

COMPORTAMIENTO DINAMICO DEL CINTURON DE ASTEROIDES

LOPEZ GARCIA, Francisco D.

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan
San Juan, Argentina

Resumen. El movimiento de los asteroides en su órbita es, en general, estable, en el sentido que los semi-ejes mayores no varían en forma irregular con el tiempo. Sin embargo, existen varios casos de excepción en los cuales los elementos elípticos de las órbitas varían en forma muy irregular.

Uno de los progresos más interesantes de la Mecánica Celeste en la última década fue el descubrimiento del movimiento caótico en la resonancia 3:1 con Júpiter, en el cinturón principal de asteroides. Históricamente, después que Kirkwood (1867) descubriera las lagunas (ó vacíos) en la distribución de asteroides, varios autores han tratado de explicar, analítica y numéricamente, la no-existencia de asteroides en algunas regiones de resonancia. Se exponen los últimos resultados del estudio de la estructura dinámica del cinturón de asteroides.

Abstract. The orbital motion of asteroids is, in general, stable, in the sense that the semi-major axes do not change in irregular form with the time. However, there are some cases in which the orbit's elliptical elements vary in irregular form. This paper is a "review" of the progress in Celestial Mechanic in the last two decades for explaining the dynamical structure of the main belt asteroids, specially the existence of Kirkwood gaps which are related with the mean motion resonance. Different attempts to explain the formation of these gaps and of the isolated groups are discussed.

(1) Discurso Invitado, presentado en la XXXVIII Reunión de la Asociación Argentina de Astronomía, Buenos Aires, setiembre 1993.

1. INTRODUCCION

Desde hace más de un siglo se sabe que la distribución de asteroides, pequeños cuerpos del Sistema Solar que giran alrededor del Sol en órbitas casi circulares o elípticas, **no es uniforme**. La mayoría de estos pequeños planetas se encuentra en una zona comprendida entre las órbitas de Marte y Júpiter. El estudio y la interpretación de la estructura dinámica del cinturón principal de asteroides ha sido y es un desafío para la Mecánica Celeste. Este problema se origina a partir del descubrimiento de los vacíos (ó lagunas) de Kirkwood. Los vacíos han sido observados en diferentes resonancias con Júpiter; se define la resonancia como la relación de las frecuencias de sus movimientos con una razón de la forma: $(p+q)/p$, siendo p y q números enteros y pequeños. Por ejemplo, los famosos vacíos de Kirkwood han sido observados en las resonancias 3:1, 5:2 y 7:3. Una explicación completa de este fenómeno es todavía un problema insoluble, aunque en las últimas dos décadas se han realizado muchos y satisfactorios progresos. Los vacíos de Kirkwood y otras lagunas observadas son posibles de identificar pues sus posiciones en una distribución real de asteroides son conocidas (ver Fig. 1.), sin embargo, continua siendo un enigma comprender la estructura dinámica del cinturón de asteroides. La mayoría de los astrónomos e investigadores creen que estas lagunas se deben a procesos físicos de inestabilidad mas que a razones cosmológicas relacionadas con la formación del Sistema Solar. El comportamiento dinámico del Sistema Solar es muy complejo, pues está representado por un sistema dinámico no-integrable, con muchos grados de libertad; este comportamiento no permite un estudio completo, ya sea analítico ó numérico, de la evolución de la órbita de un asteroide para un intervalo de tiempo muy grande.

Una excelente revisión sobre el estudio de las resonancias en el cinturón de asteroides fue realizado por Greenberg y Scholl (1979), quienes efectuaron un análisis completo del problema. Distintos argumentos han sido propuestos para explicar la existencia de los vacíos observados, los cuales continúan siendo una incógnita. Diferentes hipótesis han sido desarrolladas, a saber:

- i) una aproximación estadística.
- ii) una teoría puramente gravitacional.
- iii) la hipótesis colisional.
- iv) una hipótesis cosmogónica.
- v) "the primeval sweeping".

Distribucion de asteroides. Distancia desde el Sol Vs. No. de asteroides.

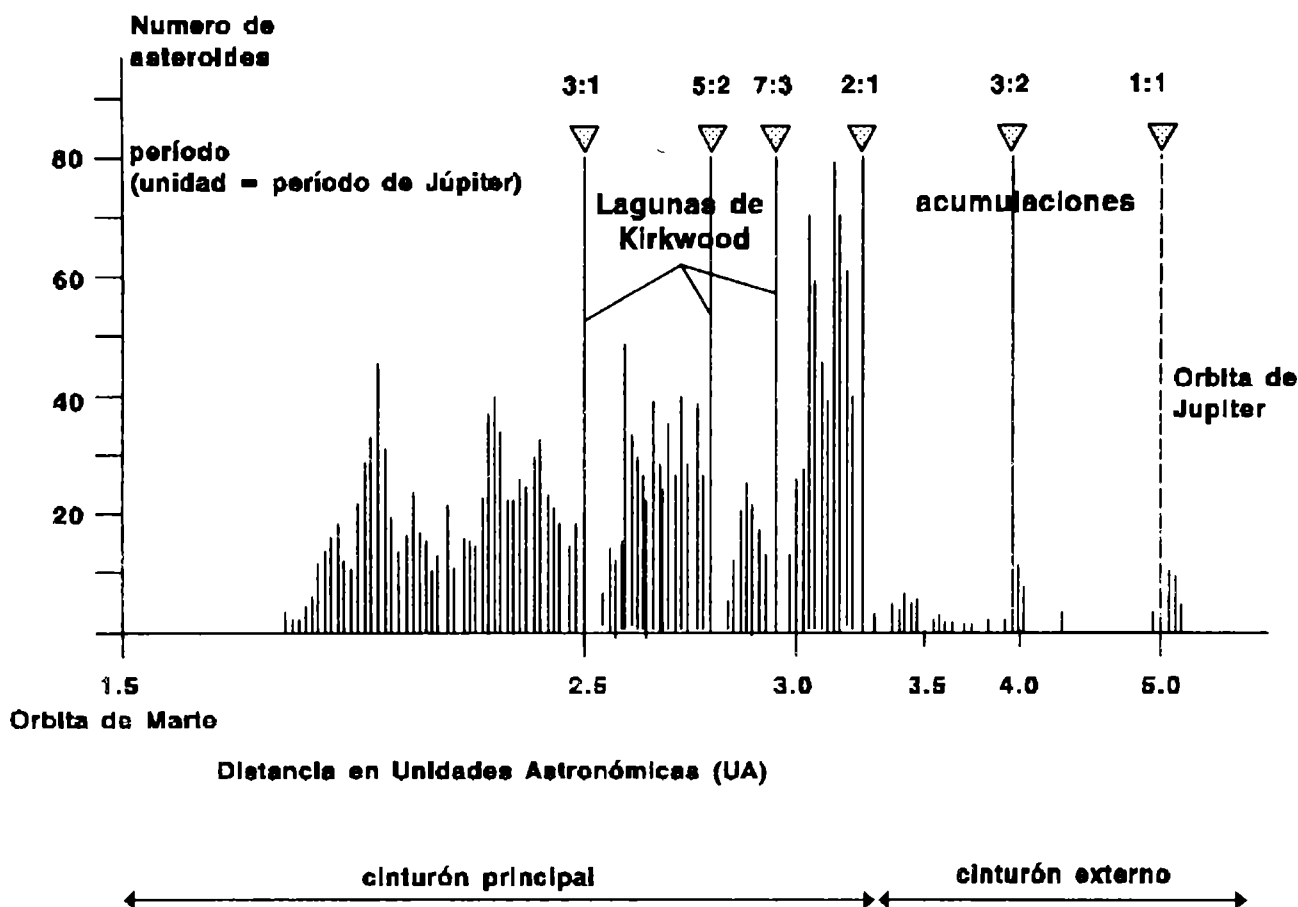


Fig. 1. El período de revolución de un asteroide (como el de todos los cuerpos celestes) alrededor del Sol esta relacionado con el radio de su órbita. Un enigma que plantean los asteroides proviene de la distribución de sus distancias al Sol. Al representar el número de asteroides en función del semi-eje mayor a , la distribución no es uniforme y presenta lagunas, familias, acumulaciones. Cada flecha indica la posición de las resonancias.

La hipótesis estadística supone que los asteroides libran alrededor de los vacíos y por tanto rara vez parecen cruzar la resonancia exacta. La hipótesis gravitacional supone que los asteroides que originalmente se formaron en los vacíos de Kirkwood fueron posteriormente removidos por fuerzas puramente gravitacionales debidas a la acción de Júpiter. De acuerdo a la hipótesis colisional, los asteroides son removidos a partir de los vacíos, ya sea por destrucción o cambios en sus movimientos medios, este proceso se realizaría por colisiones con asteroides vecinos. Finalmente, la hipótesis cosmogónica supone que los vacíos representan regiones donde los asteroides dejaron de formarse durante la formación inicial del Sistema Solar.

Posteriores revisiones de Froeschlé y Scholl (1983) y de Scholl (1985), actualizaron la anterior. Los reviews de Wisdom (1987) y de Froeschlé (1987) se concentraron en la dinámica de caos. De las cuatro hipótesis previamente formuladas para explicar la existencia de los vacíos de Kirkwood, la hipótesis gravitacional, basada en el problema restringido de tres cuerpos Sol-asteroide-Júpiter, ha demostrado ser la más adecuada gracias a los recientes avances teóricos.

Es evidente que las características de la estructura dinámica del cinturón de asteroides están relacionadas con el origen y evolución del Sistema Solar. Como el fenómeno de **resonancia** representa uno de los rasgos más destacados de los asteroides, su evidencia física está puesta de manifiesto en los siguientes hechos observacionales:

- i) Los vacíos de Kirkwood.
- ii) El grupo aislado de Hilda.
- iii) La órbita del asteroide Thule.
- iv) La órbita de los Troyanos.

El planteo físico

Por todas las razones expuestas, es que se utilizan modelos simplificados para el estudio de las órbitas de los asteroides. En la mayoría de los modelos se considera que la única fuerza que actúa sobre el asteroide es la atracción gravitacional de Júpiter, además de la fuerza gravitatoria ejercida por el Sol. Por otra parte, como la masa del asteroide es despreciable, el modelo descrito corresponde al problema restringido de tres-cuerpos circular ó elíptico (Szebehely, 1967), donde el efecto que ejerce la masa de Júpiter es considerado como una perturbación. Otros modelos, algo más complejos, incluyen la masa de Saturno ó de Marte, según la resonancia que se estudie. Como los vacíos en la distribución espacial de asteroides, están relacionados con los **movimientos medios resonantes**, es interesante describir este proceso físico.

La frecuencia de revolución de Júpiter girando alrededor del Sol determina la frecuencia resonante del sistema: Sol-asteroide-Júpiter. Un movimiento medio resonante se produce si la frecuencia de revolución ó su equivalente, el movimiento medio (n) de un asteroide es un cociente racional del movimiento medio de Júpiter (n_j), i.e., están relacionados por la expresión:

$$\frac{n}{n_j} = \frac{p+q}{p}$$

donde p y q son enteros pequeños.

El interés en estudiar los movimientos en resonancias esta motivado por razones teóricas y evidencias observacionales. Desde el punto de vista teórico es muy interesante, pues el movimiento medio resonante incluye los siguientes temas:

Puntos Homoclínicos,
 Separatrices,
 Movimientos integrables y ergódicos,
 Movimiento caótico,
 Orbitas periódicas estables y no-estables.

La aplicación de los métodos de perturbaciones standard presenta dificultades debido a la presencia de pequeños denominadores en los desarrollos en series de la función perturbadora, esto dió origen a la creación de métodos particulares para estudiar la dinámica del movimiento medio resonante. Por otra parte, las evidencias observacionales sugieren relacionar las resonancias en el cinturón de asteroides con su evolución dinámica y su origen cósmogónico. La ubicación de estas resonancias coincide con los vacíos en la distribución de asteroides. Las lagunas mas importantes, llamadas vacíos de Kirkwood, están ubicadas en los movimientos medios con las siguientes razones:

$$\frac{n}{n_j} = \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{2}{1}$$

estas razones corresponden a una distancia desde el Sol de:

2.500, 2.824, 2.957 y 3.277 U.A.

Es obvio, en este planteo, que la formación de las lagunas con movimientos medios resonantes es debida principalmente a efectos puramente gravitacionales, sin embargo, no hay una teoría generalmente aceptada para explicar la formación de estos vacíos, entonces se nos presenta el siguiente interrogante:

Es necesario aplicar un mecanismo adicional, al puramente gravitacional, a fin de explicar la formación de estos vacíos ?

Por supuesto estos mecanismos serían no-gravitacionales. Además de este hecho, en el movimiento medio resonante puede ocurrir un efecto opuesto, dando lugar a la formación de grupos de asteroides ubicados exactamente en la posición de una resonancia (3:2, 1:1), llamados grupos aislados de asteroides (ver Fig. 2), es decir, estos grupos forman aglomeraciones de asteroides con movimientos medios resonantes, ellos son:

El grupo de (153) Hilda: $\frac{n}{n_j} = \frac{3}{2}$, $a = 3.977$ U.A.

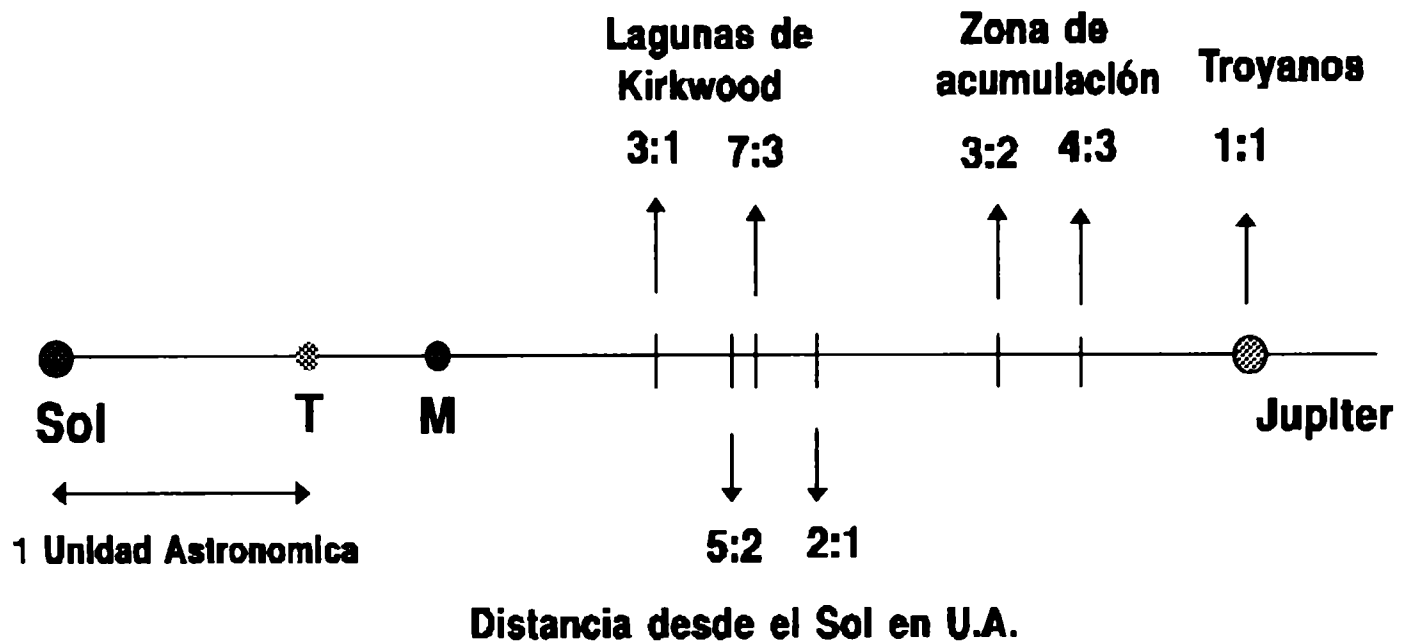
279 Thule: $\frac{n}{n_j} = \frac{4}{3}$, $a = 4.273$ U.A.

Los Troyanos: $\frac{n}{n_j} = \frac{1}{1}$, $a = 5.20$ U.A.

En resumen, los movimientos medios resonantes parecen representar una paradoja.

En algunas resonancias como en la 5:2 ($a = 2.824$ U.A.), las órbitas parecen ser no-estables, mientras que en otras resonancias como en la 3:2 ($a = 3.97$ U.A.), las órbitas son estables debido al movimiento en resonancia.

Distribucion de los movimientos medios resonantes en funcion de la distancia al Sol.



1 U.A. = 150 millones de Km.

Fig.2:

2. DESCRIPCION DEL MOVIMIENTO MEDIO RESONANTE

El movimiento medio resonante puede ser descrito fácilmente en forma geométrica. La Fig. 3, muestra una conjunción entre el Sol (S), el asteroide (A) y Júpiter (J), i.e., los tres cuerpos están alineados. $\bar{\omega}$ representa la longitud del perihelio de la órbita del asteroide. La conjunción ocurre en el ángulo Λ medido desde el eje-X de un sistema de coordenadas definido convenientemente. En el caso de un movimiento medio resonante la conjunción se repite cerca ó muy próximo al mismo ángulo Λ después de unas pocas revoluciones del asteroide alrededor del Sol. Por ejemplo, para la resonancia 3:1, las conjunciones se repiten después de 3 revoluciones del asteroide y una revolución de Júpiter alrededor del Sol. La Fig. 4, representa geoméricamente la relación entre los períodos para la resonancia 2:1.

Si la configuración geométrica se repite durante un tiempo se obtiene como resultado un incremento de las perturbaciones ejercidas por Júpiter sobre el asteroide. Por ejemplo, Júpiter puede hacer variar el vector momento angular de la órbita del asteroide aumentando su módulo y

cambiando la dirección del vector. Para una descripción física del fenómeno de resonancia ver Peale(1976) y Greenberg (1977).

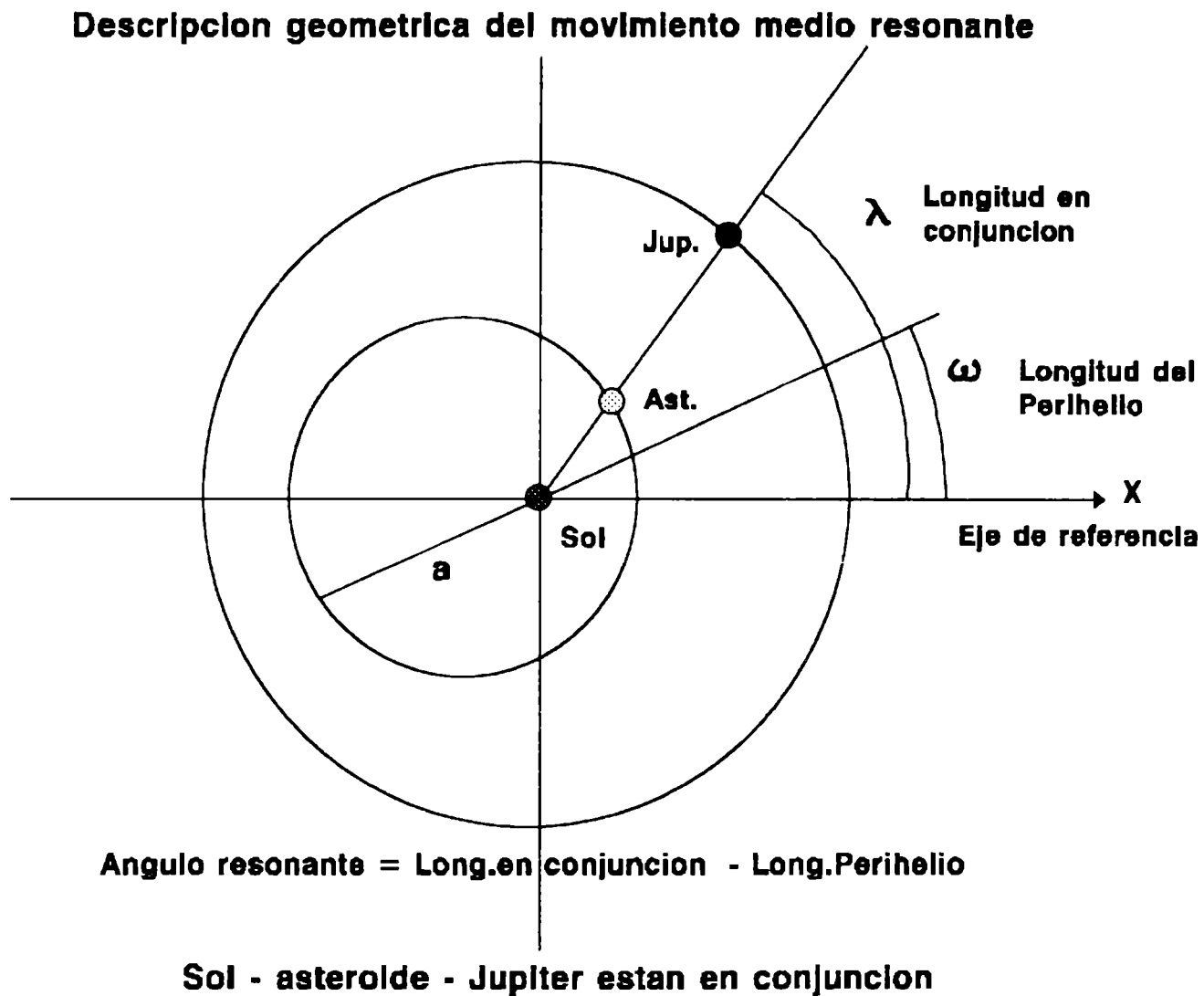


Fig.3. Descripción geométrica del movimiento medio resonante.

Es conveniente, en los estudios analíticos, introducir la variable resonante σ , definida por la relación:

$$\sigma = \Lambda - \varpi$$

La variable σ describe la posición angular de una conjunción con respecto a la longitud del perihelio del asteroide. Para $\sigma = 0^\circ$ la conjunción se produce en el perihelio del asteroide, esta posición es muy favorable para la estabilidad de la órbita. Por otra parte, si $\sigma = 180^\circ$, la conjunción ocurre en el afelio del asteroide, esta posición puede causar encuentros próximos con

Júpiter, en particular cuando las órbitas tienen poca inclinación ($i \approx 0^\circ$); estas conjunciones en afelio pueden desestabilizar la órbita del asteroide. En forma general, la variable resonante σ esta definida por la relación,

$$\sigma = -(\varpi + \frac{p}{q} \mu), \text{ donde } \mu = \lambda - \frac{(p+q)}{p} \lambda_j$$

siendo λ y λ_j las longitudes medias del asteroide y de Júpiter. La longitud media $\lambda = M + \varpi = n(t - T) + \Omega + \omega$,

ó en su forma mas conocida

$$\sigma = \frac{(p+q)}{q} \lambda_j - \frac{p}{q} \lambda - \varpi,$$

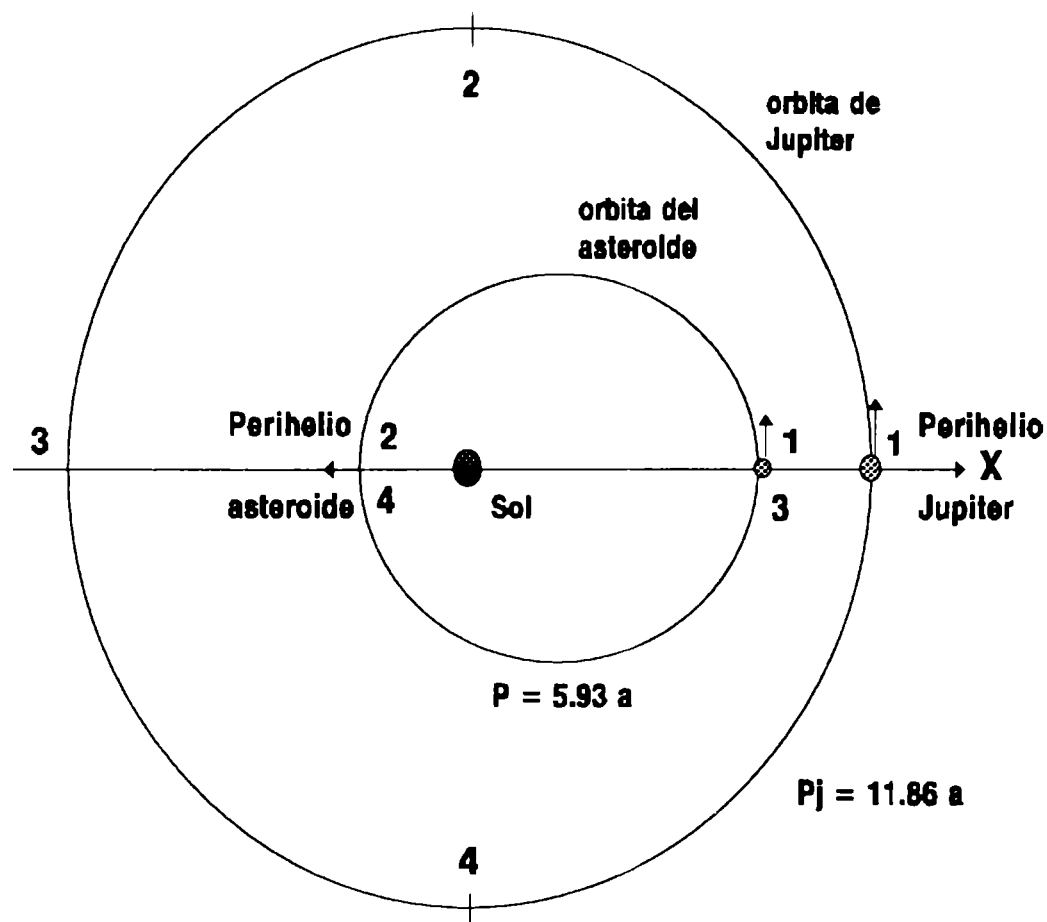
donde la razón $\frac{(p+q)}{p}$ define la resonancia. Por ejemplo, la resonancia 3:2 esta dada por $p = 2$

y $q = 1$. El valor de q indica el orden de la resonancia, en este caso, $q = 1$, la resonancia es de primer-orden.

Como σ es un parámetro que varia lentamente con el tiempo en un movimiento resonante, parece natural usar a σ como variable en el estudio teórico de este tipo de movimiento. Poincaré (1902) demostró que σ es una variable canónica en el sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento resonante en el problema restringido plano para la resonancia 2:1. La Fig. 5, nos muestra la variación del parámetro resonante en el espacio σ vs. $\sqrt{2.S}$. La trayectoria corresponde a la conmensurabilidad 2:1. Se puede observar una fuerte libración respecto al centro de coordenadas. La topología de esta trayectoria corresponde al modelo de la media de Schubart. S esta definida por la relación:

$$S = \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2})$$

Relacion entre los periodos para la resonancia 2:1



Dos periodos de revolucion del asteroide alrededor del Sol corresponde a un periodo de Jupiter

Fig. 4. Se muestran las posiciones relativas que ocupan el asteroide y Júpiter para la resonancia 2:1, i.e., un período de Júpiter corresponde a dos períodos del asteroide en su órbita.

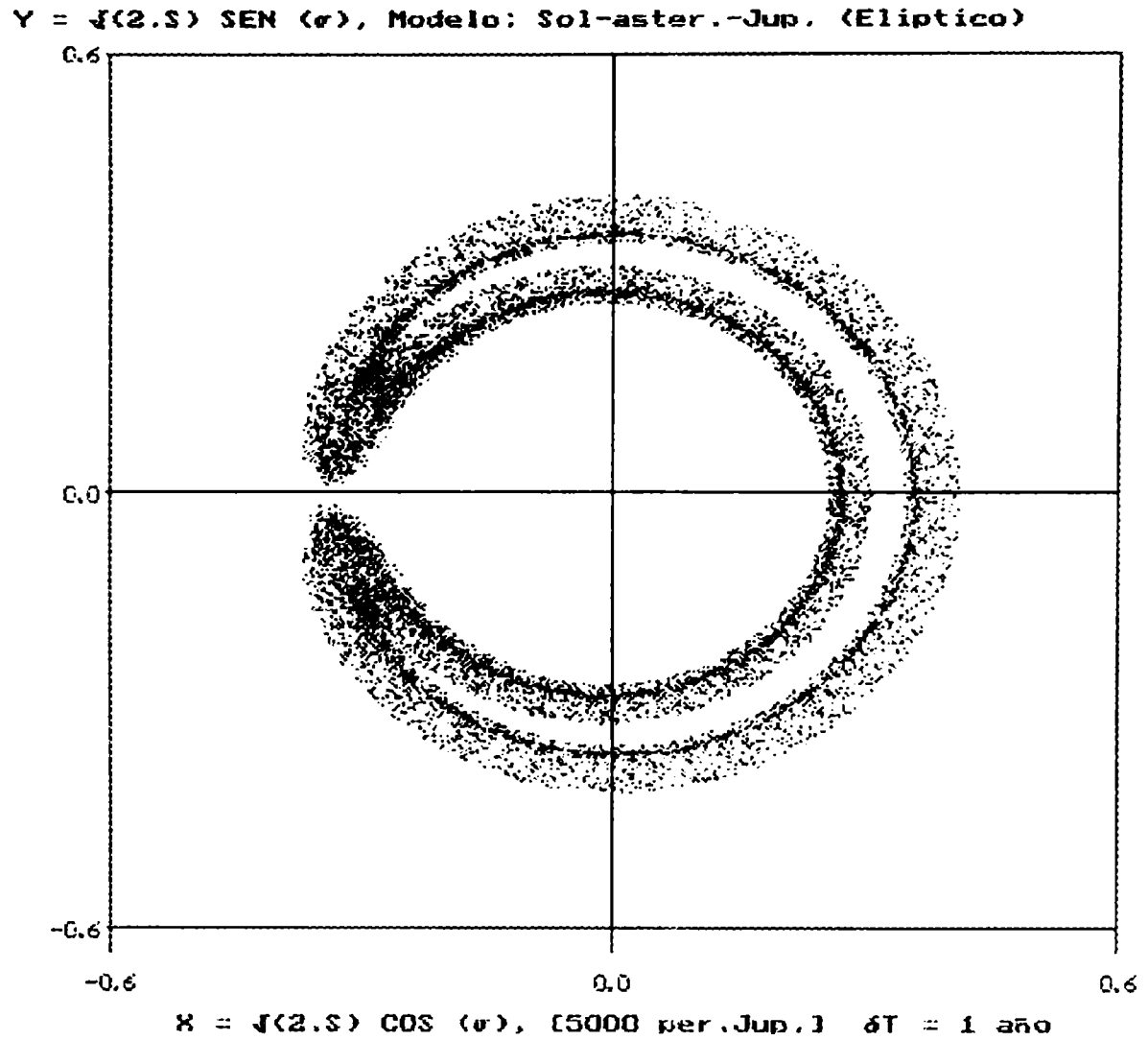


Fig. 5. Las oscilaciones alrededor del centro son libraciones. La amplitud de libración de σ y la variación de n puede ser muy grande, mientras que la variación de e puede ser relativamente pequeña. Se representa $X = \sqrt{2.S} \cos(\sigma)$ vs. $Y = \sqrt{2.S} \text{sen}(\sigma)$. Tiempo de integración: 5000 períodos de Júpiter $\Delta T = 1$ año.

Schubart (1978) usó una nueva variable resonante canónica, τ , para el problema no-plano, la cual mide la longitud de conjunción desde el nodo ascendente de la órbita del asteroide, al igual que σ , es una variable crítica que permite estudiar la estabilidad de la órbita.

3. LA ESTRUCTURA DE LOS VACIOS DE KIRKWOOD

La distribución de las excentricidades e y de las inclinaciones i de las órbitas de los asteroides próximos a las resonancias no coinciden con la misma distribución en el cinturón de asteroides. Este fenómeno observacional fue descubierto, recientemente, por Dermott y Murray (1983); en la Fig. 6, se representa la distribución de las excentricidades osculadoras de todos los asteroides con $2.35 \leq a \leq 2.65$ U.A., obtenidos del archivo TRIAD

Distribución de los elementos osculadores de asteroides con $2.35 \leq a \leq 2.65$ UA
Las líneas punteadas representan el ancho de la libración en la resonancia 3:1.

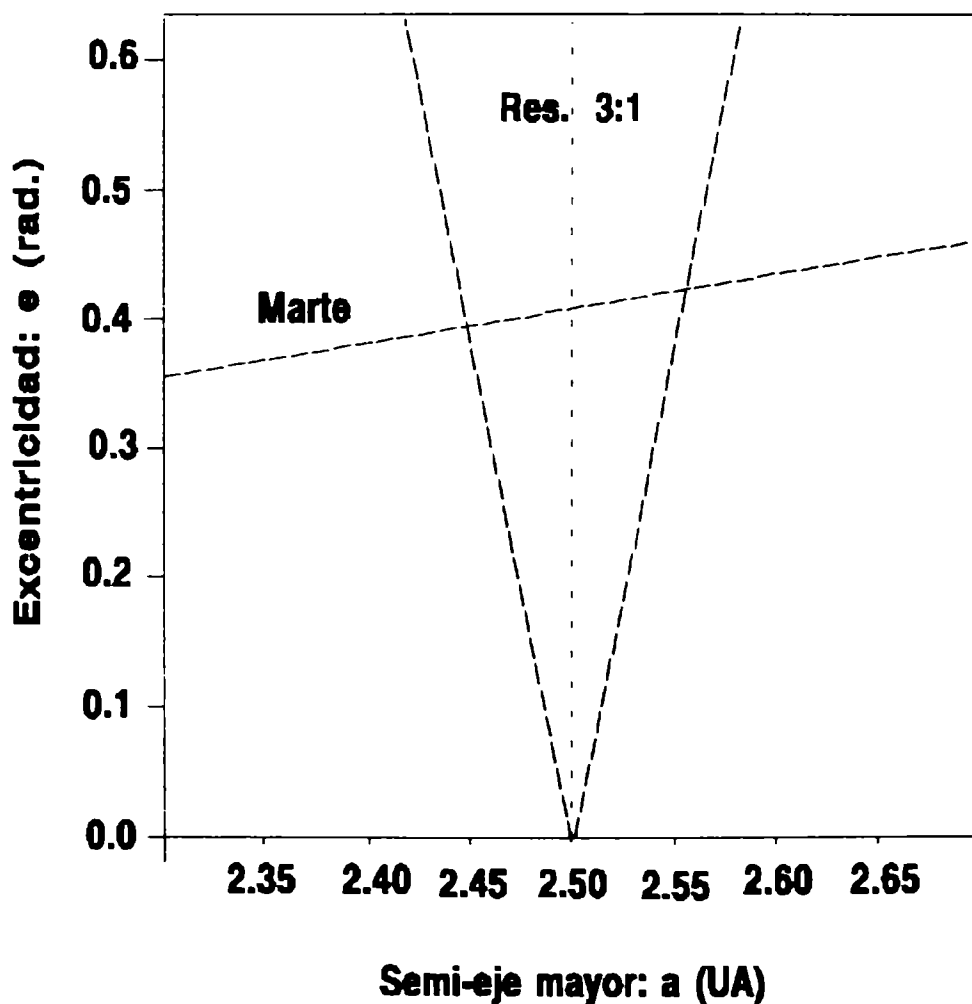


Fig. 6. Se muestra la distribución de los elementos orbitales a vs. e correspondiente a la resonancia 3:1, con una variación de $2.35 \leq a \leq 2.65$. La línea punteada representa el

ancho de la libración en la resonancia 3:1. Se grafica también la región de cruce de Marte. Este gráfico corresponde al modelo de Dermott y Murray (1983).

La línea punteada representa el ancho de la libración del movimiento resonante. Es evidente que las excentricidades aumentan al aumentar la distancia a partir de la posición del vacío 3:1, el cual corresponde a un valor de $a = 2.50$ U.A. Este mismo gráfico es válido para otros vacíos de Kirkwood así como también para las inclinaciones de las órbitas. Dermott y Murray(1923) concluyen que las lagunas de Kirkwood observadas deben haber sido formadas después que los asteroides se dispersaron de las proximidades del disco co-planar, en el cual ellos se acrecentaron (se formaron y aumentaron). Por último, también concluyen que la acción gravitatoria de Júpiter dio origen a la formación de los vacíos.

4. MODELOS ANALITICOS Y NUMERICOS PROPUESTOS PARA ESTUDIAR EL MOVIMIENTO MEDIO EN RESONANCIA

Para estudiar el movimiento medio resonante se han propuesto, en las últimas dos décadas, varios modelos; éstos están basados, en su mayor parte, en un tratamiento adecuado del Hamiltoniano H ó su equivalente la función perturbadora R , que interviene en las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento.

El Hamiltoniano H está representado por:

$$H = H(x_i, y_i, t) \quad (1)$$

donde,

$x_i \Rightarrow$ coordenadas generalizadas,

$y_i \Rightarrow$ momentos conjugados,

$t \Rightarrow$ tiempo.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (3)$$

formando un sistema que se conoce con el nombre de **ecuaciones canónicas de Hamilton**, el cual constituye un sistema de $2n + 1$ ecuaciones de primer-orden, siendo n el grado de libertad del sistema dinámico. L es la función de **Lagrange** definida como

$$L = T - V$$

siendo T la energía cinética y V la potencial.

Por otra parte, la función perturbadora R tiene la expresión, en coordenadas rectangulares,

$$R = G m' \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r r'}{r^3} \right] \quad (4)$$

donde,

G es la constante universal de la gravitación

m' es la masa del planeta perturbador

$$\Delta = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2}$$

$$r \cdot r' = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$$

$$r'^3 = [x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}$$

siendo,

$\{x, y, z\}$ las coordenadas heliocéntricas del asteroide.

$\{x', y', z'\}$ las coordenadas heliocéntricas del planeta perturbador.

Luego, las ecuaciones del movimiento del asteroide respecto al Sol, son:

$$\frac{dx}{dt} = \text{mov. Kepleriano} + \frac{\partial R}{\partial x} \quad (5)$$

y ecuaciones similares para las variables y, z .

Las ecuaciones del movimiento de un asteroide forman un sistema no-integrable, Ec.(5), aún en el problema restringido de tres-cuerpos. Distintas y variadas aproximaciones se

han usado para representar la solución de las ecuaciones canónicas (2)-(3) ó de las ecuaciones heliocéntricas (5). Estas aproximaciones consisten en un tratamiento apropiado del Hamiltoniano H ó de la función perturbadora R .

La función perturbadora R puede ser desarrollada en una serie trigonométrica de Fourier, ver Brouwer y Clemence (1961); en el caso del problema restringido R admite un desarrollo de Fourier en función de los argumentos: $\lambda, \lambda_j, \varpi, \varpi_j, \Omega$.

donde,

Ω = longitud del nodo ascendente

$\varpi = \omega + \Omega$ = longitud del perihelio

$\lambda = M + \varpi$ = longitud media

son los parámetros angulares de la órbita del asteroide y Júpiter, respectivamente.

El desarrollo de Fourier de la función perturbadora R tiene la forma general

$$R = \sum C \cos D \quad (6)$$

donde

$$C = C (a, a_j, e, e_j, i)$$

$$D = D (i\lambda + j\lambda_j + k\varpi + l\varpi_j + m \Omega)$$

es decir, los coeficientes C son funciones de los semi-ejes mayores, excentricidades e inclinaciones y los argumentos dependen de los elementos angulares. La suma se realiza sobre todos los valores permitidos de los números enteros i, j, k, l y m , los coeficientes C también dependen de estos enteros, ver Danby (1962). Por ejemplo, para el problema restringido plano se tiene,

$$C = C (a, a_j, k, l) e^k, e_j^l$$

$$D = i\lambda + k \lambda_j - l\varpi - n \varpi_j$$

y ecuaciones adicionales que relacionan los índices de suma, i, k, l y n . Los coeficientes C se pueden expresar en función de los coeficientes de Laplace.

Es importante destacar que el desarrollo de Fourier (6) goza de las propiedades de la serie de d'Alembert, por tanto:

$$C \sim O (e^{|k|}, e_j^{|l|}, i^{|m|}, i_j^{|n|})$$

la suma $(m+n)$ es par, e $(i+k+j+l+m+n) = 0$; por lo tanto, $|k+l+m+n| \geq |i+j|$. Los términos con $i=0$ y $j=0$ son llamados términos seculares pues los argumentos del coseno varían muy lentamente. Sin embargo, si la razón de los movimientos medios n y n_j esta representado por un número racional, es decir

$$\frac{n}{n_i} = \frac{(p+q)}{p}$$

entonces, la cantidad $(i\lambda + j\lambda_j)$ puede variar lentamente y dominará el movimiento del asteroide debido a que los términos restantes, no-seculares, son de corto período. Estos términos de corto período son por lo general eliminados, utilizando el principio de la media el cual supone que si un término resonante particular esta variando lentamente, entonces se puede obtener el valor medio de R y sus derivadas promediando sobre el período resonante; con esto se logra que R sólo contenga los términos seculares y resonantes. Sin embargo, estos son aún calculados por una suma cuádruple, sobre los índices k, l, m y n . En general, se realizan otros promedios sobre el promedio obtenido, la validez de este proceso depende de la posición de la resonancia y del máximo alcanzado por la excentricidad de la órbita pues a/a_j y $e^{|k|}$ aparecen en los coeficientes del cos D .

El número de términos que contiene la función perturbadora desarrollada en la forma de serie de d'Alembert depende fundamentalmente del valor de q . Para las resonancias de primer-orden de la forma $(p+1):p$, los términos que aparecen son del orden: $\sim O(e)$, mientras que para la resonancia 3:1 ($q = 2$), los términos de mayor orden son: $\sim O(e^2, e_j^2, e_j \cdot e)$, los términos siguientes son $\sim O(e^4)$. En cualquiera de los casos, el problema es conservar suficientes términos para obtener una buena representación del movimiento; pero cuando son incluidos los términos de orden superior el estudio analítico de las órbitas se hace muy difícil. Por lo tanto los desarrollos en serie de la función perturbadora están truncados en un cierto orden, el cual depende de e^n , siendo n (entero) >0 .

Además de los desarrollos en serie truncados (según el orden de la aproximación), un cambio adecuado en las coordenadas canónicas ha conducido a dos modelos fundamentales para interpretar la resonancia:

- i) el modelo del péndulo
- ii) un modelo de Henrard y Lemaître (1983 a)

La teoría del movimiento del péndulo ha sido a menudo considerada como el modelo básico para interpretar el fenómeno de resonancia, ver Lichtenberg y Lieberman (1983); en Mecánica Celeste es frecuente tratar al problema de la resonancia como el de un péndulo, mediante un tratamiento adecuado de la función Hamiltoniana.

Resumiendo, la función perturbadora \mathbf{R} ó su equivalente el Hamiltoniano \mathbf{H} tienen una expresión, en forma general, como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{C} (a, a_j, e, e_j, i) [\mathbf{R}_{tcp}(\lambda, \lambda_j) + \mathbf{R}_{sec}(q, \sigma, q, \tau, \varpi, \varpi_j, \Omega)]$$

$$\mathbf{H} = \text{Const} [\mathbf{H}_{tcp} + \mathbf{H}_{sec}]$$

tcp \Rightarrow términos de corto período, varían muy rápidamente.

sec \Rightarrow términos seculares, varían lentamente, secularmente

donde \mathbf{R}_{tcp} contiene términos que varían rápidamente y el argumento \mathbf{D} solo depende de las longitudes medias, \mathbf{R}_{sec} contiene términos que varían lentamente llamados términos seculares. El mismo razonamiento es válido para el Hamiltoniano \mathbf{H} ; en algunos estudios, \mathbf{H}_{sec} se descompone en dos términos, una parte resonante y una parte secular, donde la parte secular no depende de las variables resonantes σ y τ .

Desarrollos en serie de \mathbf{R} y \mathbf{H}

Murray y Fox (1984), desarrollaron para el caso plano en la resonancia 3:1 la parte \mathbf{R}_{sec} de la función perturbadora hasta el segundo orden en las excentricidades y obtuvieron el siguiente desarrollo:

$$\mathbf{R}_{sec} = \Sigma A_i B_i(e, e_j) \cos[D_i(\sigma, \varpi, \varpi_j)]$$

para la resonancia 3:1, $q = 2$. Los coeficientes A_i son los coeficientes de Laplace. En esta aproximación los términos de corto período \mathbf{R}_{tcp} son despreciados, esto significa que los términos de corto período en promedio tienden a cero durante el período de la resonancia, i.e., $\langle \mathbf{R}_{tcp} \rangle \Rightarrow 0$. El Hamiltoniano que corresponde a este caso se puede escribir en el modo clásico de la forma:

$$\mathbf{H}^* = - \mathbf{H} (\text{probl.dos-cuerpos}) - \mathbf{R}_{sec}$$

reemplazando este valor de \mathbf{H}^* en el sistema canónico de ecuaciones diferenciales (2), Murray y Fox (1924) resolvieron numéricamente el sistema de ecuaciones resultante, i.e.,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial y_i}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}$$

Este procedimiento se puede aplicar a cualquier resonancia del tipo $\frac{(p+q)}{p}$, excepto para los asteroides Troyanos (1:1), pues el desarrollo de a/a_j en los coeficientes A_i no tiende a uno como es de esperar. La aplicación de este método para órbitas con altas excentricidades no es aconsejable. El método puede ser mejorado desarrollando \mathbf{R} hasta términos de orden superior en las excentricidades.

6. EL METODO DEL PROMEDIO DE SCHUBART

Schubart (1964,1968), desarrolló un nuevo método de promedio el cual difiere del principio de promedio usado por Murray y Fox. En sus estudios, Schubart **no supone** que los términos de corto período promediados tienden a cero, y por tanto él no desprecia estos términos, por el contrario son tomados en cuenta. En la aplicación de este método promediado, Schubart, considera el Hamiltoniano original \mathbf{H} , éste incluye, por supuesto, los términos de corto período y por tanto, \mathbf{H} es promediado sobre el período de resonancia, entonces, el Hamiltoniano promediado \overline{H} es usado para reemplazar al Hamiltoniano original \mathbf{H} en el sistema de ecuaciones canónicas (2). El Hamiltoniano promediado de Schubart se obtiene mediante la ecuación:

$$\langle H \rangle = \overline{H} = \frac{1}{2\pi(p+q)} \int_0^{2\pi(p+q)} H d\lambda$$

donde $H = H(\lambda)$. Luego, el sistema de ecuaciones canónicas con el Hamiltoniano promediado \overline{H} , es integrado numéricamente donde el sistema de ecuaciones diferenciales canónicas está dado por:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial S}, \frac{dS}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \sigma}, \dots, etc.$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales con un Hamiltoniano promediado \overline{H} , se resuelve numéricamente del siguiente modo: consideremos, por ejemplo, la ecuación para σ , donde S es la variable canónica conjugada de σ , i.e.,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial S}$$

El segundo miembro de esta ecuación diferencial, para un Hamiltoniano H no-promediado, está representado por una función analítica F . La expresión de F , para el Hamiltoniano original H , es periódica en los elementos λ y λ_j en el intervalo de resonancia definido por $2\pi(p+q)$. Dividiendo éste intervalo de resonancia en N subintervalos iguales con respecto a la anomalía excéntrica E del asteroide, se puede calcular la función $F(i, \lambda(i), \lambda_j(i), \dots)$ con $i = 1, \dots, N$. Las longitudes medias $\lambda(i)$, $\lambda_j(i)$ se obtienen conservando al asteroide en una órbita Kepleriana, definida por los elementos orbitales en $i=1$. Por lo tanto, el valor medio de F está dado por:

$$\overline{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(i, \lambda(i), \lambda_j(i), \dots)$$

y por consiguiente,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial S} = \overline{F}$$

luego, el sistema de ecuaciones diferenciales canónicas dado anteriormente está representado por:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \overline{F}, \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \sigma}, \dots, etc.$$

en este sistema la ecuación diferencial con el valor medio \overline{F} puede ser resuelta utilizando cualquier integrador numérico preciso. Schubart, en su trabajo, no usó la forma canónica de este sistema de ecuaciones sino que utilizó un sistema con elementos más adecuados, ver Schubart (1968). Es obvio que el método del promedio aplicado por Schubart difiere fundamentalmente

del principio de la media propuesto por Murray y Fox, el cual había sido ya propuesto por Poincaré en 1902. En la aplicación de su método, Schubart no desprecia los términos de corto período y tampoco usa desarrollos en serie, esto hace que la media utilizada por Schubart tenga un rango, comparativamente mayor, de aplicaciones que el propuesto por Murray y Fox; en particular, no existen restricciones para las excentricidades ó las resonancias típicas. En el caso de los asteroides Troyanos no hay inconveniente en estudiar sus movimientos aplicando este método. No es aconsejable su aplicación cuando tiene lugar una configuración donde la distancia entre Júpiter y el asteroide es demasiado pequeña, en este caso no se pueden calcular las funciones $F(i, \lambda(i), \lambda_j(i), \dots)$

7. LA REPRESENTACION (MAPPING) DE WISDOM

Otro método, independiente y muy rápido, para calcular numéricamente órbitas con movimientos medios resonantes fué propuesto por J. Wisdom (1982). En forma similar al método propuesto por Murray y Fox, Wisdom descompone el Hamiltoniano H en tres partes:

- i) agrupa los términos de corto período.
- ii) considera solamente los términos resonantes.
- iii) agrupa la parte secular.

es decir,

$$H = H_{\text{tcp}} + H_{\text{reson}} + H_{\text{sec}} \quad (7)$$

Wisdom, para la resonancia 3:1, desarrolla H_{sec} en serie de potencias de las excentricidades e y e_j , hasta los términos de orden de e^2 , otra diferencia con el trabajo de Murray y Fox es que Wisdom no desprecia los términos de corto período sino que reemplaza estos términos por **funciones delta**, δ , definidas convenientemente. El concepto fundamental introducido por Wisdom esta basado en una idea muy general propuesta por B.V. Chirikov (1979), la idea es la siguiente:

El movimiento del asteroide es interpretado como un oscilador perturbado, donde el Hamiltoniano está representado por la ecuación (7), i.e., expresado en tres parte. H es una función periódica de los argumentos λ y λ_j . Los términos de corto período ó de alta frecuencia

durante una revolución de Júpiter son, por supuesto, debidos a las perturbaciones de Júpiter. En las sucesivas revoluciones del asteroide, las perturbaciones continúan actuando y éstas afectan las altas frecuencias del movimiento; estas fuerzas (las perturbaciones) son reemplazadas por un número pequeño de impulsos, los cuales actúan instantáneamente durante una revolución de Júpiter alrededor del Sol. Esta sustitución es interpretada matemáticamente en el modelo como una **función delta de Dirac**, δ . Físicamente, esta sustitución está justificada por el hecho que el uso de la función delta, δ , es equivalente a introducir un número infinito de términos de alta frecuencia. El nuevo Hamiltoniano definido por Wisdom, H_w , tiene la forma:

$$H_w = H_{sec} + H_{reson}. \quad (8)$$

Para el movimiento medio resonante 3:1, Wisdom encontró que son suficientes cinco impulsos para aplicar este modelo a los términos de corto período y al movimiento resonante del asteroide durante una revolución completa de Júpiter. Con éste Hamiltoniano H_w , la solución numérica del sistema de ecuaciones canónicas (2) se hace muy fácil y en particular muy rápida. Además, Wisdom encontró que la parte secular de éste Hamiltoniano es analíticamente **integrable**. Como los dos términos que forman el H_w se pueden integrar fácilmente no es necesario, entonces, resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales canónicas sino que simplemente se las resuelve mediante un **mapeo**. La aplicación de este "mapping" permite resolver en forma rápida el sistema ya que se requiere calcular solamente cinco veces las funciones delta durante una revolución de Júpiter.

El "mapping" desarrollado por Wisdom es aplicable a órbitas de asteroides con poca excentricidad para la resonancia 3:1 y además, es más rápido que el método de Murray y Fox y que el método de la media de Schubart. Es interesante preguntarse si el mapeo de Wisdom puede ser aplicado ó no a otras resonancias y a órbitas con grandes excentricidades ($e > 0.5$), con la misma eficiencia como en la resonancia 3:1. Dos factores son los que determinan la rapidez del mapeo de Wisdom:

- i) el escaso número de funciones delta de Dirac necesarias durante una revolución de Júpiter alrededor del Sol.
- ii) el término secular del Hamiltoniano H_w es integrable, éste es deducido a partir de un desarrollo en serie.

8. INTENTOS PARA EXPLICAR LA FORMACION DE LAS LAGUNAS DE KIRKWOOD

En la última década se publicaron cinco modelos diferentes los cuales intentaron explicar la formación de los vacíos de Kirkwood y los grupos aislados de asteroides relacionados con el movimiento medio resonante, ellos son:

- i) Gonczi et al. (1982, 1983)
- ii) Torbett y Smoluchowski (1982, 1983)
- iii) Lemaître y Henrard (1983)
- iv) Hadjidemetriou y Ichtiaroglou (1984)
- v) Wisdom (1983)

Wisdom propone solamente un mecanismo para la resonancia 3:1.

Los otros cuatro autores no proponen un mecanismo completo para la formación de las lagunas de Kirkwood ni para los grupos de asteroides (acumulaciones), sino que investigan el efecto de una fuerza externa sobre el movimiento resonante; ésta es una fuerza adicional al efecto gravitatorio ejercido por Júpiter. La naturaleza física de esta fuerza adicional no es necesariamente conocida pero se hacen suposiciones sobre la forma en que actúa.

Gonczi et al. (1982,1983), investigaron el efecto arrastre de Poynting-Robertson sobre la evolución de órbitas próximas a una resonancia. Estos tienen en cuenta los términos mas importantes del "Poynting-Robertson drag" además de la fuerza gravitatoria de Júpiter. Debido al arrastre el semi-eje mayor, a , de la órbita varía lentamente hacia las resonancias Jovianas; si ésta ingresa en una resonancia, la órbita puede abruptamente variar su excentricidad, e , y puede, por tanto, disminuir fuertemente su semi-eje mayor, la órbita no es atrapada en la resonancia sino que pasa muy rápidamente a través de ella. De este modo se pudieron haber formado los vacíos.

Por otra parte, una órbita que inicialmente está en una región resonante puede permanecer ahí un período de tiempo relativamente grande antes de abandonar la región de resonancia. El intervalo de tiempo en el cual la órbita permanece en esta región, llamado "trapping time", fue calculado para las resonancias, 3:1, 5:2, 2:1 y 3:2. Es importante destacar que para las resonancias 3:1 y 5:2, el tiempo de permanencia en la resonancia es muy corto, esto

se debe a que las regiones de libración son muy pequeñas, en cambio para las resonancias 2:1 y 3:2 este tiempo parece ser relativamente mayor.

Torbett y Smoluchowski (1982,1983), investigaron el efecto "barrido", debido a las resonancias Jovianas, sobre una distribución inicialmente uniforme de asteroides. El efecto "barrido" sobre las resonancias pudo haber sido causado por la dispersión del disco de acreción original formado alrededor del proto-Sol y/o por una variación de la masa Joviana. Estos investigadores, igual que Gonczi et al., encontraron que los asteroides que inicialmente parten fuera de una región resonante tienen un pasaje muy rápido por esta región y también hallaron, un período relativamente grande para la permanencia de la órbita en la región resonante. Este efecto se encuentra en las resonancias observadas 3:1, 5:2,7:3 y 2:1; pero el ancho observado de los vacíos no esta de acuerdo con los cálculos realizados.

Un estudio físico, similar a los propuestos por los anteriores autores, pero con consideraciones mas generales fue realizado por Henrard y Lemaître (1983). Ellos investigaron analíticamente el efecto de un desplazamiento de las resonancias Jovianas basadas en la teoría de los invariantes adiabáticos (Henrard, 1982). Para ello promediaron el Hamiltoniano respecto de las longitudes medias de Júpiter, λ_j , y desarrollaron el Hamiltoniano resultante en potencias de la excentricidad. Henrard y Lemaître estudiaron primero la topología del movimiento resonante, realizando un estudio similar al trabajo de Schubart (1964), el modelo utilizado es un problema restringido circular plano, aplicable solo a órbitas con poca excentricidad. Estos investigadores encontraron puntos homoclínicos, regiones de libración y circulación las cuales están separadas por una curva semejante a una separatriz. Un lento desplazamiento del centro de resonancia hace que la órbita del asteroide comience a evolucionar a través de diferentes regiones del espacio, pasando de un lado a otro del punto homoclínico. El pasaje a través del punto homoclínico hace variar, en forma abrupta, el tiempo de evolución del semi-eje mayor y la excentricidad. Varios autores habían ya descubierto este violento comportamiento: Scholl y Froeschlé (1974), Froeschlé y Scholl (1979), Gonczi et al. (1983), Torbett y Smoluchowski (1982) y Wisdom (1983).

Para describir la evolución de una órbita aplicando la teoría de los invariantes adiabáticos son necesarios dos parámetros, A y δ . δ es un parámetro sin dimensiones, es la relación entre el semi-eje mayor y el centro de la resonancia. A representa el área encerrada por la órbita del asteroide en un espacio de fase definido adecuadamente.

Una **variación adiabática** significa un cambio muy lento de la variable δ con el tiempo y el indicador de área A está relacionado con el **invariante adiabático**. Estudiando

analíticamente el comportamiento de A en función de δ , Henrard y Lemaître encontraron dos resultados muy importantes:

i) La órbita de un asteroide que inicialmente parte fuera de la región de resonancia cruza repentinamente esta región mientras que el centro de la resonancia se desplaza adiabáticamente. Después de éste rápido pasaje por la zona resonante, la órbita del asteroide permanece en el lado opuesto de la región resonante.

ii) Una órbita que inicialmente parte de la región de resonancia puede permanecer en la región un período bastante grande en la zona de resonancia durante un cambio adiabático. Este período depende de la distancia entre la órbita y la curva separatriz.

Esta teoría fue aplicada con éxito a la resonancia 2:1, ver Lemaître (1984). Una aproximación diferente a las teorías mencionadas para explicar los vacíos de Kirkwood fué publicada por Hadjidemetriou e Ichtiaroglou (1984). Esta aproximación esta basada en un análisis de la estabilidad del movimiento resonante en el problema restringido circular plano. En particular, estudiaron la estabilidad de órbitas periódicas simétricas simples en un sistema rotante. Estas órbitas en el cinturón de asteroides están divididas en familias con ramificaciones a órbitas circulares y elípticas. Los autores investigaron las ramificaciones que pasan a través de las resonancias. Hadjidemetriou (1982) demostró que las órbitas circulares resonantes en la conmensurabilidad:

$$\frac{n}{n_j} = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots$$

tienen siempre un Hamiltoniano perturbado, el cual genera inestabilidad. Además, demostró que cualquier órbita elíptica puede volverse inestable si se aplica una perturbación adecuada, i.e.,

$$H = H_0 + \varepsilon H_1$$

El estudio de la estabilidad de una órbita está basado en el método de las superficies de sección, (ver Hénon y Heiles, 1964) y la inestabilidad está medida por el módulo de los autovalores no-estables.

Los principales resultados obtenidos por Hadjidemetriou e Ichtiaroglou son:

i) Todas las órbitas circulares resonantes (\approx problema restringido circular) son estables, excepto para las resonancias : 3:1, 5:3, 7:5, ..., porque éstas están rodeadas por curvas invariantes.

ii) Las órbitas elípticas resonantes próximas a las conmensurabilidades: 2:1, 3:2 y 4:3, pueden existir. Además, se puede conjeturar que una perturbación adicional puede causar inestabilidad en la resonancia 2:1, pero no en las resonancias 3:2 y 4:3.

El Hamiltoniano toma la forma:

$$H(\text{elíptico}) = H_0 + \varepsilon H_1(\text{perturbado})$$

Además, las aproximaciones de Henrard y Lemaître y la de Hadjidemetriou e Ichtiaroglou tratan, ambas, de explicar la paradoja de los grupos de acumulación y los vacíos, que se producen en las resonancias debido a un comportamiento diferente del criterio de estabilidad, con relación a una perturbación adicional. Entonces el Hamiltoniano se puede expresar como:

$$H = H_0(\text{Probl.2 - C}) + H_{tcp} + H_{res} + H_{sec} \equiv H^*$$

y por tanto

$$H = H^* + \varepsilon H_1$$

Otra aproximación, independiente de las anteriores, para explicar la formación de los vacíos de Kirkwood, fué propuesta por J. Wisdom (1983). De acuerdo a las investigaciones de Wisdom, la resonancia 3:1 se forma porque los asteroides situados en la 3:1 se hacen cruzadores de la órbita de Marte y por tanto cambian su órbita debido a la acción de Marte. Aplicando su **mapeo**, descrito anteriormente, Wisdom demostró que la excentricidad de la órbita de un asteroide cuyas condiciones iniciales corresponden al vacío observado en la 3:1, tarde ó temprano salta súbitamente hasta un valor mas grande, entonces comienza a cruzar la órbita de Marte. El proceso de estos repentinos saltos en la excentricidad están relacionados con un **movimiento caótico**, tal como Wisdom lo demostró, aplicando el método de los máximos exponentes característicos de Lyapunov. Hay que destacar, que Froeschlé y Scholl (1981), calcularon los máximos exponentes de Lyapunov para la resonancia 2:1 y no encontraron claras evidencias de

un movimiento caótico. Estos abruptos cambios en los elementos observados en el comportamiento de una órbita ya eran conocidos por Scholl y Froeschlé (1974 y 1979); estos autores pensaron que las violentas variaciones de los elementos eran casos excepcionales, mientras que Wisdom demostró que estos cambios son normales en todas aquellas órbitas que estén en la resonancia 3:1. Estas órbitas deben ser calculadas por un período de tiempo muy grande. Esto explicaría porqué Froeschlé y Scholl sólo hallaron cambios violentos en unos pocos casos. El mérito de Wisdom es que empleó un mapeo muy rápido, el cual le permitió calcular las evoluciones dinámicas de las órbitas para millones de años ($> 10^6$ años) y, el principal resultado obtenido por sus investigaciones es la demostración que el ancho observado en la laguna de Kirkwood 3:1 coincide con el tamaño de la región caótica. Este brillante trabajo de Wisdom fué premiado.

Sin embargo, falta mucho por realizar, todavía no se ha demostrado que en los otros vacíos de Kirkwood el proceso de un movimiento caótico produce, también, cruzadores de Marte. El movimiento caótico sólo no es suficiente para explicar la formación de vacíos, ya que una región caótica puede ser envuelta por una región **no-caótica**.

La incógnita sobre el origen de los vacíos y las acumulaciones de asteroides con movimiento medio resonante continua siendo una preocupación para los astrónomos !

Agradecimientos. A Diego López García por su colaboración en la diagramación de los gráficos. Parte de este trabajo fue realizado con un subsidio otorgado por la Secretaría de Investigaciones Científicas de la U.N.S.J. 1993)

BIBLIOGRAFIA

Chirikov, B.V.: 1979, Phys. Rep. **52**, 263-379.

Danby, J.M.A.: 1962, Fundamentals of Celestial Mechanics, Macmillan, New York, p.254-255.

Dermott, S.F., Murray, C.D.: 1983, Nature **301**, 201-205.

- Ferraz- Mello, S: 1987, In Dynamics of the Solar System, Sidlichovsk • M. (ed) Astrom. Inst. Czech. Acad. Science. Praha, 121.
- Ferraz-Mello, S.: 1988, Astron. J. **96**, 400
- Ferraz-Mello, S.: 1990, Revista Mexicana Astron. Astrofisica **21**, 569
- Ferraz-Mello, S., Klafke, J.C.: 1991, In Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems, A.E. Roy (ed.), NATO ASI Series, Plenum Press, N.Y. 177 .
- Froeschlé, Cl., Scholl, H.: 1979, Astron. Astrophys. **57**, 33-39.
- Froeschlé, Cl., Scholl, H.: 1981, Astron. Astrophys. **93**, 62-66.
- Froeschlé, Cl., Scholl, H.: 1983, In Asteroids, Comets, Meteors, C.I. Lagerkvist and H. Rickman, eds., Uppsala University, p. 115-125.
- Gonczy, R., Froeschlé, Ch., Froeschlé, Cl.: 1982, Icarus **51**, 633-654.
- Gonczy, R., Froeschlé, Ch., Froeschlé, Cl.: 1983, In Dynamical Trapping and evolution in the Solar System. V.V. Markellos y Y. Kozai, (eds)., D. Reidel, Dordrecht.
- Greenberg, R., Scroll, H.: 1979, In Asteroids, Comets, Meteors, T. Gehrels, (ed)., University Arizona Press.
- Hadjidemetriou, J.D.: 1982, Celes. Mech. **27**, 305-322.
- Hadjidemetriou, J.D., Ichtiaroglou, S.: 1984, Astron Astrophys. **131**, 20-32.
- Hénon, M., Heiles, C.: 1964, Astron. J. **69**, 73-79.
- Henrard, J.: 1982, In Application of modern dynamics, V. Szebehely, (ed.) Reidel, Dordrecht, p. 153-171.
- Henrard, J., Lemaître, A.: 1983, Icarus, **55**, 482-494.
- Kirkwood, D.: 1867, Meteoric Astronomy: A treatise on shooting-stars, fireballs and Aeolites, Ch.13 (Philadelphia: J.B. Lippincott)
- Lemaître, A.: 1984, Celes. Mech. **32**, 109-126.
- Murray, C.D., Fox, K.: 1984, Icarus, **59**, 221-233.
- Poincaré, H.: 1902, Bull.Astron. **19**.
- Scholl, H.: 1985, In Resonances in the motion of planets, satellites and asteroids, S. Ferraz-Mello y W. Sessin, (eds.), USP, IAG, p.129-141.
- Scholl, H., Froeschlé, Cl.: 1974, Astron. Astrophys. **33**, 455-458.
- Schubart, J.: 1964, Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report No. **149**.
- Schubart, J.: 1968, Astron. J. **73**, 99-103.
- Szebehely, V.: 1970, Theory of Orbits. Academic Press Inc.
- Torbett, M., Smoluchowski, R.: 1982, Astron. Astrophys. **111**, 43-49.

- Torbett, M., Smoluchowski, R.: 1983, *Astron. Astrophys.* **127**, 345-348.
- Wisdom, J.: 1982, *Astron. J.* **87**, 577-593.
- Wisdom, J.: 1983, *Icarus* **56**, 51-74.
- Wisdom, J.: 1987, *Icarus* **72**, 241

