INDUCCIÓN Y DEDUCCIÓN, SUS DIFERENCIAS

Si hay una ciencia que más que ninguna otra está obligada a cuidar la precisión de los términos que emplea, ella es la lógica; y sin embargo, sea porque aún no ha podido — o no ha querido — constituirse como disciplina independiente, y no puede evitar por eso las fluctuaciones de sentido inherentes a la terminología filosófica; sea porque en su mismo seno hay problemas de concepto para los cuales no hay aún solución unánime, tal exigencia no siempre se cumple en ella, ni siquiera para aquellos términos que corresponden a contenidos de la mayor importancia. La lógica, que en estructura y en esencia tanto se parece a la matemática, debe cuidar más que ésta la univocidad de su lenguaje, porque si es cierto que no siempre es posible definir entes matemáticos como el punto, la recta, el número, etc., todos están de acuerdo en reconocerlos y en postular sus relaciones y propiedades, mientras en lógica, ciencia del concepto, sin ningún medio auxiliar intuitivo, todo debe fluir de inevitables definiciones.

Nos proponemos, pues, en esta nota, y a modo de ejemplo, referirnos al significado de los dos términos capitales, *inducción* y *deducción,* reduciendo si es posible las múltiples acepciones en que se los toma, y refiriéndonos, al final, a la oposición por contrariedad o por contradicción que algunos ven en los mismos y que otros niegan. Como perseguimos un fin didáctico y no nos preocupamos sino de la claridad que ha sido el constante anhelo de la lógica de todos los tiempos, no omitiremos, cuando sea necesario, aun las consideraciones más elementales.

Ya Stuart Mill, en un capítulo preliminar de su teoría de la inducción (1) señala respecto de este término diversas acepciones que rechaza, para aislar una sola, la única legítima para él, y que hoy suele llamarse inducción incompleta o amplificante.

« La inducción — dice — es el procedimiento por el cual concluímos que lo que es verdad de ciertos individuos de una clase, es verdad de la clase entera; o también, que lo que es verdad algunas veces lo será siempre en circunstancias análogas». De acuerdo con esta definición (y otras más precisas que va presentando después) excluye las siguientes acepciones que aquí anotaremos como base de análisis, sin prejuzgar si merecen o no el nombre de inducción y cambiando algo la manera de presentarlas.

Primera acepción : inducción completa. — El paso de una serie finita de proposiciones singulares (o particulares) a una proposición que las comprenda a todas y a ninguna otra.

A, B, C, D, son P, Marte, Venus, Mercurio, etc., brillan con luz refleja;

Todos los S son A, B, C, D. Todos los planetas del sistema solar son Marte, Venus, etc.;

Luego, todos los S son P. Todos los planetas del sistema solar brillan con luz refleja.

Como se puede ver, tanto en el esquema como en el ejemplo, dicho razonamiento tiene estos caracteres :

a) No es una inferencia, en el sentido de paso de lo conocido a lo desconocido, por lo menos aplicado a los hechos naturales, pues el consecuente no hace sino repetir el antecedente, con el simple cambio formal de denominación en el sujeto;

b) La relación de antecedente a consecuente es necesaria, por ajustarse íntegramente al principio de identidad;

c) Es reductible a la forma silogística, con la salvedad de que el término medio no es un universal o una clase en el sentido estricto de estas palabras, sino una suma o clase limitada de individuos (o de especies). Está demás decir que la teoría de la inducción completa fué hecha por Aristóteles.

(1) J. STUART MILL, *Sistema de lógica*, volumen I, libro III, capítulo II. Los párrafos que transcribimos pertenecen a este capítulo.

Segunda acepción : primera clase de inducción matemática. — Una proposición demostrada para *una* figura (antecedente), se considera válida para *toda figura* que tenga los caracteres que han intervenido en la demostración (consecuente).

Ejemplo : Se ha demostrado ya que en el triángulo ABC (dibujado o imaginado) la suma de sus tres ángulos interiores es igual a 2R. Siempre que en la demostración no se haya hecho intervenir ninguna determinación propia de ABC, y sí sólo su mera condición de triángulo, el teorema será válido para todo triángulo.

A nuestro modo de ver y apartándonos de lo que suele pensarse al respecto, esta forma de relacionar (o si se quiere, de razonar) *no es tampoco una inferencia,* si inferir significa pasar de lo conocido a lo desconocido, y presupone pues novedad de la conclusión. ¿ Dónde está, en efecto, la novedad de la conclusión ? El triángulo ABC, sujeto del antecedente, cuando no se toma en él ninguna determinación particular y sí solamente su condición genérica de triángulo, *equivale a todo triángulo, cualquier triángulo,* sujeto del consecuente. Es decir, el antecedente y el consecuente constituyen la misma proposición, no existiendo pues inferencia entre ambos.

Al referirse S. Mill a esta inducción (que para nosotros no es tal) y que él llamó inducción por razonamiento *a pari,* pone de manifiesto el mismo error y ese su rígido empirismo que para muchos resulta intolerable. Véase sino. « Habiéndose mostrado que los tres ángulos del triángulo ABC suman dos rectos, concluímos que ello es verdad para todo triángulo, no porque sea verdad de ABC, siño por la misma razón que probaba que era verdad para ABC... El carácter distintivo de la inducción falta, porque la verdad obtenida aunque general, no está obtenida sobre la fe de los ejemplos particulares. No concluímos que todos los triángulos tienen la propiedad porque algunos la tienen, sino en virtud de la demostración que produjo nuestra convicción *en los casos particulares* ». Como se ve, a pesar de que en el primer párrafo caracteriza bien la demostración geométrica, en el último (aunque en forma tenue) no ocurre lo mismo, pues el plural *casos particulares* es inadecuado. Por supuesto, al reprocharlo no queremos ver en él un indicio de que S. Mill creyera necesario variar las figuras, cosa absurda que él explícitamente niega. Nos parece inadecuado *casos particulares,* porque ABC, A′B′C′, A″B″C″, etc., no son casos, son la misma cosa o sea el triángulo genéricamente considerado. El empirista aun en el dominio matemático no concibe operaciones hechas sobre lo universal. « Que la figura sea trazada sobre el papel o solamente con la imaginación, la demostración... no prueba directamente el teorema general; prueba solamente que la conclusión presentada como general por el teorema, es verdadera para el triángulo o el círculo particular mostrado por la figura; pero, como lo que hemos probado de ese círculo, podríamos de la misma manera probarlo de todo otro círculo, *unimos en una expresión general todas las proposiciones singulares susceptibles de ser demostradas así y las incorporamos en una proposición universal.* » Contrarias en absoluto al espíritu y al método de las matemáticas nos parecen estas consideraciones empiristas.

Tercera acepción : Segunda clase de inducción matemática. — De una verdad comprobada para un cierto número de casos seriados (antecedente) se infiere una proposición que comprende la serie entera indefinida (consecuente).

Un ejemplo clásico de este método es el que cita el mismo S. Mill : « Se dice que Newton descubrió el teorema del binomio por inducción, elevando sucesivamente un binomio a un cierto número de potencias y comparando estas potencias entre sí, hasta que descubrió la relación de la fórmula algebraica de cada potencia con el exponente de ésta, y los dos términos del binomio. »

Los caracteres principales de este razonamiento son, a nuestro modo de ver, los que siguen :

a) Es efectivamente una inferencia, porque va de lo conocido a lo desconocido;

b) Procede de lo particular (constatación en diversos casos) a una ley general. Es pues (por lo menos en el sentido corriente de la palabra) una inducción;

c) Carece de valor lógico suficiente, siendo como es una simple generalización por analogía. Como procedimiento inventivo puede ser eficaz, aunque de hecho ha traído muchísimos errores. Recordaremos el pretendido teorema de Fermat, obtenido por el procedimiento que comentamos. Según Fermat $2^\alpha + 1$ es un número primo, para cualquier valor entero de α. En cambio, siendo cierto para $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ deja de serlo para $\alpha = 5$ (1).

Cuarta acepción : Tercera clase de inducción matemática. — De una verdad comprobada para un cierto número de partes o elementos de un mismo hecho se infiere la misma verdad para todos los elementos o partes.

Este procedimiento, aunque análogo al anterior, tiene algunas singularidades que conviene examinar aparte. Lo llamaremos nosotros, *inducción por interpolación ;* y su uso, como método inventivo es frecuente y suele ser fecundo. Un ejemplo célebre es la determinación de la órbita de Marte hecha por Kepler, y lo trae S. Mill tomándolo del historiador de la ciencia Whewell.

También en este caso hay inferencia inductiva, pues de un número limitado de observaciones (determinaciones de puntos de la órbita) se infiere una ley general. La proposición *Marte describe una órbita elíptica,* singular si se considera el sujeto Marte, es en su sentido matemático, universal. *(Todos los puntos de la órbita de Marte, pertenecen a una elipse,* o si se quiere, *todos los puntos de la órbita de Marte obedecen a la misma ecuación.)* Este nuevo sujeto : todos los puntos, etc., es una verdadera clase, es decir, un conjunto infinito de entes.

Sin embargo, S. Mill, más que una inducción (en el sentido que él da a esta palabra) ve en este ejemplo, un caso de *coliga-*

(1) Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique,* 3ª edición, páginas 485 y siguientes. Otro ejemplo interesante, mencionado también por Brunschvicg, es el teorema empírico de Goldbach, aún no demostrado, pero verificado para muchísimos números : *todo número par es la suma de dos números primos.*

Mencionaremos nosotros el llamado *último teorema de Fermat :* Una potencia n no puede ser la suma de dos potencias del mismo grado n (siendo las bases números enteros, y n un entero mayor que 2). Dicha proposición está demostrada para un gran número de valores de n, y *se supone* por analogía que valga para todos, a excepción de 2, no habiéndose encontrado una demostración general. Véase Mordell, *Le dernier théoreme de Fermat,* París, 1929.

ción, es decir, « una operación descriptiva por la cual una multitud de detalles son totalizados en una sola proposición », como cuando un navegante que costea una tierra afirma al final que es una isla. Nos parece que ambos casos son distintos y poco convincentes las razones que da S. Mill para identificarlos. En este último caso hay realmente una simple descripción y nunca una inferencia, mientras que la obtención de una ley mediante un número limitado de observaciones es una inferencia. Claro está que si se dice : los puntos que he observado pertenecen a una elipse, esta frase es una descripción o un resumen de las observaciones mismas ; pero otra cosa, mucho más, es decir : la órbita de Marte es elíptica. En el siguiente párrafo de S. Mill hay, nos parece, un error : « ... Es ciertamente un hecho que el planeta describe una elipse, un hecho que veríamos si tuviéramos órganos visuales suficientemente poderosos, y si estuviéramos convenientemente colocados. Privado de estos recursos... y sabiendo qué es una elipse, Kleper se puso a buscar si las posiciones observadas del planeta respondían a esta curva. Encontró que ellas concordaban y, en consecuencia, afirmó como un hecho que el planeta se mueve según una elipse [¡ Advierta el lector que aquí está la inducción !]. Pero este hecho de que Marte ocupaba sucesivamente los puntos de una elipse, era el mismo hecho cuyas partes separadas habían sido observadas una a una ; *era la suma de las diferentes observaciones* ». En esta frase final, que subrayamos, está el error ; y su génesis, en el término *hecho,* enfáticamente repetido, y que nos pone, aparentemente por supuesto, en el terreno de lo singular. En realidad, como dijimos ya, *el hecho* de ser la órbita una elipse, es para el astrónomo una ley de movimiento que siguen una infinitud de puntos o posiciones. La proposición que analizamos no es pues, una suma de diferentes observaciones ; es un paso de lo particular a lo universal, de varios individuos a la clase que los incluye, es decir, una inducción.

Quinta acepción : Cuarta clase de inducción matemática. — La más importante de todas las formas de inducción matemática no figura en la serie de acepciones que S. Mill rechaza como diferentes en su esencia, de la verdadera inducción. Y sin embargo, ella es la que plantea el problema más interesante, pues son muchos los lógicos contemporáneos que la consideran como deducción y no como inducción. Nos referimos a los llamados razonamientos por recurrencia, que Poincaré consideraba como los únicos realmente fecundos en matemáticas, frente a la mera deducción silogística a la que no asignaba sin el influjo de aquéllos, sino el carácter de tautología.

Se la formula más o menos en estos términos: «Si al suponer que una propiedad es verdadera para m resulta que es verdadera para $m + 1$, y si se sabe por verificación o por demostración que es verdadera para n, ella será verdadera para todos los números a partir de n»; o más sencillamente: «Si un teorema es cierto para el número 1 y se ha demostrado que es cierto para $m + 1$ con tal que lo sea para m, será cierto para todos los números enteros positivos» (1).

Veamos un ejemplo: supongamos que se quiere demostrar

$$(1 + x)^n > 1 + nx \qquad \text{siendo } n \geqq 1.$$

1° Admitamos como hipótesis que esta proposición sea cierta para m

$$(1 + x)^m > 1 + mx$$

multiplicando ambos términos por $1 + x$ resulta

$$(1 + x)^{m+1} > (1 + mx)(1 + x)$$

o sea

$$(1 + x)^{m+1} > 1 + mx + x + mx^2$$

o bien

$$(1 + x)^{m+1} > 1 + (m + 1)x + mx^2$$

y con mayor razón

$$(1 + x)^{m+1} > 1 + (m + 1)x.$$

Es decir, que admitiendo cierto el teorema para m resultó cierto para $m + 1$, con lo que se cumple una parte del razonamiento por recurrencia.

(1) La primera definición es de Goblot, *Traité de logique*, página 259; la segunda es de Poincaré, *La ciencia y la hipótesis*, traducción castellana, página 64. Hemos repetido el ejemplo de Gablot por su sencillez y claridad, pero hubiera sido más interesante demostrar con él, la fórmula del binomio de Newton.

La otra parte es una demostración particular o verificación : sea el exponente 2, es decir, $n = 2$. Se tiene :

$$(1 + \alpha)^2 > 1 + 2\alpha.$$

Esto es cierto evidentemente. Si se desarrolla el primer miembro se tiene en efecto

$$1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha.$$

Si es cierto pues el teorema para $n = 2$ y si siendo cierto para m resultó cierto para $m + 1$ sera cierto para $n = 3$, y así sucesivamente para 4, 5, 6 etc.

Como se ve por la definición y el ejemplo, el antecedente del razonamiento por recurrencia consta de dos partes : 1ª de una proposición válida para un número n (n no expresa un número cualquiera, sino uno determinado, generalmente 1); 2ª de un teorema demostrado de otro modo, que permite inferir, de la verdad del teorema para m, la verdad del teorema para $m + 1$.

El consecuente es la serie indefinida de los siguientes juicios singulares : la proposición será cierta para n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, etc., indefinidamente.

Los caracteres esenciales del razonamiento por recurrencia son estos :

a) Es una inferencia (paso de lo conocido a lo desconocido);

b) Es inductivo, pues va de *un caso* a una proposición universal (dado que la serie de los números enteros es infinita);

c) Es necesario, y como tal tiene no sólo un valor inventivo, sino plenamente demostrativo;

d) Incluye probablemente un elemento sintético, en este sentido : que la proposición univsrsal no se demuestra en un solo acto, sino en actos iguales y sucesivos sin limitación ;

e) Supone como procedimiento, una demostración deductivo-analítica anterior sin la cual no es posible. Sobre este punto ha insistido Goblot, oponiéndose a la excesiva importancia que Poincaré diera al razonamiento por recurrencia, por influjo de la doctrina kantiana de los juicios matemáticos como síntesis *a priori ;*

f) « No se aplica sino a la serie natural de los números enteros » (1).

¿Hay algo de común a los distintos procedimientos que acabamos de enumerar? ¿Pueden, a justo título, englobarse bajo el término genérico de inducción?

En realidad ellos muestran, bajo una cierta diversidad de presentación, dos conceptos fundamentales, a veces unidos, a veces separados. El primero de ellos, que en cierto modo es el que les da el nombre de inducción, es la idea de una progresión del hecho a la ley, de lo singular a lo universal, de la especie al género. El segundo es el carácter, o bien de necesidad o bien de contingencia, que acompaña a unos o a otros.

¿Cuál de estos dos caracteres debe prevalecer? ¿Hemos de considerar esencial a la inducción esta progresión hacia la fórmula genérica; y el carácter de necesidad más bien como un signo de que estamos frente a la deducción, en cuyo caso podría haber una inferencia a la vez deductiva e inductiva? Dejemos sin respuesta, por un momento, estas dos preguntas, para ver antes nuestro problema en su otro punto simétrico: la deducción.

El *Vocabulaire de la philosophie,* de Lalande (2), la define de este modo: « Operación lógica por la cual se pasa de una o varias proposiciones consideradas en ellas mismas (sin afirmar o negar su verdad) a una proposición que es su consecuencia necesaria en virtud de las leyes lógicas »; y agrega a título de comentario crítico: « Nada autoriza a identificar la deducción con el silogismo, ni a considerarla como yendo de lo general a lo particular ».

Estas restricciones nos indican claramente que, con el tér-

(1) Goblot, *Ídem,* página 260. A él pertenece el enunciado de estos dos caracteres.

(2) Volumen I, página 145. La restricción *sin afirmar o negar su verdad* (que no interesa a nuestro análisis) está para distinguir, de conformidad con las ideas actuales y también con la tradición aristotélica, entre *simple deducción* y *demostración* (esta última, con antecedentes o premisas necesarias).

mino deducción se suele designar también procedimientos diversos. Ateniéndonos, pues, al método que hemos seguido daremos varias acepciones de la palabra deducción.

1ª *Como sinónimo de silogismo o de sus combinaciones.* En este caso, de conformidad con la conocida definición arístotélica, los caracteres más importantes son:

a) La mediatez, dos premisas (y no más);

b) La necesidad de la conclusión;

c) La novedad de la conclusión, no aceptada por quienes nieguen lo universal (escépticos griegos, nominalistas, empiristas ingleses, etc.);

d) El paso de lo universal a lo universal igual, a lo particular o a lo singular (1).

2ª *Deducción matemática de tipo analítico* (aritmética, álgebra, etc.) en que el uso de los axiomas en una proposición cualquiera es interpretada (quizás impropiamente) como el paso de lo general a lo particular.

Su carácter esencial es, como antes, la necesidad analítica que nace de las leyes lógicas, siendo también discutible la novedad de la conclusión (proceso tantológico, según algunos).

3ª *Deducción matemática mediante figuras, construcciones, transportes,* etc., cuyo carácter esencial es también la necesidad; pero no sólo la que emana de los principios lógicos (analítica), sino también la que resulta de nuestra manera de intuir el espacio (sintética). Este tipo de deducción, contrariando la acepción tradicional, puede ir de lo particular a lo general, como lo ha demostrado definitivamente Goblot *(Logique,* cap. IX, *Le raisonnement déductif).*

Ejemplo: la demostración de que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a (n — 2) 2R (consecuente) partiendo de la proposición : la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 2R (antecedente). Hay, como es fácil ver, el paso de lo particular a lo general, en el sentido de que triángulo es especie del género polígono.

(1) En LALANDE, *Vocab.* citado, volumen II, página 1001, hay comentarios importantes sobre este punto.

Ya estamos en condiciones de responder a aquellas preguntas y de formular las siguientes conclusiones :

a) Debe reservarse el nombre de deducción a toda inferencia necesaria (en cualquiera de los dos sentidos arriba indicados). Carácter necesario;

b) Debe darse el nombre de inducción a toda inferencia que vaya de lo particular a lo general, de lo singular a lo universal, etc. Carácter progresivo;

c) Deducción e inducción no son términos opuestos, pues responden a conceptos distintos (1);

d) El razonamiento por recurrencia es, a la vez deducción (por su carácter de necesidad) e inducción (por su carácter progresivo);

e) La inducción completa no es una inferencia en el dominio de la experiencia. En las ciencias formales es una inferencia deductiva y, a la vez, inductiva;

f) Lo que hemos llamado 1ª clase de inducción matemática no es ni inducción ni deducción, es inexistente;

g) Lo que hemos llamado 2ª clase de inducción matemática, es en efecto inducción, pero válida tan sólo como procedimiento inventivo (no tiene, como prueba, fundamento lógico suficiente);

h) Lo que hemos llamado 3ª clase de inducción matemática, es también inducción pero no válida como prueba. Unida a otros criterios (regularidad de la órbita de los astros, en el ejemplo citado) puede ser equiparada a la inducción incompleta o científica;

i) El silogismo y la deducción matemática de tipo analítico son exclusivamente deducción;

j) La deducción matemática constructiva, es a la vez deducción e inducción.

ALFREDO FRANCESCHI.

(1) Véase para esta conclusión muy importante, y que contraría la opinión tradicional en lógica, LALANDE, *Vocab.* citado, volumen II, página 1001 y volumen I, página 145. Sobre el concepto de inducción y sus relaciones con la deducción, véase también LALANDE, *Les théories de l'induction et de l'expérimentation,* 1929.