

ANALISIS DE MAREAS LUNARES EN TIEMPO SOLAR

Horacio N. Curto y Otto Schneider

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

Buenos Aires, República Argentina

RESUMEN

La proximidad de la duración del día lunar con la del día solar medio hace que las mareas lunares en un fenómeno geofísico contaminen sensiblemente a las oscilaciones con período solar. Esta circunstancia se suele aprovechar en el análisis de mareas lunares geomagnéticas y atmosféricas utilizando como datos iniciales valores horarios especificados en tiempo solar. Se han deducido nuevos coeficientes de reducción para obtener las fases y amplitudes lunares sobre la base de las solares, en el caso de usarse el método del análisis armónico de diferencias horarias consecutivas.

ABSTRACT

Due to the nearly equal length of the lunar and mean solar day, any lunar tides in some geophysical parameter will sensibly contaminate oscillations of solar period, if also present. This effect is often used in the analysis of lunar atmospheric and geomagnetic tides, when the original data are given in solar time, e.g., as standard hourly values. New coefficients of reduction have been calculated in this paper, for obtaining corrected lunar amplitudes and phases from the solar ones, in the particular case of an analysis based on successive differences of hourly values.

INTRODUCCION

Del conjunto de las variaciones temporales del campo geomagnético (tormentas, bahías, mareas, pulsaciones, etc.) algunas son periódicas en un día solar, en tanto que otras tienen un período cuya duración es el día lunar. Para determinar las amplitudes y fases de estas mareas lunares se procede por lo general partiendo de datos referidos al tiempo solar y analizándolos con el período básico de

un día solar. La cercanía de la duración del día solar con el lunar hace que el citado procedimiento arroje para las ondas lunares, coeficientes armónicos provisorios que son aproximaciones a los verdaderos, correspondientes a su período natural, el lunar. El objetivo del presente trabajo es determinar las correcciones que deben aplicarse a los coeficientes provisorios para hallar los verdaderos con mayor aproximación; el método aquí desarrollado constituye una generalización de una técnica más restringida (Schneider 1936).

DESARROLLO ANALITICO

Sea una función $L(\tau)$ periódica lunar de la forma

$$L(\tau) = \sum_{n=1}^j \{ a_n \cos(n\tau) + b_n \text{sen}(n\tau) \} + k\tau/2\pi \tag{1}$$

con $0 \leq \tau \leq 2\pi$; k : marcha no cíclica por día lunar, y τ : tiempo lunar. En lo que sigue, resultará más cómodo desplazar el origen de la escala de tiempo, al centro del intervalo, mediante la transformación $\tau = \tau' + \pi$; con lo que la función $L(\tau)$ tomará la forma

$$L(\tau') = \sum_{n=1}^j (-1)^n \{ a_n \cos(n\tau') + b_n \text{sen}(n\tau') \} + (k/2\pi)(\tau' + \pi) \tag{2}$$

$-\pi \leq \tau' \leq \pi.$

Sea ρ la relación entre la duración del día solar y la del lunar

$$\rho = \sigma/\lambda \tag{3}$$

con σ y λ = duración del día solar y lunar, respectivamente, ambas expresadas en horas solares; sea, además, T el tiempo solar. La relación entre τ' y T estará dada por

$$\tau' = \rho T \tag{4}$$

Realizando esta sustitución en la función $L(\tau')$, resulta

$$L(T) = \sum_{n=1}^j (-1)^n \{ a_n \cos(n\rho T) + b_n \text{sen}(n\rho T) \} + (k/2\pi)(\rho T + \pi) \tag{5}$$

$-\pi/\rho \leq T \leq \pi/\rho$

El análisis de $L(\tau)$ realizado en tiempo solar, en lugar de hacerlo en tiempo lunar, equivale a una representación de $L(T)$ en el intervalo $-\pi \leq T \leq \pi$, y a suponer que el proceso a analizar es periódico σ y no λ por haberse reducido el intervalo básico. Las condiciones quedan ilustradas en la Figura 1, la cual, para mayor claridad, sólo representa una onda fundamental. Si se usa el método de análisis armónico basado en diferencias de valores consecutivos (Chapman y Bartels 1940), la marcha no cíclica queda eliminada en forma automática, obteniéndose en consecuencia los coeficientes armónicos de esta otra función:

$$L'(T) = L(T) - k'T/2\pi, \text{ donde } k' = L(\pi) - L(-\pi), \quad (6)$$

$$\text{o sea } L'(T) = \sum_{n=1}^j (-1)^n \left\{ a_n \cos(n\varphi T) + b_n \operatorname{sen}(n\varphi T) \right\} + Tk'' + k/2 \quad (7)$$

$$\text{con } -\pi \leq T \leq \pi; \quad k'' = -(1/\pi) \sum_{n=1}^j (-1)^n b_n \operatorname{sen}(n\varphi\pi) \quad (8)$$

Desarrollemos ahora, para cada n , en serie de Fourier los términos $\cos(n\varphi T)$; $\operatorname{sen}(n\varphi T)$; T de la (7), prescindiendo del sumando $k/2$, ya que este sólo aporta al término absoluto. Tendremos entonces:

$$\cos(n\varphi T) = \sum_{m=1}^j \frac{(-1)^m 2n\varphi \operatorname{sen}(n\varphi\pi)}{\pi(n^2\varphi^2 - m^2)} \cos(mT) \quad (9)$$

$$\operatorname{sen}(n\varphi T) = \sum_{m=1}^j \frac{(-1)^m \cdot 2m \operatorname{sen}(n\varphi\pi)}{\pi(n^2\varphi^2 - m^2)} \operatorname{sen}(mT) \quad (10)$$

$$T = -\sum_{m=1}^j \frac{(-1)^m \cdot 2}{m} \operatorname{sen}(mT) \quad (11)$$

Reemplazando estos desarrollos en la expresión (7) y reordenando términos, esta última toma la forma

$$L'(T) = \sum_{n=1}^j \sum_{m=1}^j (-1)^m a_n c_{nm} \cos(mT) + \sum_{n=1}^j \sum_{m=1}^j (-1)^m b_n s_{nm} \operatorname{sen}(mT) \quad (12)$$

en donde
$$c_{mn} = \frac{(-1)^m 2n\varphi \operatorname{sen}(n\varphi\pi)}{\pi(n^2\varphi^2 - m^2)} \quad (13)$$

$$s_{mn} = \frac{(-1)^n 2 \operatorname{sen}(n\varphi\pi)}{\pi} \cdot \left[\frac{m}{(n^2\varphi^2 - m^2)} + \frac{1}{m} \right] \quad (14)$$

El análisis armónico en tiempo solar consiste en representar $L'(T)$ por una función aproximada $L''(T)$, en esta forma:

$$L''(T) = \sum_{mn} (-1)^m A_m \cos(mT) + \sum_{mn} (-1)^m B_m \operatorname{sen}(mT) \quad (15)$$

Igualando los coeficientes de $\cos(mT)$ y $\operatorname{sen}(mT)$, respectivamente, en las (12) y (15), obtendremos:

$$A_m = \sum_{mn} \alpha_n c_{mn}, \quad B_m = \sum_{mn} b_n s_{mn}, \quad m=1, \dots, j \quad (16)$$

Estas dos últimas expresiones equivalen a dos sistemas de ecuaciones que pueden escribirse como

$$(A_m) = (c_{mn})(a_n), \quad (B_m) = (s_{mn})(b_n), \quad (17)$$

las que nos permitirán determinar los coeficientes deseados a_n , b_n , en función de los A_m , B_m hallados mediante el análisis armónico aproximado, con la ayuda de coeficientes de corrección α_{nm} , β_{nm} dados por

$$(\alpha_{nm}) = (c_{mn})^{-1}, \quad (\beta_{nm}) = (s_{mn})^{-1} \quad (18)$$

como
$$(a_n) = (\alpha_{nm})(A_m), \quad (b_n) = (\beta_{nm})(B_m), \quad (19)$$

o sea:
$$a_n = \sum_{nm} \alpha_{nm} A_m, \quad b_n = \sum_{nm} \beta_{nm} B_m, \quad n, m = 1, \dots, j \quad (20)$$

En el caso particular de que la variación lunar a investigar sea la proveniente del término principal M_2 del potencial de mareas, λ tiene el significado de un día lunar sinódico medio y la razón β de la (4) vale 0.96614. Con este valor introducido en las (13) y (14), y por su intermedio en la (18), resultan para $j = 4$ los coeficientes de corrección α_{nm} , β_{nm} consignados en la Tabla I. La limi-

tación a 4 términos se considera justificada en vista de la proximidad de ρ a la unidad. Es de advertir que para otras mareas parciales, por ejemplo las que responden a los términos elípticos del potencial de mareas, resulta un valor ρ ligeramente diferente, pero siempre cercano a la unidad; lo mismo ocurre en el desarrollo de Malin y Chapman (1970), quienes parten de un planteo algo distinto, por lo cual sus coeficientes de corrección no son estrictamente comparables con los aquí deducidos.

El análisis armónico realizado con el ya mencionado método de las diferencias horarias suministra coeficientes de esta forma:

$$\left. \begin{matrix} A_m^* \\ B_m^* \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\sigma} \sum_{r=1}^{24} \Delta_r \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \text{sen} \end{matrix} \right\} \left(\frac{m_r}{\sigma} 360^\circ \right) \quad (21)$$

con $\Delta_r = L_r - L_{(r-1)} ; r = 1, \dots, 24$

Aquí L_r ($r = 0, 1, \dots, 24$) representa los valores horarios dados de la función a analizar. Los A_m^*, B_m^* de las (21) requieren todavía las siguientes reducciones (Chapman y Bartels, 1940):

$$\left. \begin{matrix} A_m \\ B_m \end{matrix} \right\} = q_m \left[A_m^* \left\{ \begin{matrix} \text{sen} \\ \cos \end{matrix} \right\} \varphi_m + B_m^* \left\{ \begin{matrix} \cdot (-\cos) \\ \cdot (\text{sen}) \end{matrix} \right\} \varphi_m \right] \quad (22)$$

$$q_m = 1/2 \text{sen } \psi_m \quad (23)$$

donde $\Delta X = 360^\circ/\sigma$ representa un intervalo horario en medida angular;

$$\left. \begin{matrix} \varphi_m = m \left(\frac{\Delta X}{2} + \Delta_0 \right) \\ \psi_m = \frac{m \Delta X}{2} \\ \Delta_0 = \frac{1-\rho}{2} \cdot 360^\circ \end{matrix} \right\} \quad (24)$$

APLICACION PRACTICA EN UN EJEMPLO

Para ilustrar la aplicación del método utilizaremos una sucesión de datos extraídos en intervalos horarios solares ($T = 0, 1, \dots, 24$) de una función periódica lunar, de período $\lambda = \sigma/\rho$

$$L(x) = \sum_{n=1}^{j=4} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] + kx \quad (25)$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

Para el ejemplo concreto hemos asignado a los coeficientes a_n, b_n los valores (elegidos arbitrariamente) que consigna la Tabla II. Al coeficiente de la marcha lineal se le dió el valor de $k = 1/(\varphi \cdot 360^\circ)$, haciendo que dicha marcha ascienda a una unidad en 24 horas solares. Se analizaron los 25 valores L_T dados por la extracción horaria solar de la (25):

$$L(T) = \sum_{n=1}^{j=4} [a_n \cos(n\alpha T) + b_n \operatorname{sen}(n\alpha T)] + T/24 \quad (26)$$

$$T = 0, 1, \dots, 24 \quad \alpha = 360^\circ/\lambda$$

Los coeficientes provisionarios A_m, B_m hallados mediante los pasos (21), (22), (23) son los que figuran en la mitad superior de cada uno de los casilleros de la Tabla III, la que contiene además, en la mitad inferior de los casilleros, los valores mejorados a_n, b_n según la (20). Como se puede apreciar, estos últimos aproximan a los primitivos (Tabla II) con una precisión satisfactoria, si se tiene en cuenta el ruido estadístico natural presente en las mareas lunares atmosféricas y geomagnéticas, generalmente mucho mayor. En efecto, los errores residuales sólo ascienden al 0,5%; 0,4%; 0,6% y 0,7% de las amplitudes respectivas, y los de las fases se mantienen bien por debajo de 1° .

BIBLIOGRAFIA

- Chapman, S. y Bartels, J., 1940: *Geomagnetism*, II, 566-69.
 Malin, S.R.C. y Chapman, S., 1970: The determination of lunar daily geophysical variations by the Chapman-Miller method; *Geoph. J.R. Astr. Society*, 19, 15-35.
 Schneider, O., 1936: Einflüsse der Sonne auf die lunare Variation des Erdmagnetismus; *Veröff. Met. Inst. Univ. Berlin*, I(3).

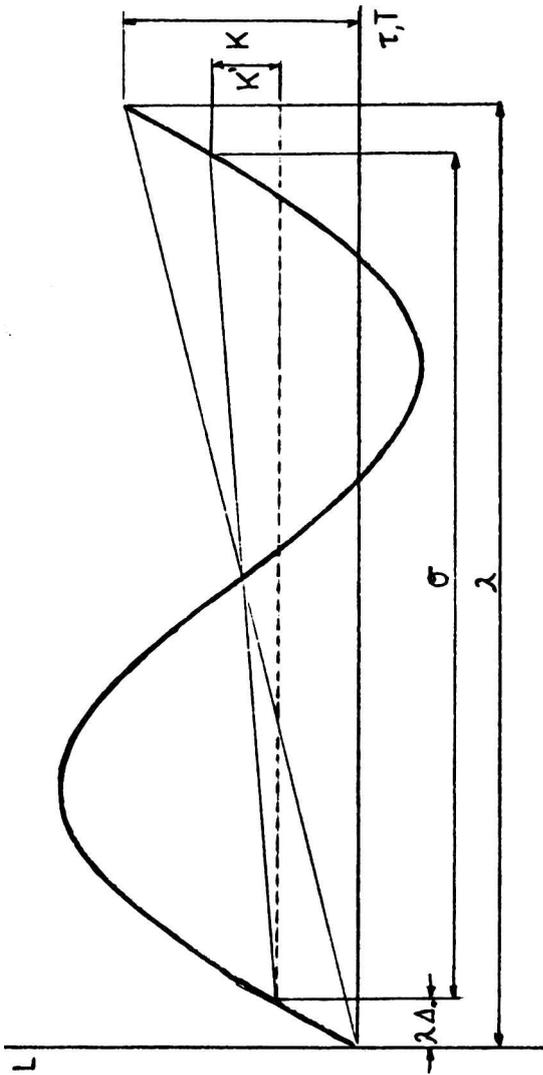


Fig.1: Truncamiento de una oscilación lunar dentro de un día solar. Caso elemental de una onda fundamental, sólo afectada por una marcha sistemática lineal $k \cdot \tau$: tiempo lunar; T : tiempo solar. λ y σ : duración del día lunar y solar (no en escala). k' : marcha lineal truncada.

Tabla I

a) Coeficientes α_{nm}

| $\frac{n}{m}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|---------|---------|---------|--------|
| 1 | 1,0163 | 0,0928 | 0,0872 | 0,1028 |
| 2 | -0,0237 | 1,0140 | 0,1272 | 0,1203 |
| 3 | -0,0079 | -0,0560 | 1,0129 | 0,1766 |
| 4 | -0,0035 | -0,0185 | -0,0845 | 1,0319 |

b) Coeficientes β_{nm}

| $\frac{n}{m}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|---------|---------|---------|--------|
| 1 | 1,0521 | 0,1921 | 0,2708 | 0,4258 |
| 2 | -0,0123 | 1,0497 | 0,1976 | 0,2491 |
| 3 | -0,0027 | -0,0387 | 1,0486 | 0,2437 |
| 4 | -0,0009 | -0,0096 | -0,0656 | 1,0682 |

Tabla I: Coeficientes de corrección

Tabla II

| n | a_n | b_n | $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ | $\varphi_n (^{\circ})$ |
|---|-------|-------|------------------------------|------------------------|
| 1 | 4 | 4 | 5,6569 | 45 |
| 2 | 2 | -2 | 2,8284 | 135 |
| 3 | -1 | -1 | 1,4142 | 225 |
| 4 | -0,5 | 0,5 | 0,7071 | 315 |

Tabla II: Parámetros adoptados en el ejemplo de la función (25)

Tabla III

| m | A_m | B_m | $C_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$ | $\varphi_m (^{\circ})$ |
|---|---------|---------|------------------------------|------------------------|
| 1 | 3,8319 | 4,2882 | 5,7508 | 41,78 |
| | 3,9857 | 4,0519 | 5,6836 | 44,53 |
| 2 | 2,2280 | -1,7102 | 2,8087 | 127,51 |
| | 2,0148 | -1,9676 | 2,8162 | 134,32 |
| 3 | -0,7359 | -1,0956 | 1,3198 | 213,89 |
| | -0,9885 | -0,9995 | 1,4057 | 224,68 |
| 4 | -0,4986 | 0,3888 | 0,6323 | 307,94 |
| | -0,5070 | 0,4997 | 0,7119 | 314,58 |

Tabla III: Parámetros armónicos provisionales y mejorados

