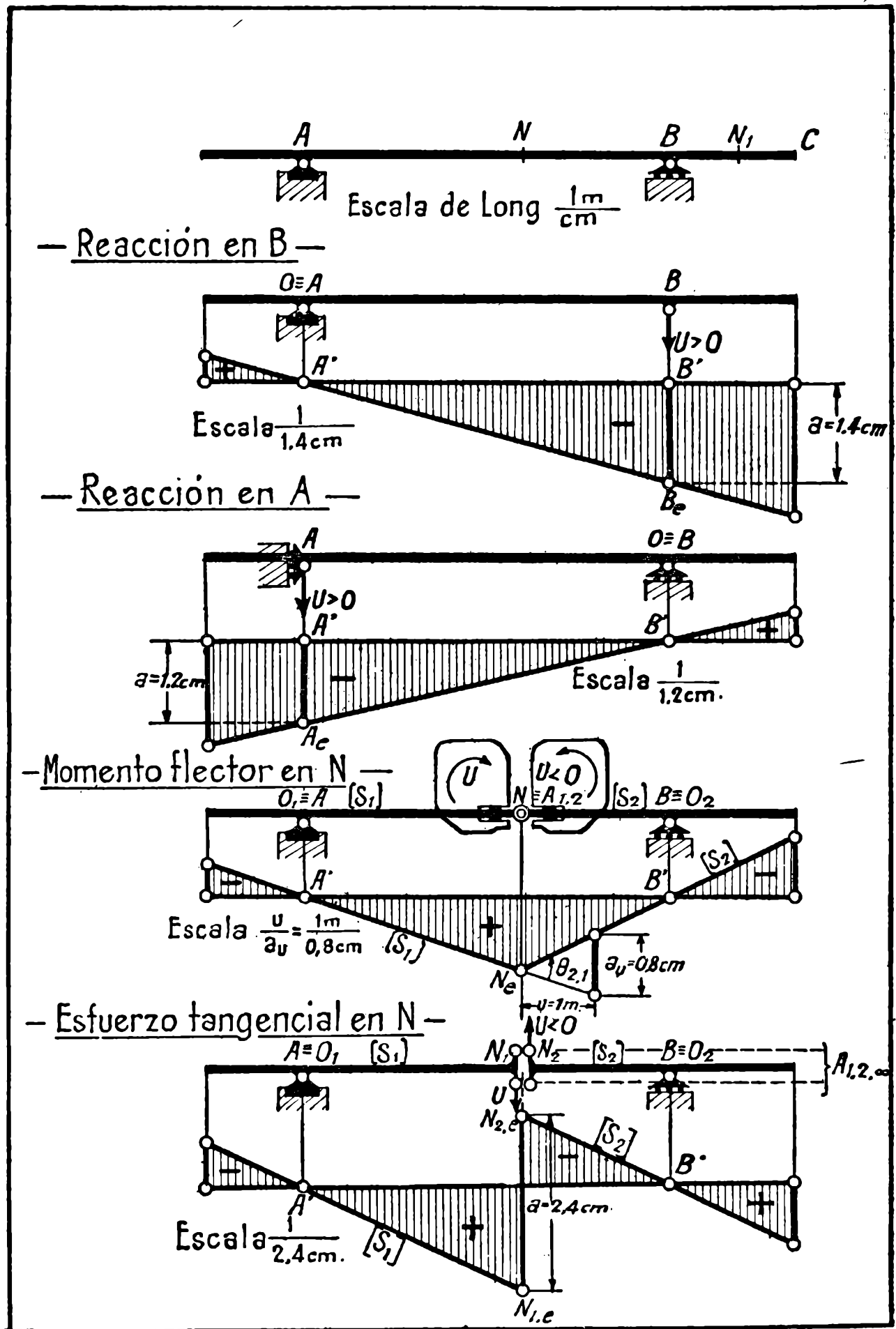


FIG. 343

Viga Prat

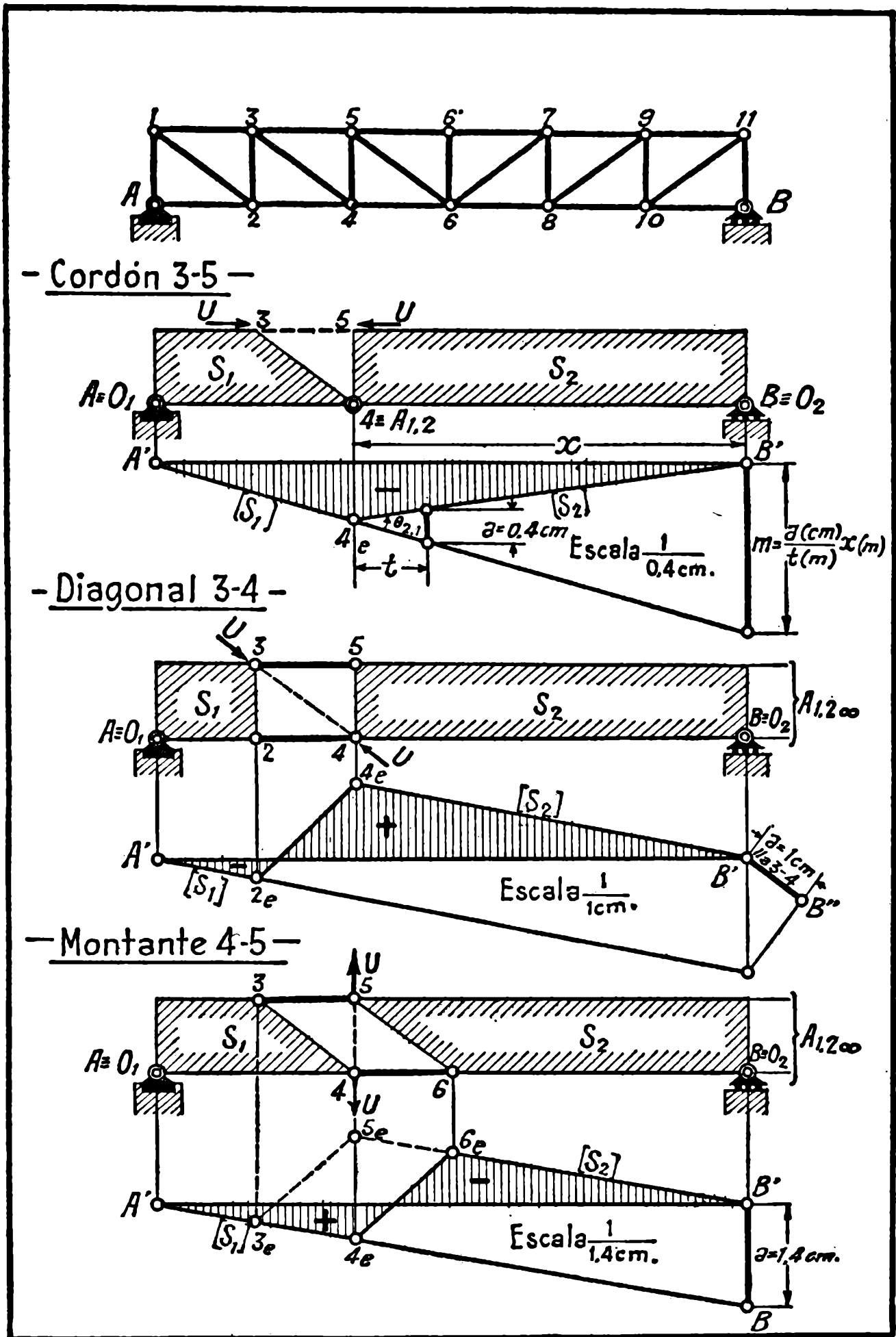


FIG. 344

Viga Prat (continuación)

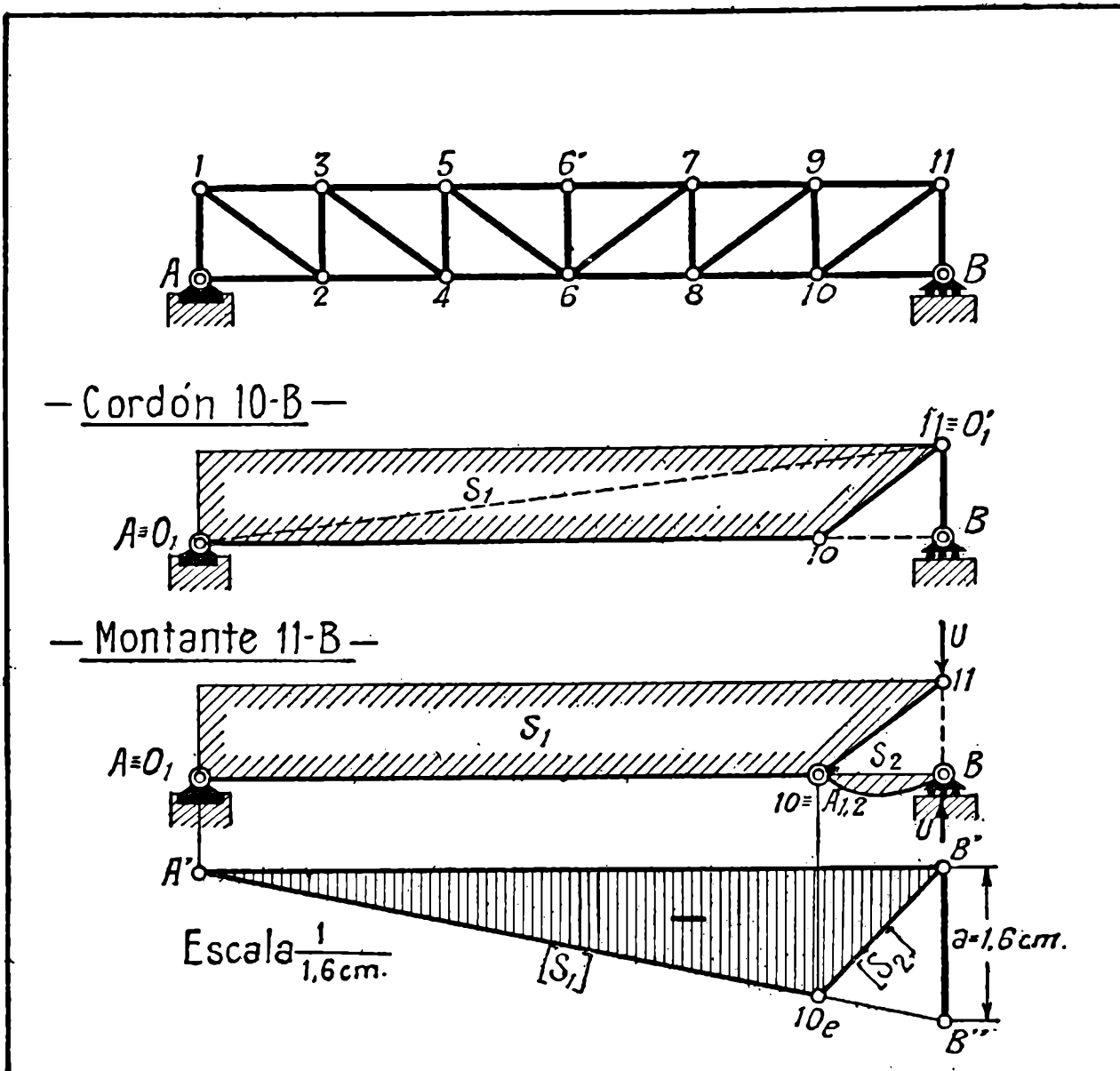


FIG. 345

habría que corregirla en la forma señalada con líneas de puntos en la figura; en este caso, la línea de influencia del montante 4-5 coincidiría, en cuanto a su forma, con la de la diagonal 3-4 y sólo variaría en lo que respecta a la escala y signo.

604. — *Montante 6-6'*. En (584) hemos hallado la línea de influencia de esta barra, que no trabaja para cargas que actúan sobre el cordón inferior. Las que inciden en el superior, sólo influyen en la parte comprendida entre los nudos 5 y 7.

605. — *Cordón 10-B*. Como se deduce de la figura 345, al suprimir esta barra, la chapa S_1 , que, además del polo O_1 , debe tener otro sobre la vertical de B , no es susceptible de desplazamientos. En consecuencia la barra 10-B no trabaja en ningún caso.

Viga Warren

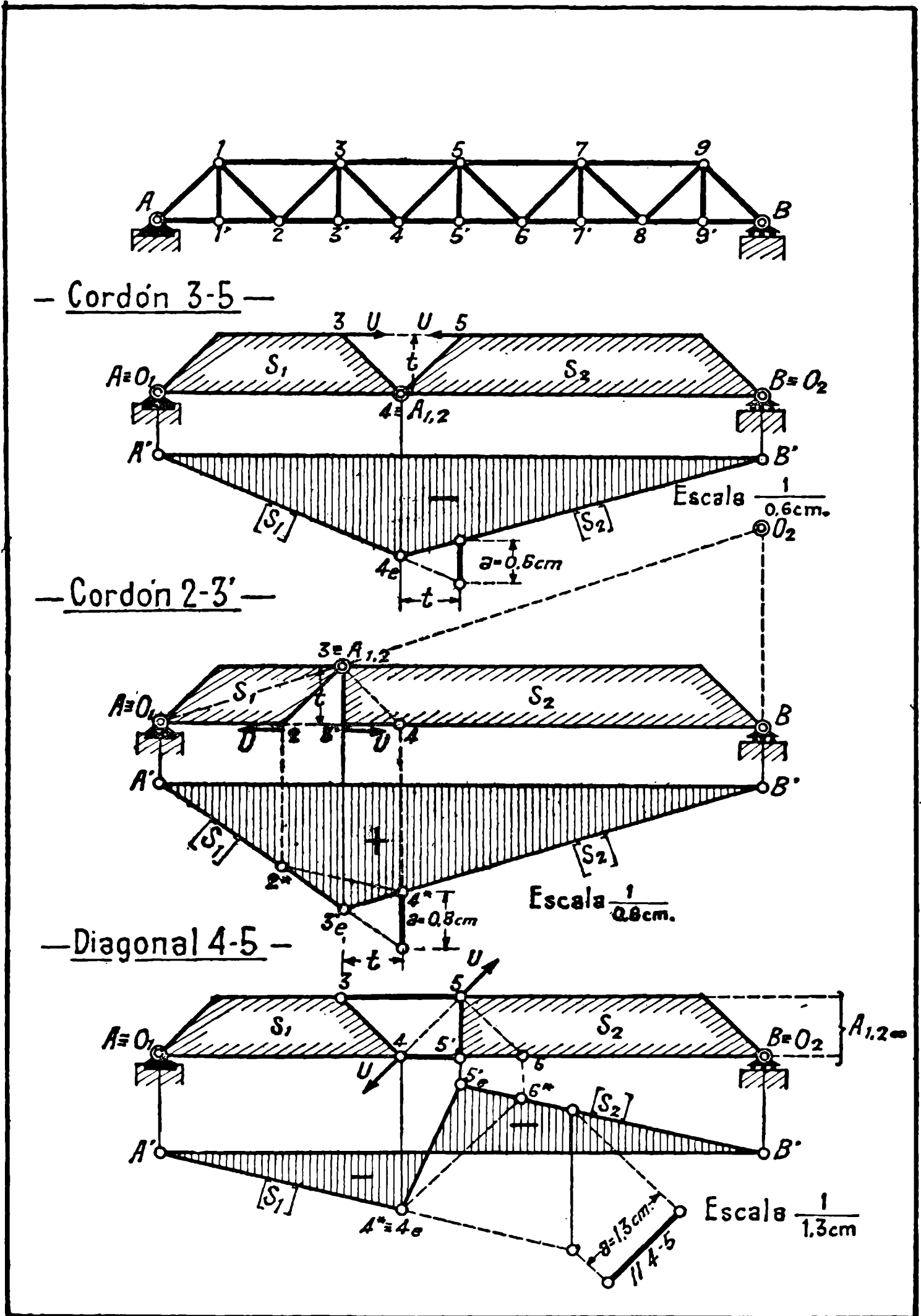


FIG. 346

Viga Warren (continuación)

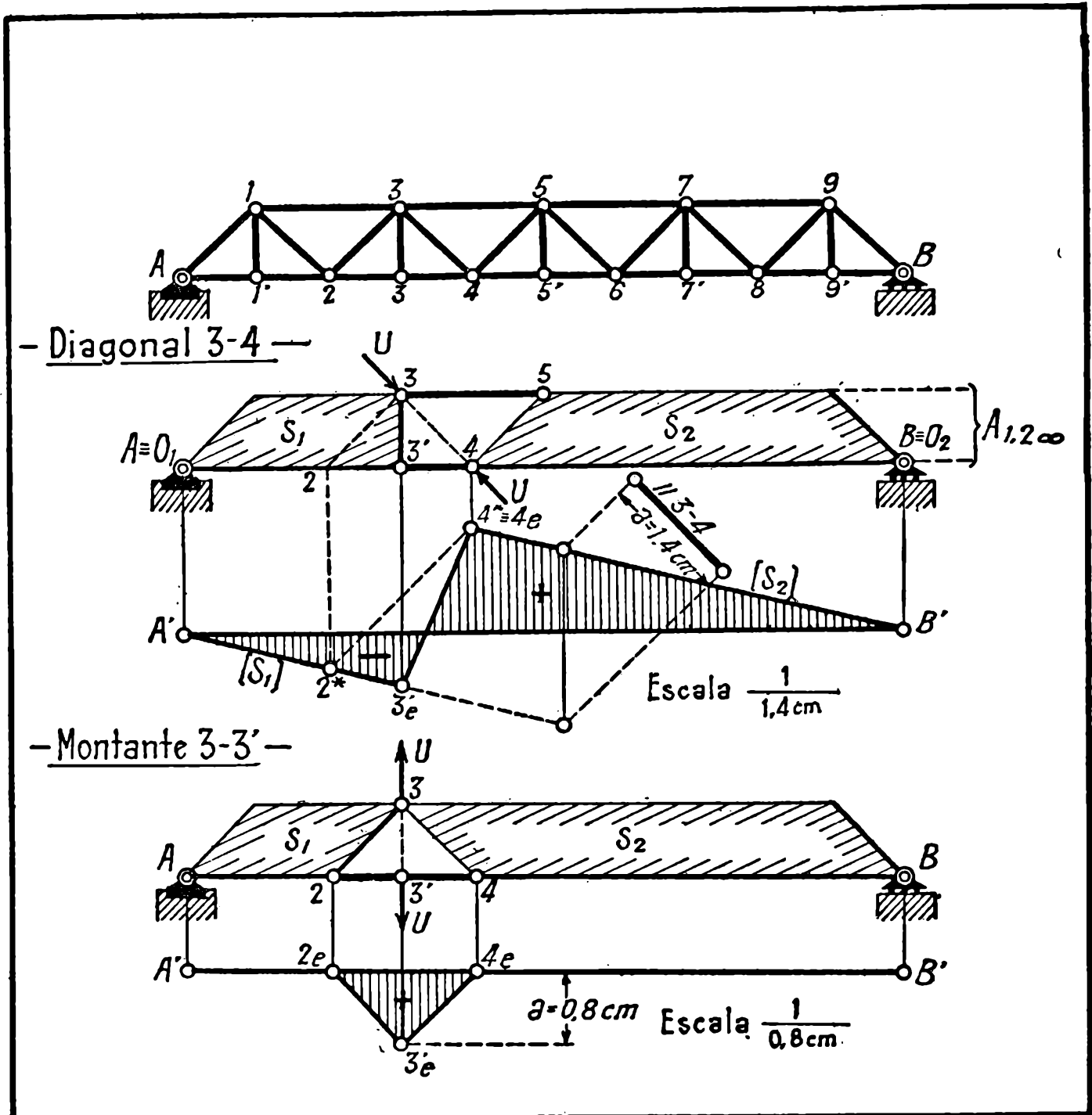


FIG. 347

606. — *Montante B-11.* La línea de influencia para cargas inferiores está representada en la figura 345. En el caso de cargas superiores, la línea de influencia está dada por la recta $A'B''$, referida a la $A'B'$.

607. Viga en V, o Warren, con montantes. — El sistema se representa en la figura 346. Los montantes 1-1', 3-3',..., se colocan a los solos efectos de poder disponer viguetas transmisoras de las cargas en posiciones $A, 1', 2, 3', 4, 5', \dots$, más cercanas; si la luz de la viga, y, por tanto, su altura, que resulta en consecuencia, es pequeña, no son nece-

sarios estos montantes. En este caso, entre A y 2, 2 y 4, . . . , se colocan barras únicas, cuyas líneas de influencia son iguales a las de las barras $A-1'$, $1'-2$, $2-3'$, $3'-4$, . . . , salvo algunas correcciones en la parte de la transmisión de las cargas; otro tanto sucede con las líneas de influencia de las diagonales 2-3, 3-4, etc. En cuanto a los cordones superiores, sus líneas de influencia son completamente iguales en ambos casos.

A continuación nos ocupamos de las líneas de influencia, tanto para el caso de viga con montantes, como sin ellos.

608. *Cordón superior 3-5.* — La figura no requiere ninguna explicación. Como queda dicho, en nada cambia esta línea de influencia cuando la viga carece de montantes.

609. *Cordón inferior 2-3'.* — La línea de influencia se da en la figura para la viga con montantes. En el caso de carecer de estos últimos, se requiere corregir según la línea punteada $2^* 4^*$.

610. *Diagonales.* — Las figuras 346 y 347 dan las líneas de influencia de las diagonales 4-5 y 3-4. En el caso de no existir montantes, se requiere corregirlas, respectivamente, según las líneas punteadas $4^* 6^*$ y $2^* 4^*$.

611. *Montante 3-3'.* — Al suprimir la barra 3-3' (fig. 347), se presenta el caso tratado en (582) y siguientes; las chapas S_1 y S_2 no resultan susceptibles de desplazamientos, como podría probarse buscando los polos de las barras 2-3' y 3'-4, que resultarían coincidentes, respectivamente, con los puntos 2 y 4. La línea de influencia se reduce, en consecuencia, a la trazada en la figura.

612. *Viga en N de altura variable.* — En la figura 348 se dan las líneas de influencia de las principales barras de una viga simplemente apoyada de altura variable, en la hipótesis de que las cargas se transmitan directamente a los nudos del cordón superior. Las de cordón 2-4, montante 4-5 y diagonal 3-4, no requieren mayores explicaciones.

613. *Barras A-1 y A-2.* — Las líneas de influencia de estas barras se determinan en forma completamente igual que en la viga Pratt de cordones paralelos; la A-2, por tanto, no trabaja en ninguna circunstancia.

614. *Barra 6-6*.* — En la figura 349 se ha trazado su línea de influencia. Para determinar la parte de esta línea comprendida entre 5 y 7, así como el desplazamiento a correspondiente a la incógnita se ha recurrido a un Williot auxiliar, en el que, en función de los desplazamientos

Viga N de altura variable

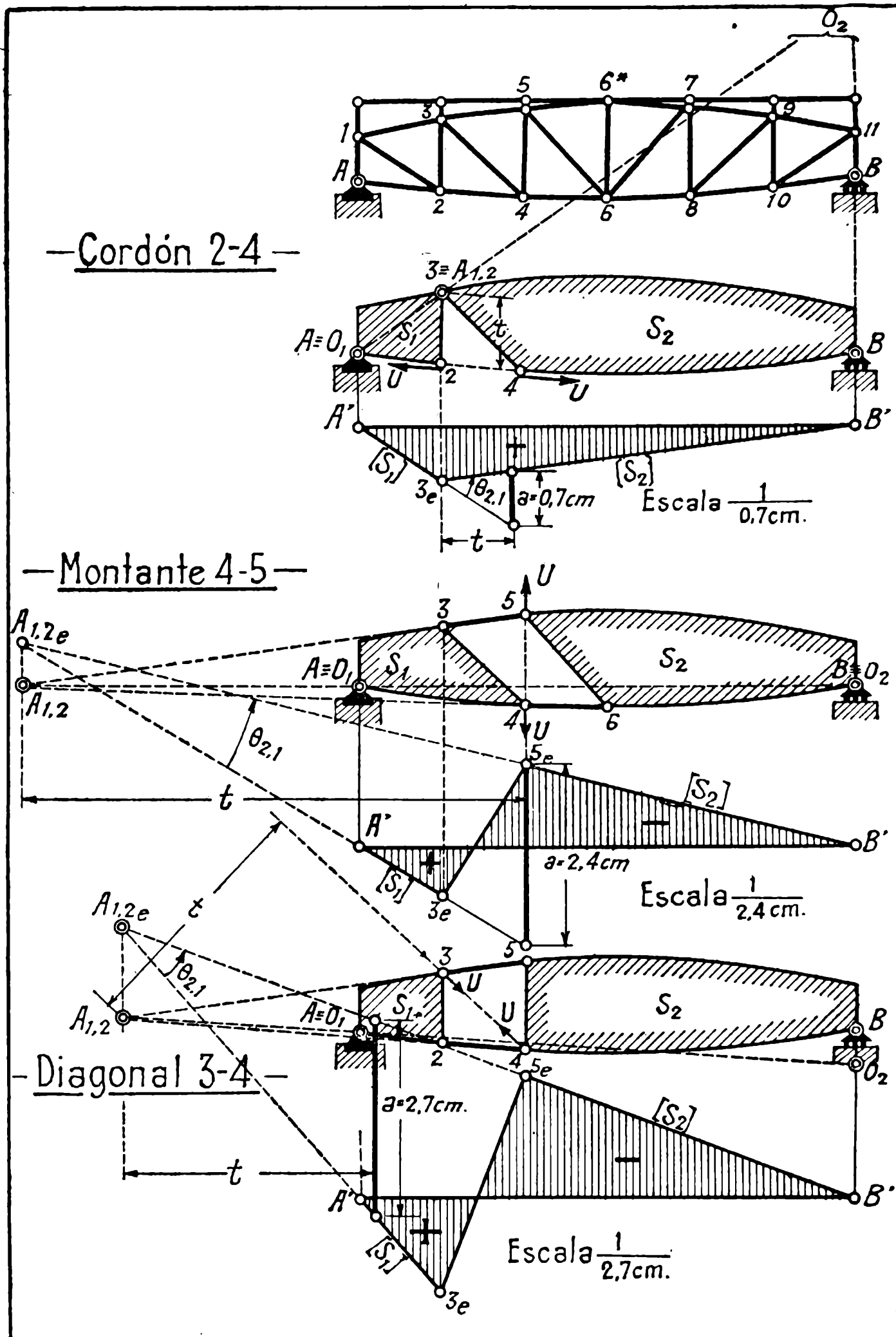


FIG. 348

Viga N de altura variable (continuación)

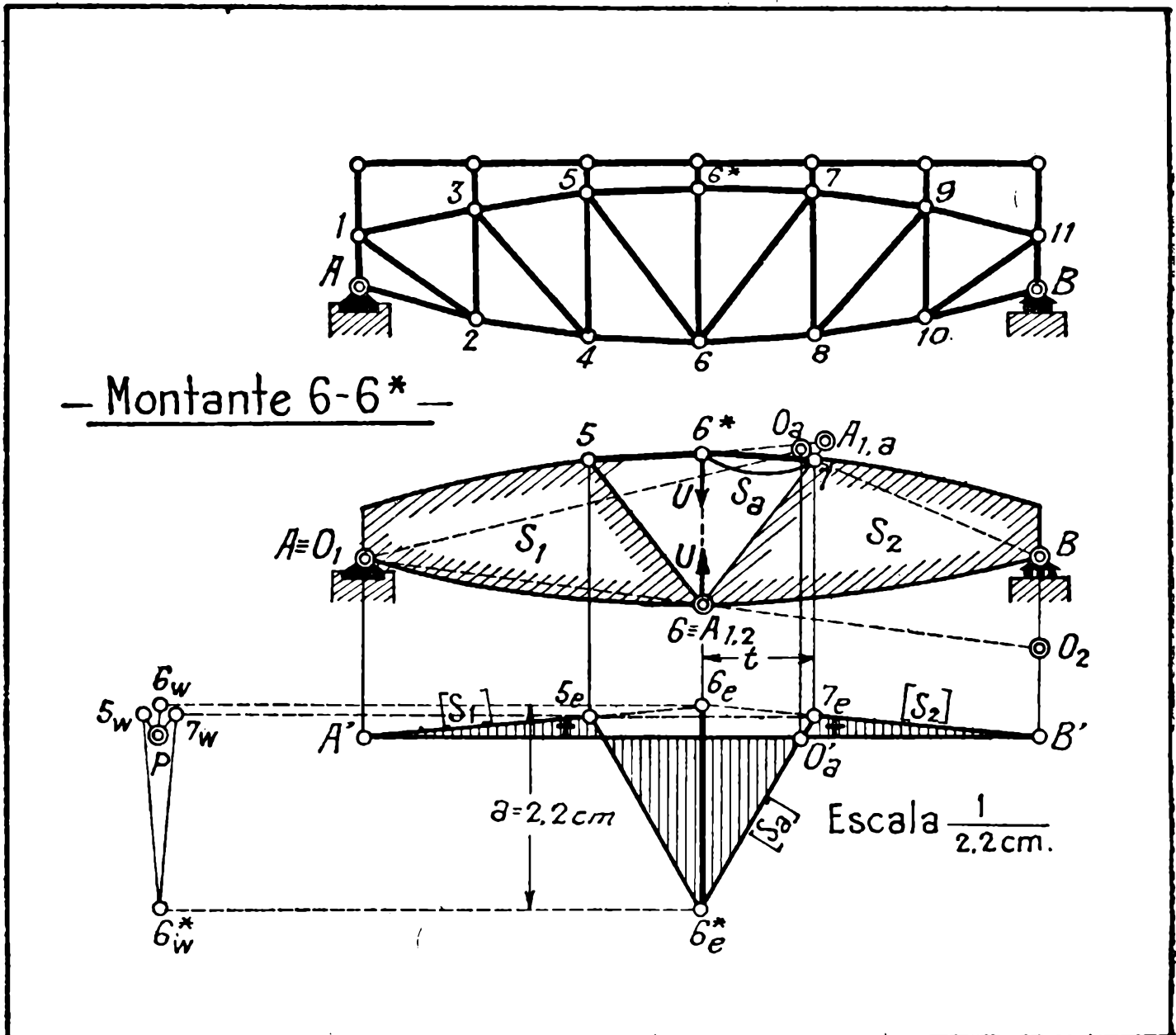


FIG. 349

de los puntos 5 y 7, determinados, a su vez, en base a sus proyecciones verticales dadas por la elástica, se ha hallado el del punto 6*. También, se ha determinado este desplazamiento a , trazando la elástica de la barra 6*-7 considerada como una chapa S_2 ; su polo es el punto O_a y la elástica la recta O'_a-7_e .

§ 3. — Reticulados compuestos

615. Preliminar. — En los puentes de luz importante y, por consiguiente de gran altura de viga, se recurre a reticulados más o menos complejos, como los que indican las figuras 350 y siguientes, que, por lo común, se forman agregando barras complementarias a los reticula-

dos simples tratados anteriormente. Estas barras complementarias tienen por objeto, ya sea reducir la luz libre de las piezas que trabajan a la compresión, a fin de evitar el pandeo con menor momento de inercia, ya sea poder colocar las viguetas de trasmisión de cargas a menores distancias sin tener que recurrir a diagonales de gran inclinación. Ya vimos al tratar de la viga Warren que con este último objeto se le colocaban los montantes complementarios.

Las líneas de influencia de las barras principales que corresponden a las del sistema simple en base al cual se forman los que pasamos a tratar, son iguales, como veremos, a las de este último, salvo correcciones debidas a la trasmisión de las cargas y que tienen lugar en las proximidades de la sección correspondiente a la barra considerada.

616. Viga Prat con contradiagonales inferiores. — El sistema está formado por la viga Prat de la figura 350 *b*, a la que se agregan las piezas complementarias $b-\beta$, $b-2$ y $b-m$, y similares; las dos primeras tienen por objeto poder colocar las viguetas intermedias en los puntos β , y con la $m-b$ se consigue reducir la luz libre del cordón 3-5, que trabaja a la compresión.

617. Montante $m-b$. — Como se ve en la figura, al suprimir esta barra resulta un mecanismo cuyas chapas S_1 y S_2 no son susceptibles de desplazarse; se presenta, en efecto, el caso tratado en (582), y, considerando la barra 3- m como una chapa auxiliar S_a , su polo resulta el mismo punto 3, quedando, por consiguiente, la chapa S_1 con dos polos; otro tanto se puede demostrar para la chapa S_2 . Solamente pueden desplazarse las barras 3- m y $m-5$, y la línea de influencia se reduce al triángulo trazado en la figura, para cargas que actúan en el cordón superior; para cargas inferiores la influencia es nula en toda la extensión de la viga y el sistema se comporta como si no existieran las barras $m-b$, es decir, exactamente en la misma forma que el simplificado de la figura 350 *c*.

Por comodidad, pues, nos reduciremos a tratar este último; cuyas líneas de influencia son exactamente iguales a las del de la figura 350 *a*.

618. Barras de cordón $\beta-4$ (fig. 350) y $2-\beta$ (fig. 351). — Su obtención no presenta ninguna dificultad. Con trazos de puntos se han marcado en 3_e 4_e y 2-4, respectivamente, las líneas de influencia que resultarían para la barra de cordón inferior 2-4 de la viga Prat de la figura *b*.

619. Barras 3-5 y 6-6'. — Estas líneas de influencia son exactamente iguales a las de las barras correspondientes de la viga Prat de la figura 350 *b*.

620. — *Diagonales 3-b y b-4.* — Las figuras 350 y 351 dan respectivamente, las líneas de influencia correspondientes. La de la barra 3-b (fig. 350) es exactamente igual a la de la 3-4 de la Prat de la figura b. La de la b-4 (fig. 351) tiene una corrección en correspondencia al corte; la línea de puntos $3_e 4_e$ indica la forma que tiene la línea de influencia de la barra 3-4 de dicha viga Prat.

621. *Montante 2-3* (fig. 352). — La línea de influencia es exactamente igual a la del respectivo montante de la Prat de la figura 350 b, pues el polo relativo $A_{1,2}$ se encuentra, como sucedería para esta última, en el punto de intersección de las direcciones de las barras 1-3 y 2-4. Para hallar este polo relativo, en la figura se ha procedido de la siguiente manera: la chapa S_a se encuentra articulada con la S_1 y S_2 en los puntos 2 y 4 y, por tanto, sobre la horizontal 2-4 debe encontrarse el polo $A_{1,2}$; análogamente, considerando la barra 3-b como una chapa auxiliar S_n , su polo relativo respecto de la S_1 es el punto $A_{1,n}$ de intersección de las 1-3 y 2-b y respecto de la S_2 , el $A_{2,n} \equiv 3$; en la recta $A_{1,n} A_{2,n} \equiv 1-3$ que une a estos polos relativos, debe encontrarse, por tanto, también el polo $A_{1,2}$.

622. *Montante B-11.* — La figura 352 da su línea de influencia. Los polos de las chapas S_1 y S_2 son, respectivamente, los puntos A y B. Para hallar el desplazamiento a , variación de distancia entre los puntos 11 y B se ha trazado la elástica $O'_a 11_e$ de la barra r-11, considerada como chapa auxiliar S_a ; la figura es suficientemente explícita al respecto. La rotación relativa entre las chapas S_a y S_2 está dada por el ángulo $11_e r_e B'$ y la distancia entre su polo relativo r y la recta que une los puntos B y 11 es la t indicada en la figura.

623. *Péndola b-β* (fig. 351) y *contradiagonal b-2* (fig. 352). — Para ambas líneas de influencia se presenta el caso tratado en (582), no siendo susceptibles de desplazamientos las chapas S_1 y S_2 de los mecanismos respectivos; las líneas de influencia se reducen a los triángulos trazados en las figuras.

Para el caso de la péndola b-β (fig. 351) se demuestra que la chapa S_2 tiene dos polos de la manera siguiente: Las chapas S_1 y S_2 están articuladas entre sí en el punto $A_{1,2} \equiv 3$ y sus polos son los O_1 y O_2 marcados en la figura. Considerando la barra b-4 como una chapa auxiliar S_m , su polo O_m se encuentra en la intersección de las O_2-4 y O_1-b . Finalmente, el polo O_n de la chapa auxiliar $S_n \equiv 2-\beta$ debe encontrarse sobre las O_1-2 y O_m-2 (ya que 2, intersección de los b-2 y 4-β, es el polo relativo de las S_m y S_n), y coincide, por tanto, con 2. La chapa S_2 resulta, pues, con los dos polos O_1 y O_n .

Viga Prat compuesta con contradiagonales inferiores

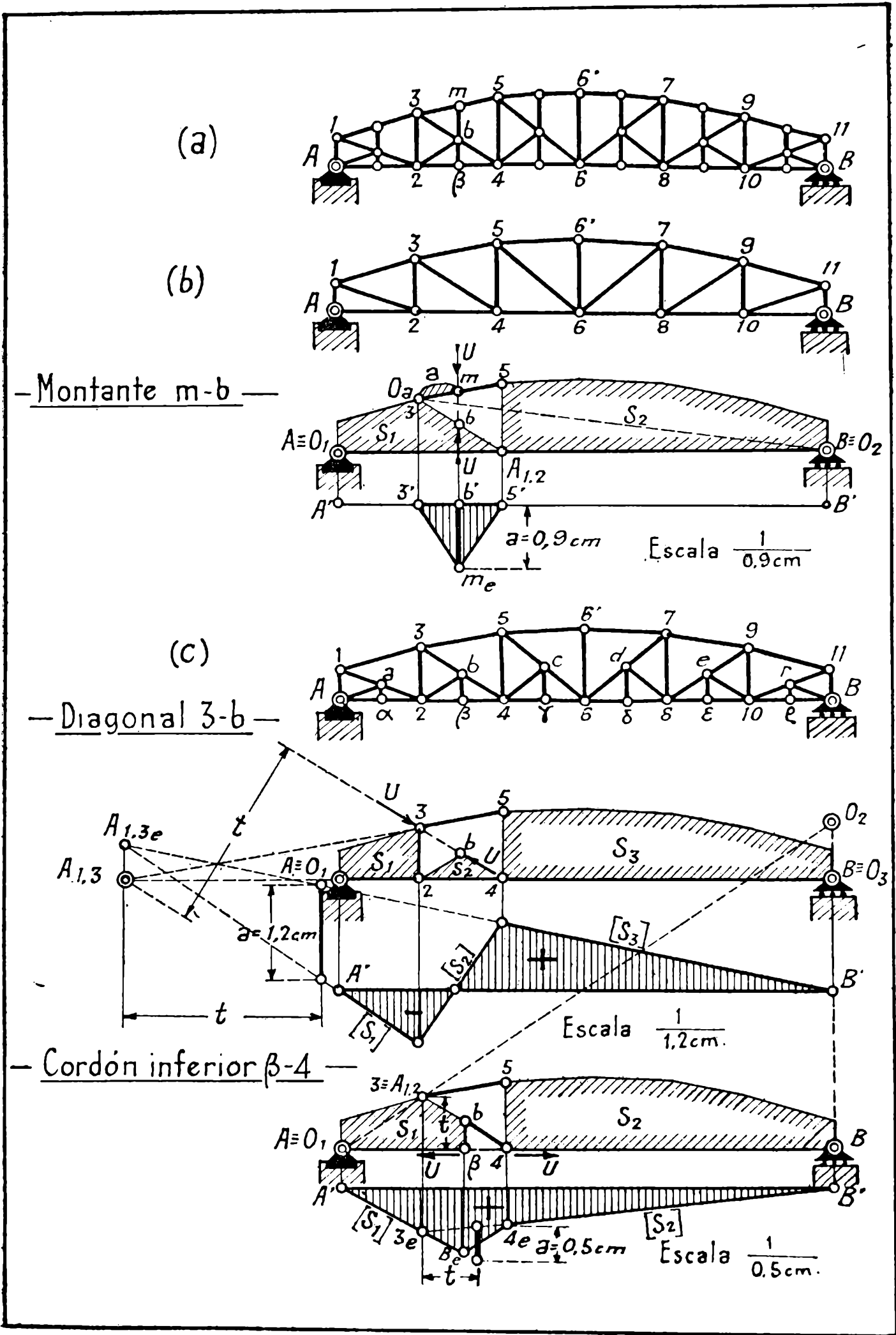
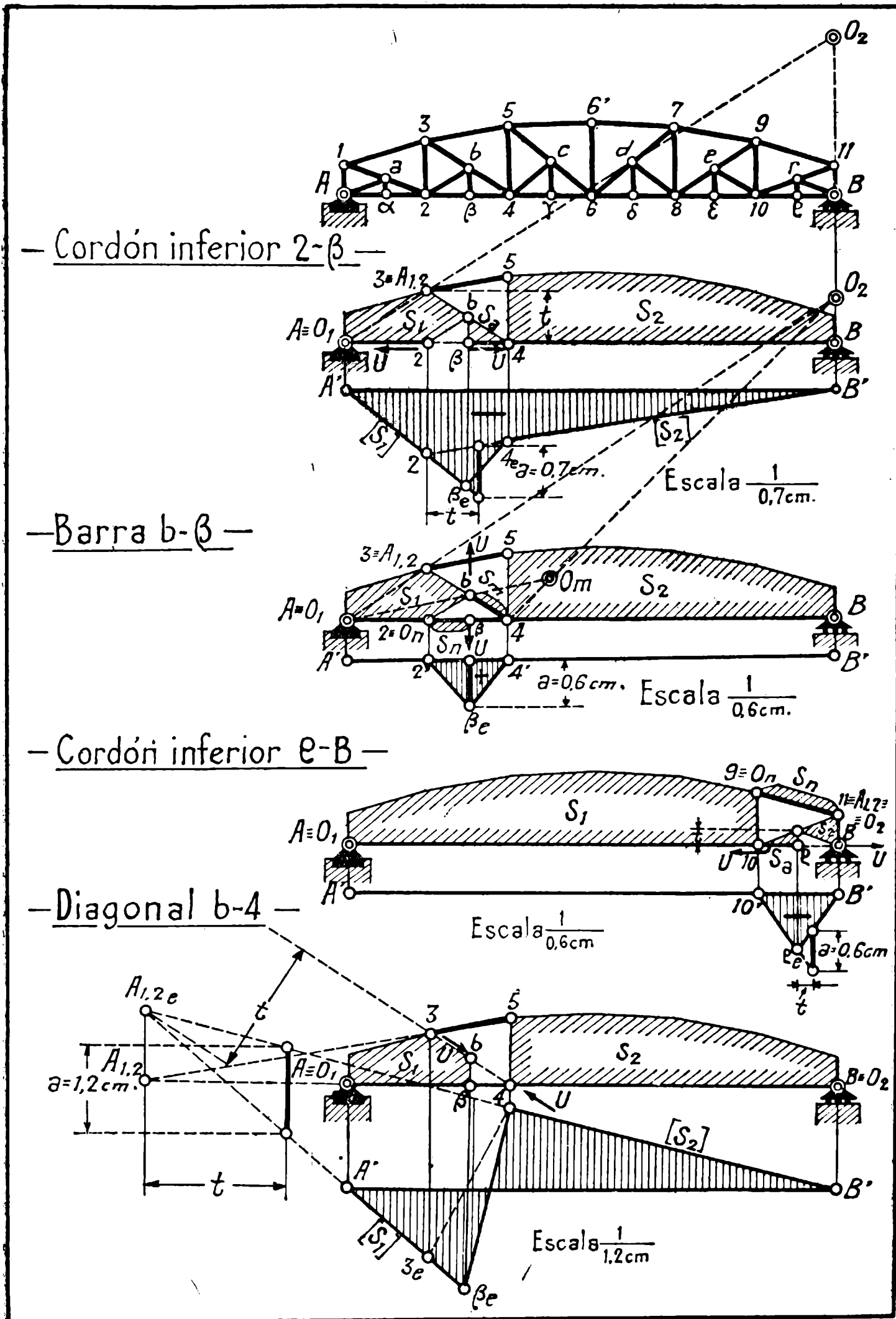


FIG. 350

Viga Prat compuesta con contradiagonales inferiores (continuación)



Viga Pratt compuesta con contradiagonales inferiores (continuación)

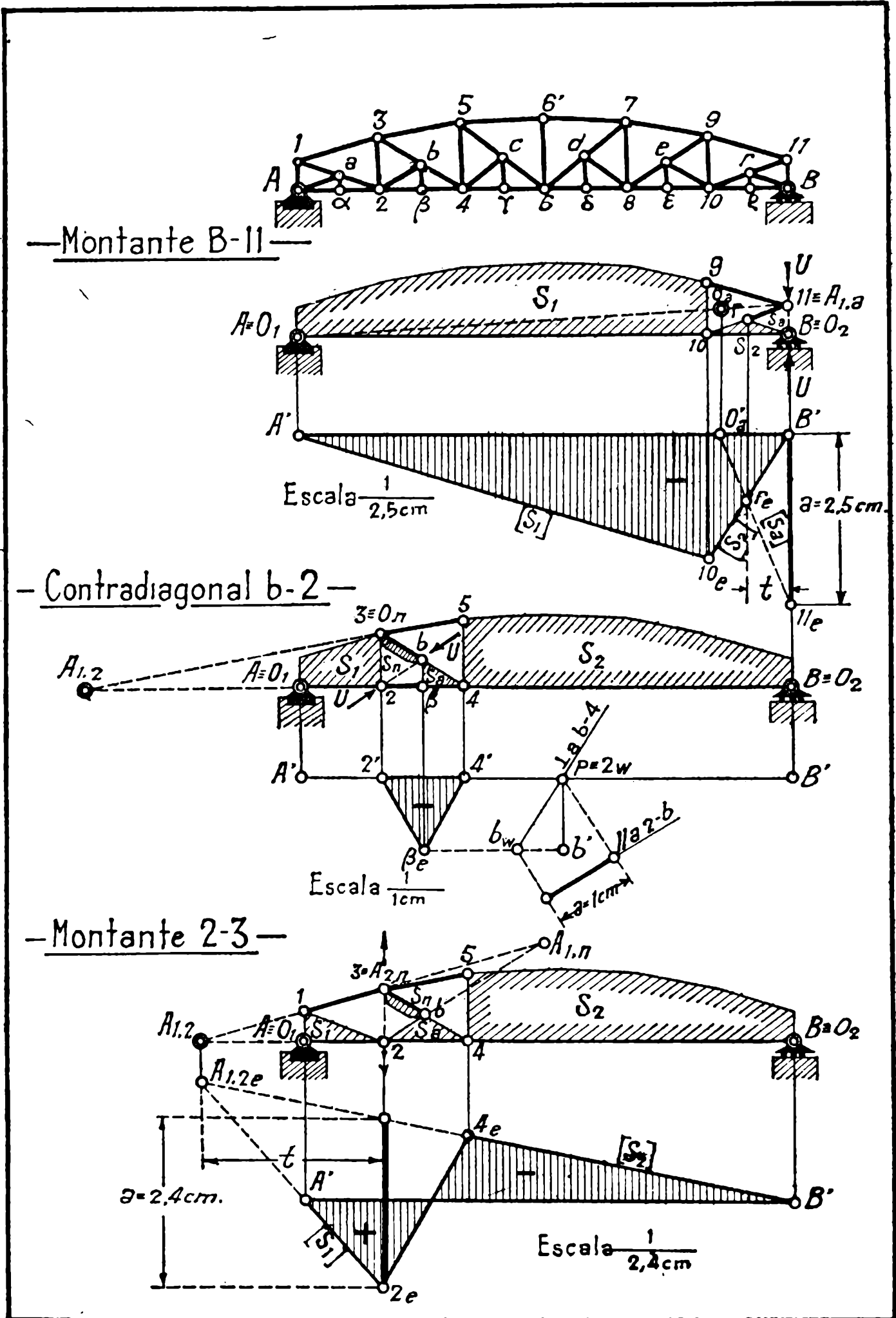


FIG. 352

Para el caso de la contradiagonal $b-2$ (fig. 352) la demostración de la inmovilidad de la chapa S_1 se efectúa como sigue: En primer lugar, el polo relativo $A_{1,2}$ es la intersección de las direcciones de las barras 2-4 y 3-5; en efecto, considerando la chapa S_a , su polo relativo con la S_2 es el punto 4 y con la S_1 se encuentra sobre la horizontal 2- β y, por consiguiente, el punto $A_{1,2}$ que debe hallarse sobre la recta que une dichos polos relativos, se encontrará sobre la que une el punto 4 con un punto de la horizontal 2- β , o sea, sobre esta horizontal. Además, debe encontrarse sobre la 3-5, por estar ligadas las chapas S_1 y S_2 mediante esta barra. Esto sentado, los polos de las chapas S_1 y S_2 son $O_1 \equiv A$ y $O_2 \equiv B$, y el de la $S_n \equiv 3-b$ se halla en la intersección de la 3- O_2 y de la 3- O_1 , es decir, es el mismo punto 3. La chapa S_1 resulta, por consiguiente, con los dos polos O_1 y O_n .

625. Viga Prat compuesta con contradiagonales superiores. — Se diferencia este sistema del anterior en que las contradiagonales parten de los nudos superiores. También, en este caso, las barras $a-s$, $b-q$, $c-p$..., cuyo objeto es reducir la luz libre de las piezas de cordón superior, no trabajan sino para cargas que actúen sobre este último; para cargas inferiores puede simplificarse el sistema mediante su supresión y colocación de barras únicas entre los nudos 1 y 3, 3 y 5, 5 y 6',..., sin alterar las tensiones de las restantes barras.

626. Barras de cordón. — En la figura 353 se dan las líneas de influencia de las barras 4- γ y $\gamma-6$ de cordón inferior, que, como se ve, resultan completamente iguales a las de la correspondiente viga Prat simple. La escala de esta última se ha determinado teniendo en cuenta que la variación de distancias entre γ y 6 es igual a la existente entre 4 y 6.

627. Montante 4-5. — En la figura 353 está representado el mecanismo que se obtiene al suprimir esta barra. El polo de la S_1 es $O_1 \equiv A$. Las chapas S_1 y S_2 están articuladas en el punto $A_{1,2}$, intersección de las 3-5 y 2- β ; en efecto, sobre la 3-5 debe encontrarse por estar dichas chapas articuladas mediante la chapa S_m ligada con ellas respectivamente en 3 y 5 y, por otra parte, considerando la chapa auxiliar S_n que tiene su polo relativo con la S_1 en el punto 4 de intersección de las $b-3$ y 2- β y con la S_2 en el $A_{n,2}$ de intersección de las 4- γ y $b-5$, se deduce que también debe encontrarse sobre la 4- $A_{n,2}$ o sea, sobre la horizontal 2- β , como decíamos. El polo de la S_2 es, por tanto, $O_2 \equiv B$. En la figura se han hallado además, los polos O_m y O_p ; el primero se encuentra en la intersección de las O_1-3 y O_2-5 , y el segundo en la de las $O_2-\gamma$ y $O_m-A_{m,p}$ (este último, a su vez, es el punto común de las $b-4$ y 5- γ).

Viga Prat compuesta con contradiagonales superiores

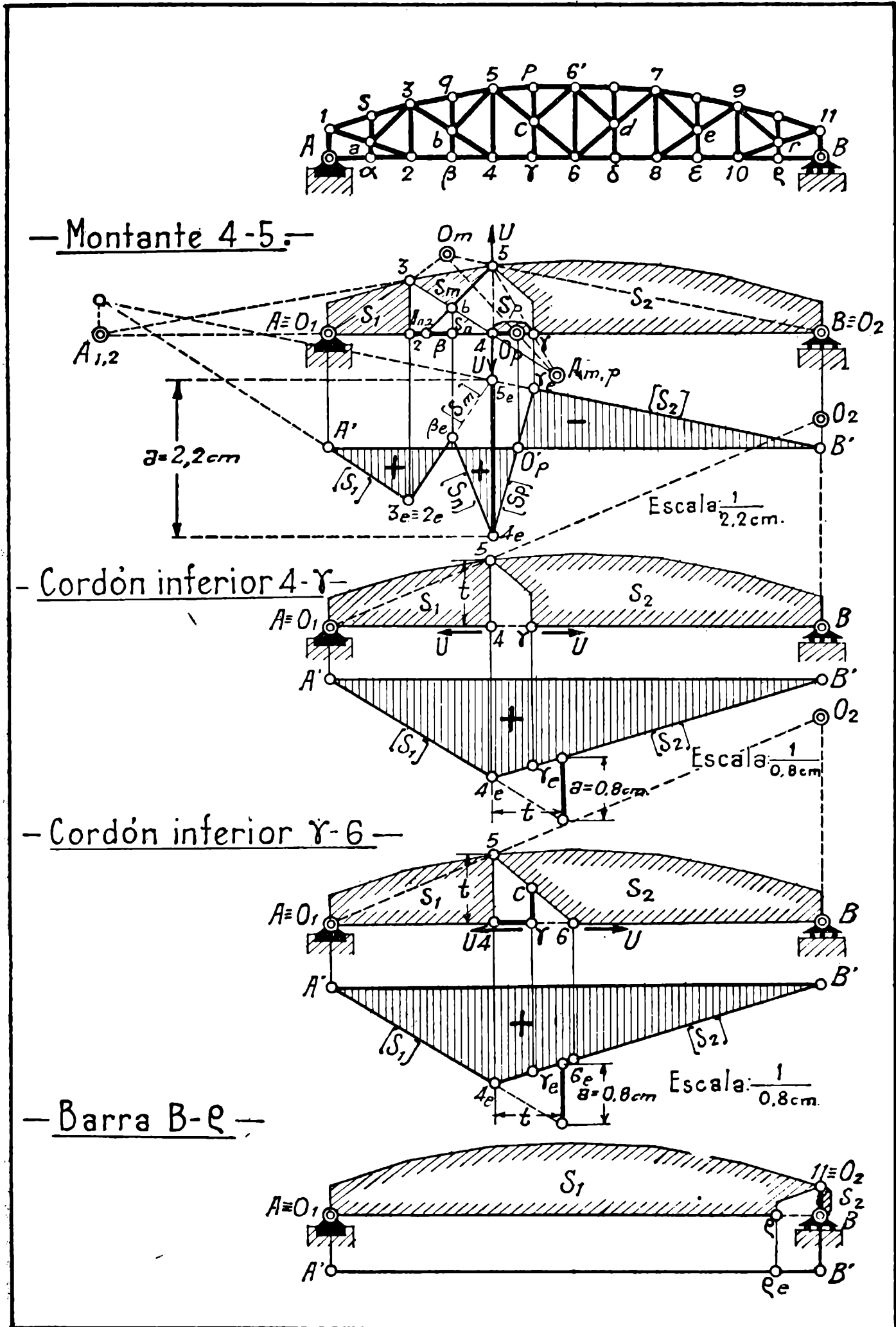


Fig. 353

Viga Prat compuesta con contradiagonales superiores

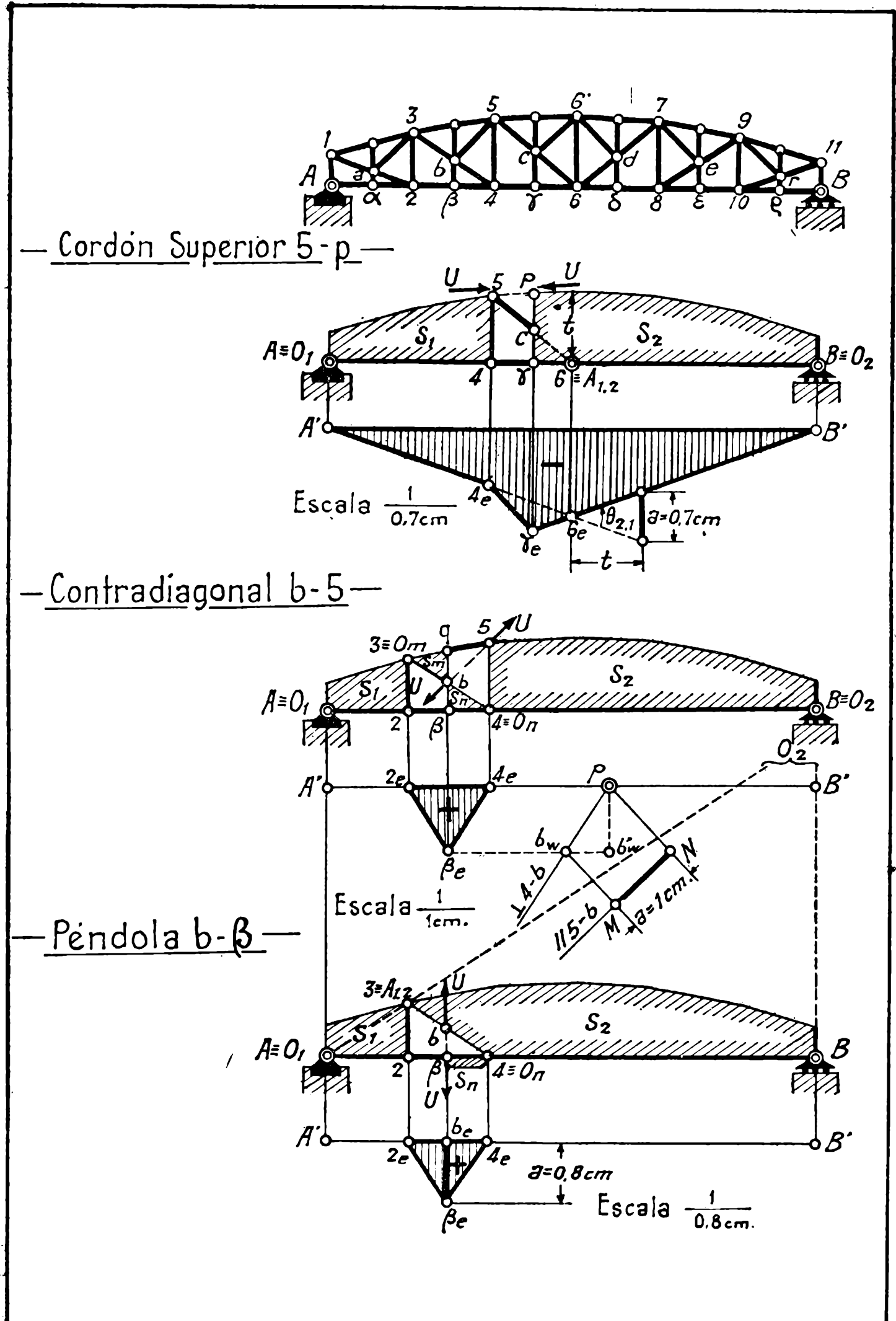


FIG. 354

Viga Prat compuesta con contradiagonales superiores

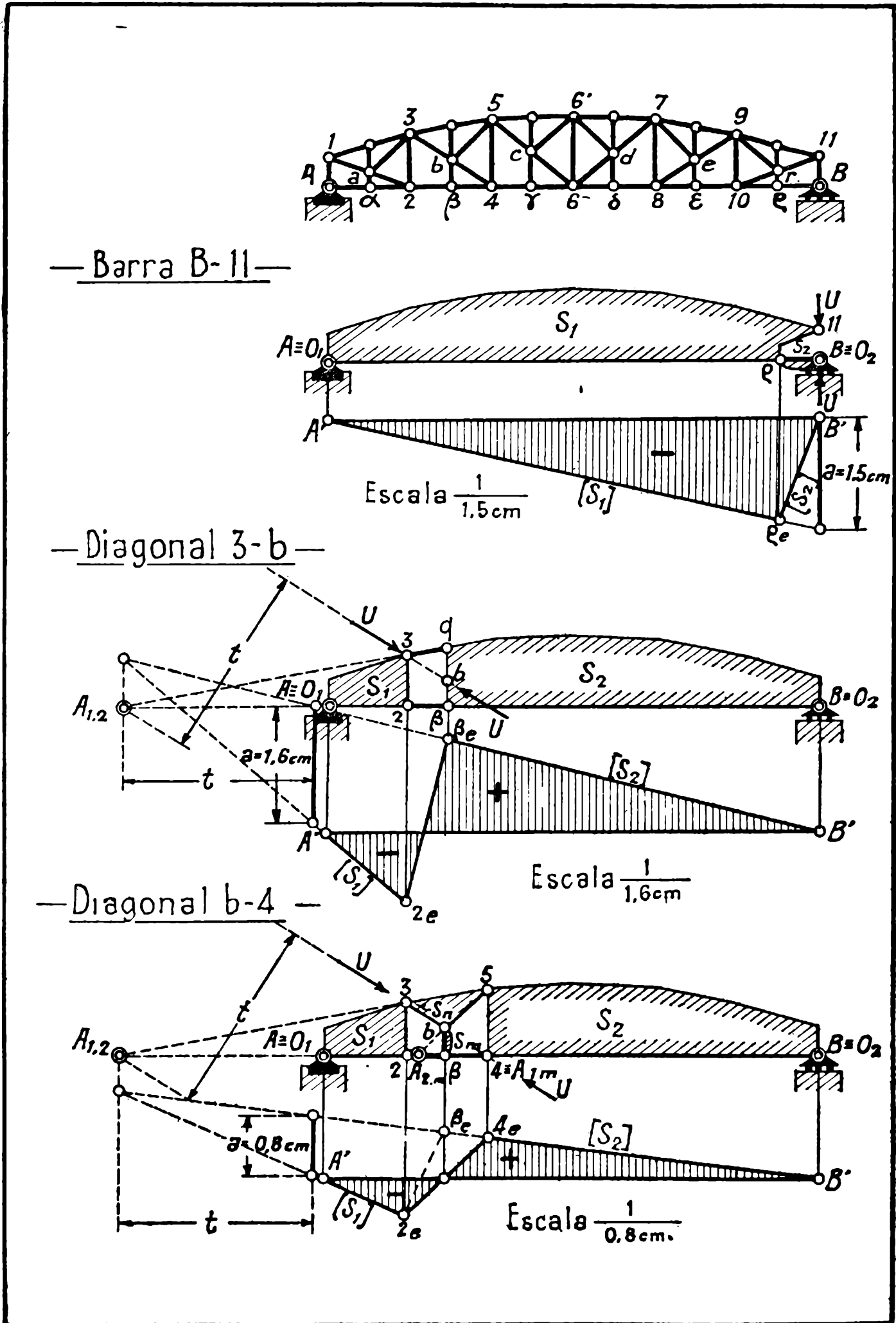


FIG. 355

Con estos elementos se ha trazado la elástica vertical que proporciona a la línea de influencia buscada. Las elásticas de las chapas S_1 y S_2 están dadas por rectas que pasan por A' y B' y se cortan sobre la vertical de $A_{1,2}$. La recta $3_e 5_e$ da la elástica de la chapa S_m , que coincide en su parte $3_e \beta_e$ con la de la barra $2-\beta$. Las rectas $\gamma_e O'_p$ y $4_e \beta_e$ dan, finalmente, las elásticas de las chapas S_p y S_n .

La inversa de la escala, o variación de distancia entre los puntos 5 y 4, está dada directamente por el segmento $\overline{4_e 5_e}$.

628. *Péndola $b-\beta$* . — En el mecanismo correspondiente (fig. 354) las chapas S_1 y S_2 no son susceptibles de desplazarse; se demuestra, en efecto, que 2 y 4 son respectivamente los polos de las barras $2-\beta$ y $\beta-4$ y que, por tanto, aquellas chapas poseen dos polos cada una. Se presenta, pues, el caso tratado en (582) y la línea de influencia, de ordenadas nulas para cargas superiores, se reduce para las inferiores, al triángulo trazado en la figura.

629. *Diagonales $3-b$ y $b-4$* . — En la figura 355 se dan sus respectivas líneas de influencia. La de la $b-4$ es completamente igual a la de la diagonal $3-4$ de la correspondiente viga Pratt simple. Además, corrigiéndola según la línea punteada $2_e \beta_e$ se obtiene, como se deduce fácilmente, la línea de influencia de la $3-b$.

630. *Contradiagonal $b-5$* (fig. 554). — Para esta barra se presenta también el caso tratado en (582). Las chapas S_1 y S_2 no son susceptibles de desplazarse; podría demostrarse, en efecto, que el punto 4 es polo de la chapa S_n ; etc. La línea de influencia se reduce al triángulo trazado en la figura, tanto para cargas inferiores como superiores.

Permaneciendo fijo el punto 5, el desplazamiento a correspondiente a la incógnita está dado por la proyección sobre $b-5$ del desplazamiento del punto b . La proyección vertical de este último es pb'_w y siendo su dirección normal a $b-4$, si por b se traza una paralela a ésta normal y por b'_w una horizontal, se obtiene el punto b_w que da en pb_w el efectivo desplazamiento del punto b , cuya proyección \overline{MN} sobre la dirección de $b-5$ proporciona la inversa a de la escala.

631. *Barras $B-9$ y $B-11$* . — La primera no trabaja, pues de la figura 353 se deduce que la chapa S_1 no es susceptible de desplazarse por poseer dos polos.

Por lo que respecta a la $B-11$, la obtención de su línea de influencia, trazada en la figura 355, no requiere mayores explicaciones.

632. Viga en K. (fig. 357 a). — El sistema es equivalente al representado en la figura 357 b, constituido por una serie de chapas triangulares articuladas entre sí. Con la disposición de este sistema, consistente en cortar las diagonales en los puntos 1, 4, 7, ... de los montantes, se consigue reducir la luz libre en estos últimos y, al mismo tiempo, aproximarlos sin recurrir a diagonales demasiado inclinadas y largas; en esta forma se obtiene, además, que la transmisión de las cargas se efectúe en puntos más cercanos y que los cordones resulten más cortos.

Antes de ocuparnos de las líneas de influencia del sistema en cuestión demostraremos que el mecanismo representado en la figura 356 a es equivalente al de la b, es decir que las seis chapas de la izquierda se comportan como una única chapa S_1 .

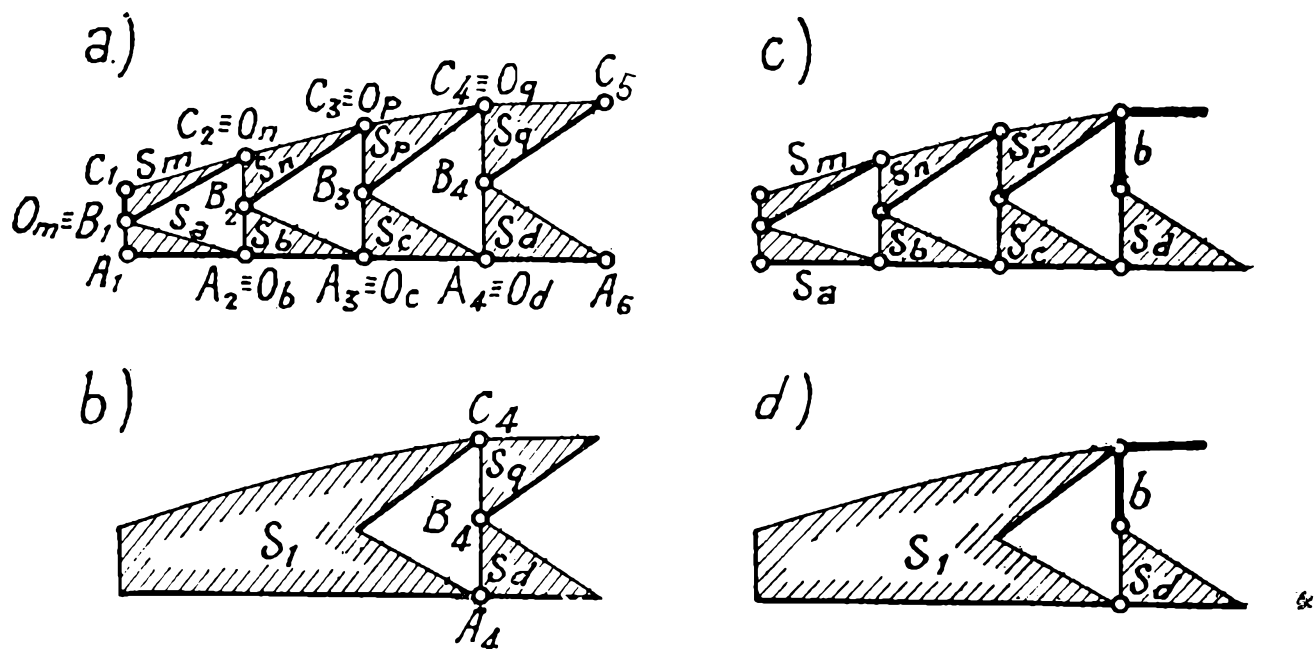


FIG. 356

Para ello, consideremos empotrada la primera chapa S_a y busquemos los polos de las restantes, que serán sus polos relativos respecto de aquella. Por de pronto, los de las S_m y S_b son, respectivamente, los puntos $O_m \equiv B_1$ y $O_b \equiv A_2$. La S_n está articulada con las S_m y S_b , respectivamente, en C_2 y B_2 ; su polo será, por tanto, el punto $O_n \equiv C_2$, de intersección de las $C_2 O_m$ y $B_2 O_b$. Análogamente, la S_c está articulada con la S_b en A_3 y con la S_n en el punto de intersección de las $B_2 A_3$ y $C_3 B_3$, es decir, en el mismo punto A_3 ; su polo se encontrará, por consiguiente, en la intersección de las $A_3 O_b$ y $A_3 O_n$, o sea, será $O_c \equiv A_3$. En forma completamente igual se demuestra que los polos de las chapas S_p , S_d y S_q son los puntos $O_p \equiv C_3$, $O_d \equiv A_4$ y $O_q \equiv C_4$, indicados en la figura.

Cada una de las cinco chapas S_m , S_b , S_n , S_c y S_p resulta, por consiguiente, como se ve en la figura, con dos polos relativos respecto de la S_a , o, lo que es lo mismo, no puede desplazarse respecto de esa última;

se tiene, por tanto, que, como indica la figura *b* y de acuerdo con lo que afirmábamos, las seis chapas de la izquierda se comportan como una sola chapa S_1 . Lo mismo sucede con el mecanismo de la figura *c*, que, de acuerdo con lo anterior, es evidentemente reemplazable por el de la figura *d*.

Utilizaremos estas consideraciones a continuación para simplificar los mecanismos que se obtienen al poner en evidencia las tensiones de las diversas barras del sistema de la figura 357 *a*.

633. Cordones. — La figura 357 da las líneas de influencia de las barras de cordón 8-11 y 6-9. Las cuatro chapas triangulares que quedan a la izquierda del corte son equivalentes a las S_1 dibujadas en los mecanismos respectivos, de acuerdo con lo que acabamos de demostrar.

Por lo demás, la obtención de estas líneas de influencia, que se deduce fácilmente de la figura, no ofrece ninguna particularidad. Ellas son completamente iguales a las de la viga Prat, cuyos cordones y montantes coincidieran con los del sistema tratado.

634. Montante superior 10-11. — La figura 358 muestra el mecanismo que se obtiene al poner en evidencia la incógnita, y determina los polos de sus diversas chapas. Se ha comenzado por hallar el polo de la S_2 . Considerando la chapa auxiliar S_a , se tiene que su polo se hallará sobre la recta que une el punto *A*, polo de la S_1 con el nudo $6 \equiv A_{1,a}$, es decir, será un punto de la misma recta 6-9. El polo O_2 se encontrará por consiguiente sobre la recta que une dicho punto de la recta 6-9 con el nudo 9, articulación de la S_a con la S_2 , es decir, sobre la 6-9, y como debe encontrarse sobre la vertical en *B*, será el mismo punto *B*. El polo de la chapa S_b estará en la intersección de las rectas O_18 y $O_2 A_{2,b}$, es decir, será O_b , y el O_a , sobre O_b7 y O_29 . La elástica toma, de consiguiente, la forma indicada en la figura, siendo $6_e 9_e$ la parte correspondiente a la chapa S_a .

Para hallar la variación de distancia entre los puntos 10 y 11 se ha trazado la elástica de la chapa S_b , que pasa por los puntos O'_b y $6_e \equiv 8_e$. Obtenida esta elástica, la variación α de distancia se determina como indica claramente la figura.

635. — *Montante superior 4-5.* La obtención de los polos del mecanismo resultante al poner en evidencia esta incógnita, presenta algunas diferencias respecto de la que acabamos de tratar. La figura 358 indica el mecanismo en cuestión; de ella se deduce que los polos de las chapas S_1 y S_2 son, respectivamente, $O_1 \equiv A$ y $O_2 \equiv B$. La línea de influencia se reduce, por consiguiente, al triángulo dibujado.

Para hallar el desplazamiento a correspondiente a la incógnita, en lugar de recurrir, como en el caso anterior, al trazado de la elástica de la chapa S_b nos valemos de la de la barra 5-8, considerada como una nueva chapa auxiliar S_a . Su polo relativo respecto de la S_1 es el punto $A_{1,2}$ de intersección de las 1-5 y 3-8; su polo es, por tanto, el punto O_a de intersección de las $O_1 A_{1,2}$ y $O_2 8$. Hallado este polo, la elástica de la chapa S_a está dada, como indica la figura, por la recta $O'_a 8_e$, y la variación de distancia a entre los puntos 5 y 4, queda determinada en la forma que muestra la figura.

636. *Montante inferior 9-10.* — La figura 358 da el mecanismo correspondiente. El polo de la S_2 es el punto $O_2 \equiv B$; en efecto, considerando la S_a como auxiliar resulta que el polo relativo de las S_1 y S_2 está sobre la 6 $A_{2,3}$ que une los puntos en que está respectivamente articulada con aquéllas; O_2 deberá encontrarse por consiguiente sobre la recta que une O_1 con un punto de la 6 $A_{2,3}$, es decir, sobre la horizontal que pasa por A y será coincidente con el punto B como se dijo. El polo de la S_b es el punto O_b de intersección de $O_1 8$ y $O_2 11$, y el de la S_a , el O_a , intersección de $O_b 7$ y $O_1 6$.

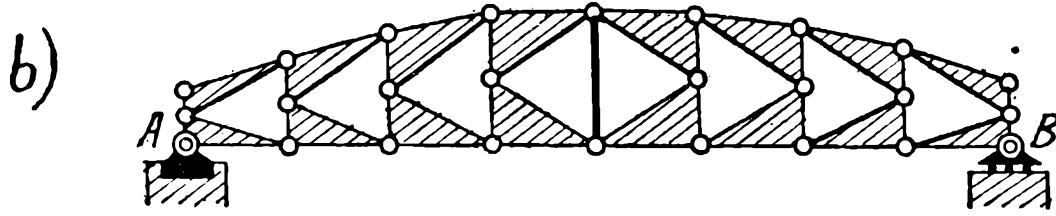
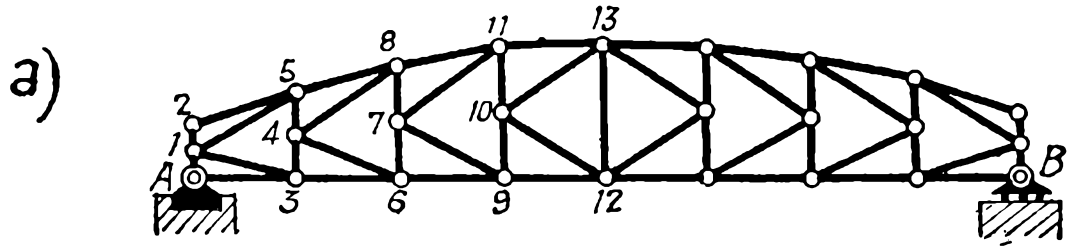
Con estos elementos se ha trazado la elástica, que tiene la forma indicada en la figura, para cuya comprensión no se requieren mayores explicaciones.

637. *Montante inferior extremo 3-4* (fig. 359). — Las chapas S_1 y S_2 están articuladas en el punto $A_{1,2}$ de intersección de las 1-5 y 3-6. La obtención de la línea de influencia, se deduce, por lo demás, fácilmente de la figura.

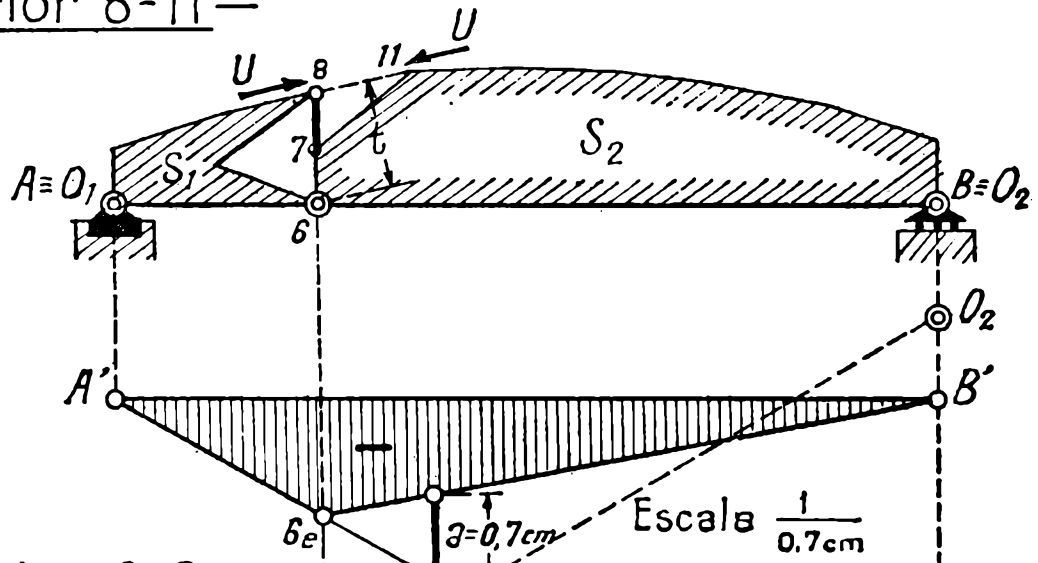
638. *Montante inferior de cabecera A-1.* — La obtención de esta línea de influencia, representada en la figura 359, no presenta ninguna particularidad.

639. *Montante central 12-13.* — La figura 359 indica el mecanismo correspondiente. El polo de la S_2 es $O_2 \equiv B$. En efecto, el polo relativo de S_b y S_1 es un punto de la 9-12 y el relativo de la S_1 y S_2 se encuentra en la recta que une dicho punto de la 9-12 y 14, es decir, sobre la misma 9-12; el polo O_2 debe encontrarse, por tanto, sobre la recta que une A con un punto de la 9-12, es decir, sobre la horizontal de A y como, además, debe encontrarse sobre la vertical de B , es, como decíamos, este mismo punto B . El polo relativo $A_{1,2}$ que está como hemos visto, sobre la horizontal de A es, por otra parte, por razones de simetría, el punto 12. Para el trazado de la elástica busquemos previamente la articulación $A_{1,2}$

Viga en K



- Cordón superior 8-11 -



- Cordón inferior 6-9 -

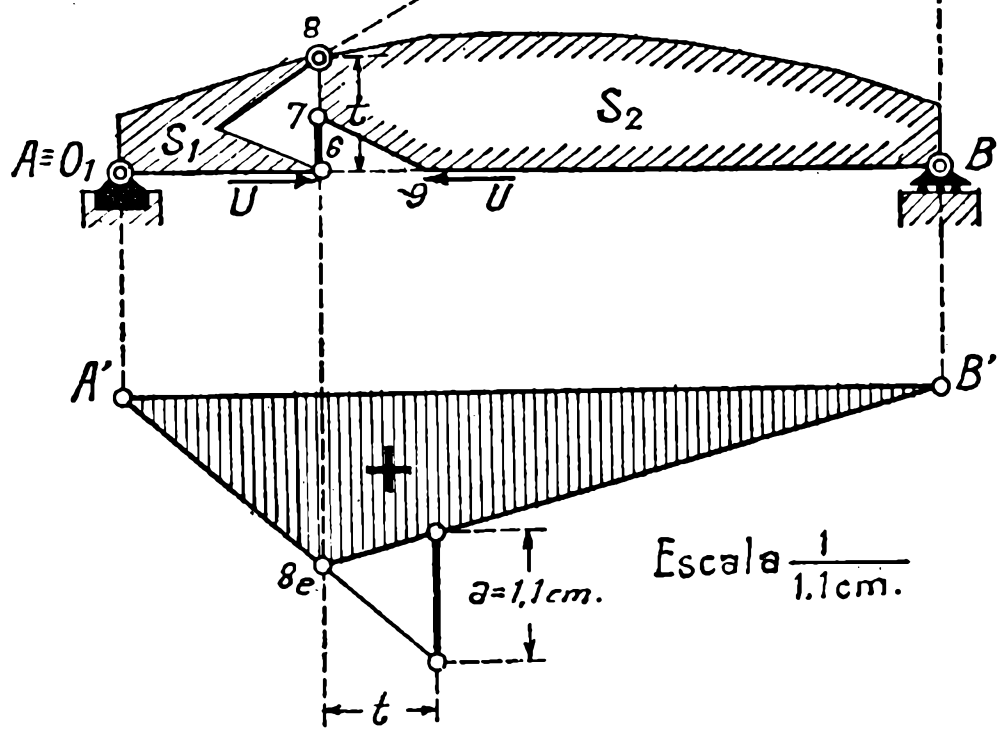


FIG. 357

Viga en K (continuación)

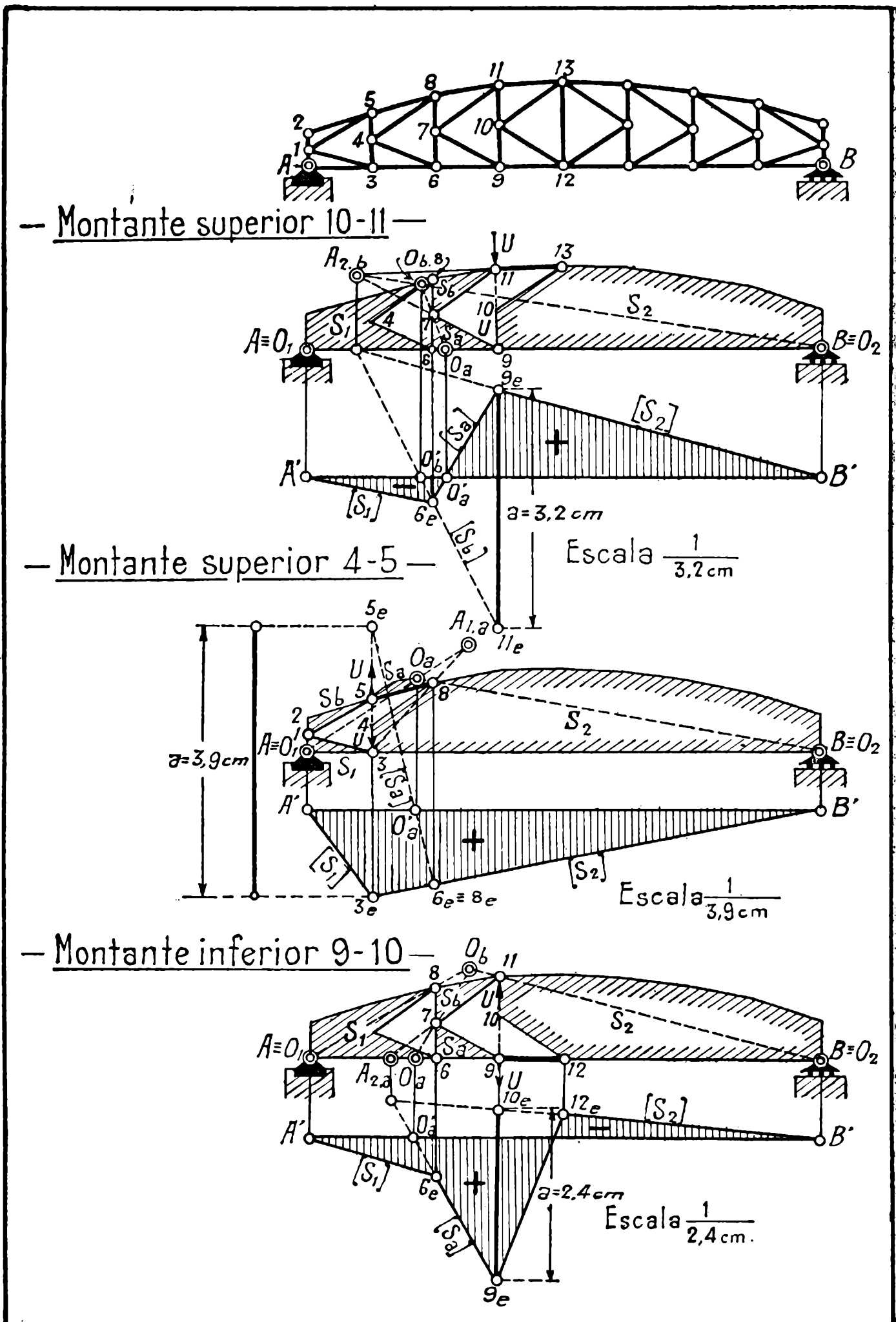


FIG. 358

Viga en K (continuación)

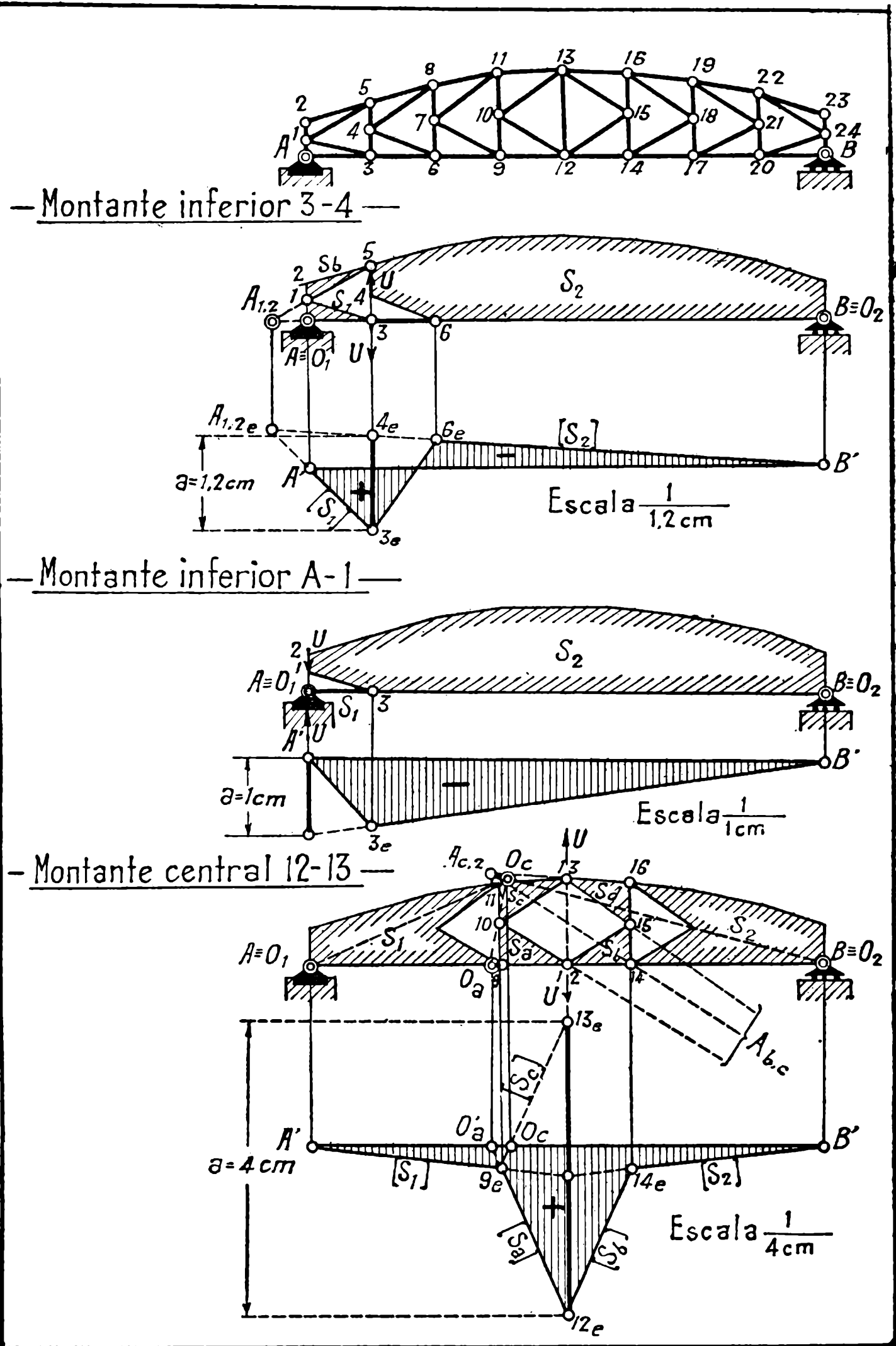


FIG. 359

Viga en K (continuación)

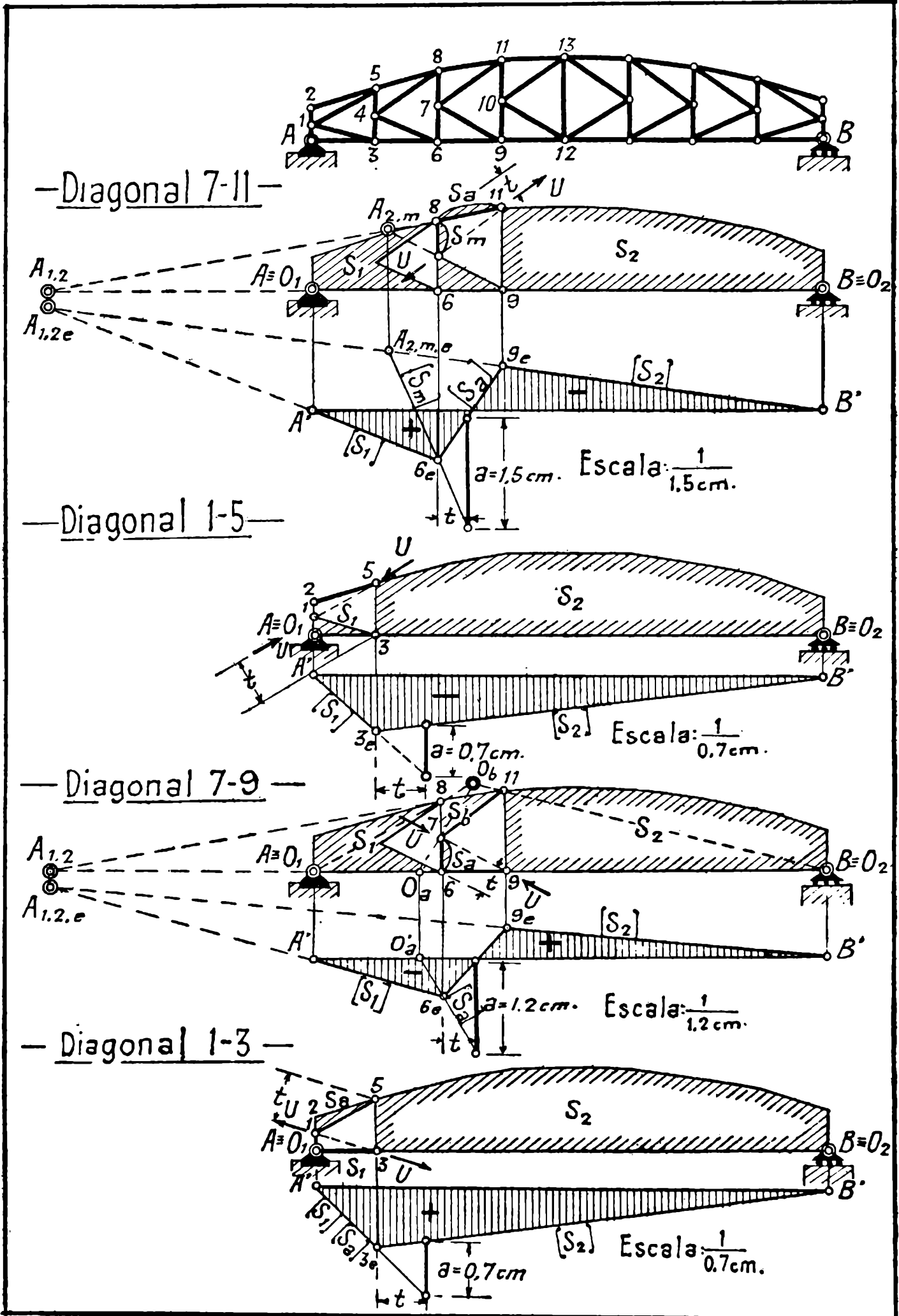


FIG. 360

relativa de la chapa S_c respecto de la S_2 ; considerando la chapa S_a articulada con ellas respectivamente en 13 y 16, se deduce que debe encontrarse sobre la 13-16; además, considerando la S_b , articulada con la S_c en el punto A_{b-c} de intersección de las 10-12 y 13-15, y con la S_2 en 14, resulta que debe encontrarse también sobre la $A_{b,c}$ 14. Y que, en consecuencia, es el punto A_{c-2} señalado en la figura.

Obtenido este polo relativo, resulta que el O_c se encuentra en la intersección de la O_111 y de la $O_2A_{c,2}$ y el O_a en la de las O_c10 y O_19 .

Con estos polos se ha trazado la elástica $A'9_e12_e$ para la mitad izquierda; para la mitad derecha ha sido completada por simetría.

A fin de hallar la variación de la distancia a entre 12 y 13, se ha trazado $9_e O_c' \equiv 10_e O_c'$, la elástica de la chapa S_c , que da al desplazamiento del punto 13.

640. Diagonal superior 7-11. — Comencemos por hallar la articulación $A_{1,2}$ (fig. 360) de las chapas S_1 y S_2 del mecanismo correspondiente a esta diagonal, indicado en la figura; ella debe encontrarse, por de pronto, sobre la horizontal 6-9. Tomando la barra 7-8 como una nueva chapa auxiliar S_m que está articulada con la S_1 en 8 y con la S_2 en el punto $A_{2,m}$ de intersección de las 7-9 y 8-11, resulta que también se encuentra sobre la $A_{2,m}$ $8 \equiv 8-11$ y es, por tanto, el punto $A_{1,2}$ de intersección de las barras de cordón 6-9 y 8-11, como en el caso de la viga Prat.

La línea de influencia tiene la forma que da la figura. Para hallar la variación de distancia a entre 7 y 11 se ha considerado que $6_e 9_e \equiv 8_e 11_e$ representa también la elástica de la barra superior $8-11 \equiv S_a$, y se ha trazado, además, la elástica de la chapa S_m , dada por la $A_{2,m} 6_e$. La inversa a de la escala queda dada, como indica la figura, en función de la rotación relativa de las chapas S_a y S_m (*).

641. Diagonal superior 1-5. — La obtención de su línea de influencia, marcada en la figura 360, no ofrece ninguna particularidad.

642. Diagonal inferior 7-9 (fig. 360). — El polo relativo $A_{1,2}$ es el punto de intersección de la 6-9 y 8-11, como indica la figura, y el trazado de la línea de influencia no ofrece ninguna dificultad. Para obtener la variación de distancia a entre 7 y 9, se ha trazado la elástica $O_a' 6_e$ de la barra $7-6 \equiv S_a$ y valido de la rotación entre ésta y la 6-9; a fin de determinar el polo O_a se ha hallado primero el O_b de la S_b , intersección de las O_18 y O_211 ; O_a ha resultado, después, por el punto común a las O_b7 y O_16 .

(*) Pudo también obtenerse directamente, en función de la rotación relativa del triángulo rígido 6-7-9 y de la chapa S_2 .

643. *Diagonal inferior 1-3.*—No se presenta ninguna dificultad, como indica la figura 360. Para hallar la escala, se ha valido de la rotación relativa de las chapas S_a y S_2 observando que la $A'3_e$ da también los desplazamientos de la S_a .

644. *Barras 1-2, 2-5 y A-3.*—Estas barras no trabajan para cargas que actúan sobre el cordón inferior.

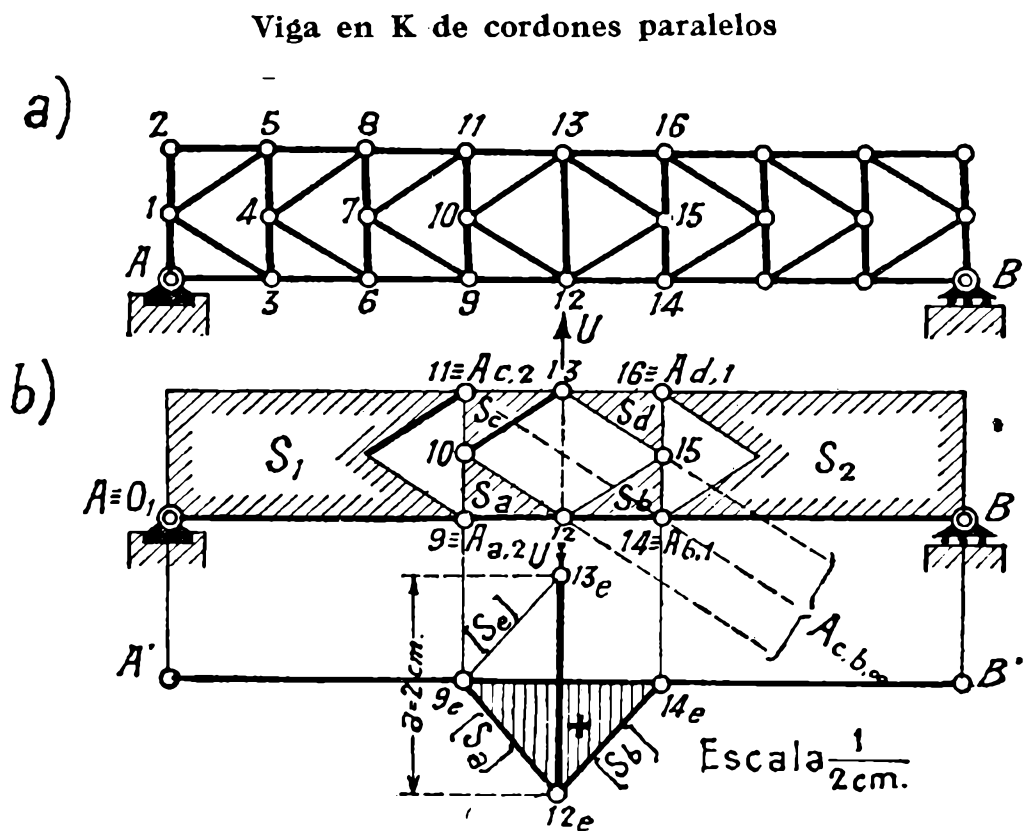


FIG. 361

645. *Viga en K de cordones paralelos* (fig. 361).—Las líneas de influencia de las diversas barras se obtienen en la misma forma que en el caso anterior y solamente queremos ocuparnos de la del montante central 12-13 que se simplifica notablemente, reduciéndose al triángulo indicado en la figura 361 b.

En efecto, el polo relativo $A_{c,b}$ es en este caso, el punto impropio de las 10-12 y 13-15; el polo relativo $A_{c,2}$ de las S_c y S_2 deberá encontrarse, por tanto, sobre la recta que une el punto 14 con el $A_{c,b,\infty}$, recta que pasa evidentemente por 11. Estando la S_c articulada con la S_1 en el 11 y con la S_2 también en 11, resulta que S_1 y S_2 están articuladas entre sí en dicho mismo punto. Pero, por consideraciones análogas se deduciría que la S_c está articulada con S_1 y S_2 en 9 y que, por consiguiente, este punto es también articulación relativa de S_1 y S_2 . Estas chapas tienen, pues, dos articulaciones relativas, o, lo que es lo mismo, no son susceptibles de desplazamientos relativos, comportándose como una única chapa, que co-

mo se encuentra articulada en A y apoyada en B está sujeta al vínculo del desplazamiento idéntico.

La elástica tiene, por tanto, ordenadas nulas en las partes correspondientes a estas chapas, y se reduce a los desplazamientos de las S_a y S_b , indicados en la figura, que dan la línea de influencia de la barra 12-13 para cargas inferiores.

Para hallar la variación de distancia a entre 12 y 13, se ha determinado el punto 13_e valiéndose de la elástica de la S_c que pasa por $9_e \equiv 10_e$ y debe ser paralela a la $[S_b]$ por estar S_c y S_b articuladas en el punto impropio $A_{c,b,\infty}$. No es, por otra parte, necesario determinar este punto 13_e , ya que de la figura se deduce que el desplazamiento de 12 es igual a $0,5 a$.

§ 4. — Reticulados múltiples

646. Preliminar. — Otra forma de salvar grandes luces consiste en la adopción de los llamados reticulados múltiples, que se obtienen por la superposición de varios reticulados Warren (en V) o Prat (en N). Así

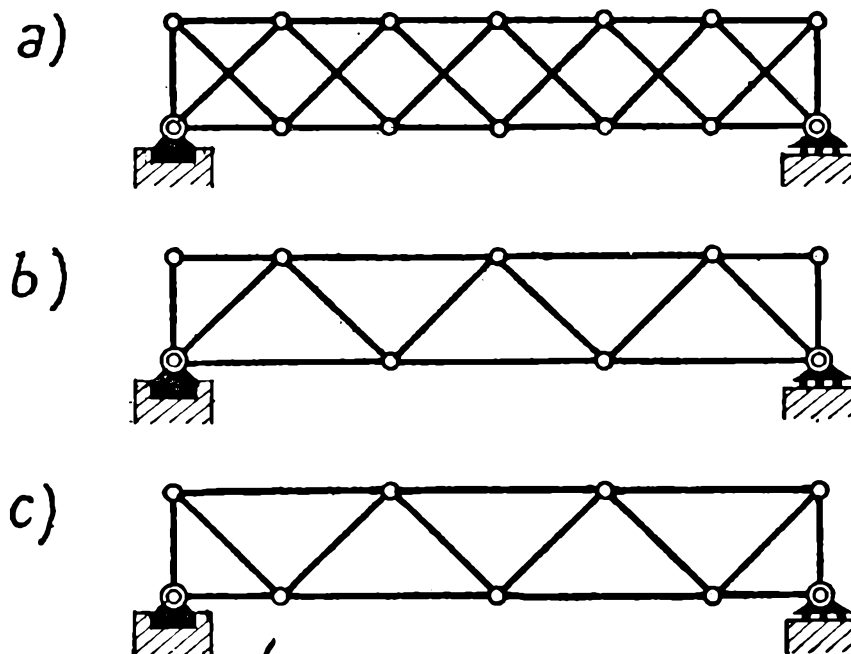


FIG. 362

la figura 362 a representa un reticulado doble Warren (*); como se ve, es equivalente a dos reticulados Warren superpuestos con cordones comunes (fig. 362, b y c). Análogamente, el sistema de la figura 363 a está formado por la superposición de los dos sistemas Prat de las figuras 363 b y c (**).

(*) Este reticulado es hiperestático de primer grado; para obtener un sistema doble Warren isostático hay que darle la forma de la figura 366.

(**) El sistema es hiperestático de segundo grado; para llegar a una viga Prat doble isostática hay que suprimir las dos diagonales MN y NP .

Con igual criterio, pueden constituirse reticulados triples y, en general, múltiples.

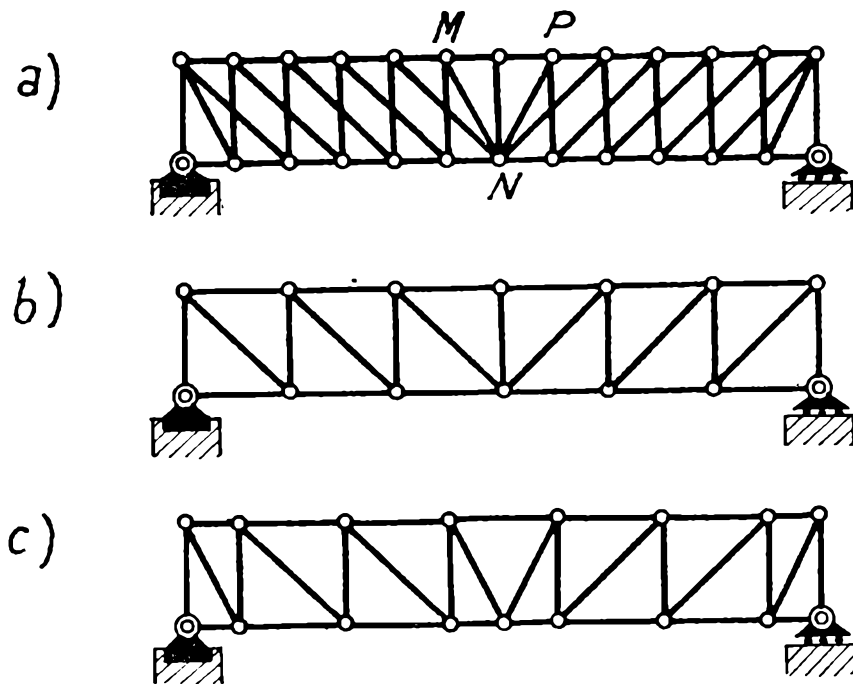


FIG. 363

Aparte de los dobles, la obtención de las líneas de influencia de estos reticulados se hace, por lo general, sumamente compleja; su cálculo se efectúa mediante procedimientos aproximados que se estudian en los cursos especiales de puentes, procedimientos tanto más justificados, cuando dichos reticulados múltiples se aproximan mucho en lo que se relaciona a su comportamiento a verdaderos sistemas de alma llena.

Nos ocuparemos, por tanto, solamente de los reticulados dobles. Nada dificultará, por otra parte, obtener, cuando se desee por razones especiales, las líneas de influencia de los múltiples, recurriendo, para ello, a diagramas de Williot-Mohr, y siguiendo exactamente el camino que se expone en los números (666) y siguientes para el reticulado V doble de altura variable.

647. Viga Warren doble de cordones paralelos. — El sistema es el representado en la figura 366. Dos barras de cordón opuestas, las 2'-3' y 2-3, por ejemplo, están articuladas ficticiamente entre sí en el punto de cruce de las diagonales 2'-3 y 2-3' que las ligan; el sistema es equivalente, por tanto, en cuanto a su comportamiento cinemático, al constituido por chapas triangulares articuladas en los puntos 0'', 1'', 2''..., representado en la figura. Esto indica, además que, sin alterar las tensiones en el sistema, es posible articular entre sí las barras de diagonal. Esta es una de las ventajas del reticulado que nos ocupa, pues, con estas articulaciones se consigue reducir a la mitad la luz libre de las diagonales comprimidas. Por otra parte, la adopción del doble juego de diagonales reduce

también a la mitad, con respecto a la Warren simple, la distancia entre los puntos 1, 2, 3... de aplicación de las cargas: además, también divide por dos la longitud libre de las piezas comprimidas 1'-2', 2'-3', 3'4',... del cordón superior.

648. — Antes de ocuparnos de las líneas de influencia del sistema que estamos tratando, investiguemos cinemáticamente el mecanismo de la figura 364, determinando los polos relativos de sus diversas chapas respecto

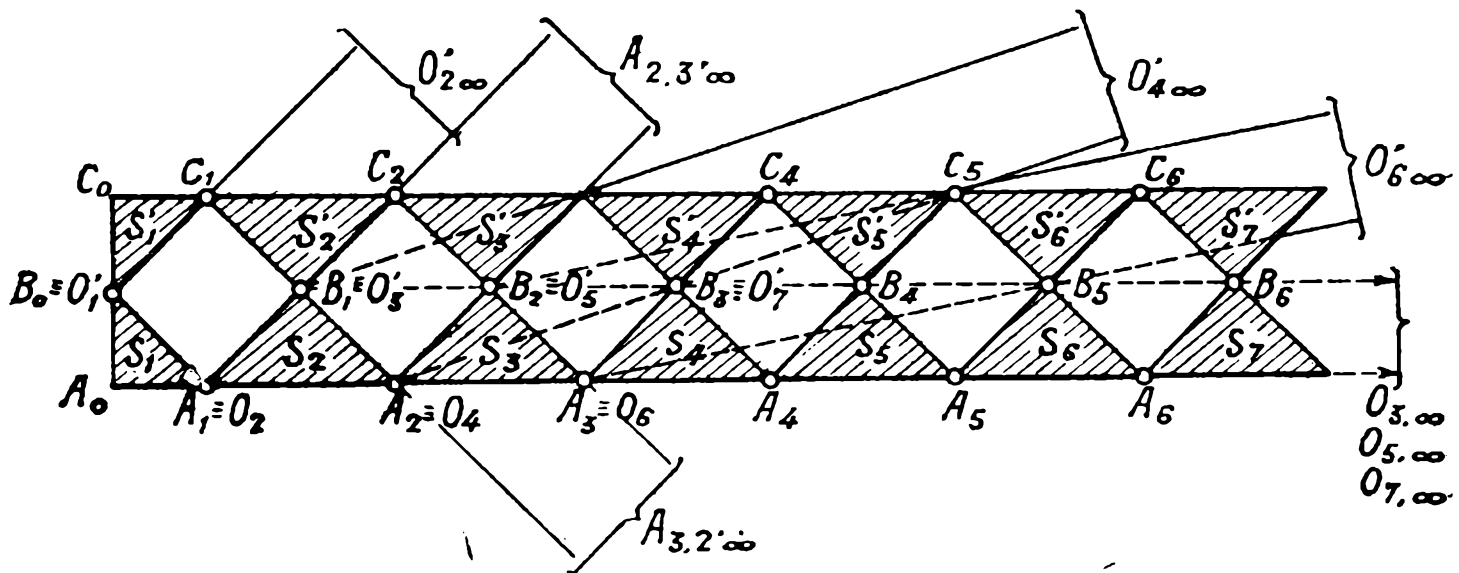


FIG. 364

de la primera S_1 . Dejando fija esta chapa S_1 , dichos polos relativos no serán otra cosa que los polos absolutos de los desplazamientos posibles de las chapas del mecanismo de un grado de libertad que así resulta.

En estas condiciones, los polos de las chapas S_1 y S_2 son, respectivamente, los puntos $O'_1 \equiv B_0$ y $O_2 \equiv A_1$.

El polo de la S'_2 , ligada con la S_1 mediante las barras $B_0 C_1$ y $A_1 B_1$, es el punto impropio $O'_{2,\infty}$ de su intersección.

La S_3 está articulada con las S_2 y S'_2 , respectivamente, en A_2 y en el punto impropio $A_{3,2',\infty}$ de intersección de las $B_1 A_2$ y $B_2 C_2$. Su polo deberá encontrarse, por tanto, sobre las $O_2 A_2$ y $O'_{2,\infty} A_{3,2',\infty}$ es decir, será el punto impropio $O_{3,\infty}$ del cordón inferior.

La S'_3 está articulada con las S_2 y S_3 , respectivamente, en $A_{2,3',\infty}$ y B_2 . Su polo O'_3 deberá encontrarse, por consiguiente, sobre la $O_2 A_{2,3',\infty}$ y $O_{3,\infty} B_2$, es decir, será el punto B_1 .

En forma completamente igual se demuestra que los polos de las restantes chapas son los puntos marcados en la figura.

649. — La figura 365 resume la ubicación de estos polos relativos, que se determinan de acuerdo con las siguientes reglas sencillas:

1º Las polos relativos de las chapas inferiores impares S_3, S_5, S_7, \dots coinciden en el punto impropio $A_{1,3,\infty} \equiv A_{1,5,\infty} \equiv A_{1,7,\infty} \equiv \dots$ del cordón inferior.

2º Los polos relativos de las chapas inferiores pares S_2, S_4, S_6 y S_8, \dots son los puntos 1, 2, 3, ... de índice mitad del correspondiente a la respectiva chapa (para la S_i es el punto $\frac{i}{2}$).

3º Los polos relativos de las chapas superiores impares $S'_1, S'_3, S'_5, S'_7, \dots$ son, respectivamente, los puntos $0'', 1'', 2'', 3'', \dots$ de índices iguales a la mitad del de la chapa correspondiente disminuído en 1 (a la chapa S'_i corresponde el punto $\frac{i'' - 1}{2}$).

4º Los polos relativos de las chapas superiores pares $S'_2, S'_4, S'_6, S'_8, \dots$ son los puntos impropios $A_{1,2',\infty}, A_{1,4',\infty}, A_{1,6',\infty}, A_{1,8',\infty}, \dots$ de las rectas $0''1', 0''2', 0''3', 0''4', \dots$ (a la chapa S'_i corresponde la recta $0'' \frac{i'}{2}$).

650. — Sentado lo anterior, veamos, ahora, la forma de una de las elásticas posibles del cordón inferior del mecanismo de que se trata.

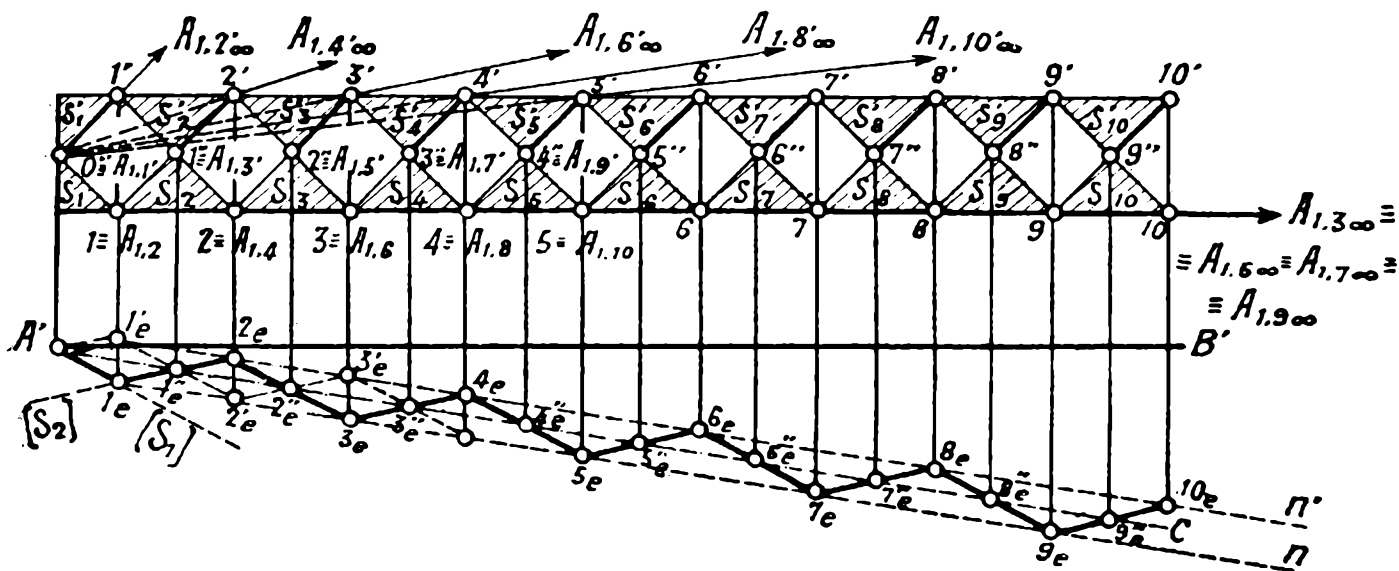


FIG. 365

Sea $A'B'$ (fig. 365) el eje y $[S_1] \equiv A'1_e$ y $[S_2] \equiv 1_e2_e$, las elásticas de las chapas S_1 y S_2 .

Estando las S_3, S_5, S_7, \dots articuladas con las S_1 en puntos impropios $A_{1,3,\infty}, A_{1,5,\infty}, A_{1,7,\infty}, \dots$ sus elásticas serán rectas paralelas a la $[S_1]$.

Por otra parte, considerando una barra par cualquiera del cordón inferior, la S_6 por ejemplo, su polo relativo respecto de la S_2 es también un punto impropio. En efecto; el de la S'_5 respecto de la S_6 es impropio y

otro tanto sucede con el de la S'_5 y S_4 , el de ésta y S'_3 y, finalmente, el de ésta y la S_2 . Es decir, la S_6 está ligada con la S_2 por una cadena de chapas S'_5 , S_4 , S'_3 , articuladas entre sí en un puntos impropios y, por consiguiente, también lo será su polo relativo $A_{2,6}$, de acuerdo con lo que afirmábamos. Quiere decir, pues, que las elásticas de todas las chapas pares inferiores serán rectas paralelas a la $[S_2] \equiv 1_e 2_e$. La elástica total del desplazamiento considerado del mecanismo se reducirá, por tanto, a la línea quebrada representada en la figura, de lados alternativamente paralelos a los $[S_1]$ y $[S_2]$.

La línea que une los puntos medios $1''_e$, $2''_e$, $3''_e$,... de sus lados pasa por A' y es paralela a las $1'_e n'$ y $1_e n$, que unen los puntos extremos.

Todas estas consideraciones nos serán de fundamental utilidad para el trazado de las líneas de influencia de la viga Warren doble representada en la figura 366, de que pasamos a ocuparnos.

651. *Cordón superior 3'-4'*. — La figura 366 muestra el mecanismo que resulta al poner en evidencia esta incógnita. Para hallar sus polos se ha comenzado por determinar el relativo de las chapas S_1 y S_B ; con este fin se ha considerado como chapa auxiliar la S'_3 , cuyos polos respecto de aquéllas son, respectivamente, $A_{1,3'} \equiv 1''$ (véase lo establecido en (649)) y $A_{3',B\infty}$; el polo relativo $A_{1,B}$ se encontrará, por tanto, sobre la recta que une $1''$ con $A_{3',B\infty}$ es decir, sobre la $1''2$. Por otra parte, el polo relativo de S_3 respecto de S_1 es $A_{1,3,\infty}$ (véase (649)) y respecto de la S_B el punto 3; el $A_{1,B}$ debe estar también, por consiguiente, sobre la $3A_{1,3,\infty}$ y será su punto $A_{1,B} \equiv 2$ de intersección con la $1''2$.

Hallado este punto, el polo de la S_B es el punto $O_B \equiv B$ de intersección de la $O_1A_{1,B}$ y de la vertical que pasa por B .

Trazada la recta cualquiera $[S_1]$ como elástica de la primer chapa S_1 , la de la S_B debe cortarla sobre la vertical de $A_{1,B} \equiv 2$, es decir, debe pasar por el punto A_{1,B_e} y es la $[S_B] \equiv A_{1,B_e} B'$ trazada en la figura. Para completar la elástica se ha considerado que la $[S_3]$ debe ser, según (650), paralela a la $A' 1_e$ de la S_1 ; la $1_e 2_e$ queda dada directamente por las 1_e y 2 debiendo como verificación resultar paralela a la $[S_B]$.

Con el objeto de determinar la variación de distancia a entre $3'$ y $4'$, que constituye el desplazamiento correspondiente a la incógnita, se ha trazado la elástica $[S'_3]$ de la chapa S_3 , que pasa por $2''_e$ y es paralela a $[S_B]$. La proyección vertical del desplazamiento relativo de las chapas S'_3 y S_B está dada por el vector p ($4'$); como este desplazamiento relativo es normal a la barra $3'4'$, si por p se traza una perpendicular a esta última y por ($4'$) una horizontal, se tendrá en $p 4'_w$, dicho desplazamiento relativo, cuya proyección horizontal da la variación de distancia buscada a .

652. — La barra considerada corresponde a la chapa S'_4 del mecanismo de la figura 365. En forma completamente igual se obtienen las líneas de influencia de las barras del cordón superior que corresponden a las chapas pares $S'_6, S'_8, S'_{10} \dots$. A la izquierda de la sección, la línea de influencia estaría dada por una quebrada constituída por lados alternativamente paralelos, obtenidos de acuerdo con lo expuesto en (650).

653. *Cordón superior 2'-3'* (fig. 366). — El polo relativo de las chapas S_1 y S_B es el punto impropio $A_{1,B\infty}$ de las horizontales. Considerando, en efecto, la chapa S_2 , articulada con la S_1 en 1 y con S_B en 2, se deduce que debe estar sobre la horizontal 1-2 y, tomando en cuenta la S'_2 , articulada con S_1 y S_B respectivamente en los puntos impropios $A_{2',\infty}$ y $A_{2',B\infty}$, resulta que también debe encontrarse sobre la recta impropia que une a estos últimos y que, por consiguiente, está dado, como decíamos, por la intersección $A_{1,B\infty}$ de esta última con la 1-2.

Además, el polo de la chapa S_B es el punto $O_B = B$. Considerando la recta $A'1_e$ como elástica de la chapa S_1 , la de la S_B es la paralela $[S_B]$ que pasa por B' , ya que ambas están articuladas en el punto impropio $A_{1,B\infty}$. La elástica de la chapa S_2 queda dada por la $1_e 2_e$.

Para hallar el desplazamiento a correspondiente a la incógnita, se ha trazado, como en el caso anterior, la elástica de la S'_2 a la que pertenece el punto $2'$ y que está constituída por la paralela a la $[S_1]$ determinada por $1''_e$. En lo demás se sigue exactamente igual camino que en el referido caso anterior.

En forma completamente análoga se hallarían las líneas de influencia de las barras superiores correspondientes a las chapas impares S'_5, S'_7, S'_9, \dots ; a la izquierda de la sección correspondiente estarían formadas por una quebrada de lados alternativamente paralelos, determinados siguiendo lo establecido en (650).

654. *Cordón superior 1'-2'* (fig. 366). — El mecanismo que resulta al poner en evidencia el segundo cordón superior 1'-2' es el que representa la figura. Los polos de sus chapas S_1 y S_B son, respectivamente, los puntos $O_1 \equiv A$ y $O_B \equiv B$, y su elástica se reduce al triángulo trazado en la figura.

Con el objeto de obtener el desplazamiento a correspondiente a la incógnita, se ha trazado, como en los casos anteriores, la elástica de la chapa S'_1 , constituída por la paralela a la S_B determinada por A' .

Warren doble de cordones paralelos

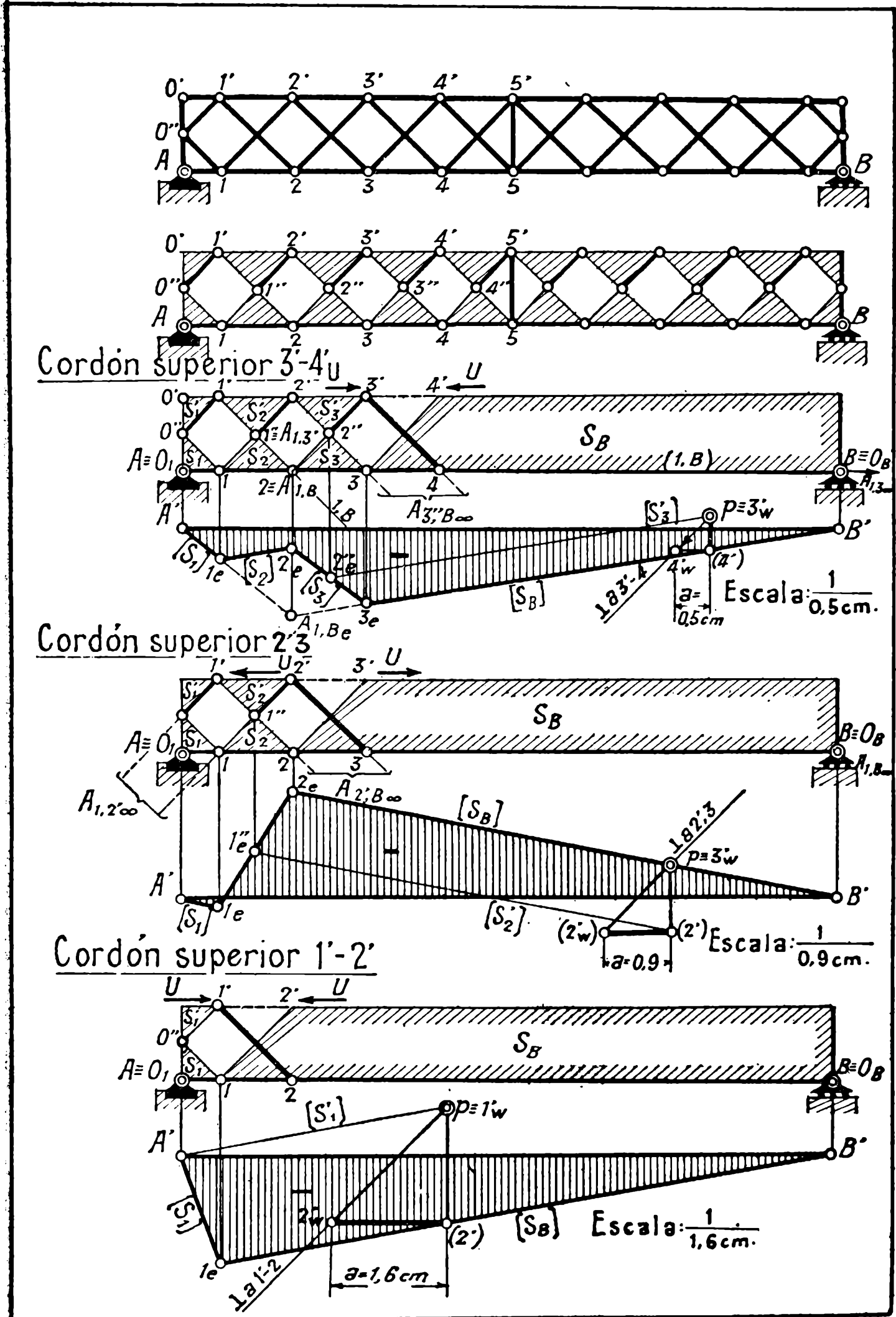


FIG. 366

Warren doble de cordones paralelos (continuación)

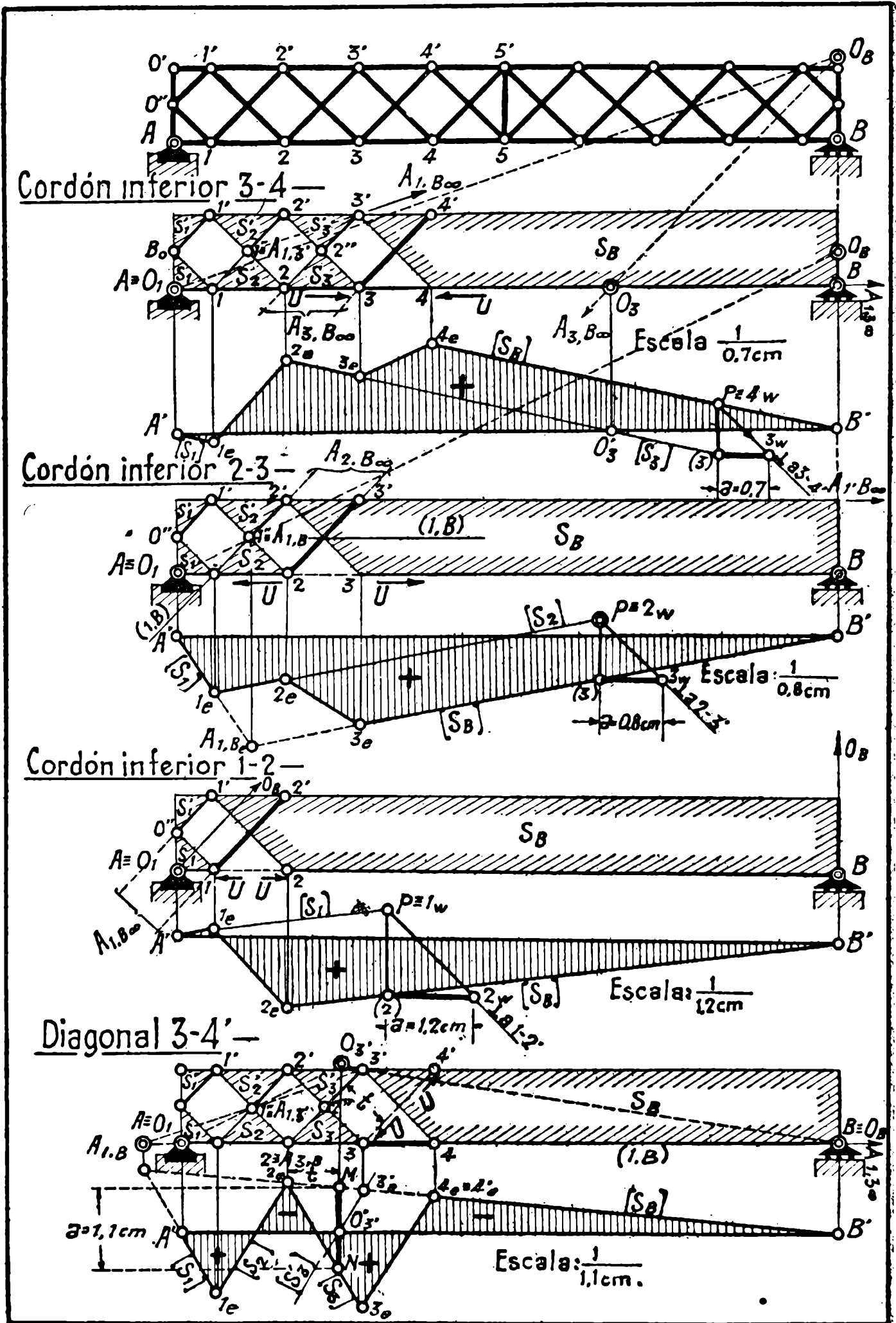


FIG. 367

655. *Cordón inferior 3-4* (fig. 367).— El polo relativo de las chapas S_1 y S_B es el punto $A_{1,B\infty}$ impropio de la dirección $1''3'$. Considerando, en efecto, la chapa S_3 articulada por las S_B y S_1 en puntos impropios, se deduce que es un punto impropio; por otra parte, estando la S'_3 articulada con la S_B en $3'$ y con la S_1 en el punto impropio de la dirección B_02' paralela a la $1''3'$ (véase (649)), resulta que debe encontrarse también sobre la recta que une $3'$ con este punto impropio, o sea, sobre la $1''3'$ y, será, según afirmábamos, su punto impropio $A_{1,B\infty}$. El polo de la chapa S_B es, por consiguiente, el punto O_B de intersección de la $O_1 A_{1,B\infty}$ paralela a $1''3'$ y de la vertical de B .

Considerando la recta $A'1_e$ como elástica de la chapa S_1 , la de la S_B será la paralela que pasa por B' .

Para hallar la elástica de la S_3 se ha determinado su polo O_3 ; observando que está articulada con la S_B en el punto impropio $A_{3,B\infty}$ de la dirección $3-4'$ y con la S_1 en el impropio $A_{1,3,\infty}$ de las horizontales (649), se deduce que es el punto O_3 en que se cortan la $O_1 A_{1,3,\infty}$ y la paralela trazada por O_B a la recta $3-4'$ (recta $O_B A_{3,B\infty}$). La elástica de la S_3 es, por tanto, la paralela a la S_B trazada por O_3 . La de la chapa S_2 queda dada directamente por la $1_e 2_e$.

Para obtener el desplazamiento a correspondiente a la incógnita, se ha considerado que el vector p (3) da la proyección vertical del desplazamiento relativo de las chapas S_B y S_3 a que pertenecen, respectivamente, los puntos 4 y 3, y, además, que dicho desplazamiento relativo es perpendicular a $3-4'$.

En forma completamente igual se hallarían las líneas de influencia de las barras del cordón inferior que corresponden a las chapas inferiores pares S_6, S_8, \dots

656. *Cordón inferior 2-3* (fig. 367).— El polo relativo de las chapas S_1 y S_B es el punto $A_{1,B} \equiv 1''$. Considerando la S_2 , articulada con S_B en $A_{2,B\infty}$ y con S_1 en 1, se deduce que se encuentra sobre la $1 A_{2,B\infty} \equiv 1-2'$. Considerando la S'_2 no se llega a ninguna conclusión nueva. La S'_1 está articulada con la S_1 en $0''$ y con la S_B en el punto $A'_{1,B\infty}$ impropio de las horizontales; en efecto, por estar la S_2 articulada con S'_1 y S_B en puntos impropios, debe ser punto impropio, y, en virtud de la S'_2 , articulada con las S'_1 y S_B en $1'$ y $2'$, se encuentra que debe pertenecer a la horizontal $1'-2'$. Estando, pues la S'_1 articulada con la S_1 en $0''$ y con la S_B en $A'_{1,B\infty}$, el polo relativo $A_{1,B}$ debe encontrarse sobre la $0'' A'_{1,B\infty}$, es decir, sobre la horizontal trazada por $0''$, y como también debe hallarse sobre la $1-2'$, será el punto $1'' \equiv A_{1,B}$ de su intersección, como afirmábamos.

**Se terminó de imprimir el 30 de Mayo de 1945, en los
Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 311-325 - (21) 1733 - Buenos Aires**

Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO"
LA MADRID 321-325 - 21-1733 - BUENOS AIRES