

ACERCA DEL DEFASAJE DE LA RESPUESTA DE LOS SISMOGRAFOS ELECTROMAGNETICOS

SIMON GERSHANIK
Observatorio Astronómico
Universidad Nacional de la Plata

Intuitivamente resulta poco aceptable la afirmación de que la respuesta de los sísmógrafos electromagnéticos pueda producir adelanto de fase sobre un movimiento sinusoidal del suelo. Se reconsidera por ello la solución de las ecuaciones diferenciales que la describen. Incluyendo en la misma el movimiento propio del captor y del galvanómetro, que habitualmente se omite, se obtiene fórmulas detalladas de la solución de las que se puede sacar el proceso que sigue la respuesta hasta quedar acompasada con la causa que la provoca. Siguiendo el proceso en diversos movimientos sinusoidales excitadores se puede ver que en efecto el defasaje puede ser no sólo negativo sino también positivo.

Se destaca además que asignando a las primeras ondas el defasaje que corresponde al movimiento acompasado se puede cometer errores importantes. Se propone por ello una forma de operar con los registros más conveniente que la habitual, con la que se puede lograr más exactitud en la hora de llegada de una fase.

According to the usual phase shift curves, the seismograph not only may be delayed but also may be advanced in phase with respect to the earth movement exciting it.

As an advanced shift is not evident at once, the seismograph equations are considered, and the process which leads either to an advanced or to a delayed phase shift is explained by means of curves obtained from the solution in which the proper motion is included.

Detailed expressions of the solution are given, and from values obtained with them it is seen that significant errors may be made assuming for the first wave the shift given by the usual curves. Indications for record processing are therefore given, which allow more accuracy to be obtained for the phases arrival time.

I. INTRODUCCION

Al interpretarse la respuesta de los sismógrafos a la acción del movimiento del suelo suele hacerse la suposición simplificada de que éste sea sinusoidal, y en base de ello que aquélla se presenta con un defasaje variable desde atrasos de 270° hasta adelantos de 90° de acuerdo a curvas semejantes a las de la figura 1.

Intuitivamente resulta aceptable que la respuesta del sismógrafo se presente con atraso de fase respecto del movimiento del suelo que la provoca, pero no así que ella se presente con adelanto. En vista de ello pareció aconsejable reexaminar el problema de la respuesta de los sismógrafos en procura de una clarificación al respecto.

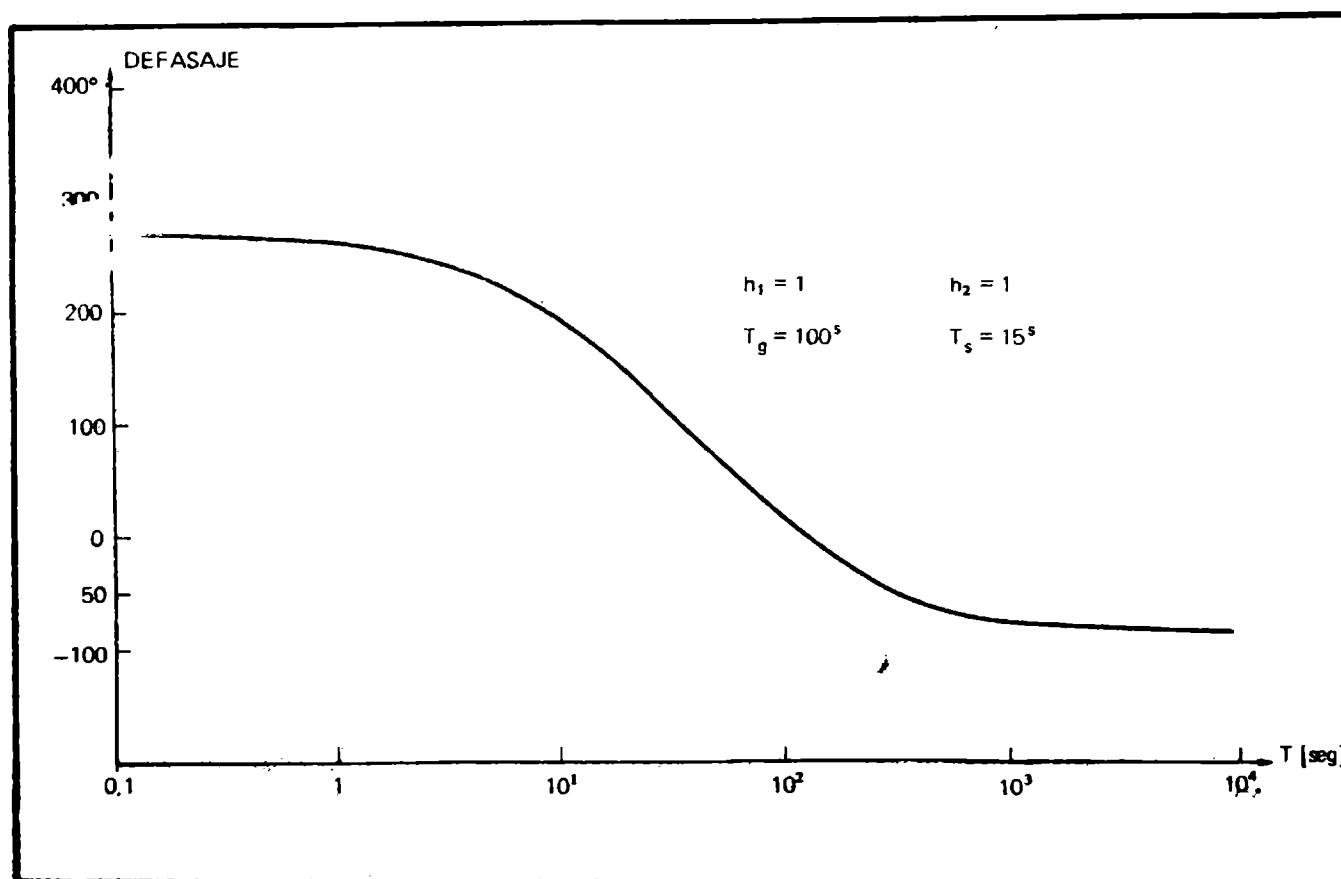


Figura 1. Respuesta de fase de un sismógrafo en la suposición simplificada que se excita con un movimiento sinusoidal.

Lo primero que puede advertirse en tal sentido es que a los referidos defasajes se llega cuando en la solución de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de los sismógrafos se omite la contribución del movimiento propio de sus partes captora e inscriptora. Estimamos por ello conveniente establecer cómo resultan ser los hechos cuando en la solución no se hace esa omisión, y aprovechar las expresiones respectivas para ver además de qué orden son los errores que puede cometerse operando en la forma habitual.

El tratamiento de ecuaciones diferenciales incluyendo el movimiento propio ha sido hecho en múltiples trabajos entre los que cabe mencionar el de Eaton (1957), el de Gershanik (1963) y el de Morenos Tévar (1969), pero con propósitos distintos.

Propósitos más parecidos a los del presente trabajo en cambio han sido incluidos en uno de Rybner (1931), en el que se presentaron expresiones y resultados útiles a los mismos. Pero esas expresiones se han dado en forma un tanto compacta y los resultados citados no cubren la cuestión sino en parte. Queremos por lo tanto proporcionar en el presente trabajo expresiones más detalladas, y asimismo algunos resultados más obtenidos con ellos que amplían los de Rybner y junto con éstos ilustrar acerca de la modalidad de los hechos investigados.

II. EXPRESIONES OBTENIDAS

El homenaje a la sencillez suponemos en nuestras consideraciones que la reacción del galvanómetro sobre el captor es pequeña y usamos por ende las ecuaciones diferenciales siguientes, de las cuales se puede igualmente extraer una información bastante aproximada acerca del comportamiento de los sismógrafos:

$$\ddot{\varphi} + 2 h_1 n_1 \dot{\varphi} + n_1^2 \varphi = - \frac{\ddot{q}}{l_r} \quad n_1 = \frac{2 \pi}{T_s} \quad (1)$$

$$\ddot{\Psi} + 2 h_2 n_2 \dot{\Psi} + n_2^2 \Psi = k \varphi \quad n_2 = \frac{2 \pi}{T_g} \quad (2)$$

En ellas entendemos respectivamente por:
 φ y ψ el movimiento del captor y del galvanómetro,
 h_1 y h_2 su grado de amortiguamiento,
 T_s y T_g sus períodos propios,
 q el movimiento del suelo,
 l_r el largo reducido del captor y
 k el coeficiente de transmisión.

De estas ecuaciones procuramos las soluciones para el caso que sea $q = 0$ para $t \leq 0$ y $q = q_0 \sin \omega t$ para $t > 0$ y las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 & \dot{\varphi} &= 0 \\ \psi &= 0 & \dot{\psi} &= 0 \\ & \text{para } t = 0 \end{aligned}$$

y consideramos las nueve combinaciones de h_1 h_2 que figuran en la tabla siguiente:

TABLA I

h_1	h_2		
	<1	$=1$	>1
<1	1	4	7
$=1$	2	5	8
>1	3	6	9

En ella, los números 1 a 9 sirven para designar la respectiva combinación. Así, el número 6 corresponde a la combinación $h_1 > 1$, $h_2 = 1$, y el número 1 a la combinación $h_1 < 1$, $h_2 < 1$.

Resolviendo el sistema (1) se encuentra que:

$$\varphi = f_1(t) + \frac{q_0 H_1}{I_r} \operatorname{sen}(\omega t - \nu_1) \quad \psi = f_2(t) + \frac{kq_0}{I_r} \frac{H_1 H_2}{\omega} \cos(\omega t - \nu_1 - \nu_2) \quad (3)$$

expresiones en las que

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-u_1^2)^2 + 4h_1^2 u_1^2}} \quad \operatorname{tg} \nu_1 = \frac{2h_1 u_1}{u_1^2 - 1} \quad u_1 = \frac{T}{T_s} \quad (4)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-u_2^2)^2 + 4h_2^2 u_2^2}} ; \operatorname{tg} \nu_2 = \frac{2h_2 u_2}{u_2^2 - 1} ; u_2 = \frac{T}{T_g}$$

f_1 = movimiento propio del captor

f_2 = $x + y$

y = movimiento propio del galvanómetro

x = movimiento del galvanómetro correspondiente al movimiento propio del captor.

En las tablas II, III y IV damos las expresiones que resultan f , x e y , así como para los elementos que entran en esas expresiones.

En las condiciones recomendadas por Galitzin, es decir para $n_1 = n_2$, $h_1 = h_2 = 1$, $h_2 = 1$, las expresiones de M_1 y M_2 que figuran en la tabla III dejan de ser aplicables. Pero resolviendo el sistema (1) (2) en especial para dicho caso se obtiene:

$$\psi = \frac{k q_0}{I_r} \frac{H_1 H_2}{\omega} \cos(\omega t - \nu_1 - \nu_2) + (A + Bt + Ct^2 + Dt^3) e^{-n_1 t}$$

con:

$$A = \frac{k q_0}{I_r} \frac{H_1 H_2}{\omega} \cos(\nu_1 + \nu_2)$$

$$C = \frac{k}{2} (b - n_1 a)$$

$$B = n_1 A - \frac{k q_0}{I_r} H_1 H_2 \sin(\nu_1 + \nu_2) \quad D = \frac{k n_1 \omega}{6} \frac{H q_0}{I_r} \cos \nu_1$$

Para contar con más valores ilustrativos, además de los que puede sacarse del trabajo de Rybner, aplicamos las fórmulas obtenidas al caso del equipo de período largo de las estaciones de la red homogénea internacional, es decir al caso en que sea $T_s = 15^s$ y $T_g = 100^s$, pero para el amortiguamiento supusimos que fuera $h_1 = h_2 = 1$.

Los cálculos se hicieron para $T = 5, 30, 55, 80, 105, 150, 250, 350$ y 450 segundos. Los valores obtenidos permitieron dibujar las curvas de respuesta de las figuras 2, 3, 4 y 5. En ellas el movimiento excitador está representado por la línea fina y la respuesta de los sismógrafos por línea gruesa.

Las figuras muestran que la iniciación de la respuesta en todos los casos se verifica al mismo tiempo que el movimiento excitador, es decir *sin defasaje*; pero que este último se va produciendo luego progresivamente. Ello se hace visible en el momento de los máximos y mínimos, que no sólo puede resultar atrasado, sino en efecto adelantado respecto del movimiento excitador, lo que ocurre cuando $T > T_g$.

TABLA III
Expresiones variables con la mortalidad de h_1

	$h_1 < 1$	$h_1 = 1$	$h_1 > 1$
f_1	$(a \cos \mu_1 t + b \operatorname{sen} \mu_1 t) e^{-h_1 n_1 t}$	$(a + bt) e^{-n_1 t}$	$a e^{\eta_1 n_1 t} + b e^{\eta_2 t}$
a	$\frac{q_0 H_1}{l_r} \operatorname{sen} \nu_1$	$\frac{q_0 H_1}{l_r} \operatorname{sen} \nu_1$	$\frac{\eta_2 \operatorname{sen} \nu_1 - \frac{\omega}{n_1} \cos \nu_1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{H_1 q_0}{l_r}$
b	$\frac{j}{\mu_1} (n_1 h_1 a - \frac{q_0 H_1 \omega}{l_r} \cos \nu_1)$	$n_1 a - \frac{q_0 H_1 \omega}{l_r} \cos \nu_1$	$\frac{\frac{\omega}{n_1} \cos \nu_1 - \eta_1 \operatorname{sen} \nu_1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{H_1 q_0}{l_r}$
γ_1	$(\gamma_1 \cos (\mu_1 t - \chi) + \gamma_2 \operatorname{sen} (\mu_1 t - \chi)) e^{-h_1 n_1 t}$	$(\gamma_1 + \gamma_2 t) e^{-t}$	$\gamma_1 e^{\eta_1 n_1 t} + \gamma_2 e^{-t}$
γ_2	$\frac{k (b \mu_1 - h_1 n_1 a)}{\xi}$	$(b - n_1 a) k + 2 \gamma_2 (n_1 - h_2 n_2)$	$\frac{-k \eta_1 n_2 a}{n_2^2 + h_1^2 \eta_2^2 - 2 h_2^2 n_2 n_1 \eta_1}$
γ_3	$\frac{-k (a \mu_1 + h_1 n_1 b)}{\xi}$	$-n_1 k b$	$\frac{-k \eta_1 n_1 b}{n_2^2 + h_1^2 \eta_2^2 - 2 h_2^2 n_2 n_1 \eta_1}$
P	$-\gamma_1 \cos \chi + \gamma_2 \operatorname{sen} \chi - \frac{H_1 H_2 q_0 k}{l_r \omega} \cos (\nu_1 + \nu_2)$	$-\gamma_1 + \frac{H_1 H_2 q_0 k}{l_r \omega} \cos (\nu_1 + \nu_2)$	$-\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{H_1 H_2 q_0 k}{l_r \omega} (\nu_1 + \nu_2)$
Q	$\frac{1}{n_2} [\gamma_1 (\mu_1 \operatorname{sen} \chi - h_1 n_1 \cos \chi) + \gamma_2 (n_1 \operatorname{sen} \chi + \mu_1 \cos \chi) + \frac{H_1 H_2 q_0 k}{l_r} \operatorname{sen} (\nu_1 + \nu_2)]$	$\frac{-1}{n_2} [n_1 \gamma_1 - \gamma_2 - \frac{H_1 H_2 q_0 k}{l_r} \operatorname{sen} (\nu_1 + \nu_2)]$	$\frac{1}{n_2} [\frac{H_1 H_2 q_0 k}{l_r} \operatorname{sen} (\nu_1 + \nu_2) - n_1 (\eta_1 \gamma_1 + \eta_2 \gamma_2)]$

$$\mu_1 = n_1 \sqrt{1 - h_1^2}$$

$$\eta_1 = h_1 - \sqrt{h_1^2 - 1}$$

$$\eta_2 = h_1 + \sqrt{h_1^2 - 1}$$

$$\xi = [(n_2^2 - \mu_1^2 + h_1^2 n_1^2 - 2 h_1 h_2 n_1 n_2)^2 + 4 \mu_1^2 (n_2 h_2 - n_1 h_1)^2]^{1/2}$$

$$\chi = \arctan \frac{2 \mu_1 (n_2 h_2 - n_1 h_1)}{n_2^2 - \mu_1^2 + h_1^2 n_1^2 - 2 h_1 h_2 n_1 n_2}$$

TABLA IV
Expresiones variables con la modalidad de h_1 y de h_2

$h_2 < 1$	
h_1	
< 1	$= 1$
$A = -\gamma_1 \cos X + \gamma_2 \operatorname{sen} X - \frac{kq_0 H_1 H_2}{\omega l r} \cos (\nu_1 + \nu_2)$ $B = \frac{1}{\mu_2} [h_2 n_2 A + \gamma_1 (h_1 n_1 \cos X - \mu_1 \operatorname{sen} X) - \gamma_2 (\mu_1 \cos X + h_1 n_1 \operatorname{sen} X) - \frac{kq_0 H_1 H_2}{l r} \operatorname{sen} (\nu_1 + \nu_2)]$	$A = -(\gamma_1 - \frac{kq_0 H_1 H_2}{\omega l r} \cos (\nu_1 + \nu_2))$ $B = \frac{1}{\mu_2} [h_2 n_2 A + n_1 \gamma_1 - \gamma_2 - \frac{kq_0 H_1 H_2}{l r} \operatorname{sen} (\nu_1 + \nu_2)]$
$A = \frac{P \eta'_2 - Q}{\eta'_2 - \eta'_1}$	$A = -[\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{kq_0 H_1 H_2}{\omega l r} \cos (\nu_1 + \nu_2)]$ $B = \frac{1}{\mu_2} [h_2 n_2 A + \eta_1 n_1 \gamma_1 + \eta_2 n_1 \gamma_2 - \frac{kq_0 H_1 H_2}{l r} \operatorname{sen} (\nu_1 + \nu_2)]$
$h_2 = 1$	
<p>A idem caso $h_2 < 1$ B idem caso $h_2 < 1$ pero substituyendo $\frac{1}{\mu_2}$ por la unidad</p>	
$h_2 > 1$	
$A = \frac{P \eta'_2 - Q}{\eta'_2 - \eta'_1}$	$B = \frac{Q - P \eta'_1}{\eta'_2 - \eta'_1}$

III RESULTADOS NUMERICOS

Para contar con más valores ilustrativos de los que puede sacarse del trabajo de Rybner, aplicamos las fórmulas obtenidas al caso del equipo de período largo de las estaciones de la red homogénea internacional, es decir al caso en que sea $T_s = 15^s$ v $T_g = 100^s$, pero para el amortiguamiento supusimos que fuera $h_1 = h_2 = 1$.

Los cálculos se hicieron para $T = 5, 30, 55, 80, 105, 150, 250, 350$ y 450 segundos. Los valores obtenidos permitieron dibujar las curvas de respuesta de las figuras 2, 3, 4 y 5. En ellas el movimiento excitador está representado por la línea fina y la respuesta de los sismógrafos por la línea gruesa.

Las figuras muestran que la iniciación de la respuesta en todos los casos se verifica al mismo tiempo que el movimiento excitador, es decir *sin desfase*; pero que este último se va produciendo luego progresivamente. Ello se hace visible en el momento de los máximos y mínimos, que no sólo puede resultar atrasado sino en efecto adelantado respecto del movimiento excitador lo que ocurre cuando $T > T_g$

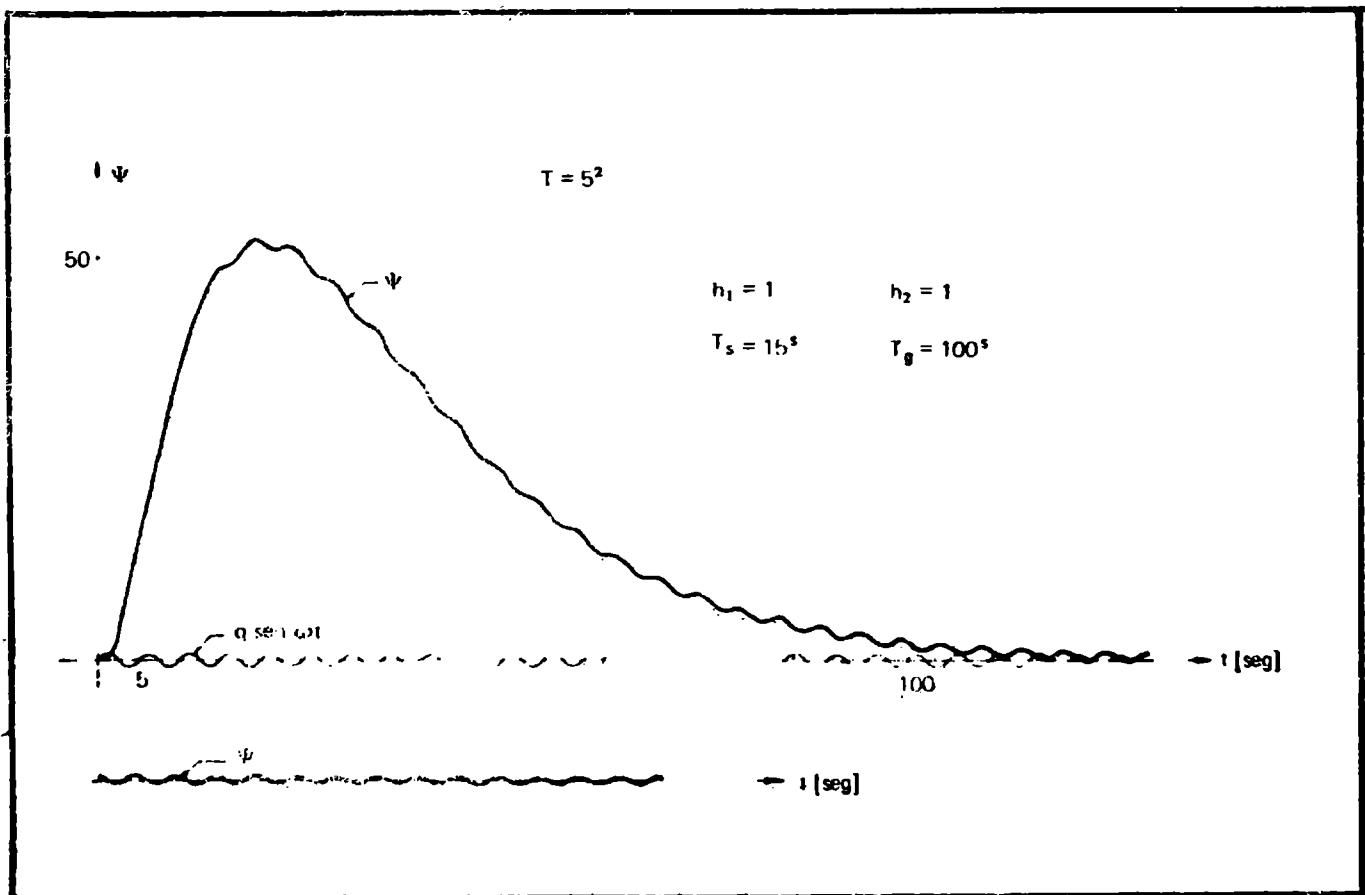


Figura 2. Respuesta correspondiente a un movimiento excitador de $T = 5^s$

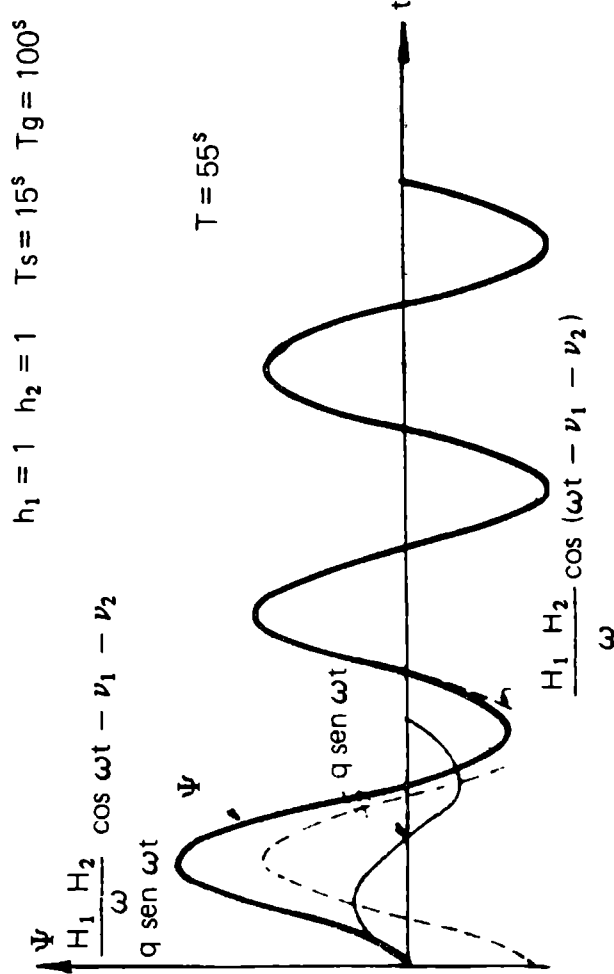
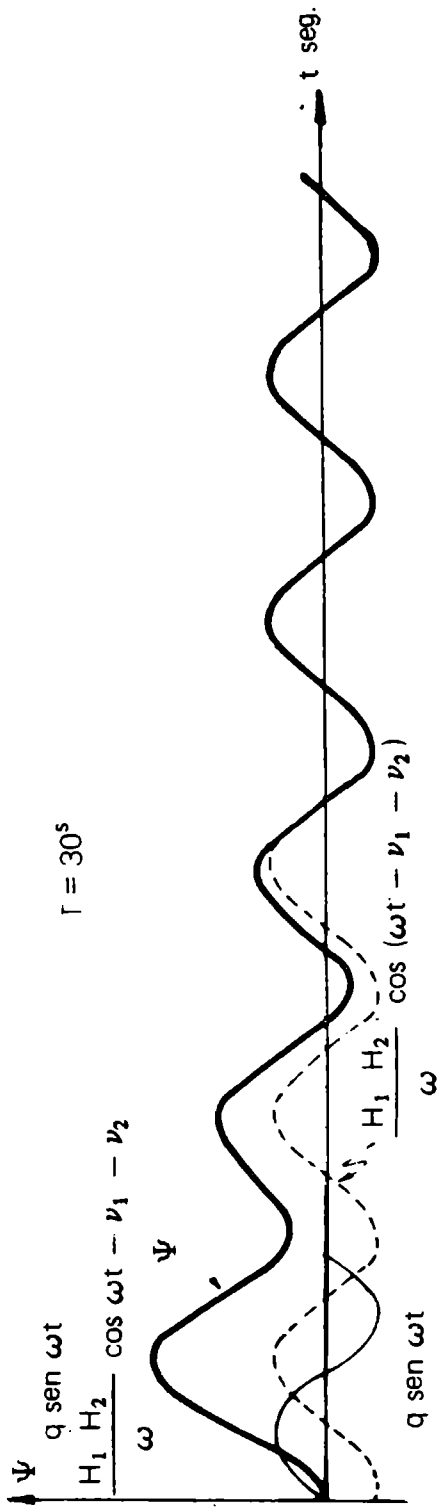


Figura 3. Respuesta correspondiente a un movimiento excitador $T = 30^s$ y $T = 55^s$.

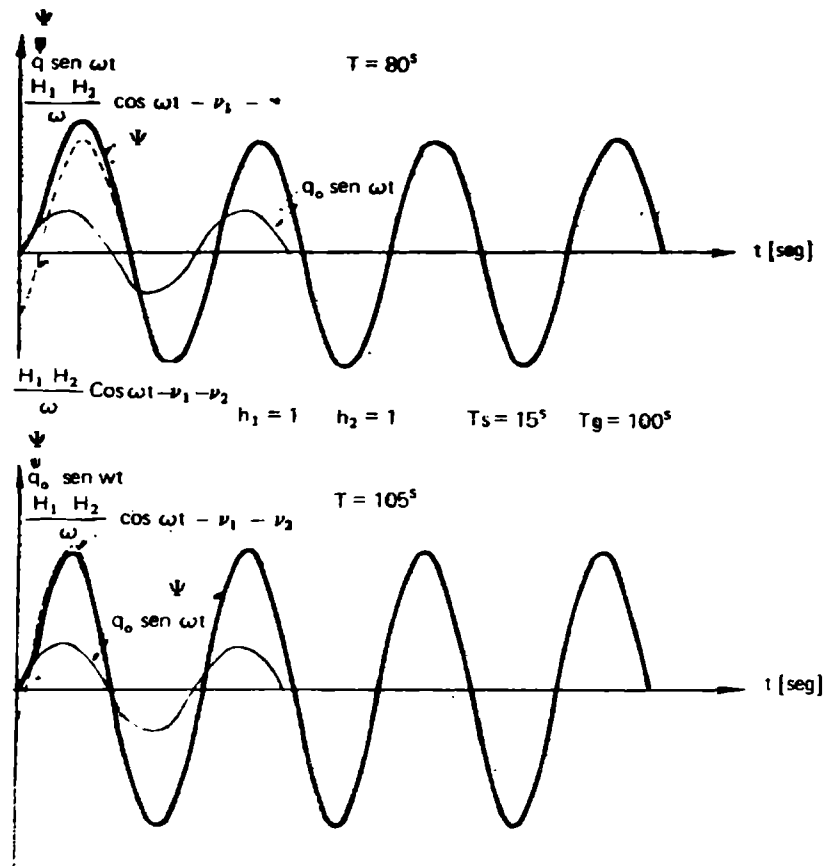


Figura 4. Respuestas a movimientos sinusoidales con $T = 80^s$ y $T = 105^s$.

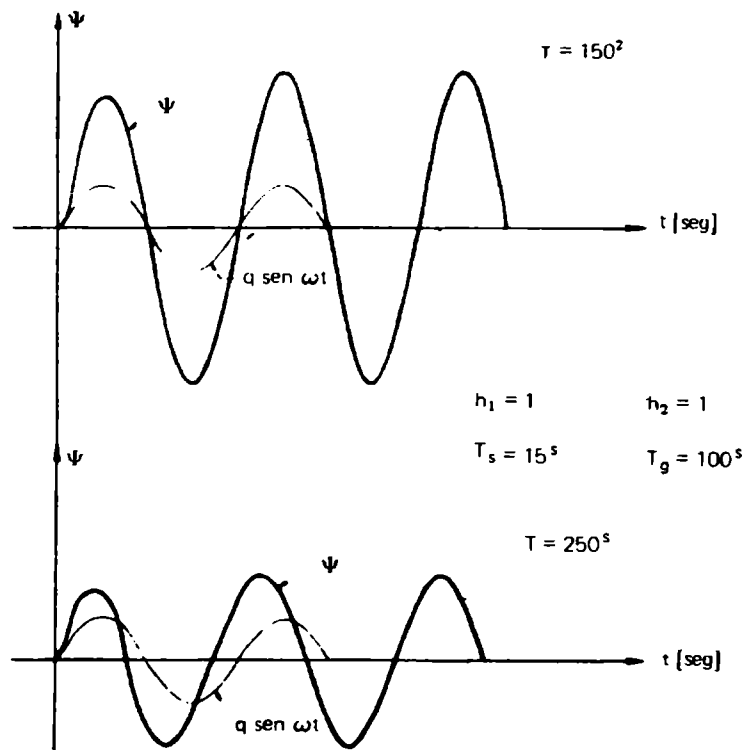


Figura 5. Respuestas a movimientos sinusoidales con $T = 150^s$ y $T = 250^s$.

El exámen de las figuras muestra además que tanto la amplitud como el defasaje de la respuesta va variando en el curso del tiempo en un proceso que la conduce a lo que Morencos (loc. cit.) llama el *acompasamiento* con la causa excitadora, o sea que la conduce a identificarse con un movimiento del suelo, y cuya amplitud y defasaje serían los que se obtendría si $f_2(t) = 0$.

En las figuras 3 y 4 indicamos el movimiento acompasado con una línea de puntos, y en ella se ve que para $T = 30^s$ la identificación se produce prácticamente después del 3er máximo; para $T = 55^s$, después del 2do; para $T = 80^s$ y para $T = 105^s$, después del primero. Después del primero se produce también la identificación en el caso de períodos mayores.

En los casos de períodos pequeños, en cambio, la identificación se logra como lo muestra la figura 2 tras de un número muy crecido de oscilaciones.

En la figura 2 puede verse además que el galvanómetro se desplaza considerablemente de la posición de equilibrio.

En la práctica se nota pocas veces una respuesta así, lo que puede explicarse o bien porque el suelo suele estar agitado por un movimiento casi estacionario de período corto, o bien porque los transitorios suelen ser de muy poca duración.

TABLA V

T seg	γ		γ_1		γ_2		$\frac{V_1}{V}$	$\frac{V_2}{V}$
	Grados	Seg.	Grados	Seg.	Grados	Seg.		
5	227°40	3.16	241.91+6 π	18.36	160.88+6 π	17°23	73.84	72.51
30	109.73	9.14	112.42	9.37	98.06	8.17	3.17	2.03
55	62.89	9.61	56.15	8.58	61.40	9.38	1.59	1.06
80	33.92	7.54	30.20	6.71	34.05	7.57	1.15	1.00
105	13.47	3.93	14.47	4.22	13.47	3.93	0.97	1.00
150	- 11.20	- 4.67	- 3.19	- 1.33	- 11.19	- 4.66	0.86	1.00
250	- 39.53	- 27.45	- 23.41	- 16.26	- 39.53	- 27.45	0.82	1.00
350	53.20	- 51.72	- 33.95	- 33.00	- 53.20	- 51.72	0.84	1.00
450	- 61.12	- 76.40	- 40.56	- 50.70	- 61.12	- 76.40	0.86	1.00

Para completar la información acerca del comportamiento de la respuesta, damos en la tabla V el valor del defasaje en la primera y en la segunda onda de la misma, que designamos γ_1 y γ_2 respectivamente y el valor del defasaje que se obtiene considerando $f_2(t) = 0$ y que designamos γ . Damos también en ella las relaciones V_1/V y V_2/V entre las amplificaciones de las ondas primera y segunda y la amplificación V que se tendría si fuera $f_2(t) = 0$.

Los valores de γ y V se calcularon directamente en base de las expresiones (4); en cambio los valores de γ_1 , γ_2 , V_1/V y V_2/V se obtuvieron por interpolación con un polinomio de 2° grado basada en valores discretos de ψ calculados con (3) para t variando a intervalos iguales a $T/16$.

La tabla pone en evidencia que el defasaje y la amplificación correspondientes a la primera onda pueden ser bastante distintos de los que tiene la respuesta cuando se ha logrado el acompasamiento. Si T es pequeño también lo son los correspondientes a las ondas siguientes, aunque en menor medida.

Como lo que γ_1 y γ_2 difieren de γ puede ser considerable, es evidente que en los estudios en los que importa conocer el defasaje de las ondas con que se opera, como lo son los basados en dispersión de ondas superficiales, se puede cometer errores apreciables si indiscriminadamente se les atribuye el valor γ .

En atención a esta posibilidad, creemos que en vez de tratar de corregir el instante máximo de las ondas del sismograma por defasaje, es mejor operar con el registro con el criterio que indicamos en años anteriores (1952), consistente en determinar $q(t)$ en base de las ordenadas del registro, haciendo las operaciones indicadas en las ecuaciones diferenciales (1) y (2).

Al efecto se puede proceder como sigue: del registro se saca los valores digitizados ψ y por derivación numérica, usando tales valores, se obtiene $\dot{\psi}$ y $\ddot{\psi}$, todo lo cual introducido en (2) permite obtener $\dot{\varphi}$ si se conoce n_2 , h_2 , y k .

En base de $\dot{\varphi}$ se obtiene $\ddot{\varphi}$ y φ respectivamente por derivación e integración numérica de $\dot{\varphi}$, y por sustitución en (1) se obtiene $\ddot{q}(t)$. Conociéndose $\ddot{q}(t)$ se puede hallar $\dot{q}(t)$ y por ende el valor de t para el cual q adquiere su valor máximo.

Aunque el número de operaciones a efectuar es un tanto crecido, ello resulta fácilmente realizable si se cuenta con un digitizador y con una computadora automática.

AGRADECIMIENTOS

Los cálculos necesarios para el trazado de las curvas así como para la obtención de los valores de los defasajes y de la amplificación fueron hechos con la computadora electrónica IBM 360 de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de La Plata con programas preparados por la Lic. Carlota G. de Vacchino, a quien por ello le quedo particularmente agradecido. Deseo además dejar constancia de mi agradecimiento a los Srs. N. Corriols y J. Vigiani, quienes se encargaron de efectuar el dibujo de las figuras.

BIBLIOGRAFIA

- Gershanik, S., 1952: Contribución a la teoría de los sismógrafos mecánicos. Publicaciones del Observatorio Astronómico de La Plata, Serie Geofísica VIII, 2*
- Gershanik, S., 1963: Elementos para determinar el amortiguamiento del receptor de sismógrafos electromagnéticos. Primeras jornadas chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica, 15 al 19 de Julio de 1963. Asociación Chilena de Sismología e Ingeniería Antisísmica, v.1, A-4.*

Eaton, J. P., 1957: Theory of the electromagnetic seismograph. Bulletin of the Seismological Society of America, v.47, -37-45.

Morencos, Tevar, J. 1969: Análisis de las respuestas de un sismógrafo electromagnético. Instituto Geográfico y Catastral, Madrid.

Rybner, J., 1931: Investigations on the Theory of the Galitzin Seismograph. Gerlands Beiträge zur Geophysik, v.31, p.259-281.