# SOBRE EL CALCULO DE LA ABUNDANCIA HIDROGENO-HELIO EN LAS BINARIAS

*Por*

LIVIO GRATTON y MERCEDES I. CORVALAN

La teoría de la constitución interior de las estrellas, permite, como se sabe, calcular el contenido de hidrógeno y de helio de las mismas, partiendo de las masas, radios y luminosidad observadas. Así, por ejemplo, en un trabajo del año 1946, M. Schwarzschild [1] aplicó esta teoría al cálculo del contenido de hidrógeno y de helio del Sol.

Las ecuaciones fundamentales del método son:

1) La ecuación masa-radio-luminosidad (relación de Eddington) para el modelo considerado,
2) La ecuación

$$L = \int_0^R 4\ \pi r^2 \rho \varepsilon\ dr \qquad (1)$$

que da la luminosidad L, en función del radio R, de la distribución de la densidad $\rho$, y de la función de producción de energía $\varepsilon$, en el interior de las estrellas.

En principio, no se puede objetar nada a este método, pero en la práctica se pone de manifiesto una dificultad; efectivamente, se observa que mientras la ecuación masa-radio-luminosidad es con gran aproximación independiente del modelo que en particular se elija, la fórmula (1), es en cambio, muy sensible al valor de la temperatura $T_c$, en el centro de la estrella, porque si adoptamos como ley de producción de energía la que corresponde al ciclo de Bethe, resulta:

$$\varepsilon \sim T^n, \qquad (2)$$

siendo n un exponente de orden 18. Corresponde observar, por otra parte, que la temperatura central varía notablemente de un modelo a otro.

Con el fin de hacer una determinación del contenido de H y de He respectivamente X e Y sin que aparezca esta dificultad, nos hemos propuesto calcular dicho contenido utilizando únicamente la relación de Eddington. Puesto que tenemos dos incógnitas (X e Y) se necesitan, desde luego, dos ecuaciones, las cuales pueden obtenerse recurriendo a las dos componentes de un sistema binario, en la razonable suposición de que ambas tengan la misma composición química. Es evidente la necesidad de que las dos componentes de la binaria difieran bastante entre sí en el radio, masa y luminosidad, para que el sistema de ecuaciones esté definidos. Entre las binarias cuyos elementos se conocen con gran precisión, hemos elegido para el cálculo $\eta$ Cassiopeiæ y $\alpha$ Centauri cuyos datos físicos se encuentran en la tabla I.

TABLA I

| ESTRELLA | $m_v$ (1) | ESPECTRO (2) | PARALAJE (3) | MASA (4) | *log L* (5) | *log R* (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cen A | 0.06 | G4 | 0″756 ± 003 | 1.09 | + 0.104 | + 0.090 |
| B | 1.43 | K1 | | 0.88 | — 0.428 | — 0.052 |
| Cas A | 3.61 | G0 | 0″184 ± 005 | 0.70 | — 0.084 | — 0.082 |
| B | 7.35 | K5+ | | 0,44 | — 1.160 | — 0.246 |

NOTAS A LA TABLA 1:

[1] Magnitudes visuales del catálogo de Zimmer reducidas al sistema internacional.
[2] *Kuiper, G. P.* Ap. J. *88*, 472 (1938).
[3] Catálogo manuscrito conteniendo todas las medidas publicadas hasta la fecha, reducidas al sistema del catálogo de Schlesinger.
[4] Datos orbitales: *Strand. Leiden Ann.* Tomo XVIII/2, 1937.
[5] Las luminosidades han sido calculadas por medio de las correcciones bolométricas correspondientes al tipo espectral dado en las tablas de *Kuiper, G. P.* Ap. J. *88*, 429 (1938).
[6] Los radios han sido calculados según la fórmula:

$$\log D = -0.2\, M_b - 2 \log T_e + 8.440$$

Como ya se dijo, la fórmula de Eddington es poco sensible al modelo estelar; sin embargo, es conveniente usar un modelo que esté, dentro de lo razonable, de acuerdo con lo que se conoce acerca de la constitución interior de las estrellas. Nosotros hemos adoptado el modelo central con coeficiente de opacidad

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5} \qquad (3)$$

y con peso molecular medio $\mu$, constante [2].

En este caso, de la integración de las ecuaciones resulta, llamando M a la masa,

$$\log L = 24.716 + 7.5 \log \mu - \log \kappa + 5.5 \log M - 0.5 \log R, \qquad (4)$$

donde L, M y R se obtienen de las observaciones, y $\mu$ y $\kappa$ están relacionados con X e Y de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{1}{2X + 0.75Y + (1 - X - Y) n_R} \qquad (5)$$

$$\log \kappa_0 = 25.633 - \log \frac{t}{g} + \log (1 + X)\ (1 - X - Y) \qquad (6)$$

En estas dos ecuaciones, el factor de ionización $n_R$ de los elementos pesados (mezcla de Russell) y el factor de guillotina $\frac{t}{g}$, se pueden calcular por medio de tablas numéricas en función de la temperatura y densidad centrales, encontrándose que los valores más satisfactorios corresponden a una temperatura $T = \frac{1}{3} T_c$ y una densidad $\rho = \frac{1}{3} \rho_c$.

La temperatura y densidad centrales en este modelo, están dadas por las ecuaciones,

$$\log T_c = 7.314 + \log M - \log R + \log \mu \qquad (7)$$

$$\log \rho_c = 1.714 + \log M - 3 \log R \qquad (8)$$

Como $\log T_c$ depende de $\mu$, es preciso proceder con aproximaciones sucesivas, partiendo con un valor de $n_R = 0.50$.

En el cálculo se emplearon las tablas de Morse [3] del factor guillotina para la mezcla de Russell y una tabla para la ionización de la mezcla de Russell calculada por Gratton y todavía inédita; esta tabla coincide prácticamente con otra calculada por B. Strömgren [4].

El cálculo se efectúa de la siguiente manera:

Elegido arbitrariamente un valor de Y se determina el valor de X que corresponde, para cada estrella, a los valores observados L, M y R. De esta manera, para cada estrella se obtiene una curva que relaciona entre sí los valores admisibles de X e Y, la intersección de las dos curvas da los valores de X e Y para el sistema.

Las curvas calculadas para $\alpha$ Cen y $\eta$ Cas se encuentran en las figuras 1 y 2 respectivamente.

Figura 1.

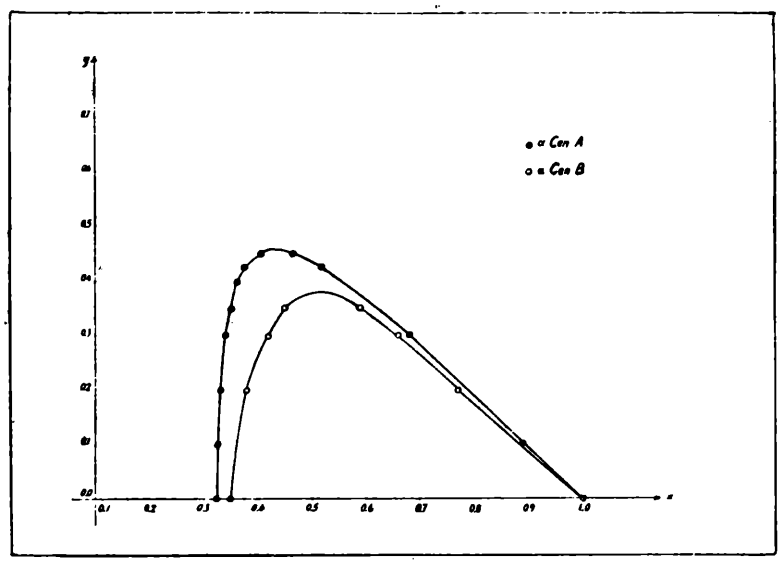
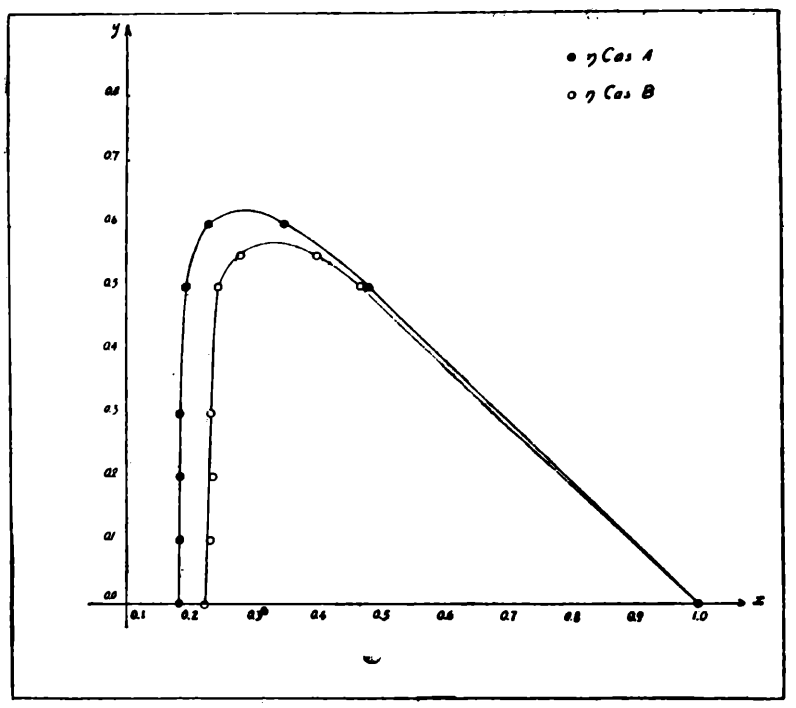



Figura 2.




Como puede verse en estas dos figuras, las curvas que corresponden a las dos componentes de una binaria *no se cortan*. Esto significa que las dos ecuaciones son incompatibles, de manera que con este método no es posible determinar el contenido de hidrógeno y de helio de las estrellas.

Por supuesto, bastaría que $n_R$ y $\frac{t}{g}$ fuesen constantes, para que las dos ecuaciones correspondientes a la fórmula (4) resultaran incompatibles, o bien, indefinidas, en el caso de ternas particulares de los valores de L, M y R. Pero como $n_R$ y $\frac{t}{g}$ dependen de la temperatura central, y ésta es distinta en las dos componentes de la binaria, podía esperarse "a priori" que el sistema de ecuaciones fuera resoluble. Que no ocurra así puede tener dos interpretaciones: sea que exista verdaderamente entre la composición química de las dos componentes una diferencia de naturaleza sistemática debida al origen o a la evolución de un sistema binario, sea que el modelo adoptado es excesivamente esquemático, para esta clase de consideraciones; en este caso, por lo tanto, habría que emplear otros métodos u otros modelos más complejos. Los autores se inclinan a aceptar como más probable esta segunda posibilidad.

Departamento de Astrofísica. Mayo de 1950.

BIBLIOGRAFIA

1. *M. Schwarzschild*, Ap. J. *104*, 203 (1946).
2. Para el desarrollo de las fórmulas véase *L. Gratton*, "La evolución de las estrelas que siguen la ley de Bethe para la producción de energía". Pub. del Obs. Ast. de la U. N. La Plata. Serie Astronómica, Tomo XXVIII (1949).
3. *Morse, P. M.* Ap. J. *92*, 27 (1940).
4. Compárese por ejemplo Hdb.d Ap. VII, 123 (1936) Berlín.