

## **UN PROCEDIMIENTO GRAFICO APROXIMADO PARA CONSTRUIR CURVAS MAESTRAS DE TRES CAPAS PARA EL DISPOSITIVO GEOELECTRICO DE WENNER**

ANTONIO INTROCASO

Facultad de Ciencias e Ingeniería — Universidad Nacional de Rosario

La interpretación en el método geoelectrico de resistividades requiere curvas maestras construidas en base a largas y exigentes computaciones. No obstante, para verificar rápidamente ciertas suposiciones o para encontrar la distribución de resistividades o para fundamentar determinadas hipótesis, se propone el siguiente método gráfico para construir curvas maestras de tres capas. El procedimiento se basa en la utilización de una familia Wenner de curvas patrón de dos capas y cuatro diagramas de punto auxiliar graduados en concordancia con aquéllas; aventajando al clásico procedimiento analítico en rapidez y posibilidades de combinaciones sin necesidad de realizar computaciones que demandan tiempo y gastos adicionales.

Interpretation of resistivities in the geoelectric method requires master curves based on long and accurate computations. Nevertheless, in order to verify certain assumptions or find out the resistivity distribution, or to find certain hypotheses in a rapid way, the following graphic method of constructing master curves of three layers is proposed. The procedure is based on the use of a Wenner family of two layer master curves and four diagrams of auxiliary point graduated in accordance to the curves. Obviating computations which usually demand a lot of time and additional costs, this procedure excels the classic analytical one in quickness and possibility of combinations.

L'interprétation dans la méthode électrique de résistivités a besoin d'abaques construites sur la base de longues et lourdes computations. Néanmoins, pour vérifier rapidement certaines suppositions ou pour trouver la distribution des résistivités, ou bien pour baser certaines hypotheses, on propose la suivante méthode graphique pour construire abaques a deux couches pour le dispositif Wenner, et quatre diagrammes de point auxiliaire gradués en concordance avec les abaques. Ce procédé est supérieur au classique procédé analytique en vitesse et possibilités de combinaisons sans avoir besoin de réaliser computations qui demandent temp et dépenses additionnels.

## CONSTRUCCION DE CURVAS MAESTRAS DE DOS CAPAS

Consideremos el caso de dos capas. La solución para el potencial debida a Stefanescu es:

$$U(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k_1 e^{-2\lambda h_1 n} J_0(\lambda_1 r) d\lambda \right]$$

siendo:  $J_0(\lambda_1 r)$ : Función de Bessel de primera especie y orden cero  $K_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ ;

$\rho_1$  la resistividad del primer terreno;  $\rho_2$  la resistividad del segundo;  $h$  la distancia, en la superficie, a la fuente de corriente;  $n$  un número entero;  $\lambda$  una constante;  $I$  la intensidad de corriente;  $h_1$  el espesor del primer terreno.

De acuerdo a la transformación de Weber - Lipchitz:

$$2 \int_0^{\infty} k_1^n e^{-2\lambda h_1 n} J_0(\lambda_1 r) d\lambda = \frac{2k_1^n}{\sqrt{r^2 + (2nh_1)^2}}$$

se transforma en un desarrollo Hummel:

$$U = \frac{\rho_1 I}{2\pi r} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{1 + (2n\frac{h_1}{r})^2}} \right]$$

que para el sistema Wenner (cuadripolo equiespaciado,  $r = a$ ) será:

$$U_{M, N} = \frac{\rho_1 I}{2\pi a} \left[ 1 + 4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{1 + (2n\frac{h_1}{a})^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{4 + (2n\frac{h_1}{a})^2}} \right\} \right]$$

o bien:

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 1 + 4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{1 + (2n\frac{h_1}{a})^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{4 + (2n\frac{h_1}{a})^2}} \right\}$$

Empleando papel doble logarítmico se introduce una notable simplificación  $\rho_1 = 1$ ,  $h_1 = 1$ . Haciendo variar  $k$  de 0.05 en 0.05 desde  $-1$  a  $+1$ , y  $a$  desde 0.3 a 250 (ó  $\lambda = \frac{1}{a}$  desde 3.33 a 0.004), se construyeron 40 curvas maestras, mediante el trazado de 1000 puntos (25 por curva) en un gráfico bi-logarítmico similar al que emplea la Compagnie Générale de Géophysique (CGG) (módulo 62.5 mm.). Ver Figura N° 1. Se utilizó una computadora IBM 1130 (UNR).

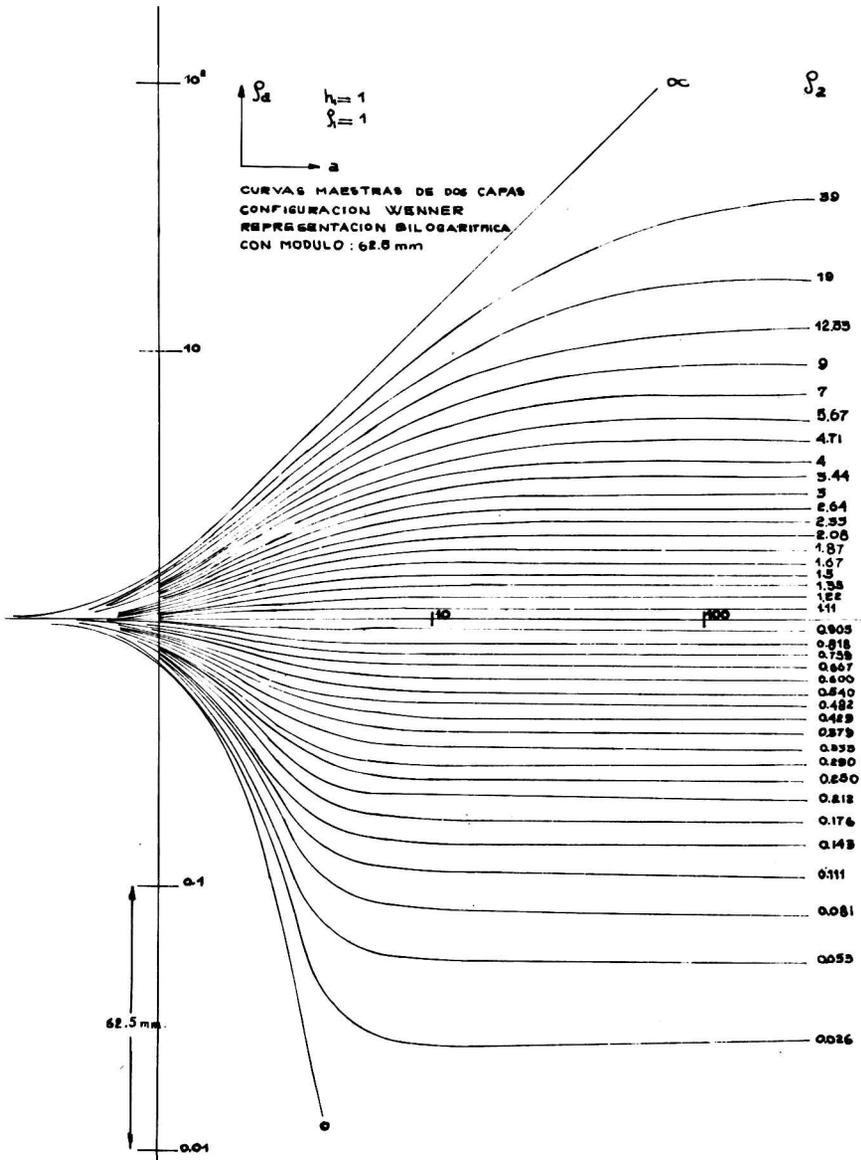


Figura 1

## CONSTRUCCION DE LOS DIAGRAMAS DE PUNTO AUXILIAR

El método se basa en reemplazar las dos primeras capas (ó  $n-1$  en general), por otra equivalente de resistividad media  $\rho_m$  y espesor reemplazante  $\lambda H$  con

$\lambda$ : coeficiente de pseudo-anisotropía.

Siendo:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{T}{S}} \quad ; \quad \lambda H = \sqrt{T \cdot S}$$

con T: resistencia transversal ( $\Omega \times m^2$ )  
S: conductancia longitudinal (mho)

Hay cuatro casos a considerar:

- a. Tipo mínimo (H)
- b. Tipo doble ascendente (A)
- c. Tipo doble descendente (Q)
- d. Tipo máximo (K)

a. Tipo mínimo (H)  $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$

Si  $\rho_3 \gg \rho_2$ , el sustrato es un aislante de buenas características, mientras el flujo de corriente es casi paralelo a la estratificación.

Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1,2} = S_1 + S_2 \\ H = h_1 + h_2 \end{array} \right. \quad ; \quad \rho_m = \frac{h_1 + h_2}{S_{1,2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 1 + \nu \\ Y = \frac{1 + \nu}{1 + \nu/\mu} \end{array} \right. \quad \text{con: } X = \frac{H}{h_1} \quad ; \quad \nu = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\quad \quad \quad \text{con: } Y = \frac{\rho_m}{\rho_1} \quad ; \quad \mu = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Las ecuaciones: X función de  $\nu$  e Y función de  $\nu$  y  $\mu$  son las ecuaciones paramétricas del gráfico auxiliar H (Hummel). Fig. 2a.

Se trabajó en base a las siguientes relaciones:

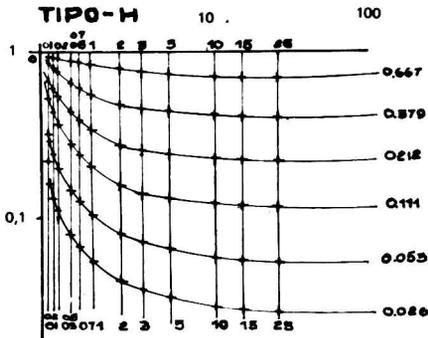
$$\mu = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,667, 0,429, 0,212, 0,111, 0,053, 0,026, 0.$$

Adoptando los siguientes valores de  $\nu$  (no sólo para H sino para los cuatro tipos mencionados):

$$\nu = \frac{h_2}{h_1} = \infty, 25, 15, 10, 5, 3, 2, 1, 0,7, 0,5, 0,3, 0,2, 0,1, 0.$$

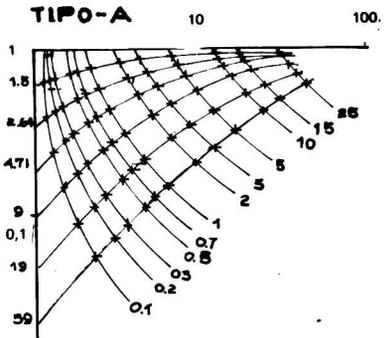
b. Tipo doble ascendente (A)  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

Dado que el segundo estrato es más resistivo que el primero, pero menor que el tercero (aislador), la ley de refracción del flujo de corriente indica que hay transmisión vertical y horizontal. Las dos primeras capas deben adaptarse entonces a circuitos serie y paralelo. En otras palabras, deben considerarse T y S.



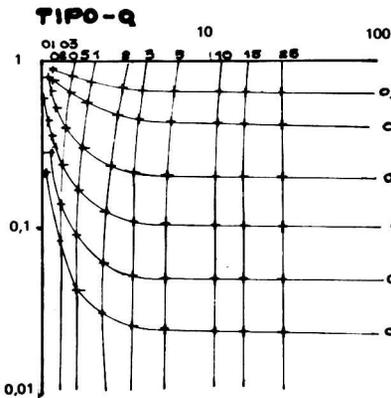
$$\begin{cases} S_{eq} = S_1 + S_2 \\ H = h_1 + h_2 \end{cases} \text{ O BIEN}$$

$$\begin{cases} X_H = 1 + \gamma & \text{CON } X_H = \frac{H}{h_1}; \gamma = \frac{h_2}{h_1} \\ Y_H = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma/\mu} & \text{CON } \mu = \frac{f_2}{f_1}; \gamma = \frac{f_2}{f_1} \end{cases} \quad 2a$$

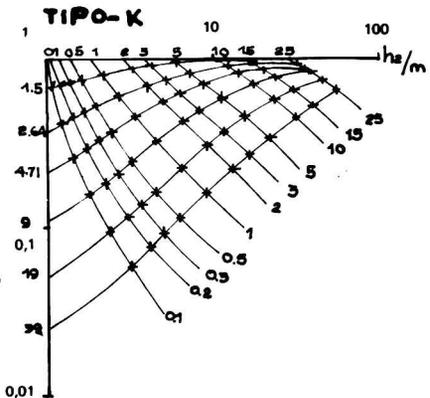


$$\begin{cases} \lambda H = \sqrt{T \cdot S} = \sqrt{(f_1 h_1 + f_2 h_2) \left( \frac{h_1}{f_1} + \frac{h_2}{f_2} \right)} \\ f_m = \sqrt{T/S} = \sqrt{\frac{f_1 h_1 + f_2 h_2}{h_1/f_1 + h_2/f_2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A = \sqrt{\frac{1 + \mu \gamma}{1 + \gamma/\mu}} \\ X_A = \sqrt{(1 + \mu \gamma)(1 + \gamma/\mu)} \end{cases} \quad 2b$$



$$\begin{cases} X_{HQ} = \frac{1}{X} (1 + \gamma) \\ Y_{HQ} = \frac{1}{X} \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma/\mu} \right) \end{cases} \quad 2c$$



$$\begin{cases} Y_{AK} = \sqrt{\frac{1 + \mu \gamma}{1 + \gamma/\mu}} \\ X_{AK} = \sqrt{(1 + \mu \gamma)(1 + \gamma/\mu)} \end{cases} \quad 2d$$

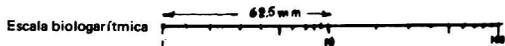


Figura 2

Las ecuaciones de partida son:

$$\lambda H = \sqrt{T.S} = \sqrt{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \left( \frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h_2}{\rho_2} \right)}$$

$$\rho_m = \sqrt{\frac{T}{S}} = \sqrt{\frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1/\rho_1 + h_2/\rho_2}}$$

dividiendo la primera ecuación por  $h_1$  y la segunda por  $\rho_1$  se tendrá:

$$Y_A = \sqrt{\frac{1 + \mu\nu}{1 + \nu/\mu}}$$

$$X_A = \sqrt{(1 + \mu\nu)(1 + \nu/\mu)}$$

Así se construyó un gráfico A (anisotrofa) (Fig. 2 b) para valores de  $\rho_2 > \rho_1$  concordantes con la graduación del gráfico de dos capas. Siendo los

valores de  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \mu$ :

1.5, 2.64, 4.71, 9, 19, 39,  $\infty$ .

c. Tipo doble descendente (Q)  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$

Las dos primeras capas mantienen la relación del tipo H, pero el sustrato funciona evidentemente como medio conductor. Por tanto se ha encontrado que deben utilizarse las expresiones de H afectadas de coeficientes empíricos (H se desplaza en forma decreciente a lo largo de una recta de pendiente = 45°).

$$X_{HD} = \frac{1}{X} (1 + \nu)$$

$$Y_{HD} = \frac{1}{X} \left( \frac{1 + \nu}{1 + \nu/\mu} \right)$$

con HD: punto H desplazado.

Finalmente se obtuvo un gráfico auxiliar como el de la Fig. 2 c.

Se trabajó con los siguientes valores de  $\mu$ :

0.667, 0.429, 0.212, 0.111, 0.053, 0.026, 0.

d. Tipo máximo (K)  $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$

Las dos primeras capas mantienen la relación del tipo A, mientras el sustrato se torna conductor con referencia a  $\rho_2$ . Básicamente utilizan las relaciones A pero afectando a X, y sólo a X, de coeficientes empíricos para un mejor ajuste.

(A se deslaza hacia valores crecientes a lo largo de las abscisas).

$$Y_{AD} = \sqrt{\frac{1 + \mu\nu}{1 + \nu/\mu}}$$

$$X_{AD} = \epsilon \sqrt{(1 + \mu\nu)(1 + \nu/\mu)}$$

AD: punto A desplazado.

Finalmente se obtuvo el gráfico auxiliar de Fig. 2 d en base a los valores

$$\mu = 1.5, 2.64, 4.71, 9, 19, 39, \infty.$$

Los cuatro diagramas de punto auxiliar fueron graficados sobre papel log-log de módulo 62,5 mm.

## FUNDAMENTOS DEL METODO GRAFICO PROPUESTO PARA CONSTRUIR CURVAS DE TRES TERRENOS

Analizando el catálogo de curvas maestras de dos capas, surge casi intuitivamente la posibilidad de combinar gráficamente las curvas entre sí de modo de formar los cuatro grupos posibles para la familia de curvas de tres capas. Así se tiene:

Tipo máximo (K): Combinando la familia  $\rho_2 > \rho_1$  con el grupo  $\rho_2 < \rho_1$ .

Tipo mínimo (H): Combinando el grupo  $\rho_2 < \rho_1$  con el grupo  $\rho_2 > \rho_1$ .

Tipo doble ascendente (A): Combinando el grupo  $\rho_2 > \rho_1$  entre sí.

Tipo doble descendente (Q): Combinando la familia  $\rho_2 < \rho_1$  entre sí.

El problema presenta, no obstante, una dificultad: la ubicación de la rama derecha. La rama izquierda se traza teniendo como guía a la curva  $\rho_2$  del catálogo de 2 capas que corresponde a la resistividad intermedia de la curva de 3 capas en construcción.

El problema substancial es la ubicación de la rama derecha. En el procedimiento propuesto, la última rama se coloca en relación a la segunda cruz (o segundo origen) definida mediante diagramas de punto auxiliar.

## CONSTRUCCION

La construcción de curvas de tres terrenos se basa en los siguientes pasos:

Sobre un papel transparente se trazan, en general, dos asíntotas horizontales con los valores  $\rho_2$  y  $\rho_3$  para encuadrar las curvas a construir; salvo cuando  $\rho_3 = \infty$  (pend. 45°) o cuando  $\rho_3 = 0$  (vertical).

Se calca en el transparente la primera rama mediante el gráfico de curvas de dos capas correspondiente a  $\rho_2$ , haciendo coincidir los orígenes  $h_1 = 1, \rho_1 = 1$ .

- Se busca en el gráfico auxiliar correspondiente la segunda cruz (intersección de  $(\frac{\rho_2}{\rho_1})_i$  y  $(\frac{h_2}{h_1})_i$  y se marca en el transparente. Se han reemplazado así las dos primeras capas (rama izquierda) por otra equivalente cuyos parámetros son  $\rho_m$  y  $\lambda H$ .

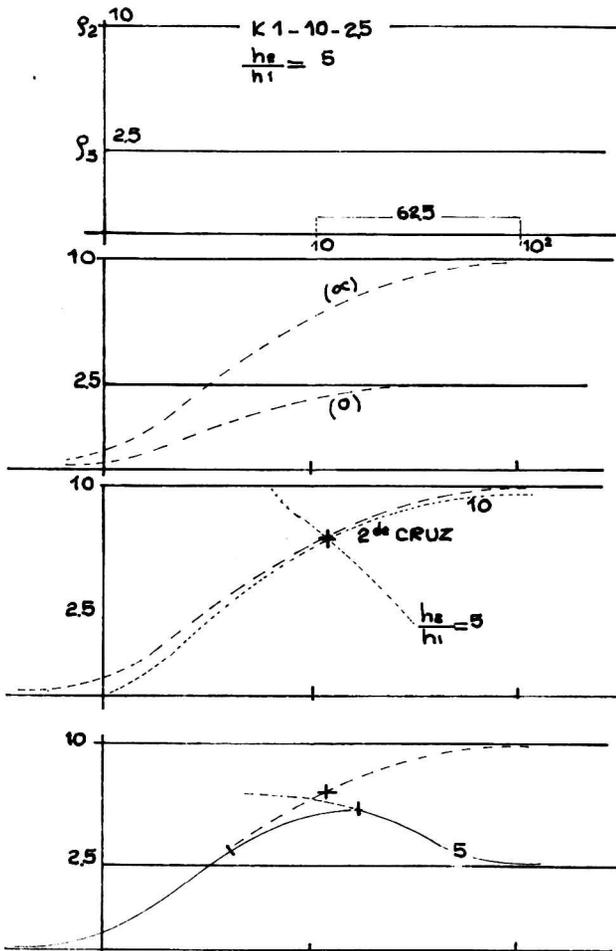


Figura 3

- Se coloca la segunda cruz en el origen del gráfico de curvas maestras de dos capas, y se traza la rama derecha buscando la coincidencia asintótica con la horizontal  $\rho_3$ , o identificándose con una alineación vertical ( $\rho_3 = 0$ ) o de pendiente  $45^\circ$  ( $\rho_3 = \infty$ ).
- Normalmente hay una pequeña indeterminación intermedia que se salva, en general, fácilmente mediante suavización gráfica.

Nótese que las curvas extremas o envolventes de tres capas se correspon-

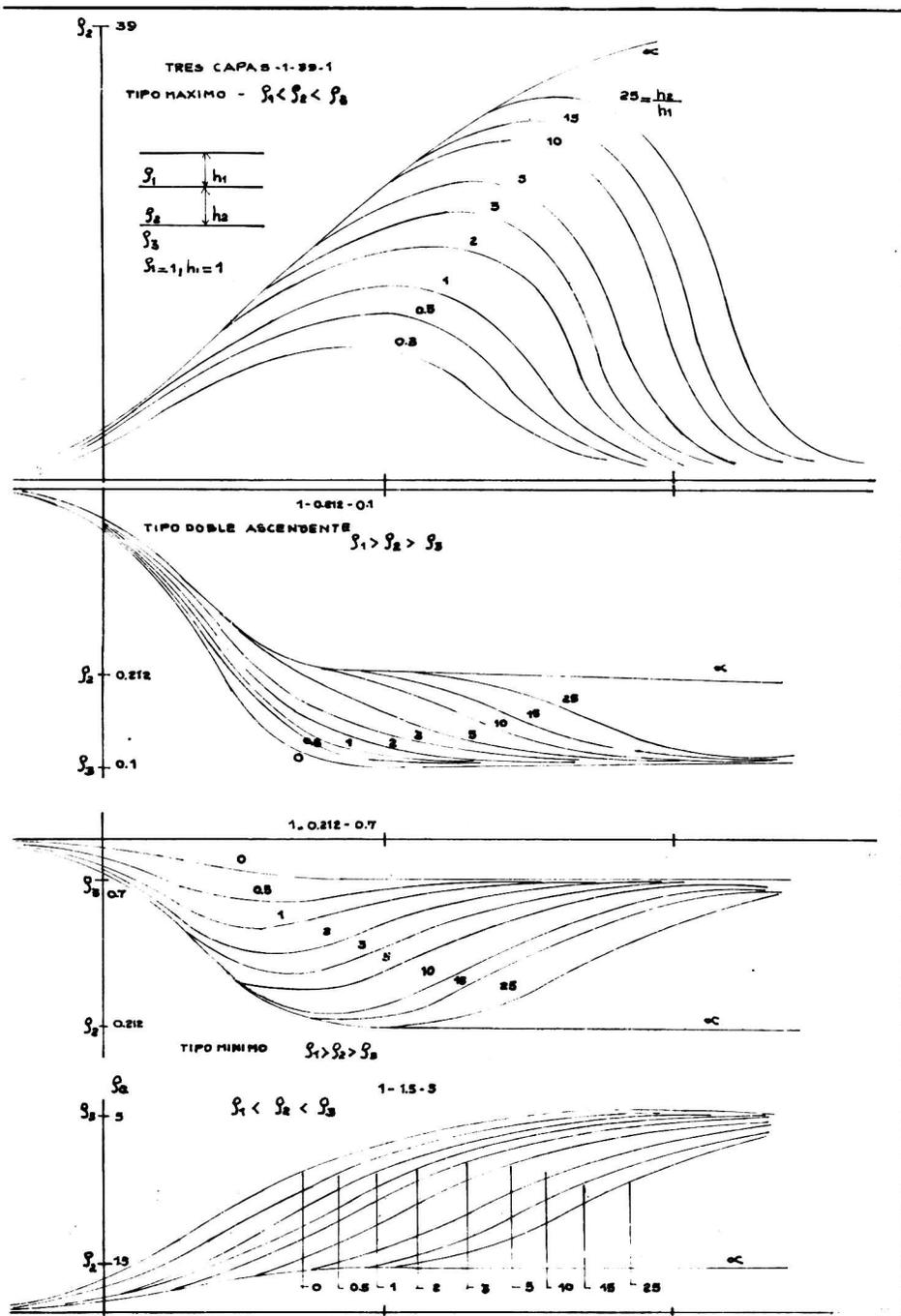


Figura 4

den con curvas de dos terrenos. En efecto:

Si  $\frac{h_2}{h_1} = 0$ ;  $\rho_1 - \rho_2 - \rho_3$  equivale a  $\frac{\rho_1}{g} - \rho_3$ ; por tanto la curva de tres capas corresponde a la curva de dos capas  $\rho_1 - (\rho_2 = \rho_3)$

Si  $\frac{h_2}{h_1} \rightarrow \infty$ ;  $\rho_1 - \rho_2 - \rho_3$  equivale a  $\rho_1 - \rho_2$  de dos capas.

La figura 3 ilustra el procedimiento seguido paso a paso para el modelo K 1 - 10 - 2.5;  $h_2/h_1 = 5$ . En la Fig. 4 pueden verse ejemplos de los cuatro tipos de tres capas construidos por el método propuesto. Se prepararon en total más de 600 curvas maestras de tres terrenos.

#### CONDICIONES DE MAXIMA APROXIMACION. DISCREPANCIAS

La testificación previa se realizó en base al catálogo de Orellana-Mooney de 1966. Se advirtió que el procedimiento alcanza máxima aproximación para valores de  $h_2/h_1$  grandes (25, 15, 10, 5 . . .). En estos casos, extensas porciones de las dos ramas concuerdan perfectamente con las curvas de dos capas elegidas. Por el contrario, para valores de  $h_2/h_1$  pequeños hay una zona de mayor incertidumbre, dado que la rama izquierda de tres capas se despega claramente de la primera rama de dos capas.

Es interesante señalar que el principio de equivalencia provoca, cualquiera sea el procedimiento de construcción de curvas maestras, una indeterminación. Por ejemplo las curvas maestras:

$$K \ 1 - 5 - 1 \quad ; \quad \frac{h_2}{h_1} = 0.2$$

$$K \ 1 - 10 - 1 \quad ; \quad \frac{h_2}{h_1} = 0.1$$

son prácticamente coincidentes y presentan la misma resistencia transversa  $T_2$  ( $5 \times 0.2 = 10 \times 0.1$ ) que gobierna los casos K del ejemplo. Para deducir  $\rho_2$  es necesario disponer de datos adicionales (perforaciones, afloramientos). Es de destacar que el principio de equivalencia proporciona un medio de ampliar la construcción de curvas maestras.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el clásico método de punto auxiliar

sugerido al parecer por primera vez por Evert (1943) fue concebido para el dispositivo Schlumberger (los coeficientes empíricos corresponden a este dispositivo); al aplicarlo al sistema Wenner pierde algo de precisión (Zohdy, Orellana, etc.).

## CONCLUSIONES

El procedimiento propuesto ha demostrado ser una excelente aproximación gráfica que tiene la ventaja de posibilitar la construcción de extensas familias de curvas de tres capas dando lugar a innumerables combinaciones realizadas con gran rapidez y economía. Precisamente en ello radica la ventaja del método.

Demostradas las incuestionables ventajas del dispositivo Schlumberger sobre el Wenner, la mayoría de los catálogos (C.G.G., Orellana-Mooney, . . .) han sido preparados para aquel dispositivo. Sin embargo en nuestro país, y para penetraciones no demasiado grandes, se sigue utilizando el método Wenner por sus menores exigencias instrumentales; por lo cual este método gráfico puede resultar de utilidad siempre que se lo utilice teniendo en cuenta su carácter aproximado.

## BIBLIOGRAFIA

- GRANT, F.S. and WEST, G.F. (1965):** *"Interpretation Theory in Applied Geophysics"*. McGraw-Hill. New York.
- INTROCASO, Antonio (1970):** *"El método geoelectrico de resistividad y su aplicación al estudio de aguas subterráneas"*. Depto. de Graduados de la Facultad de Ciencias e Ingeniería. Universidad Nacional de Rosario.
- KUNETZ, Geza (1966):** *"Principles of Direct Current – Resistivity Prospecting"*. Gebrüder Borntraeger. Berlín.
- LASFARGUES, Pierre et Cie. (1957):** *"Prospection Electrique par Courants Con-*

*tinus". Masson et Cie. París.*

**ORELLANA, E. (1963):** "Properties and drawing of the so-called Dark Zarrouk curves". *Revista Geophys. V. 28, n. 1, February, pp. 99-110.*

**ZOHDY ADEL, A.R. (1965):** "The Auxiliary Point Method of Electrical Sounding. Interpretation, and its Relationship to the Dar Zarrouk Parameters". *Revista Geophys. V. 30, n. 4, August, pp.644-660.*