

ANALISIS ESPECTRAL DE LA RELACION ENTRE LA COMPONENTE  
MERIDIONAL DEL VIENTO Y LA DEPRESION DEL PUNTO DE ROCIO

Silvia C. Simonelli, Jesús M. Gardiol y Eduardo A. Piacentini

Servicio Meteorológico Nacional  
Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

Se utilizó la técnica del análisis espectral para estudiar el comportamiento de la componente meridional del viento en Resistencia, la depresión del punto de rocío en Ezeiza y sus correlaciones, en el nivel de 850 HPA. a partir de las observaciones de 12:00 TMG correspondiente al año 1972.

El espectro de la componente meridional del viento presenta máximos importantes en períodos de 13 y 8 días. En el caso de la depresión del punto de rocío estos valores máximos aparecen en los 8 y 26 días. La máxima correlación entre ambas variables se encuentra a los 9 días, correspondiendo a las variaciones sinópticas.

ABSTRACT

A technique of spectral analysis was used in order to study the behavior of South-North component of wind in Resistencia (Argentina), as well as the dew point depression in Ezeiza (Argentina) and their correlations. In this work we selected the data of 850 HPA from 12:00 UTC observations of 1972.

The spectral of South-North component of the wind shows the larger values for periods of 13 and 8 days. On the other hand, for dew point depression the corresponding maximums turn up for periods of 26 and 8 days.

The most important correlation between both variables appears for 9 days. This value is related with synoptic variation

## DATOS UTILIZADOS

El análisis espectral se realizó para la componente meridional del viento y la depresión del punto de rocío en el nivel de 850 HPA en las estaciones meteorológicas Ezeiza y Resistencia. Para ello fueron utilizadas las observaciones de 12:00 UTC correspondientes al año 1972.

Las series se completaron interpolando los valores de depresión de punto de rocío y dirección e intensidad del viento, de las cartas sinópticas analizadas en la Central de Análisis del Servicio Meteorológico Nacional.

## METODOLOGIA

Existen diferentes metodologías para el análisis espectral. En este trabajo se aplicó la transformada de Fourier a las series temporales de las variables, en un período determinado.

La serie de Fourier se define por la expresión:

$$\hat{X}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(360 k f_0 i \Delta t) + \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen}(360 k f_0 i \Delta t) \quad (1)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

Donde:  $n$  es un número par de observaciones de la serie.

$f$  es la frecuencia fundamental

$t$  es el tiempo de muestreo.

$a_k$  y  $b_k$  son los coeficientes de Fourier que

cumplen con la condición de ortogonalidad y están dados por las siguientes expresiones:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \cos\left(\frac{360 k i}{N}\right) \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \operatorname{sen}\left(\frac{360 k i}{N}\right) \quad (3)$$

quedando así definido  $n/2$  constantes de  $a_k$  y de  $b_k$  en función de los valores muestrales  $x_i$ .

El promedio de los valores muestrales define a la constante  $a_0/2$ ; la serie queda así definida para  $N/2$  armónicas, sumas de senos y cosenos, con

argumento múltiplo del período fundamental  $P = T$ .

La frecuencia más alta que se puede obtener esta dada por  $1/2 T$ , que corresponde a un período de dos intervalos de muestreo, esta frecuencia se denomina de corte o de Nyquist.

El valor cuadrático medio puede descomponerse, a través de un caso particular del teorema de Parseval, en contribuciones de armónicas, usando para ello las condiciones de ortogonalidad y la ecuación de Fourier:

$$\frac{\sum x_i^2}{N} = \left(\frac{R_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{R_k}{2} + R_{\frac{N}{2}}^2 \quad (4)$$

Tomando la varianza de  $x$  resulta:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{R_k}{2} + R_{\frac{N}{2}}^2 \quad (5)$$

Las contribuciones de cada armónica  $K$  a la varianza total es  $R_k/2 \sigma^2$ , con excepción de la última que es  $R_{\frac{N}{2}}^2 / \sigma^2$  (Panofsky y Brier, 1958).

Graficando la varianza de la armónica  $K$  en función de la frecuencia  $Kf_0$  se obtiene el espectro de línea de Fourier o períodograma.

La transformación de la transformada de Fourier al períodograma de la serie tiene la ventaja de suavizar el espectro (Tukey, 1950; Blackman y Tukey, 1958).

Se puede definir una función de densidad espectral normalizada  $G(f)$ :

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} \sigma_x^2 G(f) df \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} G(f) df = 1 \quad (7)$$

donde  $G(f)df$  es la contribución de una dada frecuencia  $f$  a la varianza total.

La curva de densidad espectral normalizada se obtiene graficando  $G(f)$  en función de  $f$ .

Una serie temporal  $x(t)$  puede expresarse de la siguiente forma:

$$x(t) = \bar{X} + x'(t) \quad (8)$$

Aplicando el análisis armónico queda expresado como:

$$X(t) = \bar{X} + 2\pi \int_0^{\infty} [A(f) \cos 2\pi f t + B(f) \sin 2\pi f t] df \quad (9)$$

Suponiendo la serie con media cero y aplicando el Teorema de Parseval, se puede calcular la varianza de  $x$ :

$$\sigma_x^2 = \overline{x'^2(t)} \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x'(t)]^2 dt = 2\pi^2 \int_0^{\infty} [A^2(f) + B^2(f)] df \quad (11)$$

Cuando el período ( $T$ ) es muy grande

$$\overline{x'^2} = 2\pi^2 \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{A^2(f) + B^2(f)}{T} \right] df \quad (12)$$

Si la frecuencia se halla entre  $f$  y  $f + \Delta f$ :

$$G(f) = 2\pi^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{A^2(f) + B^2(f)}{T} \right] \quad (13)$$

El coeficiente de autocorrelación de la serie se define:

$$R(\tau) = \frac{\overline{x'(t) x'(t + \tau)}}{\overline{x'^2}} \quad (14)$$

donde  $\tau$  es el "lag" o desplazamiento temporal.

Por el teorema de Wiener-Khinchin, el coeficiente de autocorrelación puede expresarse por medio de la transformada de Fourier de la función de densidad espectral como:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f \tau df \quad (15)$$

y aplicando el Teorema de Fourier queda expresada la función de densidad espectral en función del coeficiente de autocorrelación:

$$G(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (16)$$

resultando  $R(\tau)$  y la función de densidad espectral modificada  $G(f)/2\sqrt{2\pi}$ , transformadas de Fourier una de la otra.

Para una variable discreta se realiza la integración trapezoidal, quedando:

$$G(f) = 2\Delta t \left[ R_0 + 2 \sum_{n=1}^{m-1} R_n \cos(2\pi f n \Delta t) + R_m \cos(2\pi f m \Delta t) \right] \quad (17)$$

si se supone  $f = k/2m\Delta t = kf_N/m$ , entonces:

$$G(f) = 2\Delta t \left[ R_0 + 2 \sum_{n=1}^{m-1} R_n \cos\left(\frac{\pi n k}{m}\right) + R_m \cos(\pi k) \right] \quad (18)$$

La elección del desplazamiento máximo ( $m$ ) es de suma importancia, ya que cuanto mayor es  $m$ , tanto mayor es el poder de resolución del espectro y la inestabilidad de la serie.

Se puede mostrar (Otnes y Enochson, 1972) que la relación entre la varianza del estimador y el valor medio (estabilidad), esta dada por:

$$\epsilon^2 = \frac{\text{var}(G(f))}{G^2(f)} \approx \frac{m}{N} \quad (19)$$

Si se desea que los estimadores espectrales se encuentren entre un 30 o un 40% de su valor medio, el desplazamiento máximo no deberá superar un 10% de la longitud total del registro.

Un error que se introduce, al calcular los estimadores, es la falsa representación (aliasing), que se debe al hecho de que con observaciones a intervalos discretos  $\Delta t$ , aparecen en las bajas frecuencias las oscilaciones de alta frecuencia, obteniéndose así una idea errónea del espectro. Esto puede observarse en las frecuencias cercanas a la frecuencia de corte o Nyquist ( $f_c$ ).

Para evitar ese efecto se debe tomar un  $t$  tan pequeño como sea posible, consistente con el tiempo de promedio de las observaciones y descartando las altas frecuencias del espectro.

Para eliminar las perturbaciones que se introducen al utilizar un período fundamental finito, es conveniente usar una ventana espectral temporal; esto asegura que la serie sea estrictamente periódica y que sus extremos sean iguales. La ventana es de la forma:

$$X'_i = X_i \cdot 0.5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{0.1N} \pi \right) \right] \quad 1 \leq i \leq 0.1N \quad (20)$$

$$X'_i = X_i \cdot 0.5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{N-i}{0.1N} \pi \right) \right] \quad 0.9N \leq i \leq N \quad (21)$$

El grado de relación existente entre dos series temporales  $x(t)$  e  $y(t)$ , puede conocerse a través del espectro cruzado, el cual suele expresarse en forma compleja por la ecuación:

$$G_{xy}(f) = C_{xy}(f) + i Q_{xy}(f) \quad (22)$$

donde  $C_{xy}(f)$  es la función de densidad coespectral y dada por:

$$C_{xy}(f) = \int_0^{\infty} [R_{xy}(L) + R_{xy}(-L)] \cos 2\pi f L dL \quad (23)$$

y  $Q_{xy}(f)$  es la función de densidad espectral de cuadratura, expresada por:

$$Q_{xy}(f) = \int_0^{\infty} [R_{xy}(L) - R_{xy}(-L)] \cos 2\pi f L dL \quad (24)$$

donde

$$R_{xy}(L) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+L) dt \quad (25)$$

es el coeficiente de autocorrelación cruzado, definiéndose  $L$  el desplazamiento en el tiempo de una variable respecto de la otra.

El espectro de cuadratura se utiliza para ampliar la información obtenida con el coespectro; en este espectro, cada frecuencia de las oscilaciones de una de las variables está desplazada  $1/4$  del respectivo período, antes de correlacionarse en forma cruzada con la otra.

El ángulo de fase entre las armónicas de las series temporales, se puede determinar mediante una relación entre el espectro de cuadratura y el coespectro. Esta relación está dada por la siguiente expresión:

$$\phi(f) = \arctg \left[ Q_{xy}(f) / C_{xy}(f) \right] \quad (26)$$

Para hallar la bondad de las relaciones entre las dos variables para diferentes frecuencias, se define la función coherencia cuadrática, dada por:

$$CH(f) = \frac{C_{xy}^2(f) + Q_{xy}^2(f)}{S_x(f) S_y(f)} \quad (27)$$

La coherencia cuadrática varía entre 0 y 1, pudiéndose interpretarla como un coeficiente de correlación al cuadrado. Si la coherencia es igual a cero, en una frecuencia dada, se dice que  $x(t)$  e  $y(t)$  son incoherentes, es decir, no están correlacionados.

Si  $x(t)$  e  $y(t)$  son estadísticamente independientes  $CH(f) = 0$  para todas las frecuencias. Si  $CH(f) = 1$  para cualquier frecuencia, entonces  $x(t)$  e  $y(t)$  son totalmente coherentes.

#### ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

La metodología fue aplicada a una serie de 184 observaciones correspondientes a la estación fría (abril-setiembre).

Las variables utilizadas se dividieron en dos grupos: una variable independiente (componente meridional del viento en Resistencia) y una variable dependiente (depresión del punto de rocío de Ezeiza).

Se utilizó como paso de tiempo 24 hs. En los extremos de las series de observaciones se aplicó una ventana temporal coseno para asegurar la periodicidad de las mismas (ecuaciones N° 20 y 21).

### Espectros

La figura 1 representa el espectro de la componente meridional del viento en Resistencia. Puede observarse que a los 13 días aparece un máximo coincidente con la máxima contribución a la varianza total debido a la circulación general de la atmósfera. Esto podría deberse, probablemente, a la penetración del anticiclón semipermanente del Océano Atlántico en el continente a la latitud de Resistencia.

Un segundo máximo se encuentra a los 8 días, correspondiendo esta contribución a las ondas sinópticas.

La Figura 2 muestra el espectro de la depresión del punto de rocío en Ezeiza. La máxima contribución a la varianza total aparece a los 8 días que corresponden nuevamente a la onda sinóptica.

Cabe aclarar que para los cálculos realizados se tomó un desplazamiento máximo de  $m=92$ , lo que trajo aparejado un mayor poder de resolución de los espectros pero restándole estabilidad.

Para estabilizar la serie y para que los estimadores se encuentren entre el 30% y el 40% de su valor medio se redujo el desplazamiento máximo a  $m=30$ . Se obtuvieron así los espectros de la componente meridional del viento y de la depresión del punto de rocío que se muestran en las Figuras 3 y 4 respectivamente.

### Espectro cruzado

La Figura 5 corresponde al coespectro entre la componente meridional del viento en Resistencia y la depresión del punto de rocío en Ezeiza. El coespectro, puede interpretarse como las contribuciones de las oscilaciones de diferentes frecuencias al transporte de vapor de agua en el nivel considerado (850 mb). Puede observarse, que las mayores contribuciones del coespectro al espectro cruzado se obtienen para aquellos fenómenos cuyos períodos son de 8 y 17 días aproximadamente; siendo ambas contribuciones positivas.

En la Figura 6 se muestra el espectro de cuadratura entre la componente meridional del viento en Resistencia y la depresión del punto de rocío en Ezeiza. En este caso, la máxima contribución al espectro de cuadratura se da en fenómenos de períodos de 26, 10 y 8 días respectivamente.

El espectro cruzado, Figura 7, se obtiene de la relación entre el coespectro y el espectro de cuadratura.

De las Figuras 5 y 6 se deduce que las variables se hallan desfasadas en  $90^\circ$  para los procesos cuyos periodos son de 19, 13 y 7 días respectivamente.

#### Coherencia y función de fase

Con el objeto de investigar las correlaciones entre dos variables para diferentes periodos de oscilación, fueron estimados a partir de las ecuaciones (27) y (28) la coherencia y la función de fase.

Para simplificar el graficado de la fase, los ángulos fueron agrupados de la siguiente forma:

- a) para ángulos entre  $45^\circ$  y  $315^\circ$  se consideró que las variables estaban en fase  $\phi = 0^\circ$ .
- b) para ángulos entre  $45^\circ$  y  $135^\circ$  se consideró  $\phi = 90^\circ$ .
- c) para ángulos entre  $135^\circ$  y  $225^\circ$  se tomó  $\phi = 180^\circ$ .
- d) para ángulos entre  $225^\circ$  y  $315^\circ$  se consideró que las variables estaban fuera de fase, es decir  $\phi = 270^\circ$ .

Los ángulos de fase y de coherencia se hallan representados en la figura 8. Las líneas horizontales corresponden a las fases para aquellos periodos en que se mantuvo constante sobre un rango de periodos.

Se puede observar que los valores de la coherencia para los 9 días (0.33) y para los 7 días (0.28), son relativamente más altos que para los 13 días.

#### CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos se puede inferir:

- Las mayores contribuciones a la varianza total de la componente meridional del viento corresponde a las armónicas cuyos periodos son de 13 y 8 días.

Para la depresión del punto de rocío, las mayores contribuciones corresponden a las armónicas cuyos periodos son de 26 y 8 días.

- La mínima contribución a la varianza total de la depresión del punto de rocío aparece a los 13 días, en contraposición a lo observado en la componente meridional del viento. Este mínimo indicaría que las perturbaciones hidrodinámicas en ese periodo no afectan al campo de humedad.

- La componente meridional del viento y la depresión del punto de rocío presentan una relativamente buena correlación para periodos menores de 9 días.

El desfasaje entre ambas variables es de  $90^\circ$ , o sea, que los valores máximos

- Otnes, R.K. y Enochson, L. (1972). Digital time series analysis, Wiley & Sons.
- Panofsky, H.A. y Brier, G.W. (1958). Some applications of statistics to Meteorology. Pennsylvania State University.
- Tukey, J.W. (1950). The sampling theory of power spectrum estimates. Symposium on Application of Autocorrelation Analysis to Physical Problems Washington.

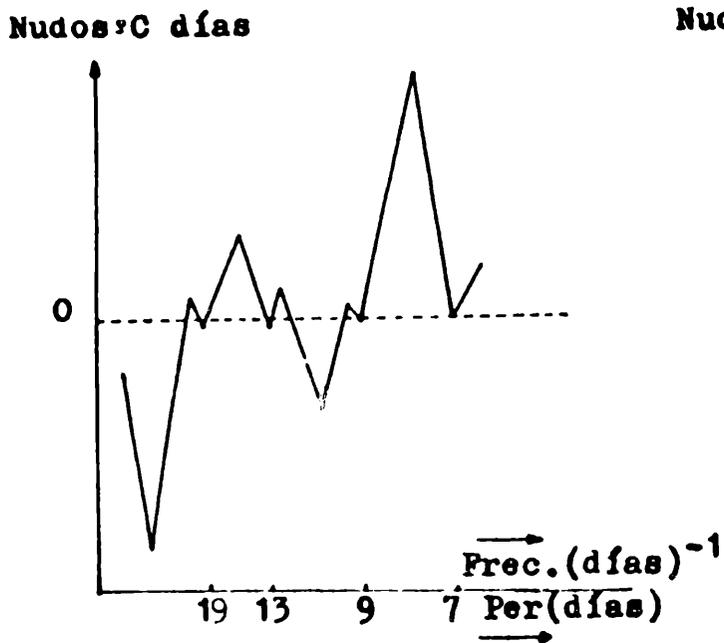


Figura 5: Coespectro entre la componente meridional del viento en Resistencia y la depresión del punto de rocío en Ezeiza.

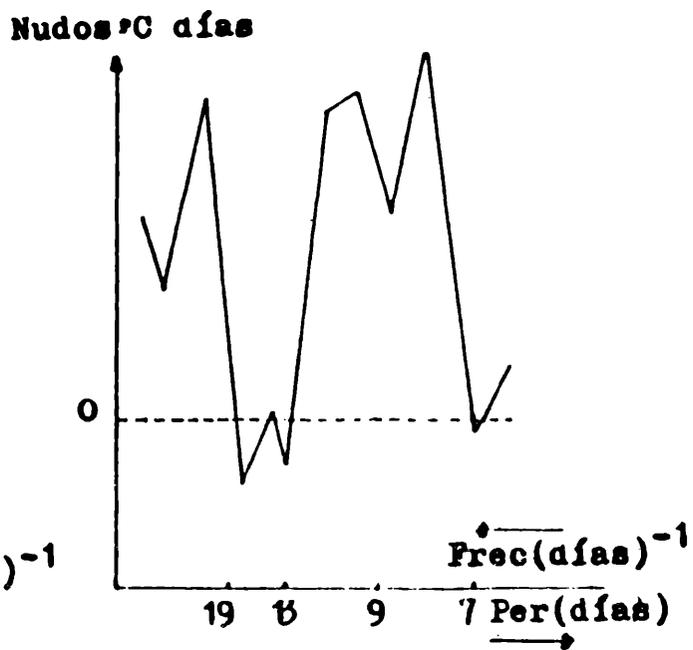


Figura 6: Espectro de cuadratura entre la componente meridional del viento en Resistencia y la depresión del punto de rocío en Ezeiza.

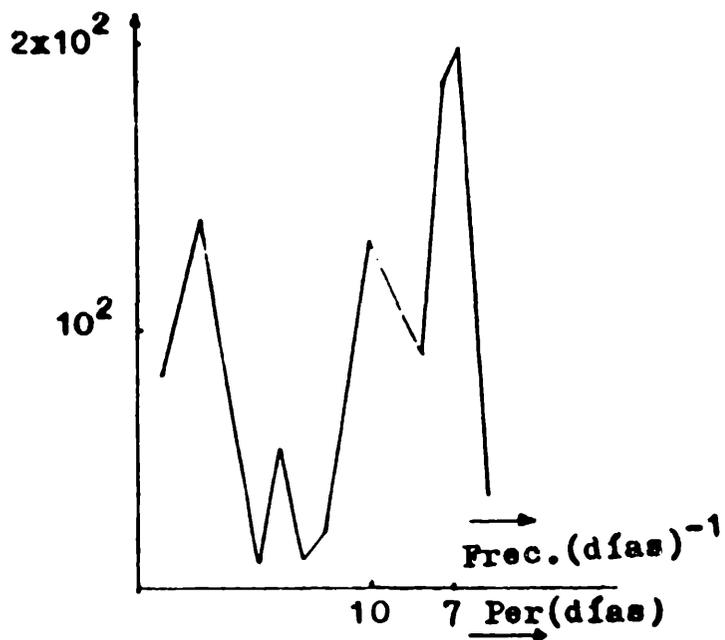


Figura 7: Espectro cruzado entre la componente meridional del viento en Resistencia y la depresión del punto de rocío en Ezeiza.

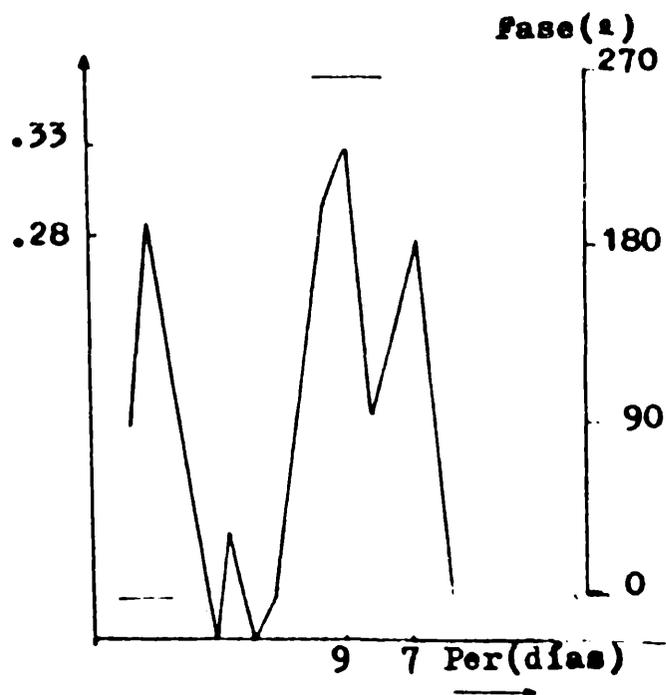


Figura 8: Coherencia y ángulos de fase entre la componente meridional del viento en Resistencia y la depresión del punto de rocío en Ezeiza.

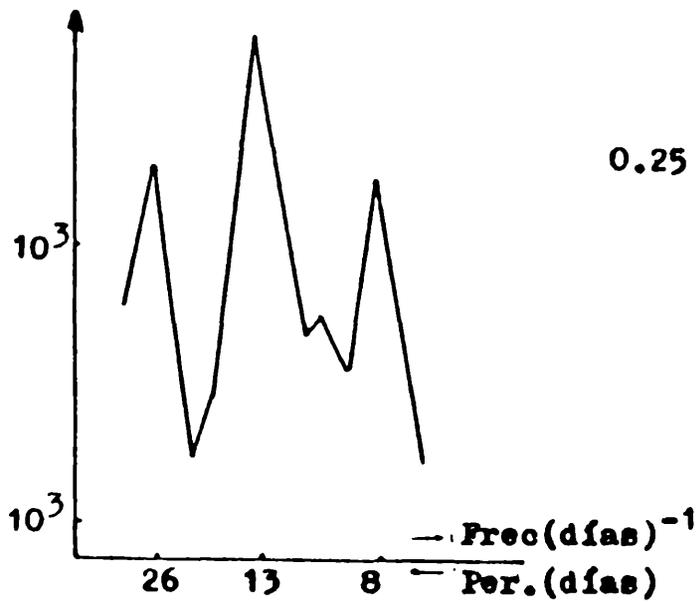


Figura 1: Espectro de la componente meridional del viento en Resistencia.

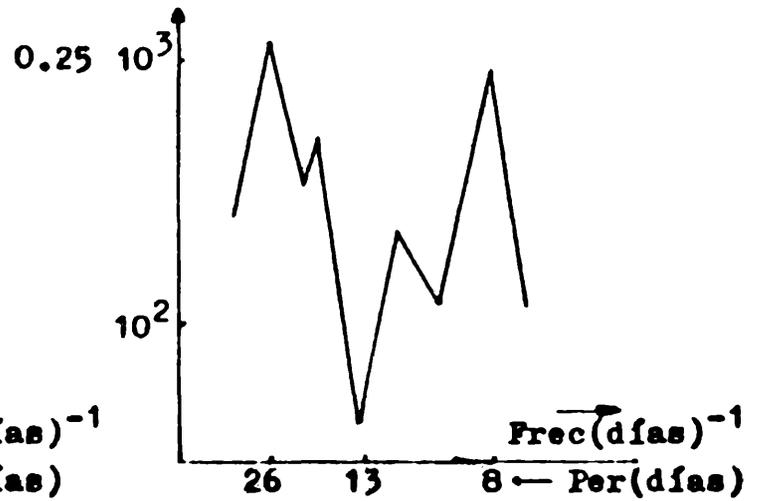


Figura 2: Espectro de la depresión del punto de rocío en Ezeiza

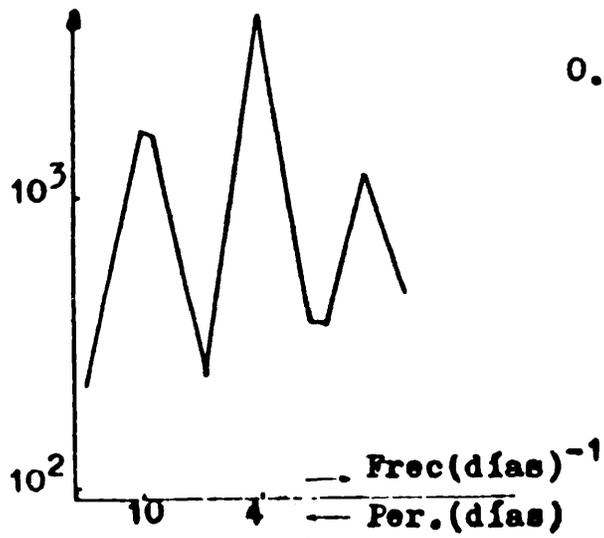


Figura 3: Espectro de la componente meridional del viento en Resistencia. (m=30)

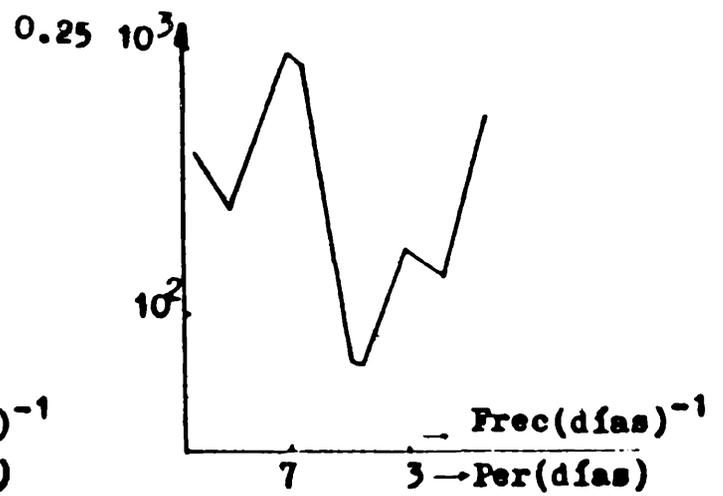


Figura 4: Espectro de la depresión del punto de rocío en Ezeiza. (m=30)