GEOACTA, Vol. 6, Nº 1, (Diciembre de 1972), Pág. 23 a 28.

INCREMENTO DE LA CONVERGENCIA EN LA UBICACION DE TERREMOTOS

SIMON GERSHANIK
Observatorio Astronómico de la Universidad de La Plata

El método del Gradiente es un método recomendable para ubicar fenómenos sísmicos porque es siempre convergente. Presenta empero el inconveniente de que su convergencia resulta muy lenta en las proximidades de la solución. En la presente comunicación se propone un recurso sencillo que puede acelerarlo muchísimo. En un ejemplo que se da, se comprobó que usándolo se logró con 10 iteraciones un resultado más próximo a la solución que con 225 sin usarlo.

The gradient method is commendable to determine the position of seismic phenomena, because it is always convergent. But sometimes its very slow convergence in the proximities of the solution is a drawback. This communication proposes a simple recourse to speed up the convergence. An example is shown where ten iterations of this method bring nearer to the solution than 225 iterations without it.

Como el método numérico habitual de Geiger, (1910), para ubicar fenómenos sísmicos, puede no ser convergente, lo que ocurre cuando los datos no son convenientes, son incompatibles o el punto de partida está muy alejado de la solución, propusimos en otra comunicación (1969) el empleo del Método del Gradiente de la Función G suma de los cuadrados de los errores correspondientes a valores de ensayo de las incógnitas, con lo que se dispone de un recurso siempre convergente. Como la convergencia empero puede no ser rápida queremos presentar un artificio adicional con ayuda del cual se la puede incrementar considerablemente.

Notamos al efecto: 1) que la superficie de equi–G, en la solución se convierten en un punto Ω coincidente con la solución; y 2) que el gradiente de G en general considerado, apuntará tanto más hacia Ω cuanto menos achatadas o sea cuanto más redondeadas sean las superficies citadas.

De ello sigue de inmediato que la convergencia puede incrementarse si para referir G se usa un sistema de coordenadas ξ, η, ζ en el que se logre ésto último. Para conseguir uno apropiado, desarrollamos G en serie de Taylor a partir de un punto $\phi_0\ \lambda_0\ h_0$ (ϕ, λ, y h son respectivamente la latitud, longitud y profundidad del foco). El subíndice cero indica que las coordenadas corresponden al punto inicial). Ello daría:

$$G = \bar{X}\, A\, X + \rho(\Delta\phi, \Delta\lambda, \Delta h)$$

Expresión en la que X y A son las matrices siguientes:

$$X = \begin{Vmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\lambda \\ \Delta h \\ 1 \end{Vmatrix} \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{ik} \end{Vmatrix} \ (i = 1,2,3,4,,\ k = 1,2,3,4)$$

entendiéndose por a_{ik}, (con k = 4, i = 1,2,3) la mitad de las derivadas parciales primeras de G sucesivamente respecto de ϕ respecto de λ y respecto de h; por a_{44} el valor de G en el punto $\phi_0\ \lambda_0\ h_0$ y por los restantes a_{ik}, la mitad de las derivadas parciales segundas de G. Por su parte $\bar{X}$ es la matriz transpuesta de la matriz vectorial X y ρ es el resto del desarrollo de Taylor.

Como en las vecindades de la solución, ρ es pequeño, resulta razonable prescindir por sencillez de su aporte en G, al procurar el hallazgo del sistema ξ, η, ζ. Con ello G se convierte en una forma cuadrática y las superficies equi–G en cuádricas dadas por la expresión general:

$$\bar{X}\, A\, X = 0 \qquad (1)$$

De ésto sigue enseguida que un incremento en la redondez de las superficies equi–G se puede obtener, si el sistema ξ, η, ζ se elige de modo que la cuádrica se convierta en una cuyos tres ejes principales sean iguales entre sí, en cuyo caso ella toma la forma esférica.

La expresión (1) de la cuádrica, puede transformarse mediante una translación primero y una rotación ulterior de coordenadas en la siguiente:

$$\Sigma \lambda_j^2 x_j^2 + c = 0$$

en la cual los x_j representan las nuevas coordenadas, los $\frac{1}{\lambda_j}$ son iguales a los semiejes de la cuádrica, y c es una constante.

Los valores de λ_j, como es sabido, pueden sacarse del determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

que se conoce con el nombre de ecuación secular. Su desarrollo conduce a la ecuación de tercer grado en λ

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

en la cual los b se calculan en base de los a_{ik} que figuran en la ecuación secular.

El examen de la estructura de esos coeficientes muestra que si

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \tag{2}$$

y además

$$a_{ik} = 0 \quad , \quad i \neq k \tag{3}$$

las raíces λ_j de la ecuación secular resultan iguales.

Tomando este resultado en cuenta cabe procurar que el sistema sea tal que con cierta aproximación (2) y (3) queden satisfechas. Como los a_{ik} $(i \neq k)$ generalmente no tienen un valor grande, una importante mejora en la convergencia se puede lograr con sólo satisfacer las relaciones (2) en cierta medida.

En primera aproximación puede aceptarse que:

$$a_{jj} = \Sigma \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_j}\right)^2$$

siendo γ el error correspondiente a los datos empleados, o sea el residuo de las diversas ecuaciones.

En virtud de ello, la (2) quedará satisfecha con la transformación homotética.

$$\xi = \frac{1}{\epsilon_1}\phi; \qquad \eta = \frac{1}{\epsilon_2}\lambda, \qquad \zeta = \frac{1}{\epsilon_3}h$$

en la cual los coeficientes ϵ que definen la homotecia se pueden calcular con las fórmulas:

$$\epsilon_j^2 = \frac{A}{a_{jj}}; \qquad A = \frac{\Sigma a_{jj}}{3} \qquad (j = 1,2,3)$$

Mediante dicha transformación resultaría evidentemente para los nuevos valores a_{jj} que podemos designar a'_{jj}:

$$a'_{jj} = A$$

y las componentes del gradiente en el sistema estarían dadas por:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \epsilon_1 \frac{\partial G}{\partial \phi}; \qquad \frac{\partial G}{\partial \eta} = \epsilon_2 \frac{\partial G}{\partial \lambda}; \qquad \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \epsilon_3 \frac{\partial G}{\partial h}$$

lo que en definitiva equivale a una elección apropiada de escalas para medir el grac. ıte.

El recurso fue probado preestableciendo para un terremoto la ubicación:

$H=00^h.00^m.00^s$; $\phi = 30^o$ $\lambda = 25^o$ y $h=0.06$ R; R=radio de la tierra y procurando llegar a la misma en base de datos de P de cuatro estaciones y de ScS de una de ellas, a partir de

$$\phi = 28^o , \qquad \lambda = 23^o , \qquad h = 0.08 \text{ R}$$

Para poder apreciar mejor la influencia del recurso en la convergencia, en vez de usar las tablas de los tiempos de propagación, se supuso que estos últimos estaban dados por:

$$F_P = 11\,\Theta - 5\,(h_1 - 6)$$

$$F_{ScS} = 35\,\Theta - 12\,(h_1 - 6)$$

$\Theta =$ distancia epicentral ;

$h_1 = 100$ h

Los cálculos se hicieron en la computadora IBM/360 modelo 50 de la Universidad Nacional de La Plata. No usando la mejora propuesta se llegó a la solución aproximada

$$\phi = 30^\circ.007 \ ; \qquad \lambda = 25^\circ.04 \ ; \qquad h = 0.0621 \text{ R}$$

tras de 225 iteraciones. En cambio usándola se llegó con sólo 10 iteraciones a la solución

$$\phi = 30^\circ.008 \ ; \qquad \lambda = 25^\circ 02 \ ; \qquad h = 0.0616 \text{ R}$$

BIBLIOGRAFIA

GEIGER, L., (1910): "Herabestimmung boi ERdbeben aus den Ankunfszeiten, -

GEIGER, L., (1910): "Herabestimmung boi Erdbeben aus den Ankunfszeiten, — Nachr. der Königl." Gessellchaft der Wissenschaften zu Göttingen, 331-343.

GERSHANIK, S., (1969): "Determination of epicenters using the gradient method". Asamblea de IASPEI—IAGA, Madrid, setiembre de 1969, Comptes Rendues, Nº 16, p. 86.