

## **COMPENSACIONES GEODESICAS CON COMPUTADORAS DIGITALES**

**ALFREDO V. ELIAS y ALBERTO H. J. CHRISTENSEN**  
Instituto Geográfico Militar

Se relata la influencia de las computadoras electrónicas en los métodos de compensación geodésica y se exponen algunos problemas y soluciones, especialmente los que se presentan con la introducción de condiciones fijas y en la solución de las normales. Se incluye una ligera reseña sobre las triangulaciones del Instituto Geográfico Militar (IGM) y sobre los programas de compensación usados en esa repartición.

**This paper describes the influence of the digital computers on the geodetic adjustment methods. It also poses some problems and solutions, specially those found in the introduction of fixed conditions and in the reduction of the normals. A brief outline of the Military Geographic Institute (IGM) triangulation nets is also included, as well as a short report on the programs used by that agency.**

La aparición de las computadoras electrónicas ha creado una inmensa capacidad potencial para ser aplicada en numerosas ramas de la ciencia. La Geodesia, que debe operar con engorrosas fórmulas trigonométricas y resolver sistemas de ecuaciones que pueden extenderse a varios miles de incógnitas, ha obtenido un incalculable beneficio en tiempo y seguridad y ha visto, además, por las nuevas posibilidades, sus métodos influidos o cambiados.

Un ejemplo evidente es el caso de la compensación de grandes redes de triangulación, en que el método clásico de ecuaciones de condición ha sido desplazado por el de variación de coordenadas, hasta entonces reservado primordialmente para el caso de algunos puntos nuevos intercalados (excepto algunos ejemplos, como el de la red inglesa de 98 puntos mencionado en Davies, 1973). Aquél era preferido por la mayor sencillez de la generalidad de las ecuaciones de condición (angulares) y por el menor número de ecuaciones normales que implicaba. En la actualidad se atribuye otra ventaja al primer método: su propiedad de "autoverificación" (v.g., ver Rainsford, 1957, pág. 78), la cual consiste, como es sabido, en el obligado cálculo de los términos independientes de las ecuaciones de condición. En general, parece aceptarse que el segundo método no goza de dicha propiedad. Sin embargo, los términos independientes de las ecuaciones de observación también proporcionan al geodesta experto las bases para descubrir errores, aunque en ocasiones pueden presentarse ambigüedades debidas a la relación que los términos independientes mantienen con las coordenadas preliminares.

Ya en la primera compensación en que se aplicó el cálculo electrónico (Whitten, 1951) se advirtió la conveniencia del método de variación de coordenadas, la que reside principalmente en el hecho de que las ecuaciones de observación son de un tipo mucho más adecuado para computadoras que las de condición. Además, es más sencillo introducir condiciones fijas y obtener la precisión final de cada punto con respecto a su origen o de una función de un par de éstos.

En otras palabras, es más simple indicar a la computadora las relaciones entre puntos necesarias para formar las ecuaciones de observación que señalarle el camino de las ecuaciones de condición no angulares, que son de diverso tipo y algunas de las cuales, en el caso de la Red Fundamental Argentina (RFA) pueden alcanzar hasta 300 términos.

También estas ventajas resaltan en el caso de levantamientos mixtos o combinados (triangulación, trilateración y poligonación), en que la estructura de las ecuaciones de observación es prácticamente la misma, mientras que aumenta la diversidad de las ecuaciones de condición.

El resultado inmediato de una compensación por ecuaciones de condición son los valores observados compensados. Este problema está perfectamente definido, siempre que, como es obvio, haya observaciones sobrantes y distribuidas de manera adecuada. El conocimiento de posiciones aproximadas es sólo necesario para el cálculo de valores iniciales que dependen de la latitud elipsoidal y para elementos de ecuaciones de condición poligonal.

En cambio, en el método de variación de coordenadas, el producto inmediato son coordenadas compensadas y la matriz de las ecuaciones normales será singular, de rango  $n - k$ , siendo  $n$  el orden de la matriz y  $k$  el defecto de la red. En una triangulación común,  $k$  puede llegar a 4, posición, orientación y escala, y

puede ser igual a 2 si se incluyen azimutes y distancias, por lo menos 1 de cada uno de ellos. Es evidente que la red tendrá 4 grados de libertad en el primer caso, y 2 en el segundo. Esto es engorroso de probar matemáticamente, pero en Walker (1967) puede verse una demostración para un cuadrilátero. Esta indeterminación se salva, por lo general, fijando un punto, es decir, considerando nulas las dos incógnitas correspondientes a una estación y eliminando otras dos por medio de una ecuación de azimut y una de lado, respectivamente. Con frecuencia, sobre todo en redes extensas, se distribuyen más observaciones de estos tipos para disminuir la propagación de errores, observaciones que pueden introducirse de la misma manera, es decir, eliminando una incógnita por cada una de ellas.

Cada arbitraria elección de los parámetros imprescindibles en cada caso lleva a una serie diferente de coordenadas finales con su matriz de covarianza correspondiente. De ahí resultan elipses de error posicional absoluto que tienden a aumentar con su alejamiento del origen arbitrario (Ashkenazi, 1973).

En los últimos años se han desarrollado métodos para evitar esta arbitraria eliminación de la singularidad de la matriz de las ecuaciones normales, principalmente la teoría de los errores internos, pero este tema nos llevaría muy lejos, en extensión y profundidad, de los límites de este artículo. En el trabajo precitado de Ashkenazi consta abundante bibliografía al respecto.

Una vez que la cantidad imprescindible de incógnitas ha sido eliminada en las ecuaciones de observación (que algunos autores llaman entonces "ecuaciones de observación condicionadas"), existen varias posibilidades:

1) Tratar de la misma manera todas las condiciones restantes, antes de formar las ecuaciones normales.

2) Formar las ecuaciones de correlativos de estas condiciones y agregarlas a las normales resultantes de las ecuaciones de observación. Se tendrá un sistema de dos tipos diferentes de ecuaciones normales, lo que no parece ventajoso. La única programación, aplicada a este procedimiento, que los autores conocen, es la del ex Army Map Service, de los EEUU.

3) El procedimiento sugerido por Aitken y que consiste en introducir las condiciones como ecuaciones de observación con pesos elevados, con lo cual se obtendrá una solución tanto más aproximada a la del procedimiento 1) cuanto mayores sean estos pesos con respecto a los de las observaciones en sí. La disparidad entre los pesos puede requerir mayor número de dígitos para no perder precisión en la resolución de las normales. En un conjunto de 3 anillos de la RFA con 352 ecuaciones normales se compararon soluciones obtenidas por el 1) y éste con pesos de 10.000, y resultaron valores iguales hasta  $5 \cdot 10^{-5}$ . Las normales se satisficieron con precisiones de  $0,88 \cdot 10^{-12}$  y  $0,19 \cdot 10^{-8}$  respectivamente.

Este procedimiento, aparte del inconveniente anotado, es más sencillo que el 2) y más elástico que el 1), sobre todo para países extensos cuyas redes por fuerza incluyen numerosas observaciones de azimut y de distancia, a menudo de diferente precisión (v.g., geodímetro y telurómetro), porque facilita experiencias para los pesos más adecuados. Siempre queda como cuestión delicada la fijación de estos pesos, sobre todo en lo que se refiere a la relación de direcciones con distancias, en que se incluye el discutido problema de las unidades respectivas. En la compensación de la red australiana Bonford (1967), se obtuvieron resultados

mejores con la relación  $1'' - 1$  pie; otros autores sostienen que es más adecuada  $1'' - 1$  m.

Esencialmente los métodos de resolución de las ecuaciones normales pueden dividirse en:

1) **Matriz inversa:** requiere más operaciones que la solución por eliminación. La diferencia es, en general, prohibitiva. Puede ser apta para pequeñas redes si además se quieren conocer los diversos errores finales.

2) **Métodos de eliminación:** están basados en la descomposición triangular de la matriz de los coeficientes de las ecuaciones normales, por el procedimiento de Choleski o el de Gauss. Aquél es ligeramente superior en precisión. Las dificultades varían de modo considerable según que dicha matriz (sin los términos simétricos debajo de la diagonal principal), con la información necesaria, pueda contenerse o no en la memoria principal de la computadora disponible. En este último caso, se recurre a la descomposición en bloques. En general, la formación de éstos, cuando se apoya estrechamente en la configuración de la red, se basa en adaptaciones de viejos procedimientos aplicados a la solución por ecuaciones de condición, como el de Helmert o Pranis Pranievich que, con algunas variantes, se usó en el IGM para resolver un sistema de 1.121 ecuaciones normales entre los años 1950 y 1956.

Básicamente, la descomposición en bloques consiste en dividir las ecuaciones normales en grupos de puntos (bloques o unidades), cada uno de ellos conteniente en la memoria central, a los que se asigna un orden de eliminación sucesivo tal, que los del inferior puedan expresarse en función de los superiores, hasta llegar al bloque de orden más elevado del que obtendrán los valores de las incógnitas. Con las debidas substituciones en sentido inverso, se obtienen las incógnitas de los órdenes inferiores.

En su origen, el propósito de estos procedimientos era efectuar los cálculos en planillas de dimensiones razonables y, mediante una adecuada organización, permitir el trabajo simultáneo de varios calculistas, trabajando independientemente en unidades diversas. La eficacia del método aumenta con un buen ordenamiento. En la programación para el IGM los autores incluyeron dos opciones:

a) Eliminación en una sola parte del proceso de todos los grupos de unidades del mismo orden (éstos no deben comunicarse entre sí), para disminuir el intercambio de datos entre la mejoría principal y la auxiliar, el llamado de subrutinas y el movimiento de archivos. Da prioridad a esta economía de tiempo resultante frente a las ventajas que resultan de minimizar la cantidad de operaciones aritméticas.

b) Ordenación de las unidades para que los coeficientes no nulos aparezcan en una franja o banda apoyada en la diagonal principal y de ancho reducido. Con todo esto se disminuye el número de operaciones o la creación de nuevas vinculaciones entre bloques, y se ahorra almacenamiento. Las prioridades son distintas de las del caso anterior. Faltan ensayos comparativos de ambas alternativas, los que, de cualquier modo, dependerán de la configuración de la red y de las características de las computadoras que se utilicen.

Algunos autores consideran el método de banda sólo cuando el sistema puede resolverse de manera total en la memoria rápida. En Ashkenazi (1967) se

menciona un programa en el cual sólo el ancho de banda está restringido por dicha memoria, "mientras el orden puede ser prácticamente de cualquier magnitud". El mínimo almacenamiento requerido es  $b^2$ , siendo  $b$  el ancho de la banda. Este depende de la forma de la red y de un buen ordenamiento de las incógnitas. Según este supuesto, será en general menor que el 20% del total de incógnitas.

En casos en que el almacenamiento disponible no ha permitido la inclusión de un bloque de  $b$  columnas, éste se ha tomado de dimensiones menores, como en Davies (1973), por ejemplo.

En el programa para la RFA, en la primera fase en que se eliminan las cadenas, como éstas constan de 7 u 8 cuadriláteros, despejada la constante de orientación, la relación entre  $b$  y el total de incógnitas es de un 60%, aproximadamente, por lo que la ordenación de éstas, por otra parte muy simple, no es demasiado importante. Las ventajas de la banda, en la opción  $b$ , resultarán de la ordenación de las unidades de nudos (2do. orden y superiores), lo que es mucho más simple que la ordenación de incógnitas. En el caso más desfavorable (paralelos  $36^\circ$  y  $38^\circ$  S) el ancho será de 8 unidades, es decir, unas 130 incógnitas.

Diversos programas de eliminación en bloque son más independientes de la configuración de la red. El del U.S. National Geodetic Survey (Dracup et al., 1973), ordenadas previamente las incógnitas para aproximarse a una banda, sin demasiado empeño en su optimización, dimensiona los bloques según la memoria disponible en la computadora por utilizar.

El programa del Institut Géographique National francés, con solución en Geodesia tridimensional, economiza memoria almacenando, tras un buen ordenamiento en banda de la matriz de las ecuaciones normales, solamente los términos comprendidos entre la diagonal principal y el primer término no nulo de cada columna. Descompuesta dicha matriz en bloques, cada uno de éstos debe tener dimensiones tales que al menos dos de ellos puedan entrar al mismo tiempo en la memoria principal (Le Menestrel, 1969).

Los programas del ex Army Map Service utilizan la disposición en banda, almacenando sólo los términos no nulos, con la información necesaria para su ubicación, con un arreglo ingenioso para alojar en la memoria auxiliar los pocos coeficientes que pueden resultar demasiado alejados de la diagonal principal.

Para más información sobre otros programas puede consultarse Méissl (1973).

3) Un método especial es el de Householder (resoluble también por iteración), que conduce a una solución única según el método de los cuadrados mínimos, sin formar las ecuaciones normales. Puede ser conveniente cuando el número de condición, o número de Todd, del sistema de ecuaciones de observación es grande, Baker et al., (1970); Kaplan, (1971).

### **Métodos iterativos.**

Estos métodos dan la solución de un sistema de ecuaciones en la forma del límite de una secuencia de ciertos vectores, obtenidos por un proceso uniforme llamado de iteración (Faddeeva, 1959). Se han intentado principalmente cuando las dimensiones de la matriz de ecuaciones normales excede la capacidad de la memoria central. Son más sencillos de programar, pero necesitan la elección de

un criterio de convergencia. Si ésta es muy lenta, deberán aplicarse métodos para acelerarla (Ashkenazi et al., 1973; Dufour, 1973b). Solamente es necesario almacenar los elementos no nulos, con su correspondiente localización. Cuando también se requiere la matriz de variancia - covariancia para análisis estadísticos de una red, son preferibles los métodos directos.

Una red extensa tendrá por lo general un sistema de convergencia lenta. En algunos casos, diversos métodos pueden converger a diferentes soluciones y aún es posible que uno converja mientras otro diverge. En algunos se recomienda observar resultados intermedios para modificar, si fuera necesario, un factor llamado de relajación, lo cual es un inconveniente para una programación automática. Un método bueno para una red puede ser inadecuado para otra. Ha habido advertencias acerca de que la estimación de un programa completamente automático puede fallar (Ashkenazi et al., 1972).

Ya en el simposio de Bruselas, en 1966, se mostró escepticismo acerca de la aplicación de métodos iterativos para grandes redes libres, y se reconoció la ventaja de ellos en el cálculo de redes apoyadas en una cantidad suficientes de puntos fijos, porque en este caso la convergencia es rápida (B.G. N° 86, pág. 402) lo que fue confirmado por las experiencias de la red francesa (Dufour, 1973a; Dufour, 1973b; Le Menestrel, 1969).

En Dufour (1973b) también se habla de métodos combinados, en los cuales la iteración se aplica a sistemas ya reducidos parcialmente por eliminación, pero no se mencionan experiencias. Los autores, siguiendo ideas del Ing. S. Horvat, realizaron un ensayo sobre un anillo con 126 ecuaciones normales, sin constante de orientación. Después de eliminar las cadenas, el sistema se redujo a 38 ecuaciones. Aplicado el método de Gauss-Seidel, se necesitaron 90 iteraciones para alcanzar una precisión del orden de  $10^{-5}$  en las incógnitas, ya calculadas por métodos directos. Debe tenerse en cuenta que las coordenadas aproximadas eran excelentes, ya que la máxima variación fue de  $0''.054$ . De la observación de los coeficientes de las matrices reducidas resultó que no se cumplían las condiciones previas para una rápida convergencia. Tampoco se cumplió uno de los más simples criterios para juzgar ésta, es decir, que la cantidad de iteraciones sea menor que el orden de la matriz del sistema, pero hay métodos mucho más convergentes que el usado.

Esta ha sido la única experiencia de los autores acerca de un procedimiento de iteración aplicado a una compensación geodésica.

En los últimos años se han realizado numerosos trabajos teóricos y experimentales sobre estos métodos. Al respecto pueden citarse Ashkenazi et al., (1972); Ashkenazi (1967); Ashkenazi et al., (1973); Dufour (1973a, 1973b); Saxena (1973), en los cuales se encuentra, además, abundante bibliografía.

Por otra parte, no debe perderse de vista que la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es más bien un problema matemático que geodésico.

Probablemente la técnica trabaje en pro de los métodos directos al ofrecer computadoras cada vez más potentes y veloces y con equipos periféricos con más eficacia y posibilidades.

Es evidente la importancia de la memoria central de la computadora para la elección de métodos. En Meissl (1973) se dice que la solución de sistemas de unas 200 incógnitas ya no son un mérito para sus autores. Las dificultades de una programación dependen de la relación entre la extensión prevista o prefijada

de una red y las posibilidades de la computadora accesible. Para muchos países en vías de desarrollo ésta puede ser una seria limitación.

En la literatura geodésica se mencionan redes pequeñas, grandes y muy grandes, sin una definición precisa de los límites entre ellas. Desde el punto de vista de las dificultades mencionadas en el párrafo anterior, puede adoptarse el siguiente criterio:

- a) Redes pequeñas se consideran aquellas cuyas ecuaciones normales pueden resolverse íntegramente en la memoria central, aunque para otros pasos se utilicen memorias auxiliares.
- b) Redes grandes son aquellas que requieren la descomposición en bloques o, si se prefiere, métodos iterativos; su matriz inversa es calculable.
- c) Redes muy grandes requieren la optimización de los métodos y presentan problemas en la estabilidad de las soluciones, aun para redes bien conformadas, sin contar con los requerimientos para flujo y control de datos. El cálculo de la matriz inversa se convierte en una imposibilidad práctica. En Ehlert (1973) se expresa que para la inversión de una matriz simétrica de orden 300 se necesitan unos 10 minutos y, puesto que el número de operaciones aumenta con la tercera potencia del orden, para un sistema de 3.000 se necesitaría una semana continua, aproximadamente. Por ello sólo se calculan partes selectas de esta inversa para analizar las zonas más interesantes o críticas de la red. Además, debe tenerse en cuenta que tendrá mucho menos términos no nulos que la matriz de las normales y aun puede resultar completamente llena. Una ventaja accesoria del procedimiento de banda es que permite calcular sólo una banda equivalente de la inversa, sin pasar por los términos fuera de ella, con la limitación, claro está, de obtener los términos de covariancia correspondientes únicamente a los pares de puntos que aparecen vinculados en las ecuaciones normales reducidas.

La Triangulación fundamental de la República Argentina (RFA) está constituida por cadenas paralelas y meridianas de cuadriláteros a doble diagonal y de triángulos-triláteros (lados y ángulos medidos). Estas cadenas están espaciadas aproximadamente dos grados de longitud o latitud, formando así los polígonos que soportan los órdenes inferiores de triangulación y poligonación. Una vez completada, la RFA consistirá de unos 3.000 puntos, distribuidos en 56 polígonos. El resto de los órdenes inferiores estará formado por unos 80.000 puntos.

Las mediciones regulares se iniciaron a raíz de la Ley de la Carta, promulgada a principios de la década del 40. Naturalmente, también antes se habían efectuado numerosos trabajos, que respondían a planes más limitados y menos sistemáticos. A fines de la década se habían medido por completo unos seis polígonos de la RFA, situación que justificó los primeros intentos de compensaciones rigurosas. Ya que se estaba entonces en la prehistoria de la computación electrónica, los cálculos se efectuaban con calculadoras electromecánicas de escritorio. Tal como se mencionó antes, se realizaron trabajos cada vez más extensos, hasta abarcar 10 polígonos de la RFA, con un total de 1.121 ecuaciones normales, que fueron resueltas en conjunto. La laboriosa formación de las ecuaciones en  $\phi$  y  $\lambda$  exigieron una cuota de esfuerzos desproporcionada a su efecto en las correcciones.

El método aplicado en la etapa de reducción de las normales, Pranis-Pr-

nievich-Helmert, fue sistematizado con aportaciones originales por el Dr. Nicolai Beljajew. Para las mallas de órdenes inferiores se ensayaron y pusieron en práctica procedimientos aproximados, bajo la dirección del Ing. Stefanu Horvat.

Posteriormente se agregaron 2 polígonos, y más tarde 3 más en condiciones forzadas, sin incluir ecuaciones poligonales en la compensación global. Los cierres poligonales se satisficieron luego por una distribución aproximada.

Aparecieron entonces en la Argentina las primeras computadoras electrónicas y el IGM hizo sus primeras armas con ellas (IBM 650 de tambor magnético). Más tarde el IGM pudo adquirir una IBM 1.620 con configuración mínima: lectora-perforadora de tarjetas y 2.000 palabras en la memoria de núcleos. La obvia limitación de ésta y la carencia de memorias auxiliares fueron obstáculo muy serio en los intentos de compensaciones globales que se sucedieron, pudiéndose solamente resolver con la IBM 1.620 algunos problemas geodésicos asilados.

En el año 1967 el problema de la compensación de la RFA se había tornado candente, por la cantidad de polígonos ya completados sin compensar, por la necesidad de recalcular aquellos en los cuales se habían descubierto errores y por la falta de programas eficientes. En ese momento surgió el ofrecimiento por parte del ex Army Map Service (AMS) de los EEUU, de facilidades para que dos técnicos del IGM pudieran trabajar en las oficinas centrales de aquella institución, en Washington D.C., adaptando los programas de compensación que allí estaban en uso, a las necesidades y posibilidades del IGM en Buenos Aires. Los autores del presente artículo fueron designados al efecto, comenzando su misión en Washington en septiembre de 1968. Para esta fecha, el objeto de la misma había sido ampliado, incluyendo como segunda alternativa, la preparación de un conjunto nuevo de programas, si la adaptación resultara desaconsejable.

Los programas del ex AMS estaban escritos en el lenguaje propio de la computadora Honeywell 800, de propiedad de esa institución y de la que no existían modelos en nuestro país. Esta circunstancia, sospechada desde antes de su partida de Buenos Aires, disuadió a los autores de una adaptación más o menos directa de aquellos programas. Por otra parte, los programas para el IGM debían poder procesarse en una computadora de potencia mediana y desafortunadamente, el método usado en los programas del ex AMS no garantizaba que se pudiera cumplir con esa prudente condición. En consecuencia, debieron dedicarse a elaborar un juego de programas nuevo por completo y, tras el análisis y estudio necesariamente breve, fue iniciada la tarea, respondiendo ésta a las características básicas siguientes:

- 1) **Método general:** Variación de coordenadas geográficas.
- 2) **Reducción de las normales:** Método directo de eliminaciones en bloques.
- 3) **Incógnita de orientación:** Eliminada en las ecuaciones de observación.
- 4) **Condiciones fijas:** Se utilizan para eliminar incógnitas. (Existe sólo un tipo de ecuaciones normales.)

La distinción más saliente respecto de otros ejemplos de aplicaciones del método de Helmert-Pranis-Franievich hasta ahora publicados, es la posibilidad de ejecutar las eliminaciones en varios bloques durante una misma etapa del proceso. La operación puede realizarse sobre los bloques que no registran vinculaciones entre sí. Tal es el caso de los tramos de cadena de la RFA, si se aíslan por conjuntos de puntos de adecuada elección en los nudos. Y los nudos no unidos por tramos de cadenas constituyen también bloques que pueden tratarse en

forma simultánea. Es así como la estructura de la RFA conduce más o menos fatalmente a un aprovechamiento de esas posibilidades. La clasificación y el orden de eliminación de tramos y nudos se señalan a la computadora en forma simple, por tarjetas Hollerith, que se introducen con las que contienen los parámetros y las observaciones, en forma tal que el procedimiento es del todo automático. Como resulta obvio, esta clase de programación requiere múltiples unidades de memoria auxiliar, cuya cantidad los autores se esforzaron a reducir a un mínimo; en particular, el programa de reducción de normales utiliza cuatro unidades de organización secuencial, por lo cual es posible usar indistintamente cintas o un disco magnético.

El procedimiento propuesto por Helmert-Pranis-Pranievich para reducir grandes sistemas de ecuaciones "rales", cuando es aplicado en forma manual, brinda un beneficio muy importante: permite la distribución de cálculo entre varias parejas de calculistas. El mismo procedimiento, aplicado con computadora, no puede, obviamente, aprovechar esta facilidad. Parece existir, sin embargo, otro dividendo, ya que la adecuada distribución y el ordenamiento de los bloques conduce a una sensible disminución en el tiempo de proceso.

Alterar el orden de eliminación de los bloques es una operación sencilla, pues dicho orden se indica con un código ajeno a la designación de los puntos que constituyen los bloques. La facultad de poder designar los puntos con un criterio independiente del tratamiento que sufrirán las incógnitas vinculadas en el proceso de eliminación es importante, no sólo por la flexibilidad que confiere a los programas en cuanto a ese proceso, sino porque permite la designación sistemática de los puntos, condición **sine qua non** para la creación y mantenimiento de un sistema automatizado de archivo de puntos y observaciones. Sobre este archivo se volverá luego.

Es así como los puntos son designados por su "número de monografía", que es la nomenclatura usada por el IGM para nombrar los puntos de sus redes, y que se componen de tres grupos de caracteres, el primero indicando la unidad geodésica, el segundo el orden a que pertenece el punto y el tercero de un número de hasta cuatro dígitos, que no se repite dentro de una misma unidad geodésica.

Con el objeto de poder usar los programas en redes de otras instituciones se introdujo la opción de utilizar un código de designación arbitrario, consistente en cifras de hasta 7 dígitos.

Otras opciones se incluyeron en los programas, siempre con vistas a lograr mayor flexibilidad en la preparación de los datos: entre ellas se pueden mencionar:

1) Simplicidad para cambiar de elipsoide, pues todas las constantes elipsóidicas se transmiten de programa en programa, a tiempo de ejecución.

2) Completa automaticidad en el proceso de eliminación de incógnitas a partir de las condiciones fijas que el preparador haya decidido introducir. Cualquier configuración o combinación técnicamente razonable de condiciones fijas es analizada por los programas, que seleccionan las incógnitas más favorables para despejar. Sin perder de vista las posibilidades de introducir las observaciones de distancia y azimut como tales y no como condiciones fijas, procedimiento contemplado por los programas como es lógico, se incluyeron en éstos los pasos, necesariamente complejos, para el tratamiento completo de condiciones fijas, con el objeto de:

1) Poder procesar las diferentes "parejas azimuth-base" que se presentan en cada intersección de cadenas de la RFA.

2) Resolver configuraciones donde el orden de magnitud o el peso asignado a una observación puedan causar inconvenientes en la solución de las normales.

A lo largo del proceso, los programas autocontrolan su lógica y, al final del mismo efectúan varios tipos distintos de controles aritméticos con las soluciones. La inclusión de todos estos controles se justifica porque:

Facilitan la identificación de los errores groseros;

Proveen una estimación de la precisión de la solución;

Diagnostican los errores de programación, que eventualmente pudieran surgir, y que se hubieran deslizado a través de las pruebas y ensayos realizados.

Ya que los programas se elaboran previendo usar una computadora de mediana capacidad, se debió pagar tributo por ello, consistente en un aumento en la complejidad de los programas y en la cantidad de éstos. Para compensar triangulaciones puras, se debieron preparar 32 con numerosas subrutinas, a las cuales se debieron agregar tres programas más, para poder procesar redes con observaciones de distancia y azimuth. En total, 35 programas y unas 30 subrutinas. Se utilizó el lenguaje FORTRAN IV y fue necesaria una elevada cantidad de pruebas de programa para poder ponerlos a punto. En esta tarea los autores contaron con el consejo y ayuda entusiasta de los profesionales y técnicos del ex AMS, y con abundantes facilidades para usar los equipos de esa institución.

De retorno a Buenos Aires, se intentó, con poco éxito, hacer funcionar los programas en una computadora de tipo comercial. Por lo contrario, usando un equipo mejor orientado al trabajo científico, la adaptación fue prontamente concluida. Ya que las técnicas usadas en la programación implican el uso intenso de memorias auxiliares, discos o cintas, fue afortunado poder manejarlas por medio del lenguaje del Operative System (OS) de IBM, que garantiza, a costa de cierta complejidad y rigor, la correcta asignación, protección y acceso a esas memorias.

En la publicación de Christensen et al., (1973) constan más detalles sobre la programación.

A la fecha se han usado los programas en numerosas instancias, para anexar forzosamente varios grupos de polígonos al marco de los 19 compensados durante la misión de los autores en EEUU, para mallas de triangulación de primer orden inferiores y para compensar redes de poligonales. Uno de los trabajos efectuados hace poco, la compensación de cuatro polígonos al Sur, tras varios ensayos para depurarlos de errores groseros, requirió 589 segundos de CPU (Central Processor Time) en total, de los cuales 209 segundos se invirtieron en la etapa de comprobaciones y listados de resultados. La formación y reducción de 350 ecuaciones normales demandó 109 segundos de CPU. La red está formada por 181 puntos, 6 puntos fijos y 1.000 observaciones de todo tipo. El costo de computadora facturado fue, naturalmente, insignificante frente al del trabajo preparatorio, y aún más frente al trabajo de campo.

Con estos 4 se han completado 26 polígonos de la RFA, todos los cuales están compensados, libre o forzosamente, integrando un sistema homogéneo con las 18 mallas de primer y segundo orden intercaladas en ellos. En lo futuro se continuará sin duda anexando los nuevos polígonos, por medio de compensaciones forzadas, hasta que la magnitud y distribución de las correcciones demues-

tren que una compensación global es recomendable. El problema de compensar las redes de órdenes superiores, con los programas aquí descritos, está, pues, resuelto. El problema que no pueden resolver de modo eficiente es el que presentan las redes de III y IV orden, que, desde la Ley de la Carta, han sido calculadas con procedimientos expeditivos, apoyándose en resultados de órdenes superiores preliminares o ya obsoletos por las nuevas compensaciones. No pueden resolver de modo eficiente porque fueron pensados para la RFA, y con este fin, los programas utilizan recursos y caen en complejidades que son desaprovechadas cuando se los utiliza para conjuntos de puntos intercalados. Además, el procedimiento de eliminación simultánea en bloques no se presta, tal como fue encarado, para una malla continua. La limitación impuesta por una memoria de núcleos mediana no permite el cálculo simultáneo de una malla continua con gran cantidad de puntos. Por lo cual los 20.000 puntos de orden menor deberían ser distribuidos en unos 500 grupos de 40 puntos cada uno, y compensados.

Intentar fraccionar la tarea hasta este extremo, con la elevada probabilidad existente de aparición de errores groseros, significaría un período de trabajo intolerablemente prolongado.

Parece entonces razonable preparar un nuevo juego de programas, que funcione en forma eficiente para el caso de mallas intercaladas. La recomendación de Dufour al respecto (Dufour, 1973b), merece seguramente ser seguida en esta coyuntura, usando aquí, donde una rápida convergencia puede sospecharse, algún método indirecto para la solución de las normales.

La necesidad de reducir al mínimo la incidencia de errores groseros (en la preparación de datos y también en la compilación y cálculos preliminares) sigue, sin embargo, en pie. Para satisfacer esa necesidad será conveniente comprobar las coordenadas preliminares y las observaciones por un procedimiento ilustrativo y automatizado. Recurrir aquí a graficación por computadora será, quizá, una operación redituable.

La organización que se establezca para compilar, depurar y presentar los datos de cada compensación a la computadora será de relevante importancia, quizá tanta, aunque de otro género, como la elección del particular método de reducción de normales. Debe tenerse presente que a los 20.000 puntos existentes a la fecha se agregarán 60.000 más, cuando se haya terminado el trabajo encomendado al IGM por la Ley de la Carta.

La magnitud de la tarea se manifiesta en la cantidad de datos por preparar:

Por lo menos 500.000 direcciones, distancias y azimutes observados y las 60.000 coordenadas preliminares que habrán de calcularse en las etapas previas a la compensación.

Por otra parte surge la necesidad de montar un buen sistema de depuración de errores, almacenamiento y retiro de información, en el cual la computación electrónica será constituyente esencial. Las funciones de tal sistema se podrán extender para incluir la de dispersión de información, coordenadas y valores compensados, satisfaciendo a terceros, cuya cantidad, en un país con vastas necesidades de desarrollo y de obras civiles, con seguridad aumentará en lo futuro.

Un vasto campo de experimentación permanece abierto, ya que un trabajo como el descrito aquí muy difícilmente puede considerarse definitivo. Además

de los puntos propuestos a lo largo de este artículo, los autores se aventuran a sugerir los temas siguientes:

- 1) Inclusión de un programa para calcular los errores posicionales y los  $\sigma\varrho$ ,  $\sigma\alpha$ ,  $\sigma\beta$  en porciones selectas de una red compensada.
- 2) Experimentación con fórmulas de inversión geodésica.
- 3) Predicción de la precisión alcanzable en el planeamiento de futuros trabajos y determinación del límite que no conviene exceder en cuanto a cantidad y calidad de las observaciones.
- 4) Investigación de la posibilidad de una compensación global y simultánea de cadenas y mallas de primer orden. Al existir en Buenos Aires computadoras de potencia adecuada, los programas elaborados, con algunas modificaciones, podrían permitir la compensación simultánea de los 6.000 puntos de cadena y malla previstos para toda la República.

Este procedimiento sustituirá al "jerárquico" actualmente en práctica, que causa los serios forzamientos en las mallas señalados por Horvat en su estudio de las mallas 3H y 4H, abriendo entonces el camino para planear soluciones menos onerosas para los futuros trabajos de campo o evitar refuerzo en las cadenas ya medidas.

#### NOTA

Partes de este artículo fueron leídas como informe sobre la compensación argentina en la VII Reunión de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas. Como un trabajo con historia, detalles y algunos resultados de esta programación fue presentado en el Simposio de Cálculos Geodésicos de la Asociación Internacional de Geodesia, Oxford, 1973, los autores han creído conveniente, en este trabajo, tratar con más generalidad el problema y actualizarlo con información y bibliografía posteriores a la concepción de dicha programación (1968-1969).

#### BIBLIOGRAFIA

- Ashkenazi, V., 1967: *Solutions and error analysis of large geodetic networks. Survey Review*, n. 146 y 147.
- Ashkenazi, V., 1973: *Criteria for optimisation: a practical assessment of a free network adjustment. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Ashkenazi, V., Wood, R. y Hamilton, M. A., 1972: *On the difficulties arising from the S.O.R. iteration operating on large geodetic matrices. Bolletino di Geofisica Teorica ed Applicata*. v. 14, n. 55.
- Ashkenazi, V. y Wood R. C., 1973: *Merits of the conjugate gradients method for solving geodetic normal equations. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Baker, J. y Lewicke, V., 1970: *A variation of coordinates adjustment using Householder transformations. U.S.A. Topocom, Bull. Geod. n. 97, Washington D.C.*

- Bomford, A. G., 1967: *The geodetic adjustment of Australia, 1963-1966. Survey Review*, n. 144.
- Bomford, A. G., 1973: *Geodetic models of Australia. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Christensen, A. H. J. y Elias, A. V., 1973: *Programación de la compensación de las redes del Instituto Geográfico Militar. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Davies, M. J. K., 1973: *The experiences of the Ordnance Survey in processing large networks. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Dracup, J. F. y Gergen, J. G., 1973: *The least squares adjustments of large geodetic networks. U. S. National Geodetic Survey. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Dufour, H. M., 1973a: *Propriétés des systèmes lineaires symétriques déduites de leur forme spectrale, Institut Géographique National. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Dufour, H. M., 1973b: *Rapport du groupe special d'études 4.35. "Résolution des grands systèmes lineaires". I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Ehlert, D., 1973: *On the use of Helmert's Method of Block Adjustment. Institut für Angewandte Geodäsie. I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Faddeeva, V. N., 1959: *Computational methods of linear algebra. Traducido del ruso por C. D. Benster, Dover Publications, Ind. New York.*
- Kaplan, M., 1971: *Reduction and solution of linear equations with special optimizing features for banded Systems. U.S. Army Topographic Command.*
- Le Menestrel, J., 1969: *Compensation du réseau géodésique français de premier ordre. Inst. Géographique National France. Bull. Geod. n. 94.*
- Meissl, P., 1973: *Report of special study group 4.38 I.A.G. "Computer Techniques in geodesy" I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Rainsford, H. F., 1957: *Survey adjustments and least squares. Constable y Co. Ltd. Londres.*
- Saxena, N. K., 1973: *Adjustment technique without explicit formation of normal equations (conjugate gradient method). Department of Geodetic Science. The Ohio State University, I.A.G. Symposium on computational methods in geometrical geodesy, Oxford.*
- Walker F., 1967: *Adjustment of astrogeodetic triangulation network. Techn. Report n. 60 Army Map Service. (now U.S. Topocom).*
- Whitten, C. A., 1951: *Adjustment of european triangulation. U.S. Coast and Geodetic Survey. I.A.G. General Assembly, Bruselas.*