

PROLONGACION ASCENDENTE DE CAMPOS POTENCIALES
EN EL DOMINIO ESPACIAL

M. Cristina Pacino y A. Introcaso

Instituto de Física de Rosario, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, República Argentina

RESUMEN

Con el objeto de investigar las posibilidades de empleo de la continuación analítica ascendente como filtro, se analiza la prolongación de campos potenciales en el dominio espacial tanto con operador finito como bidimensional.

Se estudió en forma independiente y conjunta la influencia en el resultado de los errores por digitalización y truncamiento de los datos y del filtro, y se da un criterio para el muestreo de datos y el cálculo del operador de convolución en función de la profundidad estimada de la estructura y de la altura de la prolongación respectivamente para minimizar la influencia de ambos errores.

Se analizaron además las posibilidades de uso de ambos operadores para filtrar efectos de estructuras finitas, bidimensionales y combinaciones de ambas a través de ejemplos.

El cálculo se lleva a cabo mediante un sistema de dos programas de computación.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the possibilities of using the upward continuation as a filtering process. For that, the upward continuation of potential field data in the spatial domain with both finite and bidimensional operators is analyzed.

The influence in the results of digitization and truncation errors either in the filter and in data was studied.

In order to reduce the influence of these two errors, an idea about data sampling and convolution operator calculation as a function of the estimated depth of the subterranean mass and the elevation of continuation respectively is given.

More over, some numerical examples illustrate the possibilities of using both convolution operators in the filtering of finite and bidimensional structures effect.

The calculation is performed through a two programmes computation system.

INTRODUCCION

La continuación analítica de campos potenciales resulta de gran utilidad en la interpretación geofísica, ya sea para separar las anomalías (gravimétricas ó magnéticas) de distintos órdenes o en la estimación de los parámetros de las estructuras anómalas perturbadoras.

La esencia de la separación de las anomalías de la gravedad en su continuación analítica consiste en que, con el aumento de la distancia de las fuentes de las anomalías, éstas disminuyen de distinta manera, según la profundidad y dimensiones de la fuente origen: las anomalías de los objetos pequeños y que yacen a poca profundidad decrecen con mayor rapidez que las anomalías de objetos más grandes y a mayor profundidad (Morelli, 1966, Mirónov, 1977...).

Podría decirse entonces que el proceso de prolongación es equivalente a realizar un filtrado. Al continuar el campo potencial hacia arriba, se subraya la influencia de las anomalías regionales y se debilita la influencia de las locales. Por el contrario, al prolongar el campo potencial hacia abajo, la anomalía local se destaca con mayor relieve en el campo gravitatorio general.

Con el objeto de investigar las posibilidades de empleo de la continuación analítica como filtro se analizará sólo la prolongación de campo hacia arriba, destacándose sus ventajas y limitaciones utilizando operadores finitos y bidimensionales para convolucionar el campo potencial.

PROLONGACION DE CAMPO EN EL CONCEPTO DE DENSIDAD EQUIVALENTE

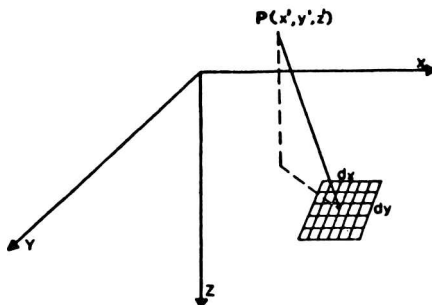


Fig. 1: Punto P exterior a un área diferencial en un sistema de ejes cartesianos ortogonales (x,y,z).

Considerando que la densidad equivalente distribuida sobre el plano (x,y) de Fig. 1 es $\frac{\Delta g(x,y,0)}{2\pi G}$, (Introcaso, A. 1980), la gravedad total en $p(x',y',z')$ está dada entonces por la integral de Dirichlet como:

$$\Delta g(x',y',z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z' \Delta g(x,y,0) dx dy}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2} \quad (1)$$

Para el caso bidimensional, integrando en y desde $-\infty$ a $+\infty$, teniendo en cuenta que la distribución de densidad superficial no cambia sobre paralelas al eje y , se tiene:

$$\Delta g(x',z') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z' \Delta g(x,0) dx}{(x-x')^2 + z'^2} \quad (2)$$

Por lo tanto, una distribución superficial de densidad, $\frac{\Delta g(x,y)}{2\pi G}$, sobre cualquier plano horizontal donde es conocida la distribución de gravedad, producirá el mismo campo en puntos altos que las masas reales responsables de las repuestas gravimétricas encontradas.

Debe destacarse que, si bien la densidad superficial no es constante, es una función continua de las coordenadas horizontales x e y .

CONTINUACION HACIA ARRIBA EN EL DOMINIO ESPACIAL

La prolongación hacia arriba de un campo potencial en el dominio espacial está dada por la ecuación (1), que puede ser escrita como

$$\Delta g(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \Delta g(x,y) dx dy \quad (3)$$

donde $\Delta g(x,y)$: anomalía medida en $z = 0$

$\Delta g(x,y,z)$: anomalía continuada para una elevación z sobre la altura de observación.

La ecuación (3) es la integral de convolución entre $\Delta g(x,y)$ y

$$\frac{z}{2\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \text{ que puede expresarse como}$$

$$\Delta g(x,y,z) = F(x,y,z) * \Delta g(x,y) \quad (4)$$

Donde $F(x,y,z) = \frac{z}{2\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ es el operador finito y continuo

de convolución y el símbolo $*$ denota convolución.

De manera análoga, a partir de la ecuación (2), que no es más que la integral de convolución entre $\Delta g(x)$ y $\frac{z/\pi}{x^2 + z^2}$, se obtiene

$$\Delta g(x,z) = F(x,z) * \Delta g(x) \quad (5)$$

donde $\Delta g(x)$: anomalía medida en $z = 0$

$\Delta g(x,z)$: anomalía continuada para una elevación z sobre la altura de observación

$$F(x,z) = \frac{z/\pi}{x^2 + z^2} : \text{operador bidimensional continuo de convolución.}$$

La expresión de convolución (5) es un caso particular de (4)

Cabe señalar además que las expresiones (4) y (5) pueden analizarse como ecuaciones básicas de entrada y salida en un proceso de filtrado:

	ENTRADA	FILTRO	SALIDA
CASO FINITO	$g(x,y)$	$F(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
CASO BIDIM.	$g(x)$	$F(x,z)$	$g(x,z)$

DIGITALIZACION Y TRUNCAMIENTO DE LOS DATOS DE ENTRADA Y DEL FILTRO

En aplicaciones concretas, $g(x,y)$ está dada en forma digital con

$(N+1) \times (M+1)$ puntos como $g(n \Delta x, m \Delta y)$ con

$n = 0, 1, \dots, N$

$m = 0, 1, \dots, M$

x = intervalo de muestreo en la dirección del eje x

y = intervalo de muestreo en la dirección del eje y

Esto requiere que $F(x,y,z)$ sea digitalizado como $F(k \Delta x, l \Delta y, z)$, siendo

$k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$

$l = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$

La ecuación (3) puede ser entonces aproximada numéricamente como

$$\Delta g(i \Delta x, j \Delta y, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{z/2 \pi}{(k \Delta x)^2 + (l \Delta y)^2 + z^2} \Delta g(i \Delta x, j \Delta y) \Delta x \Delta y$$

con $i = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$

$j = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$

Haciendo $z' = \frac{z}{\Delta x \Delta y}$ se tiene

$$\Delta g(i \Delta x, j \Delta y, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{z'/2 \pi}{k^2 + l^2 + z'^2} \Delta g(i \Delta x, j \Delta y) \quad (6)$$

donde $\frac{z'/2 \pi}{k^2 + l^2 + z'^2} = F_{k,l}$ es la respuesta discreta del filtro

De acuerdo con Tsay (1979), puede aproximarse numéricamente la ecuación (2) para el caso particular bidimensional como

$$\Delta g(i \Delta x, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z''/\pi}{k^2 + z''^2} \Delta g(i \Delta x) \quad (7)$$

siendo $z'' = z/\Delta x$

y $\frac{z''/\pi}{k^2 + z''^2} = F_k$, la respuesta discreta del filtro bidimensional análoga a

$F_{k,1}$ para caso finito..

La elección de los intervalos Δx , Δy es fundamental para que el error por digitalización cometido en los datos y en el filtro sea mínimo.

Por otra parte, dada la imposibilidad de efectuar las sumas de (6) y (7) en el intervalo $-\infty, \infty$, el cálculo deberá llevarse a cabo para

$$k = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K$$

$$l = -L, \dots, -1, 0, 1, \dots, L$$

$$i = -I, \dots, -1, 0, 1, \dots, I$$

$$j = -J, \dots, -1, 0, 1, \dots, J$$

Se introduce entonces un error por truncamiento de los datos de entrada y del operador de convolución.

Si Δx , Δy , K , L , J , I son adecuadamente elegidos, la influencia de ambos errores podrá considerarse despreciable.

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DEL FILTRO

Error por digitalización

Una importante propiedad de la respuesta continua del filtro indica que el área bajo $F(x, y, z)$, para todo z y $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, es unitaria. Si se considera la respuesta discreta del filtro, el área será unitaria sólo si Δx , Δy son suficientemente pequeños.

Dado que la respuesta del filtro es simétrica respecto de los ejes x e y , tiene un máximo en $(x = 0, y = 0)$ y decrece monótonamente a medida que x e y crecen, para que el área sea unitaria es condición necesaria, aunque no suficiente, que $F(0, 0, z) < 1$.

Para que esto ocurra debe ser $\Delta x \Delta y < \sqrt{2/\pi} z$

Para el caso bidimensional, un razonamiento similar conduce a decir que debe ser $\Delta x < \pi z$.

Como se ve, el espaciamiento entre puntos es proporcional a la elevación de la continuación. Dicho en otras palabras, el error por digitalización del filtro disminuye en forma directamente proporcional al crecimiento de la altura de la continuación.

En Fig. 2 se muestra una sección del filtro $F(x,y,z)$ para $y=0$ y $z=1$ y su digitalización como $F(k\Delta x, l\Delta y, z)$ para $l=0$ y distintos valores de Δx donde puede verse que para un mismo z , el error por digitalización aumenta con el crecimiento de Δx .

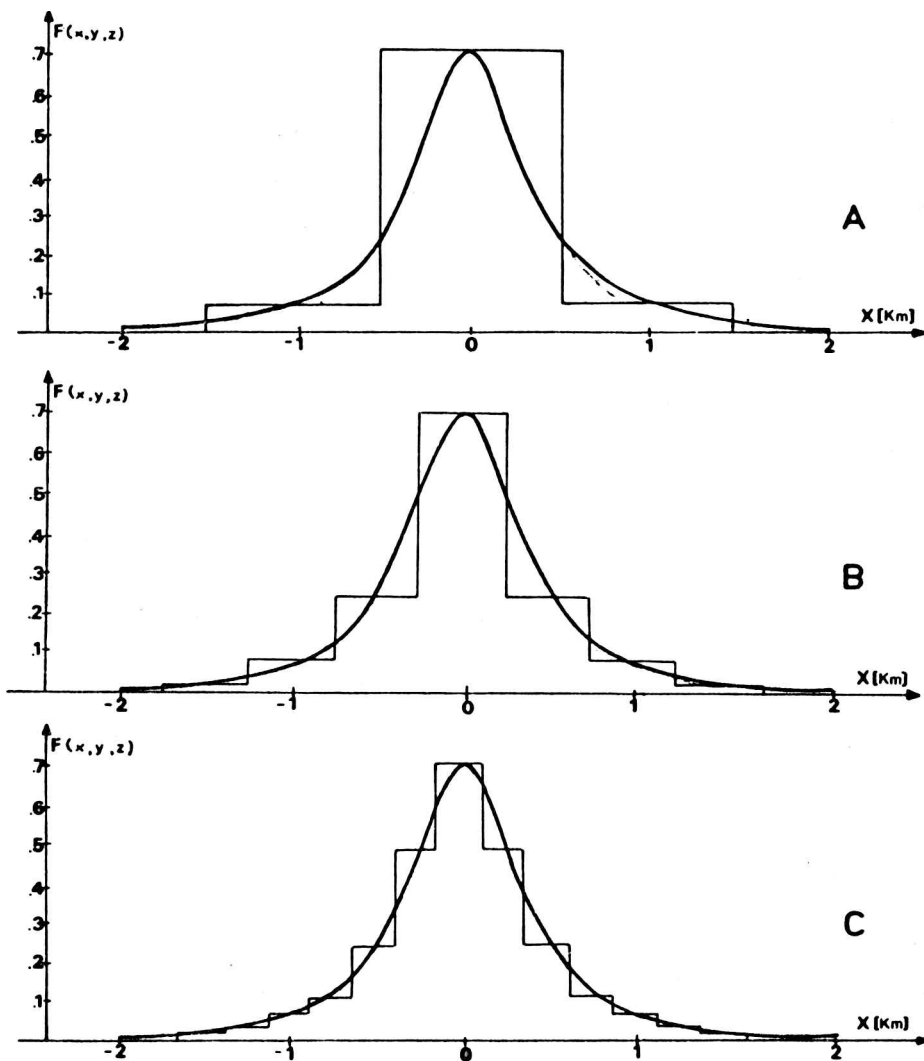


Fig.2: Comparación entre $F(x,y,z)$ y $F(k\Delta x, l\Delta y, z)$ para $l=0$, $z=0.5$ y a) $\Delta x=1$, b) $\Delta x=0.5$ y c) $\Delta x=0.25$

En Fig. 3 se aprecia cómo para un mismo espaciamiento entre puntos, el error por digitalización disminuye con el aumento de la altura de la prolongación.

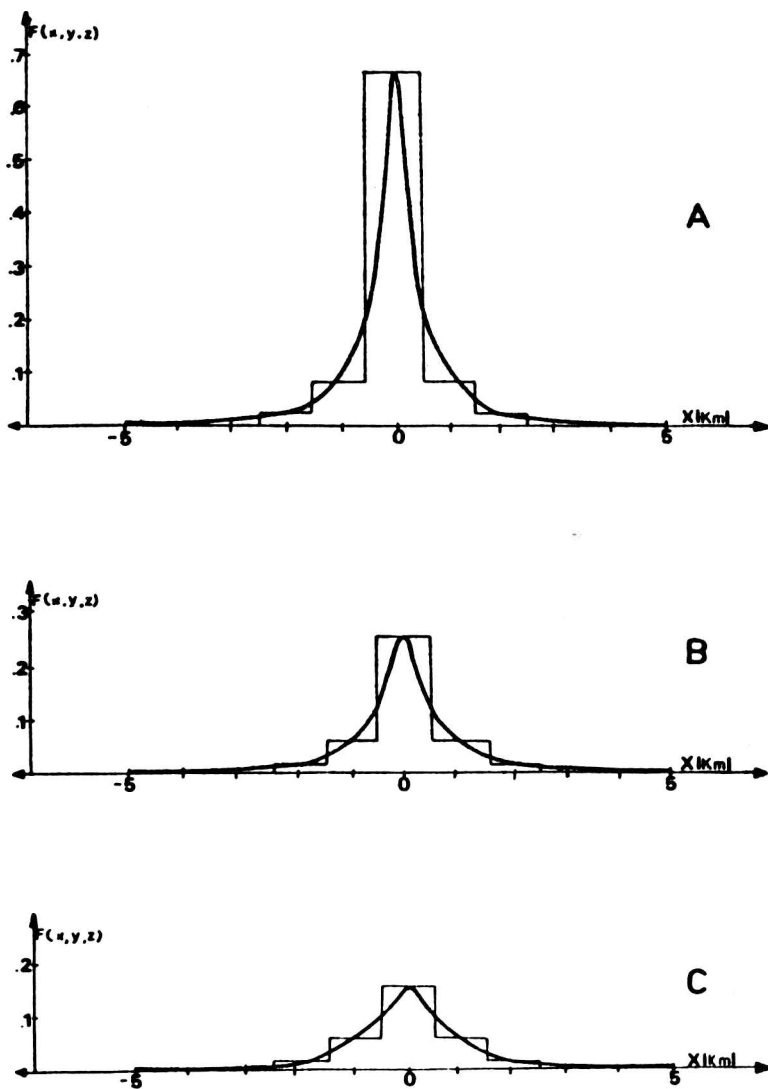


Fig.3: Comparación entre $F(x,y,z)$ y $F(k\Delta x, l\Delta y, z)$ para $l=0$, $x=1$ y a) $z=.5$,
b) $z=.8$ y c) $z=1$

Error por truncamiento

Cuando $F(x,y,z)$ se calcula en el intervalo $-X < x < X$, $-Y < y < Y$, el área bajo $F(x,y,z)$ resulta < 1 . Por lo tanto cualquier truncamiento del filtro provocará una disminución en el área bajo $F(x,y,z)$ respecto de la respuesta del filtro ideal unitaria.

El error por truncamiento del filtro no sólo es función de los "puntos de corte" X e Y , sino también de la elevación de la continuación, de manera tal que aumenta a medida que X e Y disminuyen y a medida que z crece.

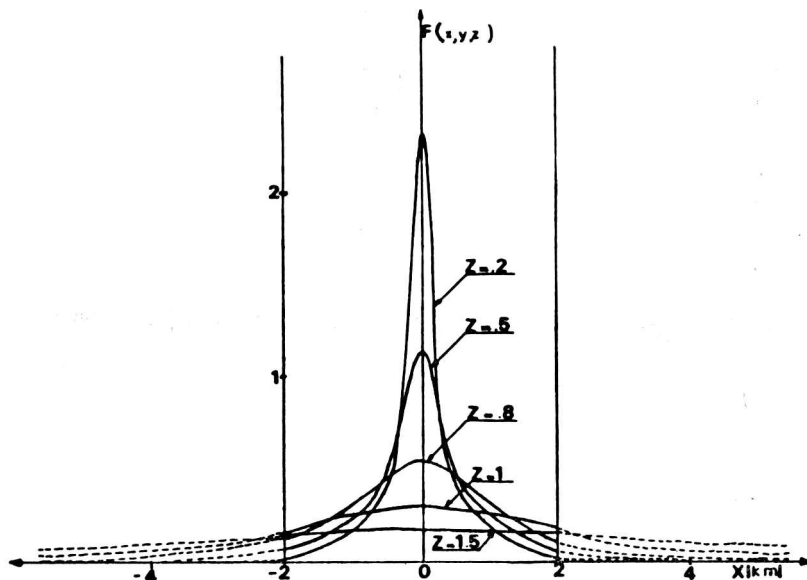


Fig.4: $F(x,y,z)$ para diferentes valores de z en el mismo intervalo de cálculo.

La Fig. 4 muestra una sección del filtro $F(x,y,z)$ en $y = 0$ para distintos valores de z en el intervalo $[-X, X]$. Nótese cómo a medida que z crece, los valores no calculados en $[-\infty, X]$ y $[X, \infty]$, provocan una disminución del área bajo $F(x,y,z)$ cada vez mayor.

Error total

En la práctica, la respuesta del filtro se verá afectada por ambos errores, y la elección de X , Y , Δx , Δy y dependerá de la altura de la continuación.

Como puede verse en Fig. 4, para z pequeños la respuesta del filtro es aguda en el centro y tiende rápidamente a cero; además, las curvas se aplastan a medida que z aumenta. Es evidente entonces que el error por digitalización tendrá

más peso que el error por truncamiento para z pequeños, ocurriendo lo contrario para z grandes.

Control de los errores

Definamos SF como la suma de respuestas de filtro que intervienen en cada punto de la convolución. SF es entonces un índice de la desviación de la respuesta del filtro ideal. Calculando el valor de SF en cada estación podrá conocerse la porción de área bajo $F(k\Delta x, l\Delta y, z)$ que interviene en el cálculo. Cuando el valor de SF es próximo a la unidad podríamos decir que los errores cometidos son mínimos.

ANALISIS DE LOS DATOS DE ENTRADA

Si se analizan como casos particulares las expresiones del efecto de gravedad para una esfera homogénea y el efecto gravitatorio de un cilindro horizontal indefinido se encuentran expresiones similares a las respuestas del filtro finita y bidimensional respectivamente.

Por lo tanto, las consideraciones hechas para el error por digitalización y truncamiento del filtro pueden ser aplicadas a los datos.

Si se consideran las dimensiones y densidad de la estructura como constantes, el intervalo de muestreo y el espaciamiento entre los puntos será entonces función de la profundidad de la estructura.

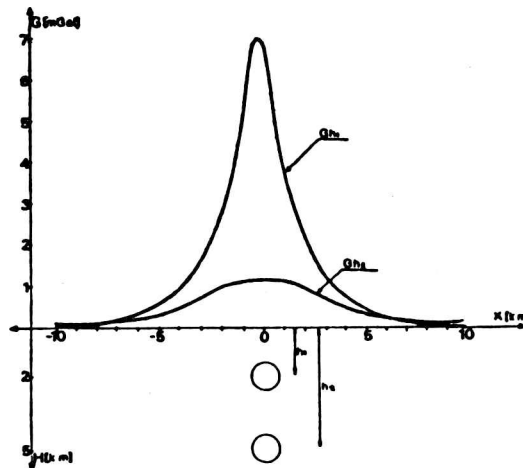


Fig.5: Respuestas gravimétricas G_{h_1} y G_{h_2} correspondientes a dos esferas de igual densidad y radio ubicadas a profundidades h_1 y h_2 respectivamente.

De acuerdo con Fig. 5 donde puede verse el efecto gravimétrico provocado por dos esferas de igual densidad y radio pero a distintas profundidades, y siguiendo el criterio adoptado para digitalizar y truncar la respuesta del filtro, podría decirse que cuando la estructura es profunda y arroja una curva de respuesta gravimétrica aplastada, el intervalo de muestreo debe extenderse mientras que el espaciamiento entre puntos puede reducirse y viceversa para estructuras superficiales, con curva de respuesta gravimétrica aguda.

Control de errores

Desafortunadamente, el error cometido al digitalizar y truncar los datos de gravedad, no puede controlarse de la misma manera que el cometido en el filtro, ya que la profundidad de la estructura, parámetro interviniente en la fórmula, es desconocida. Con el procedimiento que se detallará a continuación podrá tenerse una idea aproximada de la magnitud del error cometido.

Si se calcula el área bajo la curva de respuesta gravimétrica digitalizada con Δx y Δy tendiendo a 0 y en intervalo para x y para y tendiendo a $[-\infty, \infty]$ se tendrá una buena aproximación del área bajo la curva continua. El cálculo se repite luego para el intervalo de muestreo y espaciamiento entre puntos elegidos. El cociente entre ambos valores así calculados deberá tender a 1 si la forma escogida para muestrear los datos es adecuada.

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Las características del proceso de convolución requieren que el muestreo de datos y el cálculo de la respuesta del filtro se realicen con el mismo espaciamiento entre puntos aunque los intervalos de muestreo y cálculo sean diferentes. No obstante, debe tenerse en cuenta que la forma adecuada de digitalizar el filtro no necesariamente tiene que ser apropiada para los datos.

Si se considera solamente el criterio para digitalizar y truncar el filtro, los valores de SF pueden conducir a pensar que los resultados son correctos. Sin embargo, si se calcula el error entre los valores calculados y los teóricos esperados se encontrará que las diferencias no son despreciables.

Debe recalcar entonces el hecho de que los valores de SF sólo informan acerca de la precisión con que fue digitalizada o truncada la respuesta del filtro y no acerca de la exactitud de los resultados de la prolongación de campo.

Por otra parte, si bien es posible elegir el intervalo de cálculo de la respuesta del filtro para disminuir el error por truncamiento, no siempre se tiene la posibilidad de extender suficientemente el intervalo de muestreo de los datos con el mismo fin.

Cuando los datos de gravedad disponibles no se hallen suficientemente extendidos, será necesario "prolongar" el área a continuar con la adición de datos cons-

tantes (Tsay, 1978) a ambos lados de los perfiles a continuar, como se muestra en Fig. 6. El cálculo se llevará a cabo en la totalidad del área descartándose luego los resultados de la continuación en los puntos que fueron agregados a los perfiles originales.

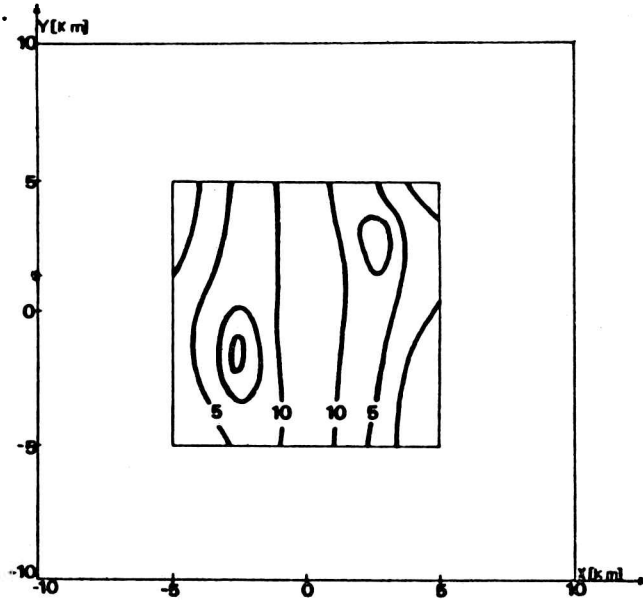


Fig.6: Plano de isoanómalas de gravedad disponible (—) y perfiles prolongados con valores constantes (---).

POSIBILIDADES DE USO DE LOS OPERADORES DE CONVOLUCION FINITO Y BIDIMENSIONAL

Con el objeto de verificar si el operador de convolución finito es adecuado para filtrar efectos gravitatorios tanto de estructuras finitas como bidimensionales, se calculó sobre una grilla el efecto gravimétrico originado por un paralelepípedo bidimensional. Se llevó a cabo el filtrado con ambos operadores comprobándose que la prolongación de campo con operador finito puede ser usada obviamente para filtrar efectos de estructuras bidimensionales, siempre y cuando los datos se extiendan suficientemente en la dirección del eje del cuerpo bidimensional.

Por otra parte, para probar si el operador de convolución bidimensional era apropiado para prolongar hacia arriba el campo gravitacional provocado tanto por estructuras bidimensionales como finitas, se calculó el efecto gravimétrico de dos esferas, una superficial y una profunda, verificándose que al filtrar estructuras finitas por convolución con operador bidimensional, las mejores aproximaciones se logran cuando las estructuras que dan origen a las anomalías son suficientemente profundas.

En consecuencia y dado que la velocidad de cálculo con operador bidimensional

nal es muy superior a la velocidad de cálculo con operador finito, en los casos en que las dimensiones, ubicación y densidad de la estructura sean adecuados, puede ser ventajoso trabajar con operador bidimensional obteniendo valores bastante aproximados.

Para completar el análisis se calculó sobre una grilla el efecto gravimétrico conjunto de un paralelepípedo bidimensional y una esfera homogénea.

Como era de esperar, el error resulta mínimo cuando la prolongación de campo se efectúa con operador finito. No obstante, si se superponen los resultados obtenidos al filtrar con ambos operadores puede notarse que en la zona donde el efecto gravitatorio del bloque bidimensional predomina sobre el de la esfera, ambas curvas tienden a coincidir.

PROCEDIMIENTO DE CALCULO

Se desarrollaron dos programas de computación en lenguaje Basic para una microcomputadora TI 99/4 y para una computadora HP 1000.

Programa 1: Calcula la prolongación ascendente de campos potenciales para distintas elevaciones mediante convolución con operador bidimensional.

Programa 2: Calcula la prolongación ascendente de campos potenciales para distintas elevaciones mediante convolución con operador finito.

Los procedimientos para el cálculo de la convolución y cross-correlación involucran deslizamiento, multiplicación y suma, es decir, integración digital. La diferencia esencial entre ambas es que la convolución también involucra reversión de una de las funciones, el filtro.

En el caso de emplear como filtro una función par, como es el caso de la continuación, al reversar la función se recae en la función original, por lo tanto en este caso particular, la convolución y la cross-correlación arrojarán los mismos resultados, (Kulhanek, O. 1976) y podrán usarse los mismos procedimientos de cálculo.

CONCLUSIONES

El análisis de los resultados de prolongaciones hacia arriba de campos potenciales en el dominio espacial revela la necesidad de estudiar la influencia de los errores por digitalización y truncamiento tanto en los datos de entrada como en el filtro.

Se comprende entonces que el valor de SK citado en otras publicaciones como medida de la precisión de los datos continuados es insuficiente, ya que tiene en cuenta sólo uno de los elementos que intervienen en el proceso de convolución, el filtro.

En este trabajo se consideran dos factores de control de los errores, uno para los valores del filtro, SF, y otro para los datos, SD, que en conjunto determinan con más exactitud la precisión de los resultados obtenidos. Así, si ambos factores

de control se aproxima a 1, tendremos la certeza que los valores prolongados son correctos.

Se exploraron además las posibilidades de filtrar estructuras finitas con operadores bidimensionales dado el notable ahorro de tiempo que esto supone. En los casos probados de estructuras suficientemente profundas, el filtrado por prolongación ascendente con uno u otro operador proporciona resultados aceptablemente concordantes. En los casos de estructuras someras las discrepancias fueron notorias.

Cabe señalar además que mediante numerosos ejemplos prácticos, se ha comprobado la notable aptitud del método de prolongación ascendente para definir cuantitativamente la anomalía regional.

RECONOCIMIENTO: A Y.P.F. por facilitarnos el uso de sus computadoras.

BIBLIOGRAFIA

- INTROCASO, A.: 1980. Exploración gravimétrica. Ciclo de cursos sobre temas de Geofísica. Departamento de Graduados de la Facultad de Ingeniería. U.N.R. y Observatorio Astronómico Municipal de Rosario. pp. 168.
- GUSPI, F. - PACINO, M.C.: 1984. Prolongación ascendente y descendente de campos potenciales en el dominio frecuencial. Análisis comparativo con el dominio espacial. Inédito.
- KULHANEK, O. 1976. Introduction to digital filtering in Geophysics. Elsevier Scientific Publishing Company. 168 pág.
- MIRONOV, V.S. 1977. Curso de prospección gravimétrica. Editorial Reverté. 525 pág.
- MORELLI, C. 1966. Gravimetría. Del Bianco Editore - Udine. 575 pág.
- TSAY, L.J. 1978. A spatial analysis of upward continuation of potential field data. Geophys. Prosp. 26, 822-840.