

**SIMULACION NUMERICA DE CRECIMIENTO DE GRANIZOS**

**Luisa Lubart, Lilliana Dessimone\* y Laura Levi\***

**Servicio Meteorológico Nacional**

**\*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas**

**Buenos Aires, Argentina**

**RESUMEN**

Se desarrolla un modelo numérico de crecimiento de granizo modificando y ampliando un modelo previo de crecimiento de "graupel". La primera etapa se inicia simulando el crecimiento de un cono con distintos ángulos de abertura y se continúa pasando de la forma cónica a la esférica hasta completar las dimensiones del embrión. La segunda etapa de la simulación calcula la formación de las sucesivas capas de crecimiento del granizo. El modelo se hace correr para diferentes temperaturas del aire, contenido de agua líquida y radio de la gota congelada alrededor de la cual crece el cono inicial. Se aplica el modelo a un granizo natural recogido en la Ciudad de Córdoba.

**ABSTRACT**

A hailstone growth model is developed by modifying and extending a previous one for embryo growth. The model simulates the growth of a conical graupel which subsequently changes into a spherical shape and continues as a sphere until the embryo formation is completed. This embryo is next used as a center to simulate the growth of successive hailstone layers. Several runs were made for different values of the parameters such as air temperature, liquid water content and size of the frozen droplet about which the conical graupel grows. The model is applied to simulate the growth of a previously analysed hailstone collected in Córdoba City.

## 1. INTRODUCCION

En un trabajo anterior (Lubart y Levi, 1984), se desarrolló un modelo numérico para el cálculo de crecimiento de embriones de granizo de tipo "graupel" en el cuál se supone que el embrión mantiene su forma esférica durante todo su crecimiento.

El análisis, en nuestro laboratorio, de varios lotes de granizos naturales señala que la mayoría de los embriones presentan inicialmente una forma cónica y adquieren luego una forma esférica. Con el objeto de tener en cuenta esta característica predominante se modificó el modelo anterior simulando un crecimiento más acorde con los lotes analizados.

## 2. DESARROLLO DEL MODELO

### 2.1. 1ª etapa de crecimiento del embrión: cono inicial

En esta etapa se simula el crecimiento de un cono partiendo de una gotita congelada con distintos radios iniciales. Para el cálculo del volumen y del área de la superficie de la partícula consideramos a ésta igual a la suma de un cono recto más un casquete esférico. Si llamamos  $\Omega$  al volumen y  $\sigma$  al área de la superficie de la partícula y expresamos la altura ( $h$ ), la generatriz ( $l$ ) y la diferencia ( $h_1 = l - h$ ) en función del radio de la base ( $R$ ) y del ángulo de apertura ( $\theta$ ), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\Omega = \frac{4}{3} \pi R^3 A_V \quad (1) \quad \sigma = \pi R^2 A_S \quad (2)$$

$$A_V = \frac{\text{sen}^3 \theta / 2}{\text{sen}^2 \theta} \quad (3) \quad A_S = \frac{\text{sen} \theta + 4 \text{sen}^2 \theta / 2}{\text{sen}^2 \theta} \quad (4)$$

Teniendo en cuenta la (1) la velocidad terminal de caída  $V$  para un cuerpo cónico que cae en un fluido queda expresada por:

$$V = \frac{8 g \rho_g R (A_V)^{\frac{1}{2}}}{3 \rho_a C_D} \quad (5)$$

donde:

$g$ : aceleración de la gravedad

$\rho_g$  y  $\rho_a$ : densidad del "graupel" y del aire, respectivamente

$R$ : radio de la base del cono

$C_D$ : coeficiente de arrastre

Para cada valor de  $R$  se calcula  $C_D$  mediante un método de aproximaciones sucesivas, análogo al utilizado en el trabajo anterior (Lubart y Levi, 1982), teniendo en cuenta la relación funcional empírica entre  $C_D$  y el número de Reynolds ( $R_e$ ) para partículas cónicas con  $20 < R_e < 10^5$  (List y Schemenauer, 1971; Heymsfield, 1978).

La temperatura de superficie  $T_s$  del cono se calcula de la ecuación de balance calórico que se establece cuando una partícula crece por acreción de gotitas (Mason, 1971).

En los términos de la velocidad de intercambio de calor por conducción y convección forzada y por difusión interviene la relación entre el área del cono y el diámetro máximo de la sección eficaz perpendicular al flujo, la cuál puede escribirse en forma simplificada:

$$\sigma / 2R = \pi R A_s / 2 \quad (6)$$

La expresión de la temperatura de superficie  $T_s$  resulta:

$$T_s = \frac{ERVw(L_f + c_w(T_a - T_o) + c_i T_o) + A_s / 2 (D L_s Sh(\rho_{va} - \rho_{vs}) + k T_a Nu)}{A_s / 2 k Nu + ERVw c_i} \quad (7)$$

donde  $L_f$  y  $L_s$  son los calores latentes de fusión y sublimación,  $c_w$  y  $c_i$  los calores específicos del agua y del hielo,  $T_a$  y  $T_o$  las temperaturas del aire y de fusión del hielo,  $\rho_{va}$  y  $\rho_{vs}$  las densidades de vapor de agua en el aire y en la superficie,  $Sh$  y  $Nu$  los números de Sherwood y Nusselt,  $D$  el coeficiente de difusión del agua en el aire y  $k$  la conductividad térmica del aire.

## 2.2. 2ª. etapa de crecimiento del embrión

Una vez que el cono alcanza dimensiones comparables a las que se obtienen en las muestras analizadas, el modelo pasa de la forma cónica a la esférica hasta completar las dimensiones del embrión.

Los valores iniciales de la densidad de la partícula esférica y de la temperatura del aire coinciden con los calculados en el último paso de la etapa 2.1. El valor del radio inicial se determina calculando el radio de la esfera equivalente al volumen del cono, es decir igualando ambos volúmenes:

$$4/3 \pi R_c^3 A_v = 4/3 \pi R_e^3 \quad (8)$$

donde:

$R_c$ : radio alcanzado por el cono al final de la etapa 2.1.

$R_e$ : radio de la esfera equivalente que resulta igual a:

$$R_e = R_c (A_v)^{1/3} \quad (9)$$

Con la modificación introducida al modelo los cálculos de los diferentes parámetros continúan aún para  $T_g = 0^\circ\text{C}$  (Crecimiento húmedo). En este caso el modelo permite calcular el contenido de agua líquida en exceso que no alcanza a congelar, formándose el llamado "crecimiento esponjoso" (Mason, 1971).

## 2.3. Crecimiento de las capas del granizo

En esta etapa se amplía el modelo para calcular los diferentes parámetros en las sucesivas capas que forman el granizo, supuesto esférico. Los valores estimados de  $T_g$  y calculados de  $w$  que se introducen como datos en el modelo de crecimiento de cada capa, se obtienen previamente mediante el análisis de la estructura cristalina de las capas, en muestras de granizo natural.

## 3. RESULTADOS OBTENIDOS

El modelo se aplica para distintos valores de los parámetros: temperatura del aire  $-10 > T_g > -25^\circ\text{C}$ ; contenido de agua líquida  $1 < w < 4 \text{ g/m}^3$ ; radio inicial de la gota  $0,1 < R_0 < 1 \text{ mm}$  y ángulo de abertura del "graupel" cónico  $\theta = 30,35$  y  $45^\circ$ .

De los diferentes casos estudiados se discuten dos ejemplos:

### 3.1. Crecimiento a $T_g$ y $w$ constantes

Simulación de un crecimiento en el cuál se mantienen constantes  $T_g = -10^\circ\text{C}$  y  $w = 2 \text{ g/m}^3$  en las distintas etapas. En la Fig.2 se grafican los resultados obtenidos para los parámetros estudiados. El radio inicial de la gota es  $R_0 = 0.2 \text{ mm}$  y la partícula cónica se hace crecer hasta que adquiere un radio de 2 mm a los 9 min. Luego se continúa con la etapa esférica. Se observa que para  $t = 18 \text{ min}$  y  $R = 5,7 \text{ mm}$ ,  $T_g$  alcanza  $0^\circ\text{C}$  (crecimiento húmedo) manteniéndose en ese régimen durante 4 min hasta la suspensión del crecimiento.

### 3.2. Crecimiento a $T_g$ y $w$ variables

Los granizos naturales analizados muestran que las distintas etapas de crecimiento se forman en diferentes condiciones ambientales de temperatura y contenido de agua líquida. El modelo se aplica a un granizo natural de  $R = 12 \text{ mm}$ . La Fig.3 muestra la sección del mismo fotografiado en luz natural (3.a) y entre polaroides cruzados (3.b).

El análisis de estructura cristalina ha permitido estimar  $T_g$  y calcular  $w$  para el embrión y para las dos capas de crecimiento. La Tabla I resume estos valores que son los que se introducen como datos en el modelo de crecimiento. Se agregan en la última columna las alturas que corresponden a las temperaturas  $T_g$  calculadas aplicando el modelo de Hirsch modificado (Ghidella y Saluzzi, 1979).

Tabla I

	Crecimiento	$T_g$ ( $^\circ\text{C}$ )	$w$ ( $\text{g.l}^{-3}$ )	$R_{\text{final}}$ (mm)	$h$ (km)
Embrión	Cónico	-15	3	2,2	7,3
	Esférico	-10	3	5,8	6,5
	Capa I	-20	2	7,5	8,0
	Capa II	-24	4	12,0	8,6

Los valores de la temperatura  $T_a$  que se observan en la Tabla I indican que el embrión sufre un descenso en la nube al pasar de cónico a esférico, el cuál puede relacionarse con la transición de la piedra desde una a otra celda. Debe notarse a este propósito, que el valor de la corriente ascensional, en la cuál se formó el embrión del granizo, debería ser inferior a  $10 \text{ ms}^{-1}$ , es decir mucho menor que el obtenido para la corriente ascensional principal aplicando el modelo de Hirsch. El subsiguiente ascenso del granizo desde 6,5 hasta 8,5 km de altura puede relacionarse con la penetración de la piedra en la corriente ascensional principal donde las velocidades tienen valores mayores a  $30 \text{ ms}^{-1}$ . Con respecto a los valores calculados de  $w$  éstos son algo inferiores a los que resultarían aplicando el modelo de Hirsch, donde  $w$  alcanza el valor de  $4 \text{ gm}^{-3}$ , siendo aproximadamente iguales entre sí en la última capa.

La Fig.4 es una representación gráfica de los valores obtenidos para los parámetros cuando se simula el crecimiento de un granizo natural. En este caso los valores de  $T_a$  y  $w$  varían al pasar de una etapa a la otra. Esas variaciones se hacen en forma gradual, durante los últimos pasos de cada etapa, para "suavizar" las correspondientes oscilaciones de los valores de los diferentes parámetros. No obstante  $T_s$  experimenta oscilaciones considerables como consecuencia de las variaciones de  $T_a$ .

Es interesante notar que, en la etapa cónica, la densidad se mantiene muy baja ( $0,2 < \rho < 0,4 \text{ g/cm}^3$ ), aumenta abruptamente hasta alcanzar su valor máximo de  $0,9 \text{ g/cm}^3$  al promediar la etapa esférica y se mantiene constante hasta suspender el crecimiento.

#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que las características de crecimiento de un embrión cónico no difieren fundamentalmente de las obtenidas en el trabajo anterior, en el cuál se utilizó un modelo de crecimiento de embrión esférico. En ambos casos la densidad del "graupel" puede ser sensiblemente menor que  $0,9 \text{ g/cm}^3$  para radios pequeños ( $R < 2 \text{ mm}$ ), pero aumenta gradualmente y se mantiene próximo a  $0,9 \text{ g/cm}^3$ , en todo el crecimiento posterior.

La simulación de crecimiento de un granizo real ha permitido comprobar que la introducción en el modelo de magnitudes derivadas del análisis cristalográfico da lugar a resultados plausibles con respecto al tiempo de crecimiento y a la velocidad de caída del granizo en las diferentes etapas. En efecto, tiempos de 15 a 25 minutos y velocidades entre 20 y 30 ms<sup>-1</sup> como los obtenidos en las últimas etapas son comparables al tiempo de desarrollo y evolución y a las velocidades máximas de las corrientes ascensionales en nubes convectivas.

Agradecimiento: Las autoras agradecen a la Lic. María Victoria Carrilho por su colaboración en la modificación del programa.

#### BIBLIOGRAFIA

- Ghidella, M. y Saluzzi, M.E., 1979: Estudio de un modelo numérico de nube convectiva; *Geoacta* 10, 111-122.
- Heymsfield, A.J., 1978: The Characteristics of Graupel Particles in Northeastern Colorado Cumulus Congestus Clouds; *J.Atmos.Sci.* 35, 284-295.
- List, R. y Schemenauer R., 1971: Free-Fall Behaviour of Planar Snow crystals, Conical Graupel and Small Hail; *J.Atmos.Sci.* 28, 110-115.
- Lubart, L. y Levi, L., 1984: Crecimiento de embriones de granizo de tipo "graupel"; *Geoacta* 12, 157-167.
- Mason, B.J., 1971: *The Physics of Clouds*; Clarendon Press-Oxford, p. 351-352.

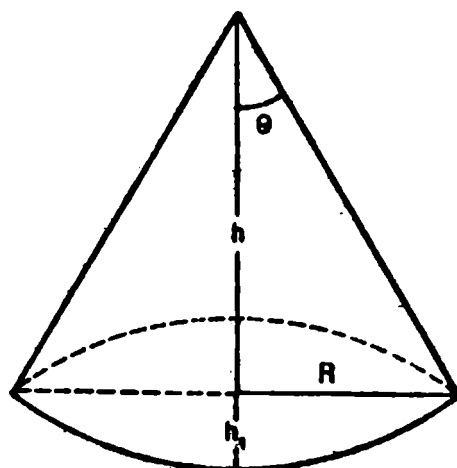


Fig.1: Esquema del cono esférico

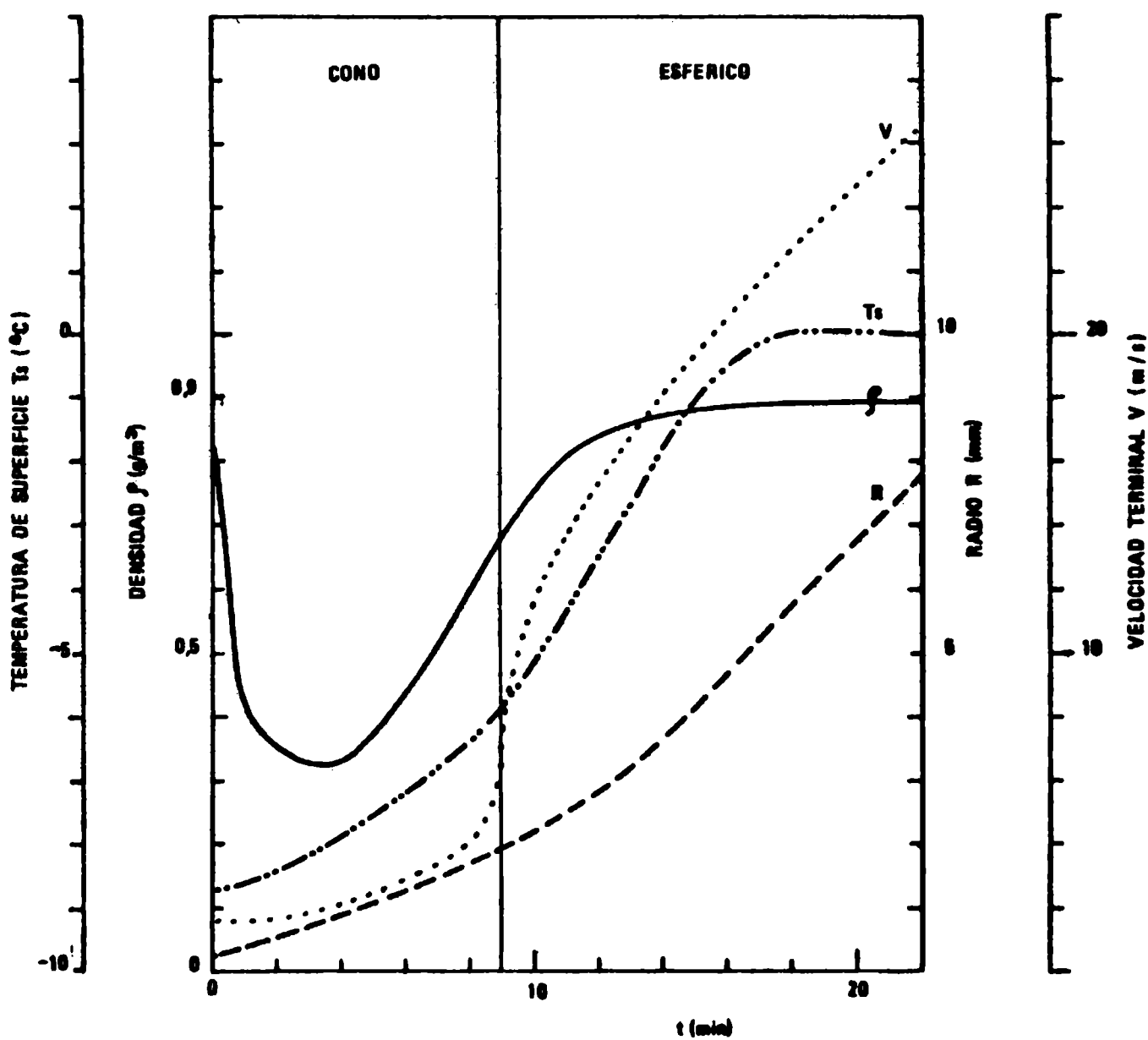
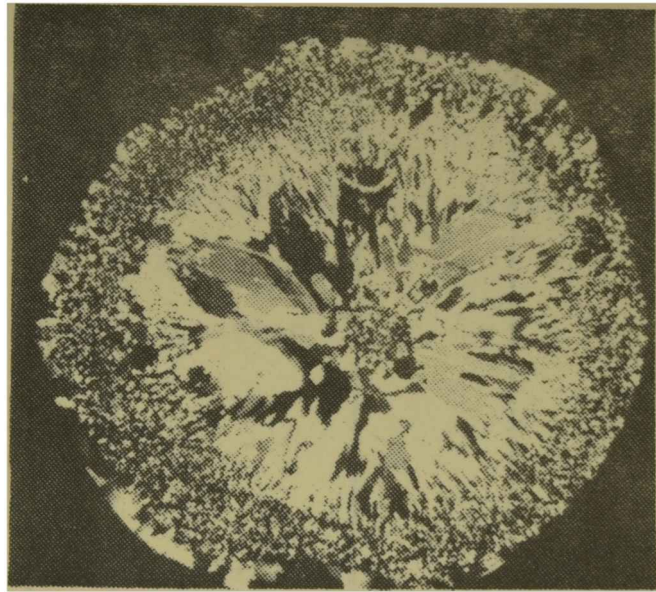
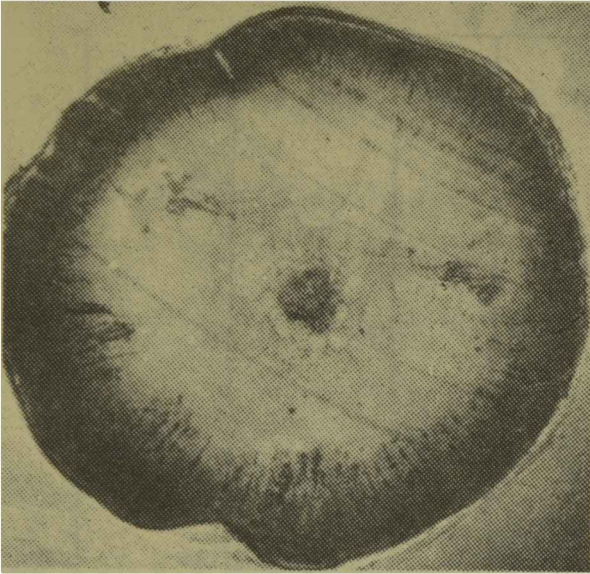


Fig.2: Variación del radio, densidad, temperatura de superficie y velocidad terminal de caída en función del tiempo para  $T_{\infty} = -10^{\circ}\text{C}$  y  $w = 2 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}$ .





(a)

(b)

Fig.3: Sección de un granizo X 56

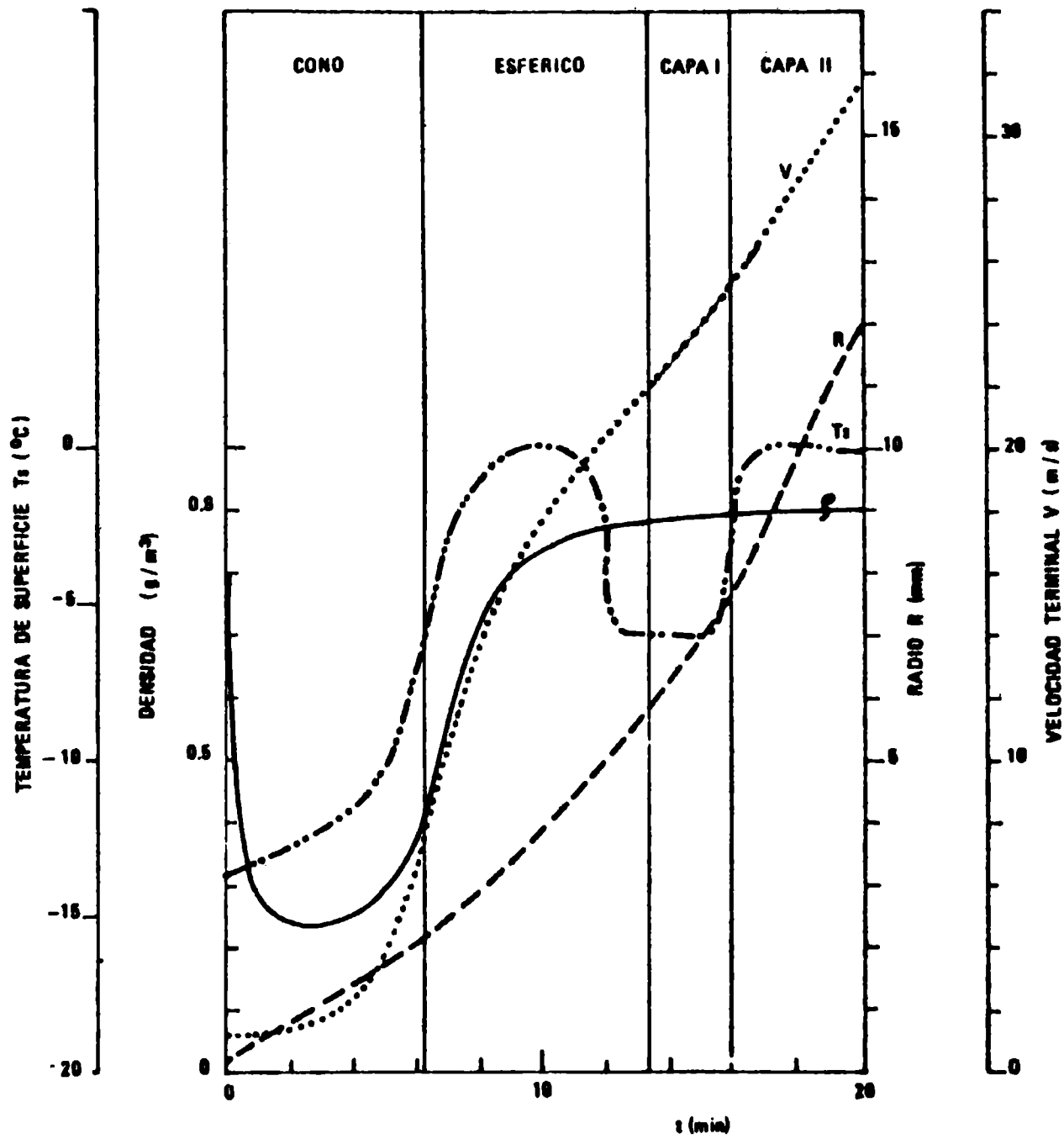


Fig.4: Idem Fig.2 excepto que  $T_s$  y  $w$  varían de acuerdo a los valores indicados en la Tabla 1.