GEOACTA, Vol. 6, Nº 3, (Septiembre de 1974), Pág. 35 a 44

UNA PROYECCION CILINDRICA SECANTE EQUIVALENTE DERIVADA DE LA CARTA DE LAMBERT

VICTOR BURIEK
Dirección Provincial de Vialidad, Tucumán
Instituto de Geodesia y Topografía,
Universidad Nacional de Tucumán

Se presenta una modificación de la proyección cilíndrica de Lambert mediante una contracción en el sentido de los paralelos. Como compensación se efectúa una dilatación a lo largo de los meridianos. Así se obtiene una nueva proyección con la ventaja sobre la original de ser aplicable a regiones alejadas del ecuador.

A modification of the Lambert's equivalent cilindric projection by means of contraction along the parallels, is given. A dilatation along the meridians is carried out as a counterbalance. A new map projection is thus obtained with the advantage over the original projection of being useful for regions far from the equator.

En primer lugar realizaremos un breve análisis de la carta cilíndrica equivalente de Lambert (figura 1).

En esta carta los meridianos se representan por rectas paralelas al eje de las *y*, e igualmente espaciadas para iguales incrementos de la longitud. Los paralelos a su vez son rectas horizontales espaciadas según la función seno de la latitud. El ecuador con el eje de las *x* y está en su verdadero desarrollo.

En consecuencia las ecuaciones fundamentales de la proyección equivalente de Lambert son:

$$x = \lambda \qquad y = \operatorname{sen} \varphi$$

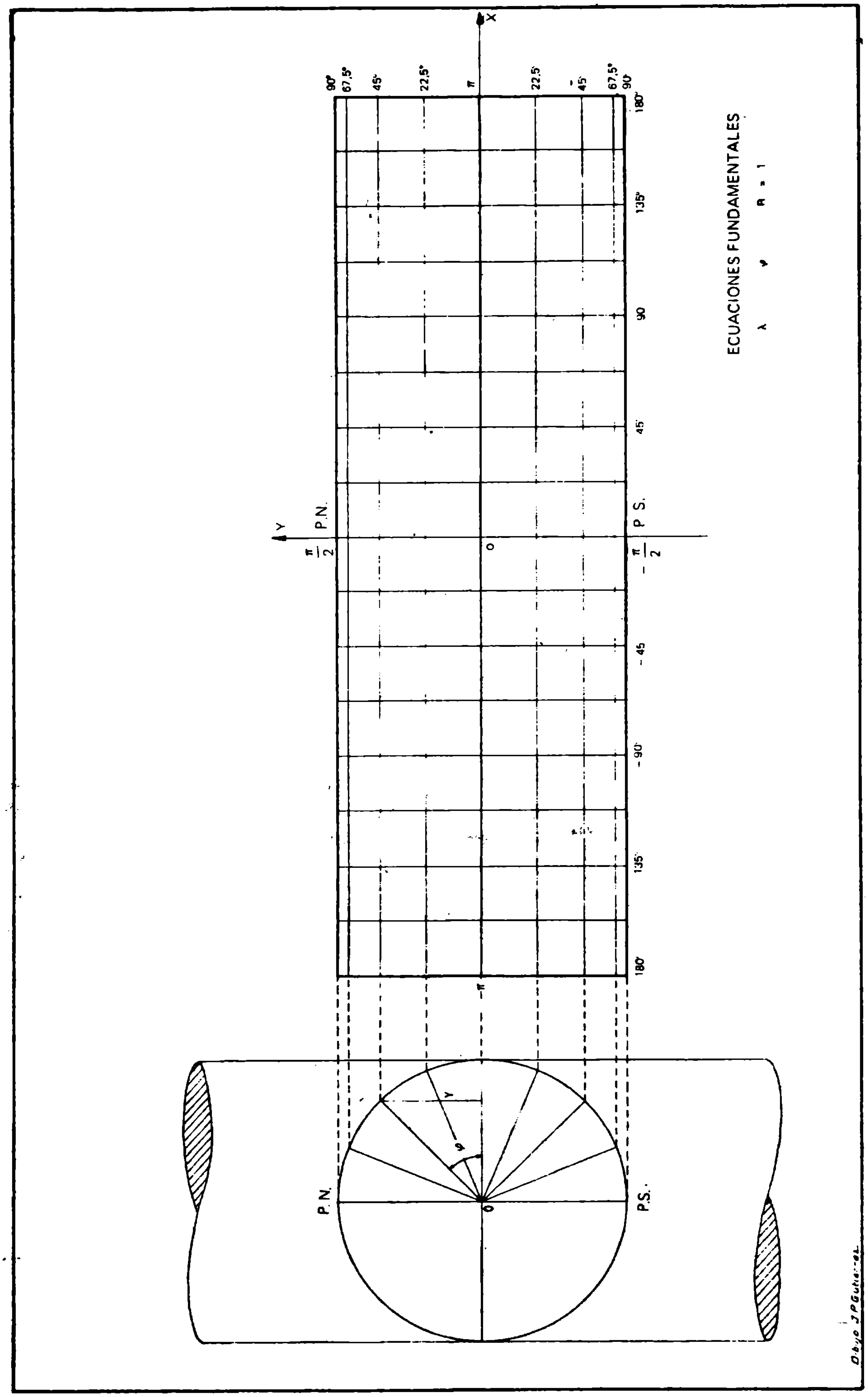


Figura 1. Carta cilíndrica equivalente de Lambert. (Canevas)

Las derivadas parciales de las coordenadas planas de la carta en función de los parámetros (φ, λ) son:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \cos\varphi \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

y los coeficientes de Gauss para el plano de la representación serán:

$$E_1 = {\frac{\partial x}{\partial \varphi}}^2 + {\frac{\partial y}{\partial \varphi}}^2 = \cos^2\varphi$$

$$F_1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

$$G_1 = {\frac{\partial x}{\partial \lambda}}^2 + {\frac{\partial y}{\partial \lambda}}^2 = 1$$

Se puede ahora calcular los módulos lineales en las direcciones de los meridianos y paralelos (razón de aumento o medida de la distorsión). Los módulos lineales miden la alteración de longitudes elementales en las direcciones consideradas.

$$m_m = \frac{1}{M}\sqrt{E_1} \qquad\qquad m_p = \frac{1}{r}\sqrt{G_1}$$

Para la representación de la esfera las fórmulas se reducen a

$$m_m = \sqrt{E_1} = \sqrt{\cos^2\varphi} = \cos\varphi$$

$$m_p = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{G_1} = \sec\varphi \cdot \sqrt{1} = \sec\varphi$$

Este resultado nos dice que la proyección está contraída en el sentido de los meridianos, ya que $\cos\varphi$ es siempre menor que la unidad, salvo sobre el ecuador donde $\cos 0° = 1$ y no hay allí alteración lineal.

Por el contrario, los paralelos de la carta están todos dilatados con respecto a su magnitud real ya que sec φ es menor que la unidad para toda latitud, salvo sobre el ecuador, donde sec 0° = 1.

En consecuencia el ecuador de la carta (eje de las x) es una línea automecoica o isométrica central en la cual no existe anamorfismo.

El cálculo del módulo areal (o alveolar) nos da:

$$k = a \quad b = m_m \quad m_p = \cos\varphi \quad \sec\varphi = 1$$

El resultado obtenido indica que la proyección considerada es equivalente o equiárea.

En principio esta proyección es apta para representar zonas próximas al ecuador donde no existe anamorfismo, o sea no hay alteración de distancias, ni de áreas, ni angular. En las vecindades del ecuador la carta presenta características de isometría.

Pero a medida que nos alejamos del ecuador la distorsión aumenta considerablemente, lo que hace que la proyección tenga utilidad muy limitada.

Para corregir un tanto los inconvenientes de la proyección de Lambert nos proponemos presentar una nueva representación, a la que llegaremos por dos pasos o etapas sucesivas.

En primer lugar, efectuaremos una contracción de la carta de Lambert en el sentido de los paralelos (coordenada x) figura 2. Esta contracción transforma la carta de tangente en secante y representa dos paralelos arbitrarios en su verdadero desarrollo. El ecuador reduce su longitud y pierde así el carácter de línea automecoica. La contracción se obtiene multiplicando la coordenada x por el coseno de la latitud correspondiente a la de los paralelos que deseamos representar en su verdadero desarrollo.

Sea esta latitud φ_0. Las ecuaciones fundamentales quedarán de la siguiente forma

$$x = \cos\varphi_0 \quad \lambda \qquad\qquad y = \operatorname{sen}\varphi$$

El análisis de la nueva proyección es el siguiente:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \cos\varphi \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos\varphi_0 \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

$$E_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \cos^2\varphi$$

$$F_1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

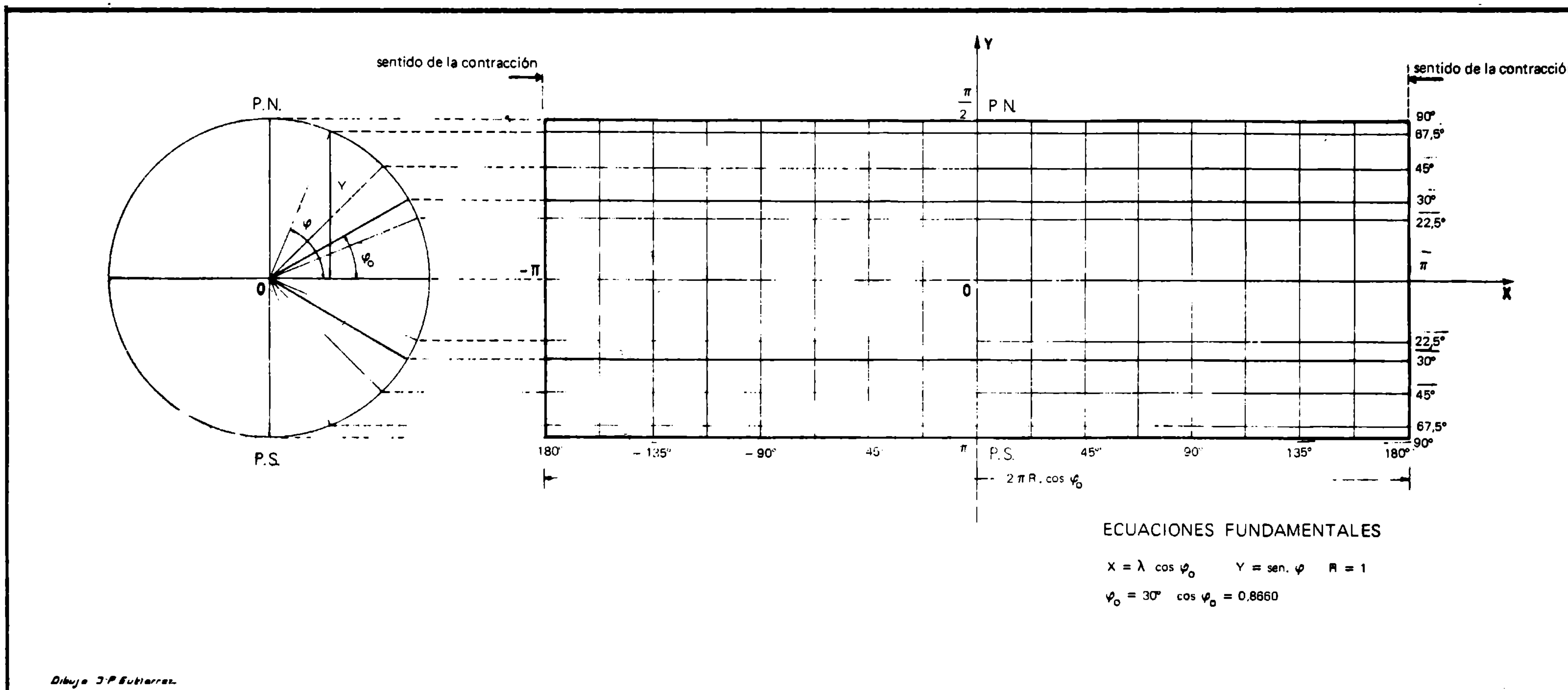


Figura 2. ***Representación secante derivada de la carta de Lambert por contracción de abcisas (Canevas).***

$$G_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \cos^2 \varphi_0$$

$$m_m = \frac{1}{M} \sqrt{E_1} = \sqrt{E_1} = \cos \varphi$$

$$m_p = \frac{1}{r} \sqrt{G_1} = \frac{1}{\cos\varphi} \sqrt{G_1} = \sec \varphi \quad \cos \varphi_0$$

Luego las características de la proyección varían un tanto respecto a la analizada anteriormente.

Los meridianos continúan contraídos según el coseno o sea que los paralelos se "aplastan" en las proximidades del polo en ambos hemisferios.

A su vez la alteración lineal de los paralelos depende de la latitud

Así, para $\quad |\varphi| < |\varphi_0| \quad m_p = \sec \varphi \;\; \cos \varphi_0 < 1$

o sea, en la zona de la carta comprendida entre latitudes $\pm \varphi_0$, los paralelos, incluidos el ecuador, están representados en una longitud menor que la real,

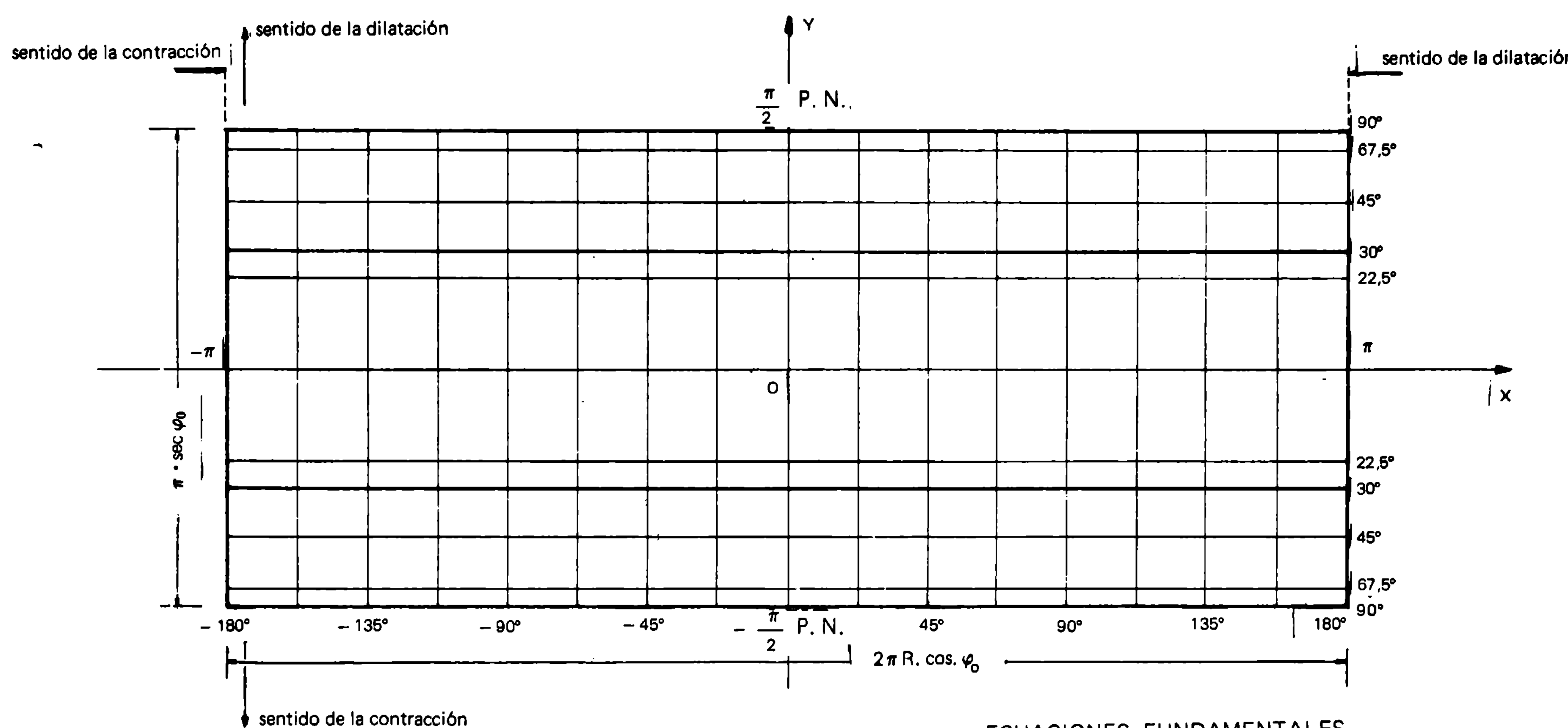
y para $\quad |\varphi| = |\varphi_0| \quad m_p = \sec \varphi_0 \;\; \cos \varphi_0 = 1$

o sea, en las latitudes $\pm \varphi_0$, los paralelos están en su verdadero desarrollo

Sin embargo los paralelos $\pm \varphi_0$ no son líneas automecoicas por cuanto el módulo lineal no es la unidad en la dirección del meridiano sino $m_m = \cos \varphi_0 < 1$. Este defecto se corregirá en el segundo paso o etapa de transformación de la carta de Lambert según se propone.

En la carta secante o seudosecante que estamos analizando, el módulo areal vale $\cos \varphi_0$, lo que nos dice que a pesar de no valer la unidad, el módulo constante indica el carácter de equivalencia de la proyección. Existe solamente un problema de escala para llegar al módulo areal unidad.

Dado que esta última proyección carece de isómetras, se propone ahora una modificación para que el resultado sea una carta equivalente con desdoblamiento de la isómetra central de Lambert en dos isómetras simétricas a la latitud arbitraria φ_0 (figura 3).



ECUACIONES FUNDAMENTALES

$X = \cos.\varphi_0 \,.\, \lambda \qquad Y = \sec.\varphi_0 \quad \operatorname{sen}.\varphi$

$\varphi_0 = 30°$

Dibujo J.P. Gutiérrez

Figura 3. Carta Secante equivalente con dos isómetras derivada de la carta de Lambert.

Para conseguir esta carta bastará realizar la contracción en sentido de las x propuesta anteriormente, y además, una "dilatación" compensatoria en el sentido de los meridianos (eje de las y). En consecuencia, se propone una representación cilíndrica secante equivalente, cuyas ecuaciones fundamentales sean:

$$x = \cos \varphi_0 \cdot \lambda \qquad y = \sec \varphi_0 \,.\, \operatorname{sen} \varphi$$

El análisis de esta proyección arroja los siguientes resultados:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos \varphi_0 \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sec \varphi_0 \cdot \varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

$$E_1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi}^{2} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}^{2} = \sec^2 \varphi_0 \quad \cos^2 \varphi$$

$$F_1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \; \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \; \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

$$G_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}^{2} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}^{2} = \cos^2 \varphi_0$$

Los módulos lineales en las direcciones de meridianos y paralelos valen ahora: (Para la esfera terrestre M = N = R = 1):

$$m_m = \frac{1}{M} \sqrt{E_1} = \sqrt{E_1} = \sec \varphi_0 \quad \cos \varphi$$

$$m_p = \frac{1}{R} \sqrt{G_1} = \frac{1}{N . \cos \varphi} \sqrt{G_1} = \sec \varphi \quad \cos \varphi_0$$

Estos nos dice que los meridianos de la carta han sufrido una dilatación con respecto a la carta de Lambert.

En efecto, para $|\varphi| < |\varphi_0|$, los meridianos con $m_m > 1$, $m_m = \cos \varphi \mid \cos \varphi_0$ están dilatados con respecto a su verdadero desarrollo. Esto sucede en la zona de latitudes comprendidas entre $-\varphi_0$ y $+\varphi_0$, incluyendo el ecuador.

Para $|\varphi| = |\varphi_0|$, se tiene $m_m = \sec \varphi_0 \quad \cos \varphi_0 = 1$ o sea que en las latitudes $\varphi = \pm \varphi_0$ los meridianos están en su verdadero desarrollo.

Y para $|\varphi| > |\varphi_0|$ resulta $m_m < 1$. Por sobre la latitud φ_0, o por debajo de $-\varphi_0$, los meridianos se contraen aunque algo más paulatinamente que en la carta de Lambert.

A su vez los paralelos están contraidos, incluyendo el Ecuador de la carta, para latitudes comprendidas entre $\varphi = -\varphi_0$ y $\varphi = +\varphi_0$ donde el módulo $m_p < 1$.

$$\text{Para} \qquad \varphi = \varphi_0 \quad m_p = \sec \varphi_0 \quad \cos \varphi_0 = 1$$

lo que significa que a la latitud $\pm \varphi_0$ los paralelos, lo mismo que los meridianos están en su verdadera magnitud. Por lo tanto las dos líneas de la carta $\varphi = \pm \varphi_0$ son isómetras o líneas automecoicas, a lo largo de las cuales no existe ningún anamorfismo. Este resultado se confirma con el resultado del módulo areal. En efecto:

$$k = a \quad b = m_m \quad m_p = \sec \varphi_0 \ \cos \varphi \ \cos \varphi_0 \ \sec \varphi = 1$$

lo que significa que la carta es equivalente y el módulo es la unidad en toda ella, sin problemas de escala.

Esta carta, propuesta por la Cátedra de Cartografía del Instituto de Geodesia y Topografía de la Universidad Nacional de Tucumán, arroja ventajas sobre la carta de Lambert y la secante sin isómetras, propuestas anteriormente como transición para llegar a la presente. Se puede utilizar esta proyección secante equivalente para cualquier latitud φ_0 en cuya zona se desea cartografiar, siempre que esta latitud no sea muy elevada, de manera que la contracción de los paralelos pudiera resultar exagerada.

Logicamente la carta de Lambert queda incluída como un caso particular de esta proyección propuesta.

En efecto para $\varphi_0 = 0^\circ$ las ecuaciones fundamentales de la proyección se reduce a: $x = \cos 0^\circ \quad \lambda$; $y = \sec 0^\circ \cdot \operatorname{sen} \varphi$ y como $\cos 0^\circ = \sec 0^\circ = 1$ queda: $x = \lambda$; $y = \operatorname{sen} \varphi$ como la carta de Lambert. Es decir, la carta tangente es un caso particular de la carta secante con dos isómetras laterales y simétricas.

Abundando un tanto en el análisis de esta proyección propuesta, podemos calcular la alteración del acimut de una dirección en la superficie terrestre al ser representada.

La fórmula a aplicar es la siguiente:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{m_p}{m_m} \cdot \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{reemplazando}$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\cos\varphi_0 \quad \sec\varphi}{\sec\varphi_0 \quad \cos\varphi} \quad \operatorname{tg}\alpha = (\cos^2\varphi_0 \quad \sec^2\varphi)\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

Luego, para $\varphi < \varphi_0$, $\cos^2\varphi_0 \quad \sec^2\varphi < 1$; o sea: $\operatorname{tg}\alpha' < \operatorname{tg}\alpha$ y $\alpha' < \alpha$

lo que significa que el acimut de la carta disminuye por la representación, o sea que las direcciones tienden a "aplastarse" sobre el meridiano.

Por el contrario, para $\varphi > \varphi_0$ $\cos^2\varphi_0 \quad \sec^2\varphi > 1$ y $\alpha' > \alpha$ es decir los acimutes representados son mayores que los originales, o sea que las direcciones de la carta se "aplastan" hacia el paralelo.

Finalmente, cuando $\varphi = \varphi_0$ se tiene $\cos^2\varphi_0 \quad \sec^2\varphi_0 = 1$ lo que significa $\alpha' = \alpha$.

En consecuencia no existe alteraciones de direcciones y por supuesto tampoco existe alteración angular.

Ello ya se había supuesto por tratarse en $\varphi = \pm\varphi_0$ de una línea automecoica en cada hemisferio.

Allí la proyección tiene características de conforme, equivalente y equidistante o sea de una isometría.

La elipse de Tissot de esta carta se expresa por

$$\frac{x^2}{\sec^2\varphi_0 \quad \cos^2\varphi} + \frac{y^2}{\cos^2\varphi_0\cdot\sec^2\varphi} = 1$$

en toda la representación.