



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

# **AJUSTE DE LA RED ALTIMÉTRICA NACIONAL DE PRIMER ORDEN EN TÉRMINOS DE NÚMEROS GEOPOTENCIALES Y DERIVACIÓN DE LOS DIFERENTES TIPOS DE ALTURAS FÍSICAS EN URUGUAY**

Tesis de Maestría presentada por

**JORGE FAURE VALBI**

ante la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la  
Universidad Nacional de La Plata para optar al Grado Académico de

**MAGÍSTER EN GEOMÁTICA**

**Directora de Tesis: Dra. Claudia Tocho**

La Plata, 28 de Setiembre 2022

# Sumario

AGRADECIMIENTOS.....	7
RESUMEN.....	8
1. INTRODUCCIÓN.....	9
1.1) Motivación.....	9
1.2) Sistemas de alturas clásicos existentes en América de Sur.....	9
1.3) Sistemas de alturas moderno.....	11
1.4) Sistema de Referencia Internacional de Alturas.....	12
1.5) Objetivo.....	14
1.6) Estructura de la tesis.....	14
2. MARCO TEÓRICO.....	15
2.1) Fuerza de atracción y potencial gravitacional.....	15
2.2) Campo de gravedad terrestre.....	19
2.3) Superficie de nivel y línea de la plomada.....	21
2.4) Alturas.....	23
2.4.1) Alturas niveladas.....	23
2.4.2) Números geopotenciales.....	26
2.4.3) Alturas ortométricas.....	26
2.4.3.1) Alturas ortométricas de Helmert.....	27
2.4.3.2) Alturas ortométricas de Mader.....	27
2.4.3.3) Alturas ortométricas de Baranov.....	27
2.4.3.4) Correcciones ortométricas.....	28
2.4.4) Alturas normales.....	29
2.4.4.1) Alturas normales de Molodensky.....	31
2.4.4.2) Alturas normales de Vignal.....	31
2.4.4.3) Alturas normales de Bomford.....	31
2.4.4.4) Alturas normales de Hirvonen.....	32
2.4.4.5) Corrección normal.....	33
3. DATOS GEODÉSICOS Y GRAVIMÉTRICOS.....	34
3.1) Datum vertical (Cero Oficial).....	34
3.2) Red Altimétrica Nacional.....	35
3.3) Red Gravimétrica Nacional.....	43
3.4) Número Geopotencial de referencia para el ajuste de la Red Altimétrica de Primer Orden.....	51
4. CÁLCULO DE LOS NÚMEROS GEOPOTENCIALES.....	54
4.1) Diagrama de flujo para el cálculo de los números geopotenciales.....	54
4.1.1) Interpolación de gravedad en los puntos faltantes de las Líneas de Nivelación de Primer Orden.....	56
4.1.2) Diferencias de números geopotenciales (dC) entre puntos Nodales de las Líneas de Nivelación de Primer Orden.....	67
4.2) Diferencias de Números Geopotenciales por Línea.....	68
4.3) Ajuste de los Nodales.....	70
4.4) Ajuste interno en cada línea.....	78
5. CÁLCULO DE LOS DIFERENTES TIPOS DE ALTURAS FÍSICAS.....	83
5.1) Comparación puntual entre alturas normales de Molodensky y alturas ortométricas de Helmert.....	84
5.2) Comparación puntual entre los diferentes tipos de alturas normales calculadas....	88
5.3) Comparación puntual entre los diferentes tipos de alturas ortométricas calculadas.....	90

5.3.1) Alturas ortométricas de Baranov y Helmert.....	90
5.3.2) Alturas ortométricas de Mader y Helmert.....	92
5.3.3) Alturas ortométricas de Mader y Baranov.....	93
5.3.4) Resumen de la comparación entre diferentes tipos de alturas ortométricas..	95
5.4) Comparación puntual de alturas sobre los puntos Nodales.....	96
5.4.1) Alturas normales de Molodensky y nivelada ajustada.....	96
5.4.2) Alturas ortométricas de Helmert y nivelada ajustada.....	97
5.4.3) Resumen diferencias respecto a la las alturas niveladas ajustadas.....	98
5.5) Análisis de las correcciones normal (NC) y ortométrica (OC) a los desniveles medidos en cada tramo.....	98
5.5.1) Correcciones normales.....	99
5.5.2) Correcciones ortométricas.....	102
5.6) Análisis de las correcciones normal (NC) y ortométrica (OC) a los desniveles medidos en las Líneas de Primer Orden.....	105
6. CONCLUSIONES.....	106
7. BIBLIOGRAFÍA.....	108

## Índice de figuras

Figura 1.1: Serie temporal Estación UYMO ( <a href="https://www.sirgas.org/es/stations/">https://www.sirgas.org/es/stations/</a> ).....	10
Figura 1.2: Coordenadas de un punto P en la superficie terrestre (Sánchez, 2020).....	13
Figura 2.1: Componentes de la Fuerza Gravitacional (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).....	16
Figura 2.2: Potencial gravitacional de un cuerpo sólido en un punto P (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).....	18
Figura 2.3: Fuerza centrífuga (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).....	19
Figura 2.4: Superficies de nivel y líneas de la plomada (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).....	22
Figura 2.5: Nivelación (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).....	23
Figura 2.6: Nivelación y altura ortométrica (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).....	24
Figura 2.7: Superficie del teluróide. Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006).....	29
Figura 2.8: Superficies de referencia de alturas físicas (Laura Sánchez, 2002).....	30
Figura 2.9: Latitud geográfica normal $\varphi_N$ (Laura Sánchez, 2002).....	32
Figura 3.1: Relación entre los distintos Ceros históricos.....	35
Figura 3.2: Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden (Rovera, 2012).....	36
Figura 3.3: Nodales y Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO).....	37
Figura 3.4: Esquema de cierres en circuitos de Líneas de Nivelación de Primer Orden en mm.....	38
Figura 3.5: Esquema de Líneas de Nivelación de Primer Orden y circuitos de nivelación.....	42
Figura 3.6: Enlaces aéreos con Argentina (Servicio Geográfico Militar, 1970).....	44
Figura 3.7: Vinculaciones aéreas de estaciones nodales (Servicio Geográfico Militar, 1970).....	45
Figura 3.8: Red Gravimétrica Fundamental (Servicio Geográfico Militar, 1984).....	46
Figura 3.9: Puntos disponibles con gravedad conocida.....	48
Figura 3.10: Puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO) y Nodales sin gravedad conocida.....	50
Figura 3.11: Ubicación relativa Nodal Belvedere y el Puerto de Montevideo.....	51
Figura 3.12: Nodal Belvedere y Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo.....	52
Figura 4.1: Diagrama de flujo de los cálculos realizados.....	55
Figura 4.2: Mapa Anomalías de Bouguer en Uruguay (BGR).....	56
Figura 4.3: Mapa de la anomalía de la Laguna Merín (Reitmayr, 2001).....	57
Figura 4.4: Anomalía de Bouguer (mGal) sobre Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO).....	58
Figura 4.5: Desviación estándar de la gravedad interpolada (mGal).....	59
Figura 4.6: Puntos interpolados con desviación estándar superior a 13.2 mGal y puntos con gravedad conocida (RGF).....	60
Figura 4.7: Histograma de la desviación estándar (mGal) de la gravedad interpolada.....	61
Figura 4.8: Diferencias en valor absoluto entre la gravedad interpolada y conocida en dg (mGal).....	64
Figura 4.9: Histograma diferencias entre gravedad conocida e interpolada (mGal).....	65
Figura 4.10: Esquema de observaciones geodésicas en una línea de nivelación.....	68
Figura 4.11: Desviación estándar de la altura normal de Molodensky en los Nodales (m).....	75
Figura 4.12: Desviación estándar de la altura nivelada en los Nodales (m).....	76
Figura 4.13: Gráfico comparativo de desviaciones estándar (m) en Nodales.....	78
Figura 4.14: Desviación estándar de las alturas normales de Molodensky (m) sobre los puntos de las LNPO.....	79

Figura 4.15: Desviación estándar de las alturas normales de Molodensky (m).....	80
Figura 4.16: Histograma desviación estándar de las alturas normales de Molodensky (cm) en puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden.....	81
Figura 5.1: Diferencias entre alturas normales de Molodensky y alturas ortométricas de Helmert.....	84
Figura 5.2: Diferencias menores a -4mm y mayores a 4mm.....	85
Figura 5.3: Histograma de la diferencia de alturas ortométricas (Helmert) y normales (Molodensky) sobre todas las LNPO.....	86
Figura 5.4: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 101.....	87
Figura 5.5: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 111.....	87
Figura 5.6: Diferencia puntual entre altura normal de Bomford y Molodensky (m).....	88
Figura 5.7: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 101, considerando alturas normales de Molodensky y Bomford.....	89
Figura 5.8: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Baranov y Helmert (mm).....	90
Figura 5.9: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 101, considerando alturas ortométricas de Helmert y Baranov.....	91
Figura 5.10: Mayores diferencias entre alturas ortométricas de Baranov y de Helmert (mm).....	91
Figura 5.11: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Mader y Helmert (mm).....	92
Figura 5.12: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Mader y Baranov (m).....	93
Figura 5.13: Mayores diferencias entre alturas ortométricas de Mader y Baranov (m).....	94
Figura 5.14: Diferencia puntual entre altura normal de Molodensky y nivelada ajustada en cada punto Nodal (cm).....	96
Figura 5.15: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Helmert y nivelada ajustada en cada punto Nodal (cm).....	97
Figura 5.16: Correcciones normales sobre las Líneas de Nivelación de Primer Orden (mm).....	99
Figura 5.17: Histograma corrección normal (NC) en mm.....	100
Figura 5.18: Correcciones normales mayores en valor absoluto a 4 mm.....	101
Figura 5.19: Correcciones ortométricas sobre las Líneas de Nivelación de Primer Orden (mm).....	102
Figura 5.20: Histograma corrección ortométrica (OC) en mm.....	103
Figura 5.21: Correcciones ortométricas mayores en valor absoluto a 4 mm.....	104

## Índice de tablas

Tabla 3.1: Descripción de Líneas de Altimetría Nacional (Rovera et al., 2008).....	35
Tabla 3.2: Descripción de los circuitos de nivelación.....	39
Tabla 3.3: Nodales inicio y fin de cada Línea de Nivelación de Primer Orden.....	40
Tabla 3.4: Coordenadas geodésicas de los Nodales (WGS84).....	41
Tabla 3.5: Puntos con gravedad conocida por línea.....	49
Tabla 3.6: Valores numéricos para el cálculo del número geopotencial en el Nodal Belvedere.....	53
Tabla 4.1: Distribución de casos por intervalos de precisión.....	61
Tabla 4.2: Precisiones de gravedad requeridas según alturas (Sánchez, 2002).....	62
Tabla 4.3: Precisiones de gravedad (mGal) alcanzadas con la interpolación.....	63
Tabla 4.4: Distribución de casos por intervalos.....	66
Tabla 4.5: Cierres nivelados y ortométricos de circuitos de Primer Orden.....	67
Tabla 4.6: Diferencias de números geopotenciales y desviación estándar por línea.....	69
Tabla 4.7: Números geopotenciales y desviación estándar en los Nodales.....	74
Tabla 4.8: Desviación estándar (m) de los Nodales según el tipo de ajuste realizado.....	77
Tabla 4.9: Distribución de casos por intervalo en desviación estándar.....	82
Tabla 5.1: Diferencias entre alturas normales (Molodensky) y ortométricas (Helmert) en mm.....	85
Tabla 5.2: Diferencias entre las diferentes alturas normales (m).....	89
Tabla 5.3: Diferencias entre las diferentes alturas ortométricas (m).....	95
Tabla 5.4: Diferencias de las alturas respecto a la altura nivelada ajustada en los Nodales (cm).....	98
Tabla 5.5: Correcciones normales y ortométricas en cada Línea de Nivelación de Primer Orden.....	105

## **AGRADECIMIENTOS**

- Al Instituto Geográfico Militar por facilitarme los datos geodésicos completos del Uruguay, factor indispensable para la realización de la presente tesis.
- Al Cnel. (R) Norbertino Suárez por su permanente apoyo y motivación para realizar y culminar la Maestría.
- A la Dra. Claudia Tocho como Directora de Tesis quien desde el comienzo definió los objetivos de la presente Tesis, asesorándome y siendo un aliento permanente para la culminación de la misma.
- Al Jurado de esta Tesis, por el tiempo dedicado a la lectura de este trabajo y por cada uno de sus comentarios y sugerencias.

# RESUMEN

El presente trabajo analiza la influencia cuantitativa de la gravedad en las determinaciones altimétricas de Uruguay, así como compara los diferentes tipos de alturas físicas en los puntos de la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden.

Las alturas disponibles oficialmente se refieren al Datum Vertical establecido por Decreto del Poder Ejecutivo en el año 1948, el cual establece el Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo como referencia. La propagación de las alturas en todo el territorio se realizó mediante nivelación clásica, a las cuales se le aplicó una corrección a partir de la gravedad teórica previamente calculada para cada punto, conformándose Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden.

La Red Gravimétrica Fundamental complementa la información geodésica disponible a ser utilizada en el presente trabajo.

Se predice la gravedad para aquellos puntos pertenecientes a las Líneas de Nivelación de Primer Orden que no cuentan con gravedad observada, obteniéndose la misma con la precisión requerida para el cálculo de los números geopotenciales.

Disponiéndose de la información geodésica necesaria (desnivel medido y gravedad), se calculan las diferencias de números geopotenciales sobre las Líneas de Nivelación de Primer Orden. Se determina el valor de referencia ( $C_0$ ) concordante con el Datum Vertical.

Inicialmente se compensan los 8 polígonos que conforman el Primer Orden, a través de sus puntos extremos (Nodales). Luego de ello, se densifica hacia el interior de cada línea, el resultado es la obtención de los números geopotenciales ( $C$ ) referidos al Datum Vertical para todos los puntos.

A partir de los valores calculados, se derivan los diferentes tipos de alturas físicas pasibles de ser calculadas (ortométricas, normales) y se comparan con las alturas niveladas ajustadas (alturas oficiales de Uruguay), es destacable que la precisión en las alturas obtenidas tras el ajuste es mejor en todos los casos que las oficiales. La máxima desviación estándar en altura normal obtenida para los Nodales es de 4.7 cm. La máxima diferencia entre altura normal de Molodensky y altura oficial, sobre los Nodales es de 4.0 cm, y si comparamos con la altura ortométrica de Helmert es de 4.21 cm.

Se calculan alturas normales de Molodensky, Vignal, Bomford y Hirvonen, así como ortométricas de Helmert, Mader y Baranov. Se comparan los valores obtenidos en cada caso.

Finalmente se calculan las correcciones ortométricas y normales, aplicables a los desniveles medidos para obtener desniveles ortométricos y normales respectivamente. Considerando todos los tramos calculados, la máxima corrección ortométrica es de 4.3 mm, y la máxima corrección normal de 7.9 mm.



# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1) Motivación.

La motivación de esta tesis es analizar toda la información geodésica y gravimétrica disponible en la República Oriental del Uruguay con lo cual realizar un diagnóstico de su sistema de alturas existente para contribuir al Grupo de trabajo III: Datum vertical del Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas (SIRGAS) en lo que se refiere a la realización del Sistema de Referencia Internacional de Alturas (IHR<sup>S1</sup>), como se indica en la Sección 1.5).

## 1.2) Sistemas de alturas clásicos existentes en América de Sur.

Los sistemas de alturas existentes en América del Sur, fueron medidos en la década de 1950, con el fin de complementar a las coordenadas horizontales en la elaboración de cartas topográficas.

Un sistema de alturas está constituido por dos elementos fundamentales: la superficie de referencia o nivel de altura cero (datum vertical) y la coordenada vertical, es decir una altura de tipo específico. Si la superficie de referencia y la coordenada vertical dependen del campo de gravedad terrestre, se habla de un sistema de alturas físicas (p. ej. alturas ortométricas y el geoide; o alturas normales y el cuasigeoide); si las alturas no dependen del campo de gravedad terrestre, se habla de un sistema de alturas geométricas (p.ej. alturas elipsoidales y un elipsoide de referencia).

Como datum vertical, cada país, definió en forma individual, el nivel medio del mar referido a diferentes mareógrafos y distintos periodos de observación, bajo la hipótesis clásica que el nivel medio del mar coincide con el geoide y que la medición del nivel del mar se realiza a partir de registros mareográficos con períodos de observación que varían entre 10 y 20 años, siendo el periodo ideal mayor a 18.6 años, por lo tanto, las variaciones temporales son eliminadas. Para el caso de las coordenadas verticales en los sistemas de alturas clásicos, sus alturas fueron derivadas de la nivelación geodésica de alta precisión sin darle importancia al efecto del campo de gravedad terrestre en las diferencias de nivel medidas y, así, se omitió tradicionalmente la reducción por gravedad. Esto significa que en la mayoría de los países de América del Sur, las alturas oficiales son cantidades que en forma de redes de nivelación, han sido ajustadas, asumiendo el efecto del campo de gravedad como un error más de medición (Sánchez, 2002). En consecuencia, las coordenadas verticales, presentan discrepancias considerables entre países vecinos, no permiten el intercambio de información vertical ni a escala continental, ni a escala global (Sánchez, 2002). La situación, hacia el año 2000, indicaba que para el caso de Uruguay, su nivel de referencia se encuentra 22 cm por encima del nivel de referencia de Argentina y 57 cm por encima del de Brasil.

---

1 International Height Reference System

Diferentes problemas surgen al determinar el datum vertical bajo las hipótesis clásicas:

1) El geoide no coincide con la superficie del mar. La superficie del mar no es una superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre, y por tanto, no coincide con el geoide, la separación entre ambas superficies se conoce como topografía de la superficie del mar y varía globalmente  $\pm 2$  metros. La topografía de la superficie del mar, en las costas de Uruguay es de aproximadamente 0.60 metros.

2) La topografía de la superficie del mar no es igual en todas partes, por lo cual los mareógrafos registran diferentes variaciones dependiendo de su ubicación geográfica.

3) Si bien las variaciones temporales periódicas de la superficie del mar son eliminadas, las variaciones no periódicas, seculares y las generadas por la topografía local pueden generar errores sistemáticos de varios decímetros en las diferentes realizaciones del nivel de referencia.

4) Otro supuesto que debe cuestionarse es si: ¿el nivel de referencia varía con el nivel del mar o debido al movimiento vertical de la corteza?

En el caso de Uruguay, la estación UYMO perteneciente a SIRGAS, y la más próxima a la ubicación original del mareógrafo que dio origen al datum vertical, presenta una serie temporal donde puede apreciarse la evolución de las coordenadas con el tiempo, en especial la altura elipsoidal. Según la estimación realizada desde SIRGAS, presenta una velocidad vertical de  $-0.0011\text{m/a}$ .

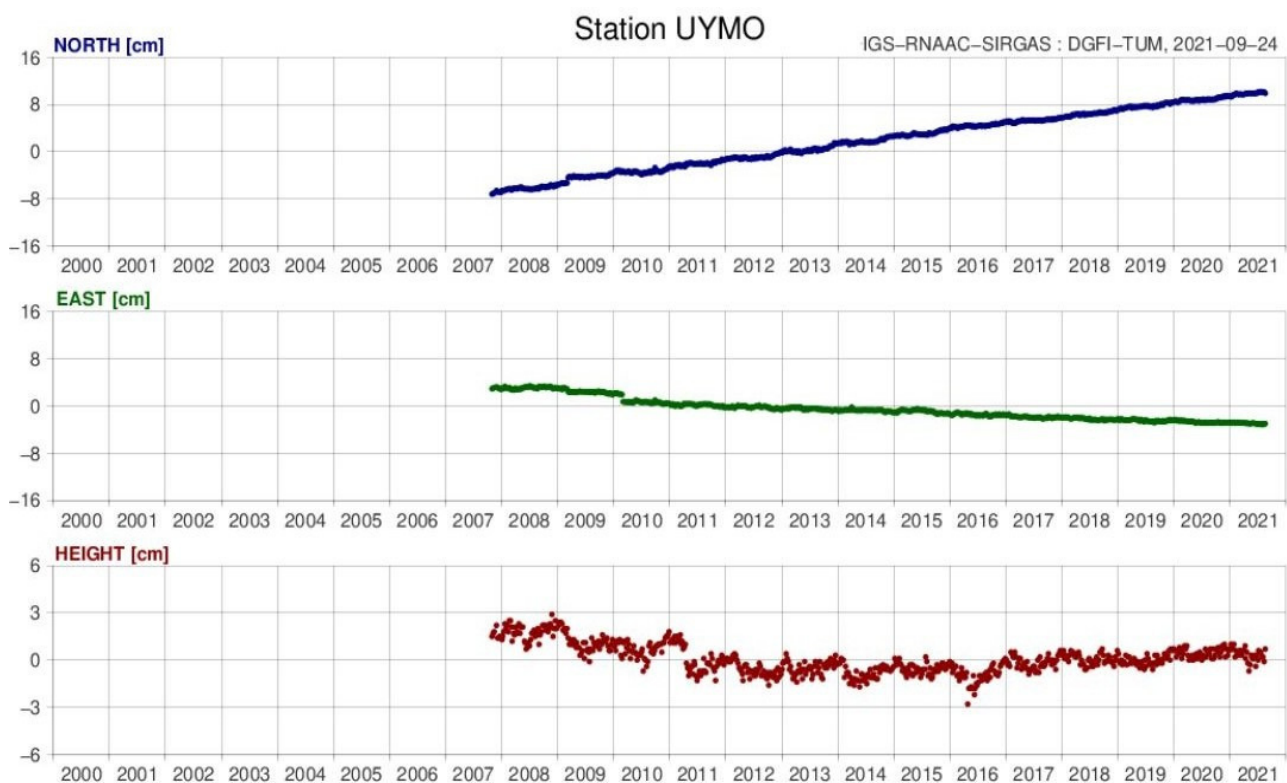


Figura 1.1: Serie temporal Estación UYMO (<https://www.sirgas.org/es/stations/>).

Los 4 problemas reseñados previamente generan como consecuencia la multiplicidad de niveles de referencia. Existen tantos datums verticales como mareógrafos de referencia y los niveles de referencia están asociados a diferentes épocas, por lo cual la superficie de referencia (nivel medio del mar en mareógrafos) de los sistemas de alturas existentes no están sobre el mismo nivel.

También existen características diferentes que afectan a las coordenadas verticales de los sistemas de alturas clásicos:

- 1) A los desniveles medidos se le aplican diferentes correcciones (ortométricas, normales, dinámicas, orto-normales) o en algunos casos se han omitido.
- 2) Los movimientos verticales de la corteza se consideran como errores aleatorios en el ajuste de las redes verticales.
- 3) La nivelación es un proceso costoso y lento, sus sesgos se acumulan con la distancia desde el mareógrafo de referencia. Si las redes verticales fueron ajustadas línea por línea o circuito a circuito, un punto que forme parte de dos líneas de nivelación ajustadas independientemente, tendrá valores de altura diferentes.

Los sistemas de alturas clásicos existentes deben ser modernizados mediante su integración (unificación) en un sistema de referencia vertical unificado global, con el objetivo de referir todas las alturas físicas existentes a un mismo nivel de referencia.

### **1.3) Sistemas de alturas moderno.**

Se necesita un sistema de alturas moderno para la comprensión y modelado preciso de efectos asociados al cambio global del Sistema – Tierra. Esto requiere de marcos de referencia geodésicos con las siguientes características:

- 1) Un orden de precisión mayor que la magnitud de fenómenos que se quieran estudiar.
- 2) Misma precisión en cualquier lugar.
- 3) Estabilidad a largo plazo.

Básicamente con un sistema de referencia vertical moderno se pretende:

- 1) Lograr una combinación confiable de alturas geométricas y físicas. Las tradicionales alturas ortométricas no son coherentes a nivel global como si lo son las alturas elipsoidales obtenidas por técnicas geodésicas satelitales como por ejemplo, GNSS.
- 2) Poseer una materialización similar al ITRS<sup>2</sup>/ITRF<sup>3</sup>.

---

2 International Terrestrial Reference System

3 International Terrestrial Reference Frame

## 1.4) Sistema de Referencia Internacional de Alturas.

Un objetivo principal de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG<sup>4</sup>) y su Sistema de Observación Geodésica Global (GGOS<sup>5</sup>) es la implementación de un Marco de Referencia Geodésico Global integrado (GGRF<sup>6</sup>) que respalde la determinación y el monitoreo consistentes de la geometría, la rotación y el campo de gravedad de la Tierra con alta precisión en todo el mundo. El establecimiento del GGRF exige la implementación de un sistema de referencia física unificado a nivel mundial.

Un primer paso concreto orientado a realizar este propósito fue la publicación de dos resoluciones de la IAG durante la Asamblea General de la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG<sup>7</sup>) (Praga, julio de 2015):

1) Para la definición y realización de un Sistema Internacional de Referencia de Altura (IHR<sup>8</sup>).

2) Para el establecimiento de un Sistema Internacional de Referencia de Gravedad (ITGRS<sup>8</sup>) basado en medidas de gravedad absoluta.

El IHR<sup>9</sup> se basa en la combinación de una componente geométrica dada por las coordenadas geocéntricas cartesianas que se determinan con técnicas geodésicas espaciales (p. ej. GNSS<sup>10</sup> y se refieren al Marco de Referencia Internacional Terrestre (IHRF<sup>11</sup>), y una componente física dada por el valor del potencial de gravedad ( $W_P$ ) en un punto P ubicado en la superficie terrestre definido por las coordenadas del ITRF como lo establece la Resolución No. 1 (Drewes et al., 2016), expedida por la IAG durante la Asamblea General de la IUGG realizada en Praga, República Checa en julio de 2015.

---

4 International Association of Geodesy

5 Global Geodetic Observing System

6 Global Geodetic Reference Frame

7 International Union of Geodesy and Geophysics

8 International Terrestrial Gravity Reference System

9 International Height Reference System

10 Global Navigation Satellite System

11 International Height Reference Frame

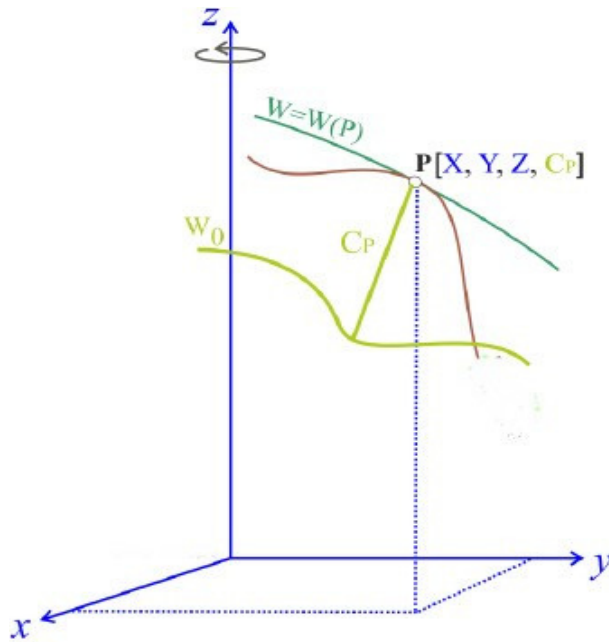


Figura 1.2: Coordenadas de un punto P en la superficie terrestre (Sánchez, 2020).

El datum vertical o altura de nivel cero del IHRM se define por una superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre definida por un valor convencional  $W_0=62636853.4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ .

Las coordenadas verticales son diferencias del potencial de gravedad en un punto P,  $W(P)$  con respecto al valor del potencial de gravedad en el geoide  $W_0$  global convencional de referencia, llamado  $C_P$  número geopotencial.

La posición de P se define por el vector geocéntrico  $\mathbf{X}_P$  ( $X_P, Y_P, Z_P$ ) en el ITRS;

i.e.,  $W(P) = W(\mathbf{X}_P)$ .

La determinación de  $X(P)$ ,  $W(P)$  (o  $C(P)$ ) incluye sus cambios a través del tiempo,  $\dot{X}(P)$ ,  $\dot{W}(P)$  (o  $\dot{C}(P)$ ).

Las coordenadas en mean-tide system / mean (zero) crust. Las unidades son el metro y el segundo (SI).

## **1.5) Objetivo.**

El objetivo principal de este trabajo de tesis consiste en ajustar apropiadamente la red fundamental de nivelación de Primer Orden en términos de números geopotenciales y presentar una comparación de diferentes reducciones gravimétricas utilizadas en la obtención de distintos sistemas de alturas físicas para que en un trabajo futuro, se realice la unificación del datum vertical del sistema local de alturas al IHRF.

## **1.6) Estructura de la tesis.**

El Capítulo 2 corresponde al Marco Teórico, donde se presentan los fundamentos teóricos que serán utilizados en el desarrollo de la presente tesis. Se desarrolla a partir de la fuerza de atracción y el potencial gravitacional, hasta expresar los diferentes tipos de alturas físicas que se calcularán en la tesis.

En el Capítulo 3 se presenta una descripción de los datos geodésicos disponibles en Uruguay, que dispone de una completa Red fundamental de nivelación de alta precisión, medida y compensada en su totalidad, con líneas distribuidas en todo su territorio conformando ocho polígonos cerrados (Líneas de Nivelación de Primer Orden). La red está densificada por Líneas de Segundo y Tercer Orden. Complementando a la red altimétrica, se dispone de una Red Gravimétrica, constituida por puntos distribuidos en todo el país, muchos de los cuales también pertenecen a la Red fundamental de nivelación de alta precisión.

En el Capítulo 4 se describen los cálculos realizados a partir de los datos geodésicos disponibles. Inicialmente se interpolan valores de gravedad para cubrir los vértices de las Líneas de Nivelación de Primer Orden que no disponen de los mismos. Se analizan los circuitos de nivelación de Primer Orden en términos de desniveles ortométricos. Seguidamente, se calculan las diferencias de números geopotenciales por cada línea, y se ajustan los Nodales. Finalmente se realiza un ajuste interno en cada línea obteniéndose el número geopotencial de cada vértice.

En el Capítulo 5 se realizan los cálculos de los diferentes tipos de altura física para todos los vértices. Se comparan puntualmente las alturas normales de Molodensky y las ortométricas de Helmert, así como entre las diferentes alturas normales y ortométricas obtenidas. Posteriormente, se analizan las diferencias puntuales sobre los Nodales con las alturas niveladas ajustadas. Finalmente se calculan las correcciones normales y ortométricas, analizándose su influencia.

En el Capítulo 6 se destacan las conclusiones y los aportes más importantes resultantes de este trabajo de Tesis.

## 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo describe el marco teórico necesario para calcular los números geopotenciales y alturas físicas que se presentarán en los siguientes capítulos.

Se comienza desarrollando el fundamento matemático referido a la teoría del potencial, la fuerza de gravedad y el potencial de la gravedad terrestre para llegar al cálculo del número geopotencial, magnitud fundamental del desarrollo de esta tesis, ya a partir de la misma se desarrollan las expresiones necesarias para el cálculo de las diferentes tipos de alturas físicas.

Este capítulo fue escrito siguiendo el libro *Physical Geodesy* (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2005) y la tesis doctoral *Determinación de Alturas Físicas en Colombia* (Sánchez, 2002).

### 2.1) Fuerza de atracción y potencial gravitacional.

De acuerdo a la Ley de la gravitación universal de Newton, dos puntos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , separados una distancia  $l$ , se atraen mutuamente con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{l^2}, \quad (2.1)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal o constante newtoniana, la cual en el Sistema Internacional de Unidades (SI), adopta un valor de  $6.6742 \times 10^{-11} \text{ m}^2\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  (Petit y Luzum, 2010) y  $l$  es la distancia entre las masas. La dirección de la fuerza es la línea que conecta ambos puntos.

Si bien la atracción entre las masas  $m_1$  y  $m_2$  es simétrica, conviene nombrar una de ellas como masa atrayente y la otra masa atraída. Por simplicidad, establecemos la masa atraída como masa unitaria y la masa atrayente como  $m$ .

La Ecuación (2.1) se transforma entonces en:

$$F = \frac{Gm}{l^2}. \quad (2.2)$$

Introducimos un sistema de referencia geodésico, con sus respectivas coordenadas rectangulares tridimensionales X, Y, Z.

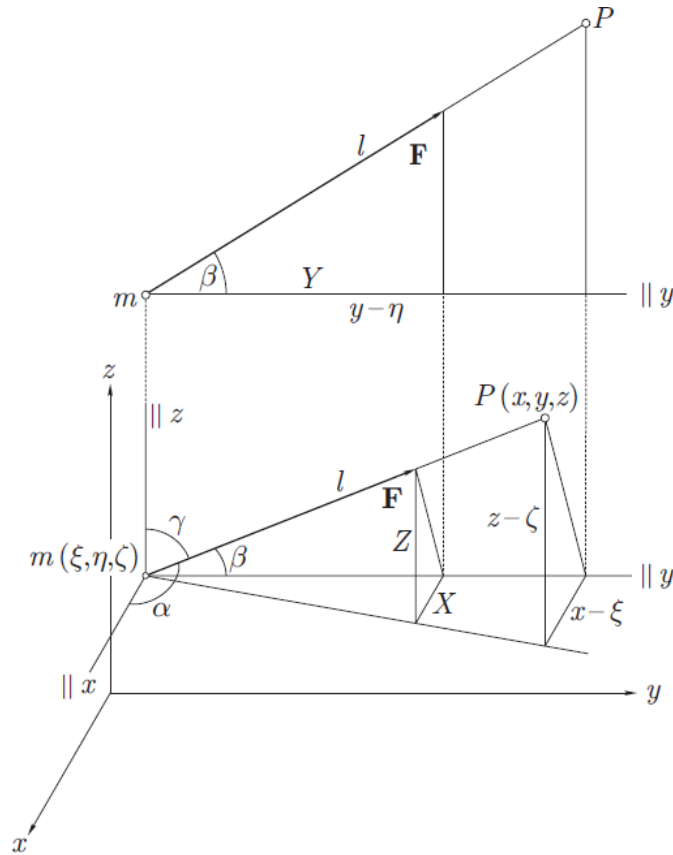


Figura 2.1: Componentes de la Fuerza Gravitacional (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).

Las componentes de la fuerza  $F$  (Figura 2.1) están dadas por las siguientes expresiones:

$$X = -F \cdot \cos\alpha = \frac{-Gm}{l^2} \frac{x-\xi}{l} = -Gm \frac{x-\xi}{l^3}, \quad (2.3)$$

$$Y = -F \cdot \cos\beta = \frac{-Gm}{l^2} \frac{y-\eta}{l} = -Gm \frac{y-\eta}{l^3}, \quad (2.4)$$

$$Z = -F \cdot \cos\gamma = \frac{-Gm}{l^2} \frac{z-\zeta}{l} = -Gm \frac{z-\zeta}{l^3}, \quad (2.5)$$

donde:  $(\xi, \eta, \zeta)$  son las coordenadas de la masa atrayente  $m$ ;  $(x, y, z)$  son las coordenadas del punto atraído  $P$ ;  $(\alpha, \beta, \gamma)$  los ángulos directrices, formados entre el vector  $F$  y los ejes cartesianos y  $l$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \quad (2.6)$$



Se introduce la función escalar  $V$ , llamada potencial gravitacional, para una masa puntual puede escribirse como:

$$V = \frac{Gm}{l}. \quad (2.7)$$

Las componentes de la fuerza  $\mathbf{F}$ , serán entonces:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.10)$$

El vector fuerza  $\mathbf{F}$  es el gradiente del potencial escalar  $V$ :

$$\mathbf{F} = [X, Y, Z] = \text{grad}(V). \quad (2.11)$$

Si en vez de considerar dos masas puntuales, se trabaja con un sistema de  $n$  masas puntuales actuando sobre una masa unitaria, el potencial gravitacional sobre dicha masa será:

$$V = \frac{G m_1}{l_1} + \frac{G m_2}{l_2} + \dots + \frac{G m_n}{l_n} = \sum_{i=1}^n \frac{G m_i}{l_i}. \quad (2.12)$$

Si ahora se considera el caso de la Tierra, donde las masas puntuales están distribuidas continuamente sobre un volumen  $v$ , con densidad  $\rho$ :

$$\rho = \frac{dm}{dv}, \quad (2.13)$$

donde  $dm$  es el elemento diferencial de masa,  $\rho$  la densidad volumétrica de masa y  $dv$  el elemento diferencial de volumen.

El potencial de gravitacional en un punto P (Figura 2.2) generado una distribución continua de masa es:

$$V = G \iiint_v \frac{dm}{l} = G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv, \quad (2.14)$$

$$V(x, y, z) = G \iiint_v \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

donde  $l$  es la distancia entre el elemento diferencial de masa y el punto atraído P,  $(\xi, \eta, \zeta)$  las coordenadas del elemento diferencial de la masa atrayente  $dm$ ,  $(x, y, z)$  las coordenadas del punto atraído P y  $dv = d\xi d\eta d\zeta$  el elemento diferencial de volumen.

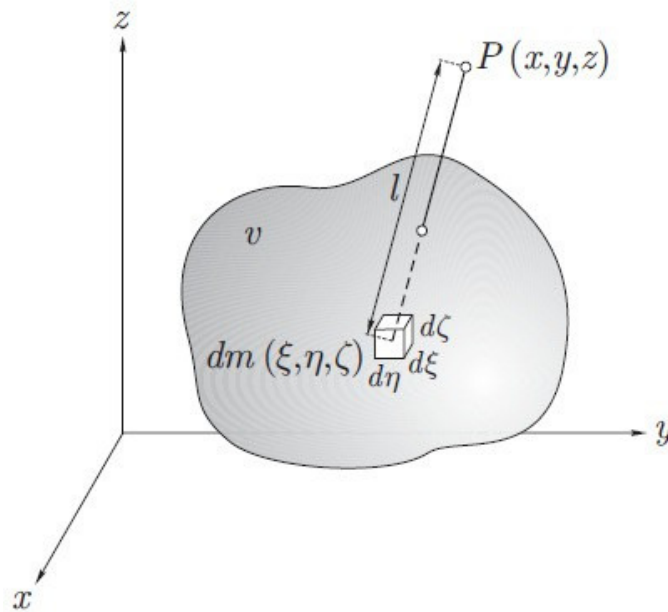


Figura 2.2: Potencial gravitacional de un cuerpo sólido en un punto P (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005)

Las componentes de la fuerza de atracción dadas por las Ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) pueden escribirse:

$$X = -G \iiint_v \frac{x-\xi}{l^3} \rho dv, \quad (2.15)$$

$$Y = -G \iiint_v \frac{y-\eta}{l^3} \rho dv, \quad (2.16)$$

$$Z = -G \iiint_v \frac{z-\zeta}{l^3} \rho dv. \quad (2.17)$$

## 2.2) Campo de gravedad terrestre.

La fuerza total que actúa sobre un cuerpo en reposo en la superficie terrestre, es la resultante de la fuerza gravitacional y de la fuerza centrífuga debido a la rotación terrestre, y se llama gravedad.

Se considera un sistema rectangular de coordenadas cuyo origen coincide con el centro de gravedad terrestre y el eje z coincide con el eje medio de rotación. Se asume, por convención, el eje x coincidente con el meridiano por Greenwich.

La Figura 2.3 muestra las componentes de la fuerza centrífuga con relación al sistema de coordenadas adoptado.

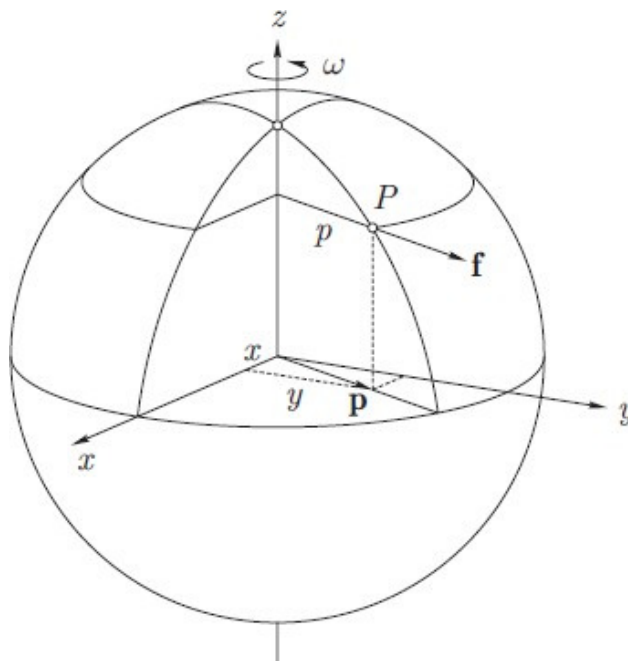


Figura 2.3: Fuerza centrífuga (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).

La fuerza centrífuga ejercida en el punto P es:

$$f = \omega^2 p, \quad (2.18)$$

donde:  $\omega$  es la velocidad angular de rotación terrestre,  $p$  es la distancia del punto P al eje de rotación ( $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ ).

La dirección del vector  $p$  es:

$$p = [x, y, 0]. \quad (2.19)$$

Las componentes de la fuerza centrífuga son:

$$f = [\omega^2 x, \omega^2 y, 0]. \quad (2.20)$$

El potencial centrífugo  $\Phi$  del cual se deriva la fuerza centrífuga es:

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.21)$$

Del potencial centrífugo  $\Phi$ , se puede obtener la fuerza centrífuga a partir de:

$$f = \nabla \Phi = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]. \quad (2.22)$$

El potencial de la gravedad  $W$  será la suma del potencial gravitacional  $V$  y el potencial centrífugo  $\Phi$ :

$$W = W(x, y, z) = V + \Phi = G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.23)$$

La integral se extiende en el volumen  $v$ , referido a toda la extensión de la Tierra.

El gradiente del potencial de gravedad es el vector gravedad  $g$ , el cual es la fuerza total resultante que actúa sobre una masa puntual. Es la suma de la fuerza gravitacional más la fuerza centrífuga.

$$g = \nabla W = \left[ \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right]. \quad (2.24)$$

Las componentes del vector gravedad son:

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -G \iiint_v x - \frac{\xi}{l^3} \rho dv + \omega^2 x, \xi \quad (2.25)$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -G \iiint_v \frac{y - \eta}{l^3} \rho dv + \omega^2 y, \quad (2.26)$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -G \iiint_v \frac{z - \zeta}{l^3} \rho dv + \omega^2 z, \quad (2.27)$$

La dirección del vector gravedad es la dirección de la línea de la plomada o vertical, tal cual se la conoce en Geodesia.

### 2.3) Superficie de nivel y línea de la plomada.

Las superficies donde el potencial  $W$  es constante se llaman superficies equipotenciales de la gravedad, las cuales se asocian con la idea intuitiva de horizontalidad:

$$W(x, y, z) = \text{constante}. \quad (2.28)$$

Al diferenciar el potencial de la gravedad  $W$ , se obtiene:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz, \quad (2.29)$$

siendo:  $(dx, dy, dz)$  las componentes en cada eje cartesiano del vector desplazamiento  $dl$ .

En notación vectorial y utilizando el producto escalar se escribe:

$$dW = \text{grad } W \cdot dl = g \cdot dl, \quad (2.30)$$

siendo:

$$dl = (dx, dy, dz). \quad (2.31)$$

Si el vector desplazamiento  $dl$  se lo considera sobre una superficie equipotencial de  $W$ , el potencial será constante y, por tanto:

$$dW = 0. \quad (2.32)$$

La Ecuación 2.30 queda de la siguiente forma:

$$g \cdot dl = 0, \quad (2.33)$$

Al ser cero el producto escalar de los vectores  $g$  y  $dl$ , ambos vectores son perpendiculares entre sí. Por lo tanto, el vector gravedad es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por el punto.

La superficie de los océanos, luego de una serie de simplificaciones puede ser considerada como una superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre, la cual fue propuesta por C. F. Gauss como "figura matemática de la Tierra", luego llamada geoide.

El geoide es una superficie del campo de gravedad terrestre que mejor coincide con el nivel medio del mar para una determinada época (Mader, 1978).

El geode queda definido por:

$$W = W_0 = \text{constante} . \quad (2.34)$$

Las líneas que intersectan ortogonalmente todas las superficies equipotenciales no son estrictamente rectas, presentan una leve curvatura, son conocidas como líneas de fuerza o líneas de la plomada (Figura 2.4). El vector gravedad en cualquier punto es tangente a la línea de la plomada en dicho punto.

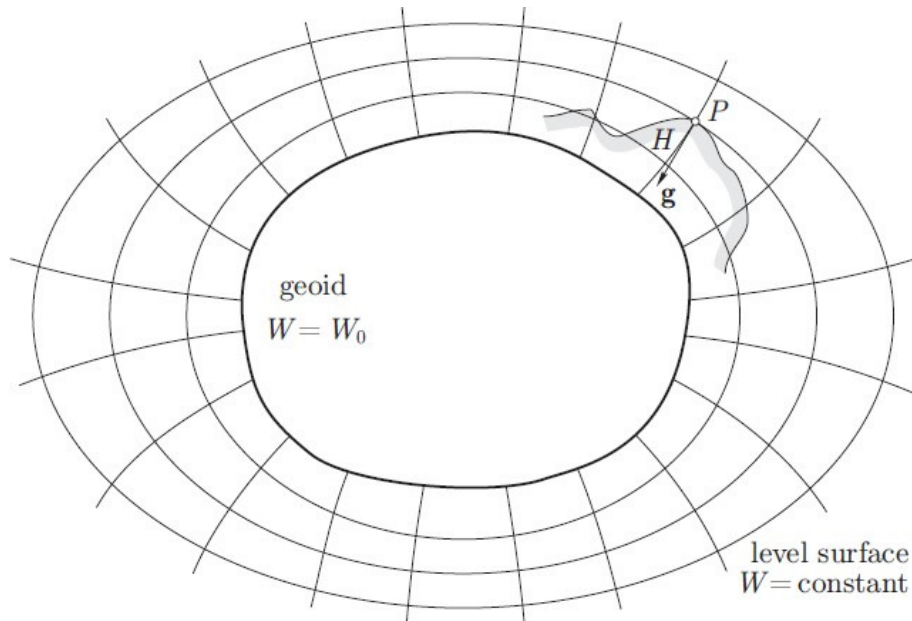


Figura 2.4: Superficies de nivel y líneas de la plomada (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).

La altura H de un punto sobre el nivel del mar (altura ortométrica) se mide sobre la línea curva de la plomada real.

La Figura 2.4 muestra superficies equipotenciales de la gravedad (superficies de nivel) y las respectivas líneas de la plomada, así como indica esquemáticamente la altura ortométrica H, para el punto P.

Considerando el vector  $dl$  de la Ecuación (2.30) a lo largo de la línea de la plomada, en la dirección de incremento de H, es decir desde el geode hacia el espacio exterior (opuesto a la dirección de la gravedad), la dimensión de  $dl$  será:

$$\|dl\| = dH . \quad (2.35)$$

Siendo las direcciones de la gravedad  $g$  y del vector desplazamiento  $dl$  opuestas (difieren  $180^\circ$ ), se tendrá:

$$g \cdot dl = g \cdot dH \cdot \cos(180^\circ) = -g \cdot dH . \quad (2.36)$$

De acuerdo a la ecuación (2.36), se obtiene:

$$dW = -g \cdot dH. \quad (2.37)$$

La Ecuación (2.37) relaciona la altura  $H$  con el potencial  $W$ , resulta básica en la teoría de la determinación de alturas, muestra explícitamente la relación entre la parte geométrica ( $H$ ) y la parte dinámica ( $W$ ).

La Ecuación (2.37) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$g = -\frac{\partial W}{\partial h}. \quad (2.38)$$

La Ecuación (2.38) muestra que la gravedad es la componente vertical del vector gradiente de  $W$  con signo negativo.

## 2.4) Alturas.

### 2.4.1) Alturas niveladas.

La determinación de la diferencia de alturas ( $\delta H_{AB}$ ) entre dos puntos A y B, se realiza a partir de la medición de las distancias sobre una regla vertical (mira), desde los puntos hasta un plano horizontal, tal cual muestra la Figura 2.5.

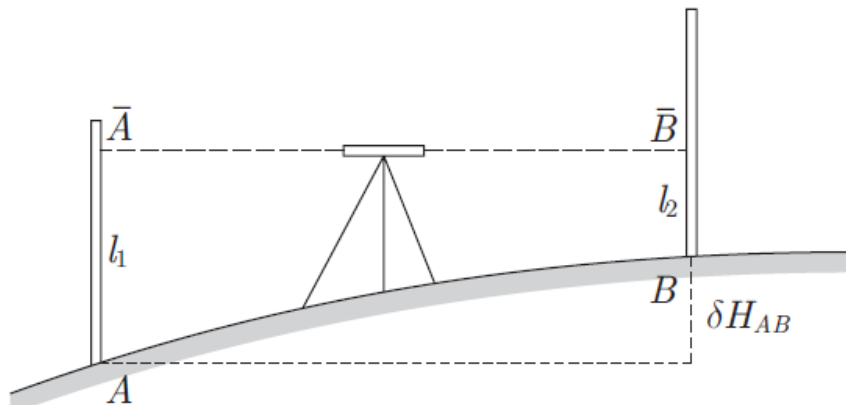


Figura 2.5: Nivelación (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).

Teniendo en cuenta que la línea  $\overline{AB}$  es horizontal, la diferencia en las lecturas de las miras se corresponde con la diferencia de altura.

$$\delta H_{AB} = l_1 - l_2, \quad (2.39)$$

siendo  $\delta H_{AB}$  la diferencia de altura entre A y B;  $l_1 = A\overline{A}$  la lectura en la mira A y  $l_2 = B\overline{B}$  la lectura en la mira B.

Si ahora los puntos A y B se encuentran suficientemente distantes, el procedimiento descrito en la Figura 2.5 deberá aplicarse repetidamente. En este caso la suma de las diferencias de alturas niveladas entre A y B no será igual a la diferencia de alturas ortométricas entre A ( $H_A$ ) y B ( $H_B$ ).

La figura 2.6 describe como el no paralelismo de las superficies equipotenciales del campo de gravedad terrestre implica que el incremento en la nivelación  $\delta n$  no sea igual al incremento en la altura ortométrica  $\delta H_B$ .

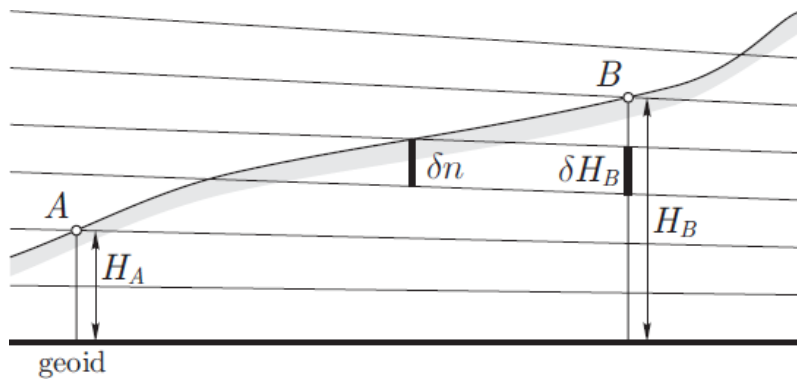


Figura 2.6: Nivelación y altura ortométrica (Hofmann – Wellenhof y Moritz, 2005).

$$-\delta W = g\delta n = g' \delta H_B, \quad (2.40)$$

siendo:  $\delta W$  la diferencia de geopotencial correspondiente al desnivel  $\delta n$ ;  $g$  la gravedad en la estación de nivelación,  $\delta n$  es el desnivel medido,  $g'$  es la gravedad sobre la línea de la plomada por B, y  $\delta H_B$  es el incremento de la altura ortométrica en B.

A partir de la Ecuación (2.40), se obtiene:

$$\delta H_B = \frac{g}{g'} \delta n \neq \delta n. \quad (2.41)$$

La Ecuación (2.41) indica que no existe una relación lineal entre el desnivel medido y la diferencia de alturas ortométricas entre dos puntos.

Si la gravedad  $g$  fue medida, se tiene:

$$\delta W = -g\delta n, \quad (2.42)$$

$$W_B - W_A = -\sum_A^B g\delta n, \quad (2.43)$$

Siendo  $W_B$  el potencial de gravedad en el punto B y  $W_A$  el potencial de gravedad en el punto A.



La Ecuación (2.43) muestra como a partir de la combinación de nivelación y la medición de gravedad, se puede determinar una magnitud física como es la diferencia de potencial.

Estrictamente, la sumatoria indicada en la Ecuación (2.43) debe ser reemplazada por una integral, por lo cual se obtiene:

$$W_B - W_A = - \int_A^B g \delta n. \quad (2.44)$$

Se puede observar que la integral es independiente del camino de la nivelación hecho para vincular el punto A con B, lo cual se debe a que el potencial  $W$  es función únicamente de la posición, por lo cual a todo punto le corresponde un único valor de  $W$ .

Si la línea de nivelación vuelve al punto de inicio (A), es decir, trabajamos sobre un circuito cerrado, se cumple que la integral será cero:

$$\oint g \delta n = W_A - W_A = 0 \quad (2.45)$$

Para el caso de una nivelación, el desnivel medido dependerá del camino seguido y si trabajamos sobre un circuito cerrado, la sumatoria de los desniveles medidos no será igual a cero.

$$\oint \delta n \neq 0. \quad (2.46)$$

### 2.4.2) Números geopotenciales.

Considerando el punto O sobre el nivel del mar, lo cual en una primera aproximación se considera coincidente con el geoide, y otro punto A unido a O por medio de una línea de nivelación, se tiene la siguiente expresión para la diferencia de potencial, a partir de la Ecuación (2.44):

$$\int_0^A g \delta n = W_0 - W_A = C_A \quad (2.47)$$

donde  $W_0$  es el potencial de gravedad en el punto O y  $W_A$  es potencial de gravedad en el punto A y  $C_A$  es el número geopotencial de A. Por su definición, siempre será positivo.

Al ser una diferencia de potencial, el número geopotencial C será independiente del camino seguido en la nivelación para unir el punto O y A. Puede ser considerado como una medición natural de la altura, a pesar de no tener unidades de longitud.

De la Ecuación (2.47) se desprende que:

$$C = G \cdot H. \quad (2.48)$$

Por lo tanto, la definición básica de altura es:

$$H = \frac{C}{G}, \quad (2.49)$$

donde  $G$  es un cierto valor de gravedad;  $H$  se expresa en términos de campo de gravedad y no de forma geométrica. De acuerdo a los diferentes tipos de gravedad ( $G$ ) que se usen en el denominador de la Ecuación (2.49), se determinan los distintos sistemas de alturas.

### 2.4.3) Alturas ortométricas.

La altura ortométrica es la distancia, sobre la línea de la plomada real entre el geoide y un punto P ubicado en la superficie terrestre. (Ver Figura 2.4)

La altura ortométrica se calcula utilizando como valor de  $G$ , Ecuación (2.49), el valor promedio de la gravedad real medida a lo largo de la línea de la plomada real entre el geoide y el punto de observación ( $\bar{g}$ ).

$$H = \frac{C}{\bar{g}}, \quad (2.50)$$

Por este motivo  $\bar{g}$  solo puede determinarse de manera aproximada (no es unívoca), cada hipótesis de la distribución de las densidades dentro de la Tierra utilizada para determinar  $\bar{g}$  conduce a diferentes sistemas de alturas ortométricas.

### 2.4.3.1) Alturas ortométricas de Helmert.

Su cálculo se basa en utilizar la reducción de Poincaré y Prey para la determinación de la gravedad promedio según la Ecuación [4.31] de Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006):

$$\bar{g} = g + 0.0424 H, \quad (2.51)$$

donde  $g$  es la gravedad sobre el punto en la superficie de la Tierra, se expresa en Gal, y la altura ortométrica ( $H$ ) en km.

### 2.4.3.2) Alturas ortométricas de Mader.

La hipótesis asumida en su cálculo implica que la gravedad varía linealmente con la altura. El valor de la gravedad promedio se calcula en forma similar a las alturas de Helmert, pero en este caso el valor de la gravedad sobre el geoide ( $g_0$ ) considera la influencia de la topografía, según Karl Mader, Wien (1954):

$$\bar{g} = g + (3.086 - 0.83818 \rho_p) \times 10^{-6} \frac{H}{2} + \delta g, \quad (2.52)$$

$$\delta g = \frac{1}{2} (\delta g_p + \delta g_0), \quad (2.53)$$

siendo  $\rho_p$  la densidad volumétrica de masa en P. Los valores de  $\delta g_p$  y  $\delta g_0$  se tabulan para compartimentos concéntricos al punto de cálculo hasta una distancia de 30 km y divididos en ángulos de  $\alpha = 22.5^\circ$ . La suma de los aportes individuales proporciona la reducción total para obtener  $\bar{g}$ .

Las unidades consideradas en Ecuación (2.52) y Ecuación (2.53) son:

$$\bar{g}, g, \delta g_p, \delta g_0 \text{ y } \delta g \Rightarrow [\text{m/s}^2]$$

$$\rho_p \Rightarrow [10^{-3} \text{ kg m}^{-3}]$$

$$H \Rightarrow [\text{m}]$$

### 2.4.3.3) Alturas ortométricas de Baranov.

Se asume que los campos de gravedad real y normal son idénticos y tienen el mismo gradiente vertical. La gravedad  $g_0$  sobre el geoide puede reemplazarse con la normal  $\gamma^p$  y por tanto  $\bar{g}$  solo depende de la altura, según Sánchez, L. (2002):

$$\bar{g} = \frac{1}{2} (g + \gamma^p). \quad (2.54)$$

#### 2.4.3.4) Correcciones ortométricas.

La corrección ortométrica (OC) es el valor necesario sumar al desnivel bruto medido para obtener la diferencia de alturas ortométricas, y se calcula según la Ecuación [4.46] de Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006):

$$OC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A + \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B, \quad (2.55)$$

siendo:

$OC_{AB}$	Corrección ortométrica AB [m]
$g$	Gravedad promedio entre A y B [m/s <sup>2</sup> ]
$\gamma_0$	Gravedad normal sobre el elipsoide de referencia en la latitud 45° [m/s <sup>2</sup> ]
$\delta n$	Desnivel bruto medido entre A y B [m]
$\bar{g}_A$	Gravedad promedio entre A y el geoide, sobre la línea de la plomada real [m/s <sup>2</sup> ]
$H_A$	Altura ortométrica de A [m]
$\bar{g}_B$	Gravedad promedio entre B y el geoide, sobre la línea de la plomada [m/s <sup>2</sup> ],
$H_B$	Altura ortométrica de B [m]

La diferencia de alturas ortométricas se obtiene según:

$$\Delta H_{AB} = \Delta n_{AB} + OC_{AB}, \quad (2.56)$$

donde:  $\Delta H_{AB}$  es la diferencia de alturas ortométricas AB,  $\Delta n_{AB}$  es el desnivel bruto AB y  $OC_{AB}$  es la corrección ortométrica AB.

#### 2.4.4) Alturas normales.

El teluroide se define como la superficie formada por aquellos puntos Q que poseen el mismo potencial normal ( $U_Q$ ) que el del geopotencial en los diferentes puntos P ( $W_P$ ) de la superficie de la tierra, estando P y Q en la misma normal. (Figura 2.7)

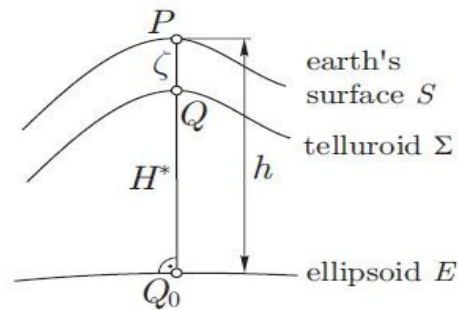


Figura 2.7: Superficie del teluroide. Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006).

La separación entre la superficie terrestre y el teluroide, se corresponde con la anomalía de altura ( $\zeta$ ) y se establece la siguiente relación:

$$h = H_N + \zeta, \quad (2.57)$$

siendo:

- $h$       Altura elipsoidal
- $H_N$     Altura normal
- $\zeta$       Anomalía de altura

Al colocar las anomalías de altura  $\zeta$  por encima del elipsoide, se genera una superficie próxima al geoide que Molodensky llamó cuasigeoide.

La altura normal es la distancia, sobre la línea de la plomada teórica entre el cuasigeoide y un punto P ubicado en la superficie terrestre. (Ver Figura 2.8).

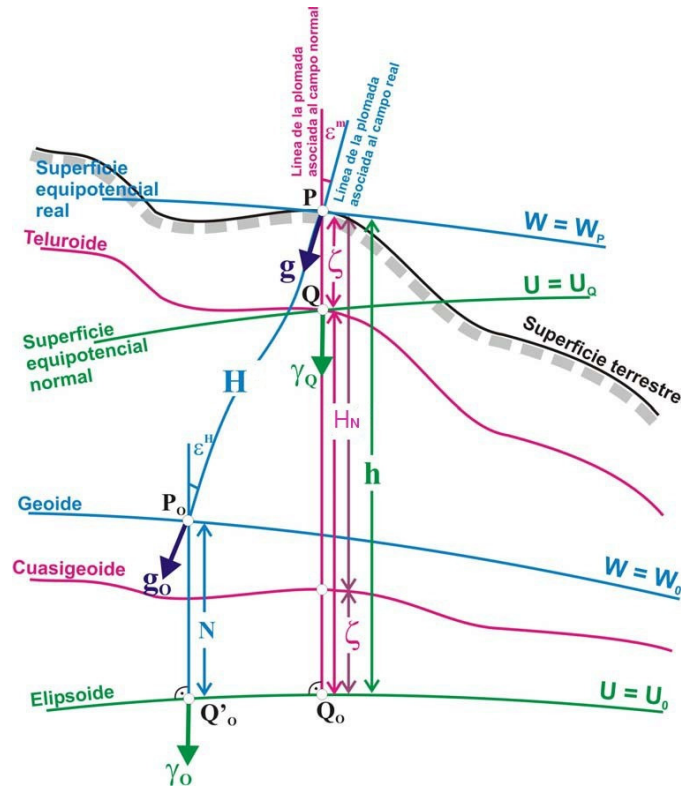


Figura 2.8: Superficies de referencia de alturas físicas (Laura Sánchez, 2002)

El cálculo de la altura normal se realiza utilizando la Ecuación (2.49), donde  $G$  toma el valor de  $\bar{\gamma}$ :

$$H = \frac{C}{\bar{\gamma}}, \quad (2.58)$$

donde  $\bar{\gamma}$  es el valor promedio de la gravedad teórica medida a lo largo de la línea de la plomada teórica entre el cuasigeoide y el punto de observación. La gravedad normal promedio puede calcularse en cualquier punto sin realizar ninguna hipótesis, puede determinarse con exactitud. Las alturas normales son determinables unívocamente. El geoide y el cuasigeoide son idénticos en las zonas oceánicas. En las áreas continentales (tierra sólida), el geoide y el cuasigeoide no coinciden.

#### 2.4.4.1) Alturas normales de Molodensky.

Se calcula la gravedad normal promedio, según la Ecuación [4.60] de Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006):

$$\bar{\gamma} = \gamma_0^\varphi \left[ 1 - (1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{H_N}{a} + \frac{H_N^2}{a^2} \right], \quad (2.59)$$

donde:  $m = \frac{w^2 ab}{GM}$  es la relación entre la fuerza de atracción gravitacional y la centrífuga en el Ecuador,  $b$  es el semieje menor del elipsoide de referencia;  $a$  es el semieje mayor y  $f$  es el aplanamiento geométrico del elipsoide de referencia, respectivamente,  $w$  la velocidad angular de la Tierra,  $GM$  la constante gravitacional geocéntrica de la Tierra y  $\gamma_0^\varphi$  es la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia en el punto de observación.

#### 2.4.4.2) Alturas normales de Vignal.

Se omiten los términos no lineales de la Ecuación (2.59) y se utiliza el promedio global del gradiente normal de la gravedad, según Sánchez, L. (2002):

$$\bar{\gamma} \approx -3,086 \times 10^{-6} \cdot \frac{H_N}{2}. \quad (2.60)$$

#### 2.4.4.3) Alturas normales de Bomford.

La gravedad normal sobre el elipsoide de referencia del punto de observación se reemplaza por la gravedad de la latitud  $\varphi=45^\circ$ , según Sánchez, L. (2002), por lo cual la gravedad normal media queda:

$$\bar{\gamma} \approx \gamma_{45}^\varphi - 3,086 \times 10^{-6} \cdot \frac{H_N}{2}. \quad (2.61)$$

#### 2.4.4.4) Alturas normales de Hirvonen.

Se introduce la latitud geográfica normal ( $\varphi^N$ ), a los efectos de mejorar la precisión en la altura normal, lo cual se detalla en la Figura 2.9.

$$\varphi^N = \varphi + (0,00017'') \cdot \text{sen}(2\varphi) \cdot H_N \quad (2.62)$$

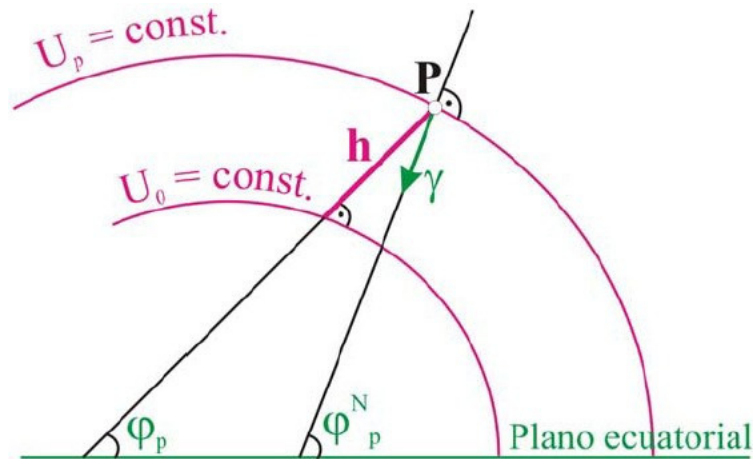


Figura 2.9: Latitud geográfica normal  $\varphi^N$  (Laura Sánchez, 2002).

$$H_N = \frac{C}{\gamma_0} + \left[ \frac{C}{\gamma_0} \right]^2 (1,578576 \times 10^{-7} - 1,029316 \times 10^{-9} \text{sen}^2 \varphi^N + 1,66432 \times 10^{-11} \text{sen}^4 \varphi^N) + \left[ \frac{C}{\gamma_0} \right]^3 (2,4761 \times 10^{-14} - 2,01 \times 10^{-16} \text{sen}^2 \varphi^N) \quad (2.63)$$

Sin embargo estas aproximaciones no tienen sentido actualmente ya que el acceder a coordenadas geodésicas de los puntos nivelados no presenta mayor dificultad, debido al acceso a las coordenadas geodésicas obtenidas a través de los receptores GNSS<sup>12</sup>.

<sup>12</sup> GNSS Global Navigation Satellite System.



#### 2.4.4.5) Corrección normal.

La corrección normal (NC) es el valor necesario sumar al desnivel bruto medido para obtener la diferencia de alturas normales, según la Ecuación [4.64] de Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006):

$$NC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_N^A + \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_N^B, \quad (2.64)$$

siendo:

$NC_{AB}$	Corrección normal AB [m]
$g$	Gravedad promedio entre A y B [m/s <sup>2</sup> ]
$\gamma_0$	Gravedad normal sobre el elipsoide en la latitud 45° [m/s <sup>2</sup> ]
$\delta n$	Desnivel bruto medido entre A y B [m]
$\bar{\gamma}_A$	Gravedad normal promedio entre A y el cuasigeoide [m/s <sup>2</sup> ]
$H_N^A$	Altura normal de A [m]
$\bar{\gamma}_B$	Gravedad normal promedio entre B y el cuasigeoide [m/s <sup>2</sup> ]
$H_N^B$	Altura normal de B [m]

La diferencia de alturas normales se obtiene:

$$\Delta H_{NAB} = \Delta n_{AB} + NC_{AB}, \quad (2.65)$$

donde:  $\Delta H_{NAB}$  es la diferencia de alturas normales entre A y B,  $\Delta n_{AB}$  es el desnivel bruto medido entre A y B,  $NC_{AB}$  es la corrección normal entre A y B.

### 3. DATOS GEODÉSICOS Y GRAVIMÉTRICOS

El presente capítulo describe los datos geodésicos y gravimétricos disponibles en Uruguay y que han sido utilizados en este trabajo de tesis.

Se analizan el datum vertical, la Red Altimétrica Nacional y la Red Gravimétrica Nacional.

Finalmente se presenta el cálculo del número geopotencial de referencia para Uruguay, realizado sobre el Nodal Belvedere.

#### 3.1) Datum vertical (Cero Oficial).

El datum vertical (Cero Oficial) fue establecido por Decreto del Poder Ejecutivo, de fecha 20 de mayo de 1949, el cual en su artículo 2° determinó que *“mientras el país no cuente con observaciones suficientes, que le permitan determinar el nivel medio del mar, fijase provisoriamente el Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo, como base única para los acotamientos de los relieves del territorio nacional. Este plano pasa a 22.97 metros por debajo del marcador descrito en el artículo 1° y a 0.91 metros sobre el plano horizontal de referencia indicado en el mismo artículo.”*

Los estudios técnicos tendientes a determinar el valor referido, fueron realizados por el Observatorio Nacional, recopilando datos del periodo 1906 – 1924, a partir de los cuales determinaron que el Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo se encontraba 0,91 metros por encima del Cero Wharton, valor que fue fijado por la Dirección de Hidrografía. (Mouret, 1947)

Previo al decreto referido, el país contaba con diferentes datums verticales o ceros históricos, a saber: Cero Wharton (utilizado en relevamientos hidrográficos y en cartas náuticas inglesas), Cero Zanetti (utilizado en la construcción de las vías férreas), Cero del General O'Brien, Cero Francés (cartas náuticas francesas), entre otros. (Mouret, 1947)

Considerando los ceros históricos más utilizados: el Cero Wharton y el Cero Zanetti, la Figura 3.1 detalla la relación entre ambos: el repere del Cabildo, y el cero oficial establecido por Decreto del Poder Ejecutivo de 1949. (Mouret, 1950)

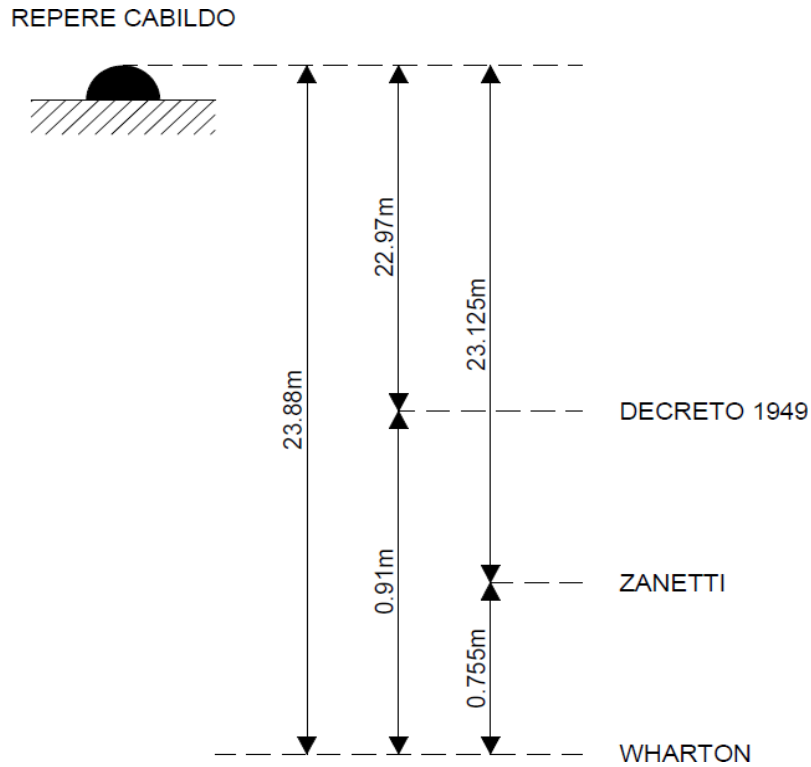


Figura 3.1: Relación entre los distintos Ceros históricos.

### 3.2) Red Altimétrica Nacional.

Las líneas de la Red Altimétrica Nacional se clasifican en Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden.

La Tabla 3.1 presenta las principales características de las Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden. Se indica en cada caso la cantidad de puntos, la cantidad de líneas que conforman el orden, así como la longitud total en cada orden. Finalmente, la cantidad de puntos destruidos, dato correspondiente al año 2008 (Rovera et al., 2008).

Tabla 3.1: Descripción de Líneas de Altimetría Nacional (Rovera et al., 2008).

Orden	Puntos	Líneas	Longitud (km)	Destruídos
Primer	1347	25	3883	500
Segundo	937	66	2992	150
Tercer	462		5795	

La Figura 3.2 muestra la distribución geográfica de las Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden del Uruguay (Rovera, 2012).

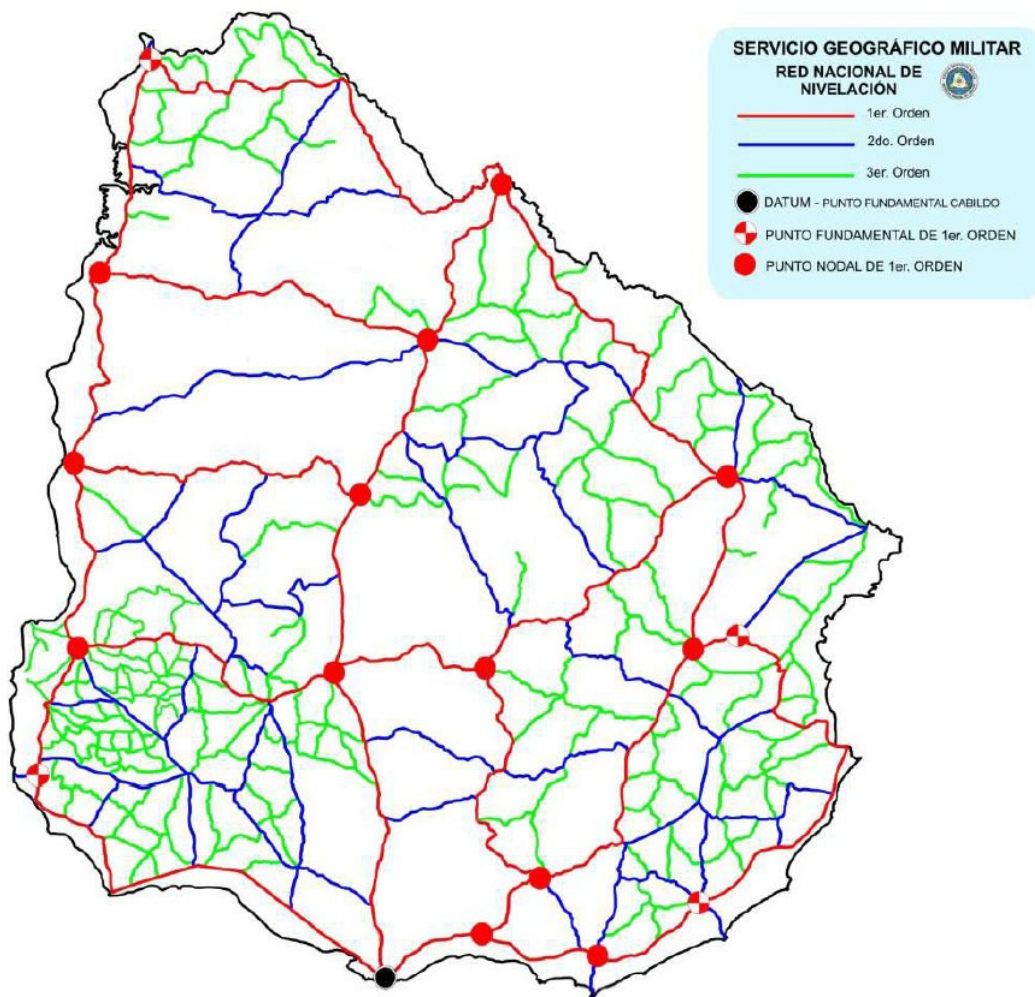


Figura 3.2: Líneas de Nivelación de Primer, Segundo y Tercer Orden (Rovera, 2012).

La Red Altimétrica Nacional de Primer Orden está compuesta por 25 Líneas de Nivelación de Primer Orden y 18 puntos Nodales. En la Figura 3.3 se presentan los Nodales y Líneas de Nivelación de Primer Orden del Uruguay.

El comienzo de las tareas de medición de las Líneas de Nivelación de Primer Orden fue en el año 1930, realizándose su primer ajuste general en el año 1968 (Acuña, 1984). Se aplicaron correcciones ortométricas a partir de valores teóricos de gravedad calculados para cada punto.

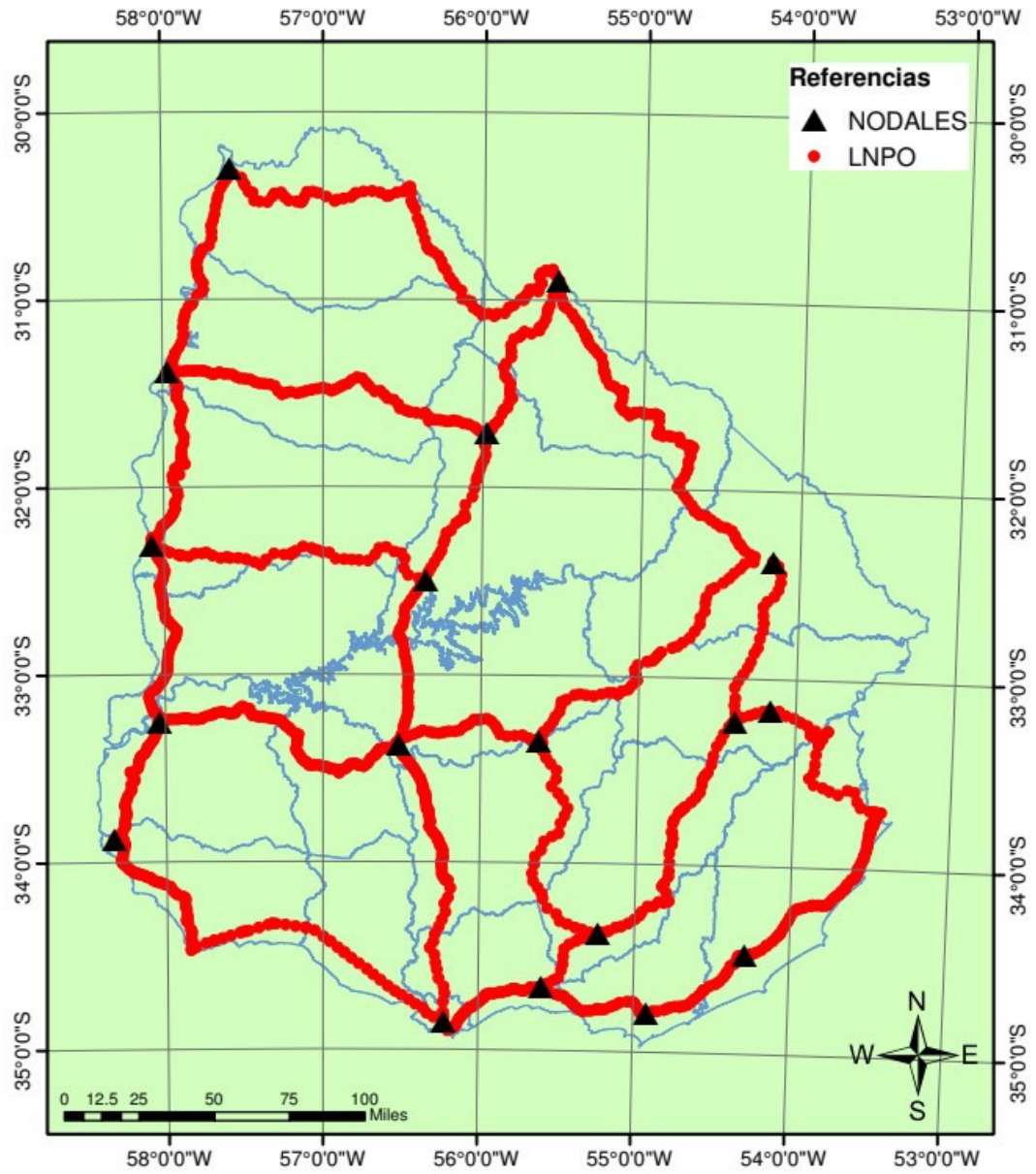


Figura 3.3: Nodales y Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO).

La Figura 3.4 presenta en forma esquemática los 8 circuitos de nivelación que conforman la Red de Altimétrica Nacional de Primer Orden. Se indica en cada caso la denominación del circuito, así como el cierre de los correspondientes desniveles geométricos medidos, expresados en milímetros (mm).

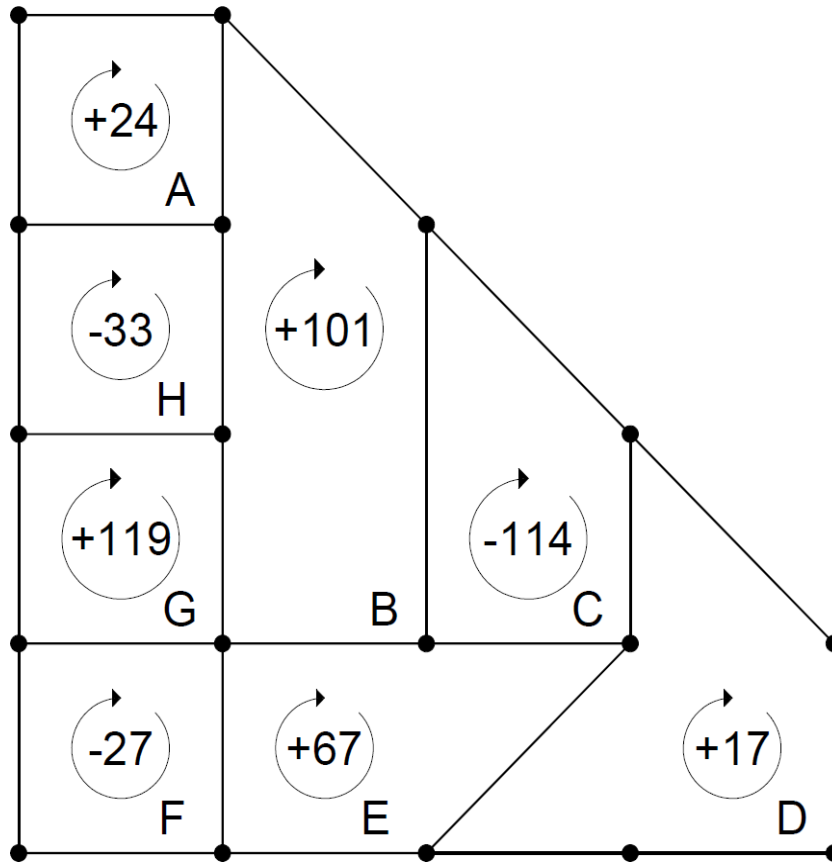


Figura 3.4: Esquema de cierres en circuitos de Líneas de Nivelación de Primer Orden en mm.

Se consideran los respectivos perímetros de los 8 circuitos referidos anteriormente, expresados en kilómetros (km). La expresión que vincula la tolerancia, el factor de precisión y el perímetro es:

$$\sigma = f \cdot \sqrt{p(\text{km})}, \quad (3.1)$$

donde:  $p$  es el perímetro del circuito dado en (km),  $f$  es el factor de precisión y  $\sigma$  es la tolerancia (mm).

A los efectos de determinar el factor de precisión  $f$  para la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden, se consideran los cierres de las nivelaciones brutas en cada uno de los 8 circuitos cerrados (A, B, C, D, E, F, G, H) que conforman la red. Estos cierres se los asocia con la tolerancia de la Ecuación (3.1).

Considerando la Ecuación (3.1), se dispone del perímetro de cada circuito, así como su cierre el cual se asocia a la tolerancia, lo cual permite despejar el factor de precisión  $f$ .

Al analizar conjuntamente los 8 circuitos que conforman la Red de Altimétrica Nacional de Primer Orden, se obtiene el factor de precisión  $f$  que se verifica simultáneamente para todos los circuitos, es decir, en los 8 casos el cierre queda por debajo del umbral de tolerancia. Dicho valor para el factor de precisión  $f$  es 5, tal cual se aprecia en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Descripción de los circuitos de nivelación.

Polígono	Nro. Puntos	Alturas (m)		Longitud (km)	Cierre (mm)	Factor de precisión	
		Mínima	Máxima			f = 4	f = 5
<b>A</b>	248	14	381	825	24	115	144
<b>B</b>	274	66	304	950	101	123	154
<b>C</b>	245	27	304	677	114	104	130
<b>D</b>	221	14	285	676	17	104	130
<b>E</b>	269	36	234	588	67	97	121
<b>F</b>	194	36	158	739	27	109	136
<b>G</b>	271	1	179	636	119	101	126
<b>H</b>	288	1	291	673	33	104	130

En las Tabla 3.3 y Tabla 3.4 se presentan detalles específicos de cada una de las Líneas de Nivelación de Primer Orden.

Tabla 3.3: Nodales inicio y fin de cada Línea de Nivelación de Primer Orden.

<b>Línea</b>	<b>Desde</b>		<b>Hacia</b>	
<b>1</b>	BELLA UNION	SGM2295	RIVERA	SGM2296
<b>2</b>	RIVERA	SGM2296	TACUAREMBO	SGM2290
<b>3</b>	TACUAREMBO	SGM2290	SALTO	SGM2282
<b>4</b>	SALTO	SGM2282	BELLA UNION	SGM2295
<b>5</b>	RIVERA	SGM2296	MELO	SGM2288
<b>6</b>	MELO	SGM2288	SARANDI DEL YI	SGM2272
<b>7</b>	SARANDI DEL YI	SGM2272	DURAZNO	SGM2274
<b>8</b>	DURAZNO	SGM2274	PERALTA	SGM2273
<b>9</b>	PERALTA	SGM2273	TACUAREMBO	SGM2290
<b>10</b>	MELO	SGM2288	TREINTA Y TRES	SGM2268
<b>11</b>	TREINTA Y TRES	SGM2268	MINAS	SGM2270
<b>12</b>	MINAS	SGM2270	SARANDI DEL YI	SGM2272
<b>13</b>	TREINTA Y TRES	SGM2268	JULIO M. SANZ	SGM2294
<b>14</b>	JULIO M. SANZ	SGM2294	ROCHA	SGM2293
<b>15</b>	ROCHA	SGM2293	SAN CARLOS	SGM2292
<b>16</b>	SAN CARLOS	SGM2292	EMPALME R8 Y R9	SGM2271
<b>17</b>	EMPALME R8 Y R9	SGM2271	MINAS	SGM2270
<b>18</b>	EMPALME R8 Y R9	SGM2271	BELVEDERE	SGM2275
<b>19</b>	BELVEDERE	SGM2275	DURAZNO	SGM2274
<b>20</b>	MERCEDES	SGM2298	DURAZNO	SGM2274
<b>21</b>	BELVEDERE	SGM2275	NUEVA PALMIRA	SGM2297
<b>22</b>	NUEVA PALMIRA	SGM2297	MERCEDES	SGM2298
<b>23</b>	PAYSANDU	SGM2289	PERALTA	SGM2273
<b>24</b>	MERCEDES	SGM2298	PAYSANDU	SGM2289
<b>25</b>	PAYSANDU	SGM2289	SALTO	SGM2282



Tabla 3.4: Coordenadas geodésicas de los Nodales (WGS84).

Nodales		Latitud	Longitud
TREINTA Y TRES	SGM2268	-33.22991	-54.38622
MINAS	SGM2270	-34.37827	-55.23656
EMPALME R8 Y R9	SGM2271	-34.66369	-55.59403
SARANDI DEL YI	SGM2272	-33.34776	-55.62850
PERALTA	SGM2273	-32.49413	-56.35533
DURAZNO	SGM2274	-33.37295	-56.51917
BELVEDERE	SGM2275	-34.85510	-56.22336
SALTO	SGM2282	-31.38735	-57.97054
MELO	SGM2288	-32.37384	-54.16904
PAYSANDU	SGM2289	-32.31269	-58.07896
TACUAREMBO	SGM2290	-31.71185	-55.97810
SAN CARLOS	SGM2292	-34.79225	-54.91545
ROCHA	SGM2293	-34.47284	-54.28974
JULIO M. SANZ	SGM2294	-33.16476	-54.16586
BELLA UNION	SGM2295	-30.30558	-57.57670
RIVERA	SGM2296	-30.90013	-55.54045
NUEVA PALMIRA	SGM2297	-33.87927	-58.33222
MERCEDES	SGM2298	-33.25455	-58.03672

La Figura 3.5 presenta esquemáticamente:

- Los 8 circuitos de nivelación.
- Las 25 Líneas de Nivelación de Primer Orden.
- Los 18 Nodales

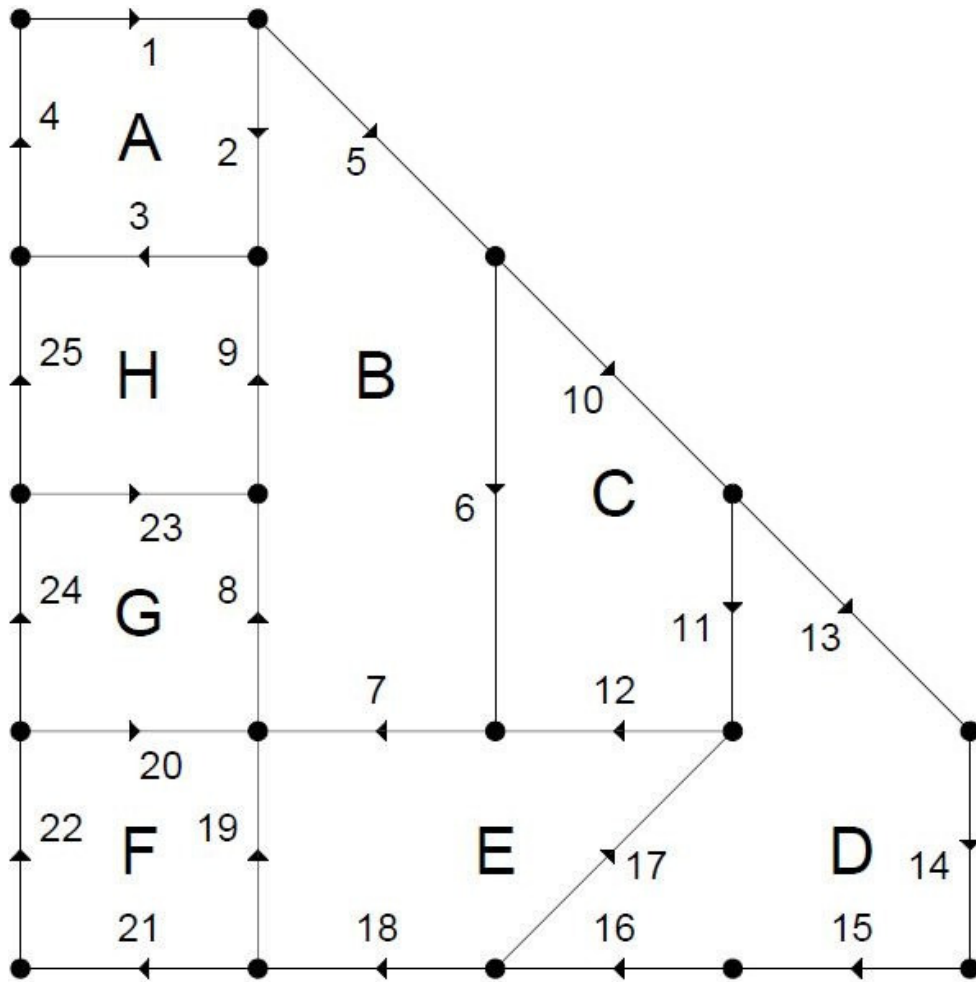


Figura 3.5: Esquema de Líneas de Nivelación de Primer Orden y circuitos de nivelación.

### 3.3) Red Gravimétrica Nacional.

La primera observación gravimétrica documentada en Uruguay, fue realizada el 18 de febrero de 1932 por el Prof. Vening Meinesz, presidente de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (UGGI<sup>13</sup>), determinando a bordo de un submarino holandés el valor de 979760 mGal<sup>14</sup> para el fondo de la Bahía de Montevideo. El instrumental utilizado en la medición consistió en un gravímetro tripendular con dispositivo fotográfico de registro, de su propia invención. (Subiza et al., 1996)

En la década de 1950, el Prof. N. C. Harding de la Universidad de Wisconsin (EEUU), estableció un punto gravimétrico en el Aeropuerto de Carrasco, con un valor de 979746.7 mGal. (Subiza et al., 1996)

Entre el 31 de julio y el 4 de agosto de 1962 se realizó un perfil submarino de 600 km entre el Cabo San Antonio y Buenos Aires en Argentina, y el puerto de Montevideo en Uruguay. Estuvo a cargo de la Facultad de Ingeniería de Buenos Aires, utilizando el gravímetro "North American UW-2R". (Subiza et al., 1996)

Posteriormente, se realizaron enlaces aéreos entre los aeropuertos de Carrasco (Montevideo) y Ezeiza (Buenos Aires) con la finalidad de determinar un datum gravimétrico, utilizando gravímetros Worden (N.º 51, 488 y 497). (Subiza et al., 1996)

A los enlaces aéreos, se le agregaron los enlaces submarinos realizados previamente y se cerró el enlace con un error de 0.17 mGal, determinándose el valor de la gravedad a la estación:

<b>Estación:</b>	Aeropuerto de Carrasco (Subsuelo)
<b>Latitud:</b>	-34° 50' 18"
<b>Longitud:</b>	-56° 01' 18"
<b>Altitud (NMM):</b>	12.13 m
<b>Gravedad:</b>	979747.47 mGal

En 1967 el Instituto Geográfico Militar inicia una serie de levantamientos gravimétricos de campo, de manera de cubrir todo el país. Se incluyó un nuevo enlace con la Estación Absoluta Miguelete (Buenos Aires). La Figura 3.6 muestra la vinculación gravimétrica realizada con Argentina. Se dividió el país en 25 polígonos, superpuestos a la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden, totalizando unas 900 estaciones que constituyen la Red Gravimétrica Fundamental. Finalmente se densifican los polígonos para obtener un punto de gravimetría cada 10 km en todo el país. El nuevo enlace realizado con la Estación Miguelete (Argentina) generó un valor en la gravedad cuya diferencia con el valor previamente determinado fue de 0.2 mGal, y se decidió mantener el valor previo. Se utilizó el gravímetro Lacoste & Romberg (LCR G61). (Subiza et al., 1996)

---

13 International Union of Geodesy and Geophysics

14 1 mGal = 10<sup>-3</sup>Gal = 0.001 cm/s<sup>2</sup> = 10<sup>-5</sup> m/s<sup>2</sup>

La Red Gravimétrica Fundamental se midió entre junio de 1967 y mayo de 1968, se midieron 45 líneas en los 25 polígonos y 35 nodales. La distancia entre estaciones en cada línea varía entre 3 y 5 km, se utilizó el método de perfil y se aceptó una discrepancia de reocupación de 0.05 mGal. En total se midieron 924 estaciones, con 4490 km de líneas. Finalizadas las mediciones de las líneas se enlazaron por vinculación aérea 12 estaciones nodales de manera de verificar las diferencias de gravedad determinadas. (Subiza et al, 1996)

El procesamiento de las observaciones incluyó el cálculo de la gravedad observada, verificación del ajuste de líneas y el ajuste por mínimos cuadrados de la red completa, obteniéndose como resultado un valor de gravedad ajustado para cada estación. Se calcularon las anomalías de Aire Libre y Bouguer, usando la fórmula Internacional de Gravedad de 1930 de Gino Cassins. Finalmente, el Servicio Geográfico Militar (SGM) en 1970 editó como información pública, una publicación con la Red Gravimétrica Fundamental completa, que incluyó estaciones, coordenadas, valores de gravedad y anomalías de gravedad; y en 1973 un mapa de anomalías cada 5 mGal escala 1/1.000.000. (Subiza et al, 1996)

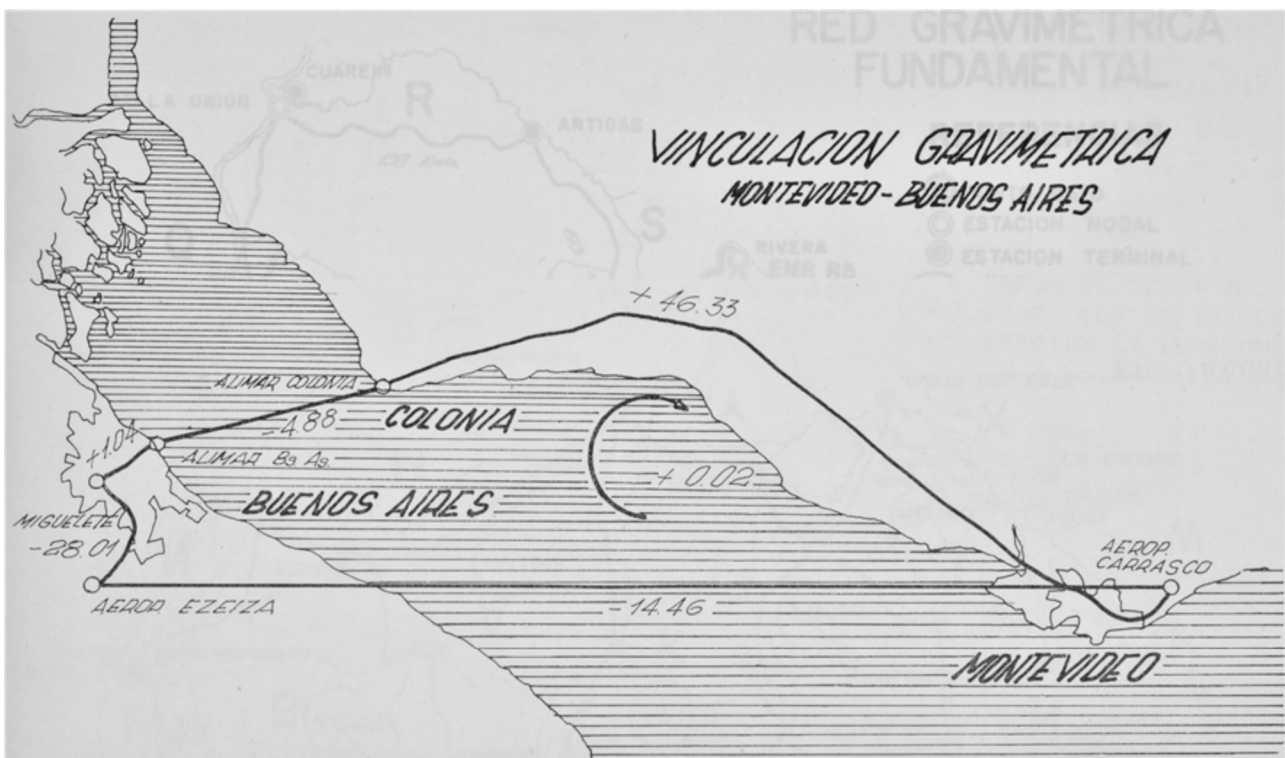


Figura 3.6: Enlaces aéreos con Argentina (Servicio Geográfico Militar, 1970)

La Figura 3.7 muestra las vinculaciones aéreas realizadas dentro del territorio nacional entre estaciones nodales.



Figura 3.7: Vinculaciones aéreas de estaciones nodales (Servicio Geográfico Militar, 1970).

La Figura 3.8 muestra la Red Gravimétrica Fundamental, publicada en 1970.

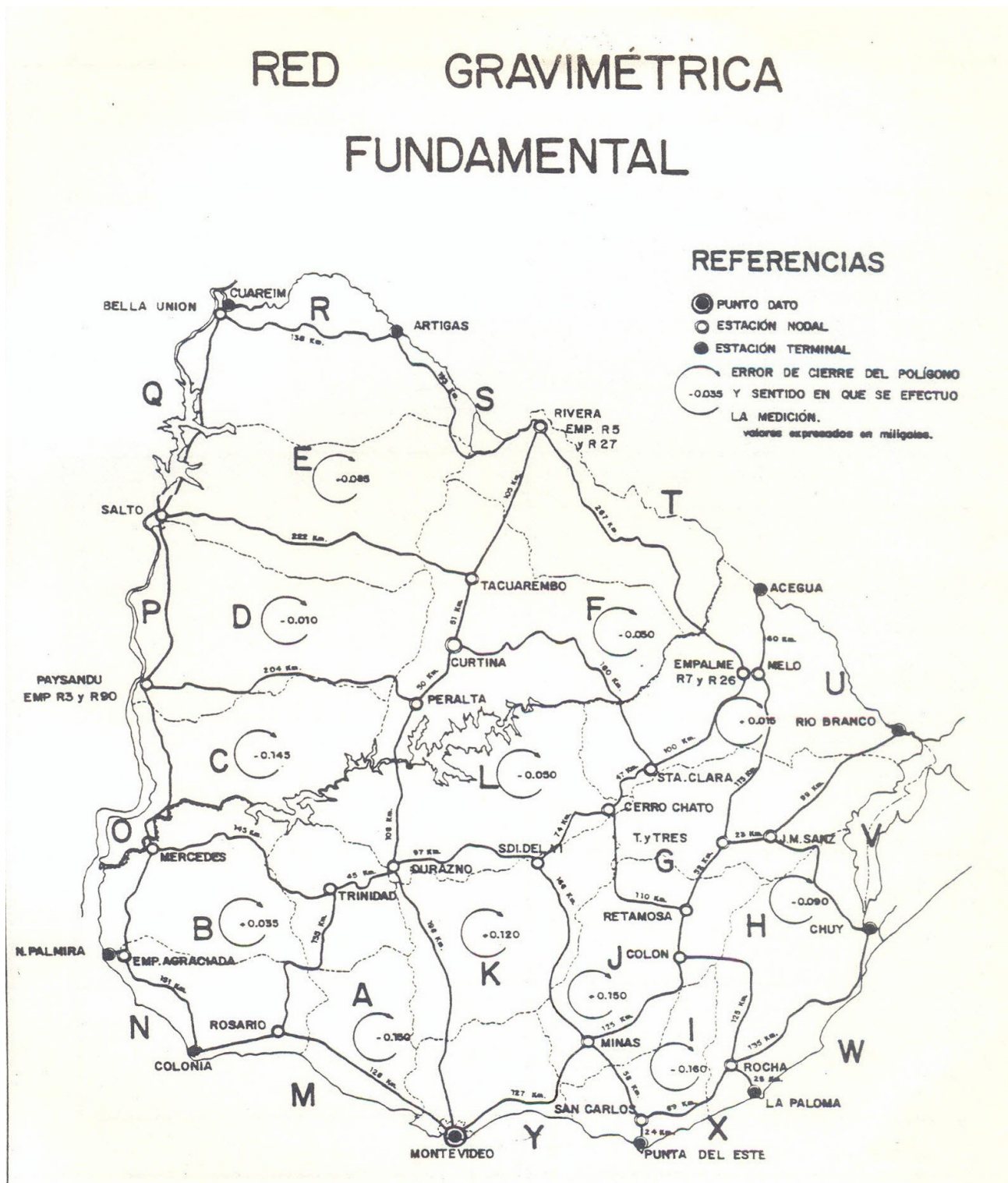


Figura 3.8: Red Gravimétrica Fundamental (Servicio Geográfico Militar, 1984).

En 1984 se reasumieron las operaciones de campo, utilizando un gravímetro LCR G13, adoptándose un nuevo valor para la Estación Aeropuerto de Carrasco (Subsuelo) de 979732.55 mGal, al tomarse en cuenta el valor corregido en unos 15 mGal de Potsdam. En el año 1986 se agregó otro gravímetro: LCR G703. Se planificaron 1300 nuevas estaciones, de manera de densificar los 25 polígonos, medidos por el método de perfil, con una reocupación mínima del 30% de las estaciones en la vuelta. La distancia entre estaciones de una línea varía entre 3 y 8 km, superpuestas a la Red Altimétrica. El procesamiento se realizó utilizando el software GravSys, del Centro de Datos Gravimétricos de Ottawa (Canadá), se calcularon los valores de gravedad y reducción por estación, así como las anomalías de Aire Libre y Bouguer, usando la Fórmula Internacional de Gravedad de 1980 (GRS80). (Subiza et al., 1996)

Uno de los puntos débiles de la red gravimétrica era la permanencia del punto Datum con solo enlaces relativos de 1962 y 1967. Por tal motivo entre julio y octubre de 1987, mediante acuerdos de colaboración entre el Instituto Geográfico Militar (Uruguay), el Observatorio Nacional de Río de Janeiro y la Universidad de San Pablo (Brasil), el Instituto Geográfico Militar (Argentina) y la Universidad de Rosario (Argentina), se coordinaron y realizaron una serie de enlaces gravimétricos relativos con el propósito de establecer las diferencias de gravedad entre las redes gravimétricas de dichos países y controlar el nivel y valor de gravedad en nuestro Datum. (Subiza et al., 1996) Fueron enlazadas 5 estaciones de Brasil con la estación Aeropuerto de Carrasco: Uruguiana, Santana do Livramento, Bagé, Pelotas y Chui, mediante 4 enlaces, cada uno tocando 2 o 3 nodales en el recorrido y utilizando 5 gravímetros LCR: G602, G622, G454, G013, G703. Del lado argentino se realizó un enlace entre las estaciones Nodal Bella Unión (Uruguay) y Monte Caseros (Argentina), realizándose un total de 6 enlaces. Se utilizaron los gravímetros LCR: G679, G013, G703.

Por medio del programa del Instituto de Geodesia (IFE<sup>15</sup>) Sudamericano de Gravedad Absoluta 1988 – 1991 (Torge et al., 1994) se estableció un sistema de control de gravedad absoluta, consistente en 22 estaciones, cubriendo gran parte de América del Sur. En Uruguay las estaciones Rivera y Toledo fueron establecidas en marzo de 1989. En diciembre de 1991 se agregó la estación Paysandú y Toledo fue reocupada.

En 1989 se agregaron 4 nuevos enlaces con Argentina, aprovechando la existencia de una nueva estación absoluta en Paysandú:

- Nodal Mercedes – Miguelete (IFE N.º 313) (Argentina)
- Paysandú (IFE N.º 232) – Paraná (Argentina)
- Nodal Salto – Concordia (Argentina)
- Nodal Salto – Monte Caseros (Argentina)

Teniendo en cuenta la cantidad de información relativa, absoluta y la buena calidad y distribución de estaciones, se realizó la integración y ajuste final a través de un acuerdo

---

15 Institut für Erdmessung

entre el Servicio Geográfico Militar y el IFE de la Universidad de Hannover (Alemania). Este ajuste se llevó a cabo en mayo de 1995 en Hannover. (Subiza et al., 1996)

A los efectos del presente trabajo se cuenta con un banco de datos gravimétricos con 843 puntos en todo el territorio nacional, de los cuales 487 se corresponden con vértices de Líneas de Nivelación de Primer Orden.

La Figura 3.9 presenta la distribución territorial de los 843 puntos con gravedad conocida.

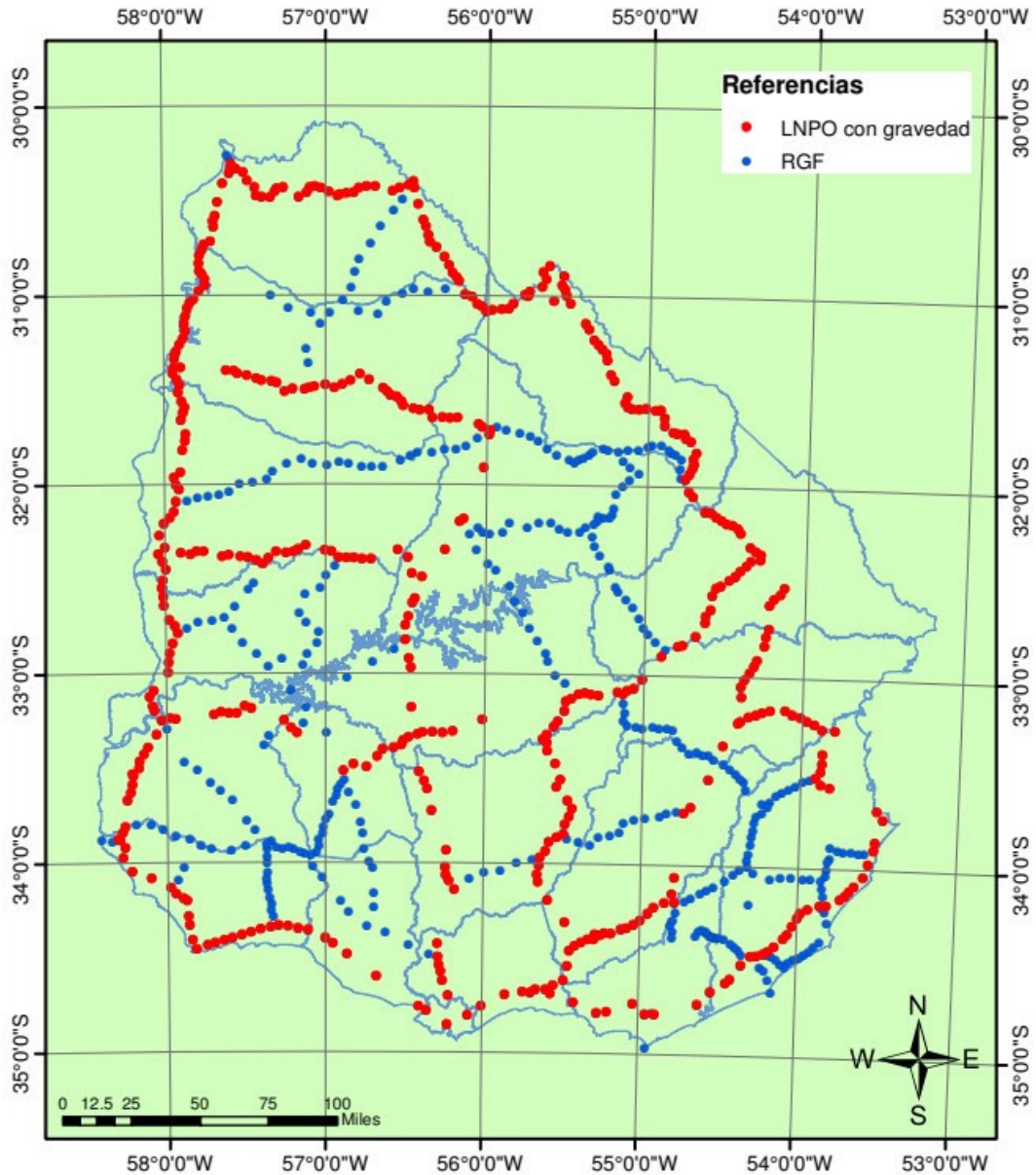


Figura 3.9: Puntos disponibles con gravedad conocida.



El cálculo de números geopotenciales sobre las Líneas de Primer Orden, requiere dotar de un valor de gravedad a todos los puntos. Es por ello que se deben interpolar valores para los restantes 860 puntos de las Líneas de Primer Orden que no cuentan con gravedad medida.

La Tabla 3.5 presenta el detalle por línea de los puntos que requieren interpolación para asignarle valor de gravedad.

Tabla 3.5: Puntos con gravedad conocida por línea.

Número de línea	Puntos				
	Total	Sin gravedad		Con gravedad	
		Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
1	89	33	37.08%	56	62.92%
2	35	34	97.14%	1	2.86%
3	75	39	52.00%	36	48.00%
4	45	17	37.78%	28	62.22%
5	90	43	47.78%	47	52.22%
6	48	17	35.42%	31	64.58%
7	29	20	68.97%	9	31.03%
8	37	29	78.38%	8	21.62%
9	29	24	82.76%	5	17.24%
10	23	10	43.48%	13	56.52%
11	52	34	65.38%	18	34.62%
12	33	13	39.39%	20	60.61%
13	5	1	20.00%	4	80.00%
14	125	90	72.00%	35	28.00%
15	32	26	81.25%	6	18.75%
16	30	24	80.00%	6	20.00%
17	14	5	35.71%	9	64.29%
18	39	33	84.62%	6	15.38%
19	86	70	81.40%	16	18.60%
20	103	85	82.52%	18	17.48%
21	103	72	69.90%	31	30.10%
22	51	38	74.51%	13	25.49%
23	45	17	37.78%	28	62.22%
24	60	42	70.00%	18	30.00%
25	51	31	60.78%	20	39.22%
<b>NODALES</b>	18	13	72.22%	5	27.78%
<b>TOTALES</b>	<b>1347</b>	<b>860</b>	<b>63.85%</b>	<b>487</b>	<b>36.15%</b>

En la Figura 3.10 se presenta la distribución territorial de los 860 puntos pertenecientes a las Líneas de Primer Orden y Nodales que requieren interpolación de gravedad.

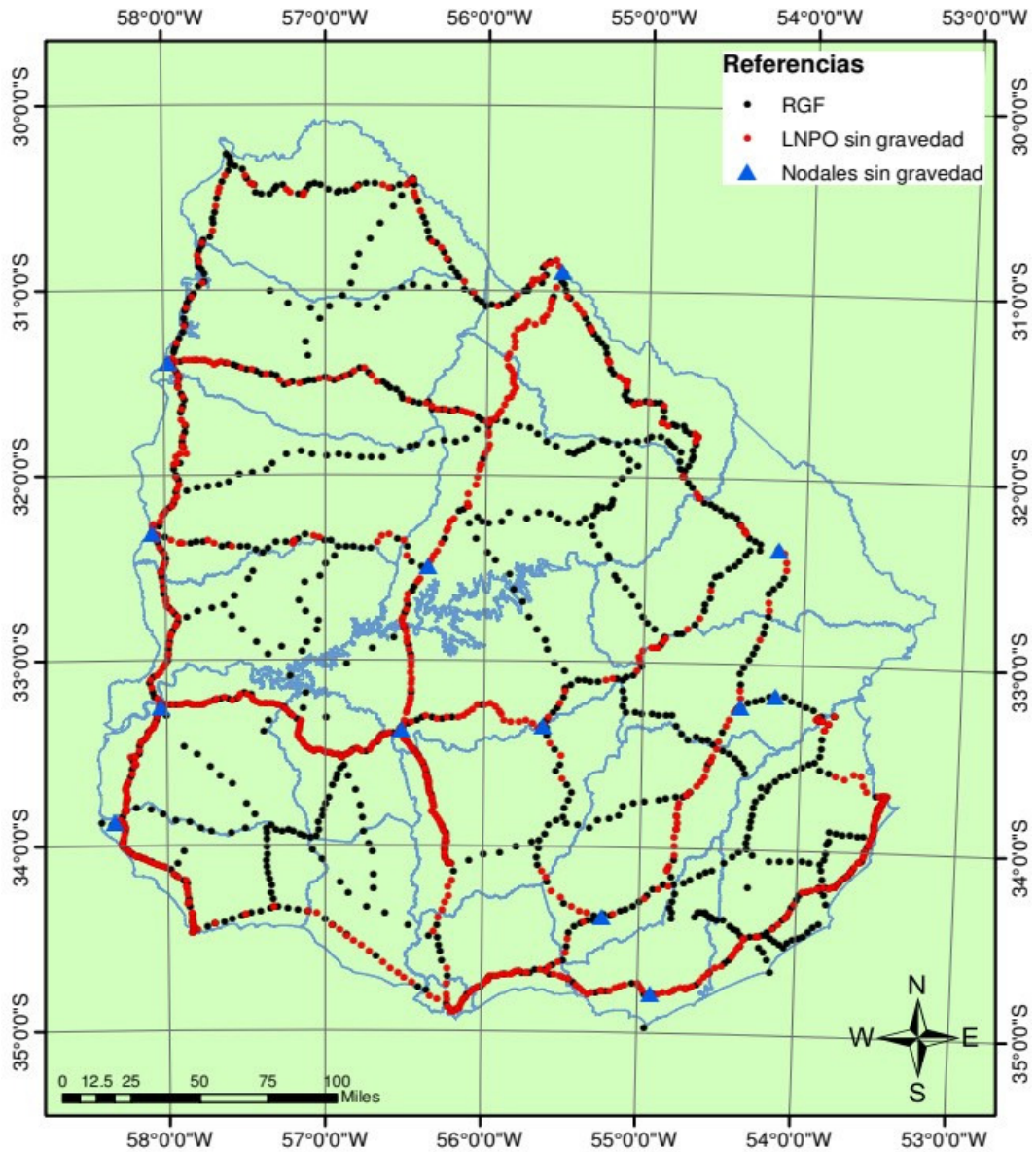


Figura 3.10: Puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO) y Nodales sin gravedad conocida.

### 3.4) Número Geopotencial de referencia para el ajuste de la Red Altimétrica de Primer Orden.

El ajuste de la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden en términos de números geopotenciales requiere el conocimiento de dicho número en al menos un punto de la red. Por tal motivo, y considerando que el Nodal Belvedere es el más próximo a la ubicación del Mareógrafo originalmente utilizado para determinar el Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo (adoptado como origen vertical según Decreto del Poder Ejecutivo del 20 de mayo de 1949), se determinará el valor para dicho nodal, el cual se utilizará como referencia para el ajuste que se realizará en el capítulo siguiente.

La Figura 3.11 corresponde a una captura de Google Earth, donde puede apreciarse la proximidad del Nodal Belvedere con el Puerto de Montevideo, distando aproximadamente 5 km.



Figura 3.11: Ubicación relativa Nodal Belvedere y el Puerto de Montevideo.

La Figura 3.12 señala esquemáticamente las diferentes magnitudes involucradas.

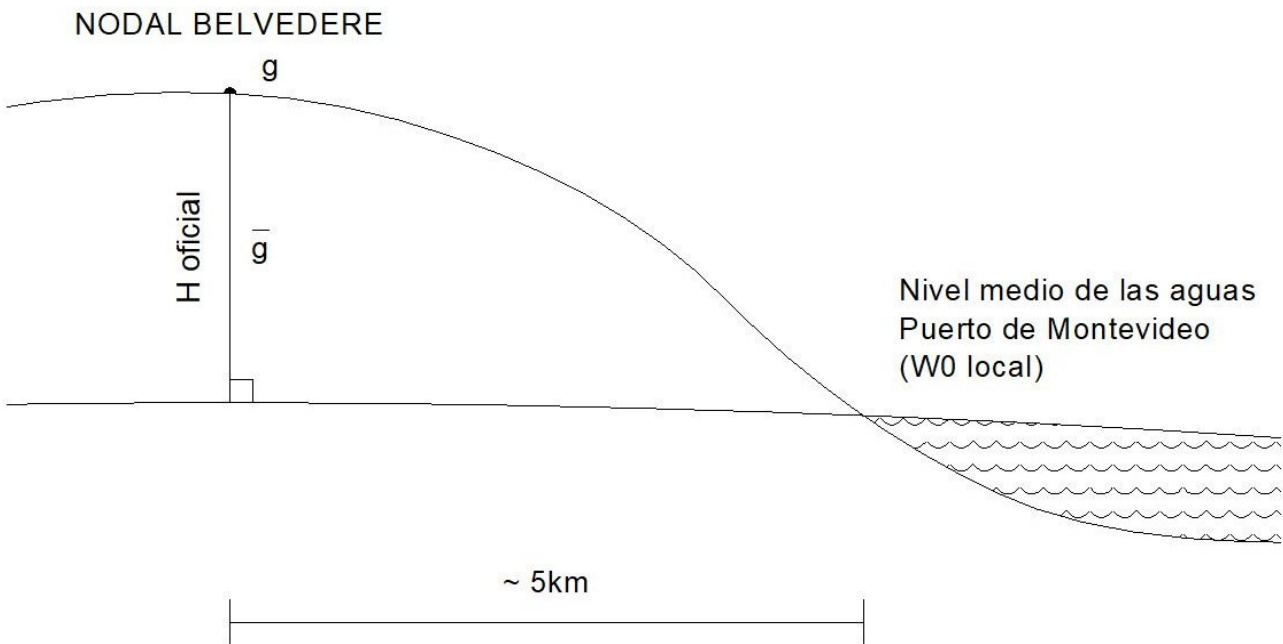


Figura 3.12: Nodal Belvedere y Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo.

El número geopotencial para dicho Nodal se determina a partir de los datos disponibles: altitud referida al Cero Oficial y gravedad.

Inicialmente se calcula la gravedad promedio entre la superficie terrestre y el geode utilizando la Ecuación (3.2):

$$\bar{g}(Gal) = g(Gal) + 0.0424 \cdot H_{of}(km), \quad (3.2)$$

donde:  $\bar{g}$  es la gravedad promedio entre la superficie y el geode (Gal),  $g$  es la gravedad en la superficie (Gal) y  $H_{of}$  es la altura oficial del punto (km).

La altura referida al Cero Oficial (altura oficial) se relaciona con el número geopotencial según la definición de altura ortométrica con la siguiente ecuación:

$$H_{of} = \frac{C}{\bar{g}}, \quad (3.3)$$

Despejando se obtiene:

$$C = H_{of} \cdot \bar{g}, \quad (3.4)$$

Siendo:  $C$  el número geopotencial ( $m^2/s^2$ );  $g$  la gravedad promedio entre la superficie y el geode ( $m/s^2$ ) y  $H_{of}$  es la altura oficial del punto (m).

La Tabla 3.6 muestra los valores numéricos para el cálculo del número geopotencial del Nodal Belvedere.

Tabla 3.6: Valores numéricos para el cálculo del número geopotencial en el Nodal Belvedere.

<b>Nodal Belvedere</b>				
<b>H oficial</b>	42.532	m	0.043	km
<b>g</b>	979742.6	mGal	979.74262	Gal
$\bar{g}$	$\bar{g}(Gal) = g(Gal) + 0.0424 \cdot H_{of}(km)$		979.7444	Gal
<b>C</b>	<b>416.7090</b>	<b>m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup></b>		

## 4. CÁLCULO DE LOS NÚMEROS GEOPOTENCIALES

El presente capítulo presenta los resultados de los diferentes cálculos realizados a partir de los datos disponibles para obtener los números geopotenciales en las Líneas de Nivelación de Primer Orden.

Inicialmente, se interpolan los valores de gravedad para dotar a todos los puntos que conforman las Líneas de Nivelación de Primer Orden de un valor de gravedad, tanto a los Nodales (extremos de las líneas) como a los puntos intermedios.

Luego, se analizan los circuitos que conforman la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden, en términos de desniveles ortométricos. A posteriori, se realiza un ajuste aplicando el método de mínimos cuadrados sobre los puntos nodales, determinándose los correspondientes números geopotenciales. Finalmente, se calculan los mismos hacia el interior de cada línea.

### 4.1) Diagrama de flujo para el cálculo de los números geopotenciales.

La Figura 4.1 indica la secuencia de los cálculos realizados que son presentados en este capítulo.

Primero se realiza la interpolación de gravedad en los puntos faltantes de las Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO). Los datos de entrada al software PREDGRAV (Drewes, 1976 y Drewes, 1978) son los puntos de la Red Gravimétrica Fundamental (RGF) que cuentan con latitud ( $\varphi$ ), longitud ( $\lambda$ ), altura (H) y gravedad medida (g) [RGF( $\varphi, \lambda, H, g$ )] y los puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden que no poseen gravedad [LNPO( $\varphi, \lambda, H$ )]. La salida del software PREDGRAV es la gravedad interpolada en los puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden que no poseían valores de gravedad medidos [LNPO(g)].

Seguidamente se calculan las diferencias de números geopotenciales (dC) entre los puntos Nodales de las Líneas de Nivelación de Primer Orden [LNPO(dC)]. Los datos de entrada al software NUMGEOPOT (Sánchez y Drewes, 2016), que se utiliza para el cálculo, son los puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden [LNPO( $\varphi, \lambda, g$ )], así como los desniveles brutos medidos (dn) en las Líneas de Nivelación de Primer Orden [LNPO(dn)]. La salida son las diferencias de números geopotenciales (dC) entre puntos Nodales de las Líneas de Nivelación de Primer Orden [LNPO(dC)].

La etapa siguiente consiste en la compensación de los números geopotenciales (C), inicialmente se compensan los Nodales [LNPO(C)]. Los datos de entrada al software COMPNG (Sánchez y Drewes, 2016), que en este caso se utiliza en modo "Red", son las coordenadas geodésicas de los Nodales [NODALES( $\varphi, \lambda$ )], las diferencias de números geopotenciales (en cada una de las Líneas de Nivelación de Primer Orden [LNPO(dC)]), y el valor de referencia de número geopotencial para un Nodal [DATUM(C)]. La salida del programa son los números geopotenciales de todos los Nodales [NODALES(C)].

El último proceso consiste en densificar dentro de cada Línea de Nivelación de Primer Orden (LNPO), los números geopotenciales. Se utiliza el software COMPNG (Sánchez y Drewes, 2016), procesando ahora en modo “Línea”. A diferencia del modo “Red”, se debe ingresar los números geopotenciales (C) de los Nodales [NODALES( $\varphi, \lambda, C$ )] que se encuentran en el extremo de cada Línea de Nivelación de Primer Orden (LNPO) y las diferencias de números geopotenciales en cada una de las Línea de Nivelación de Primer Orden [LNPO(dC)]. La salida son los números geopotenciales (C) de todos los puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden [LNPO(C)].

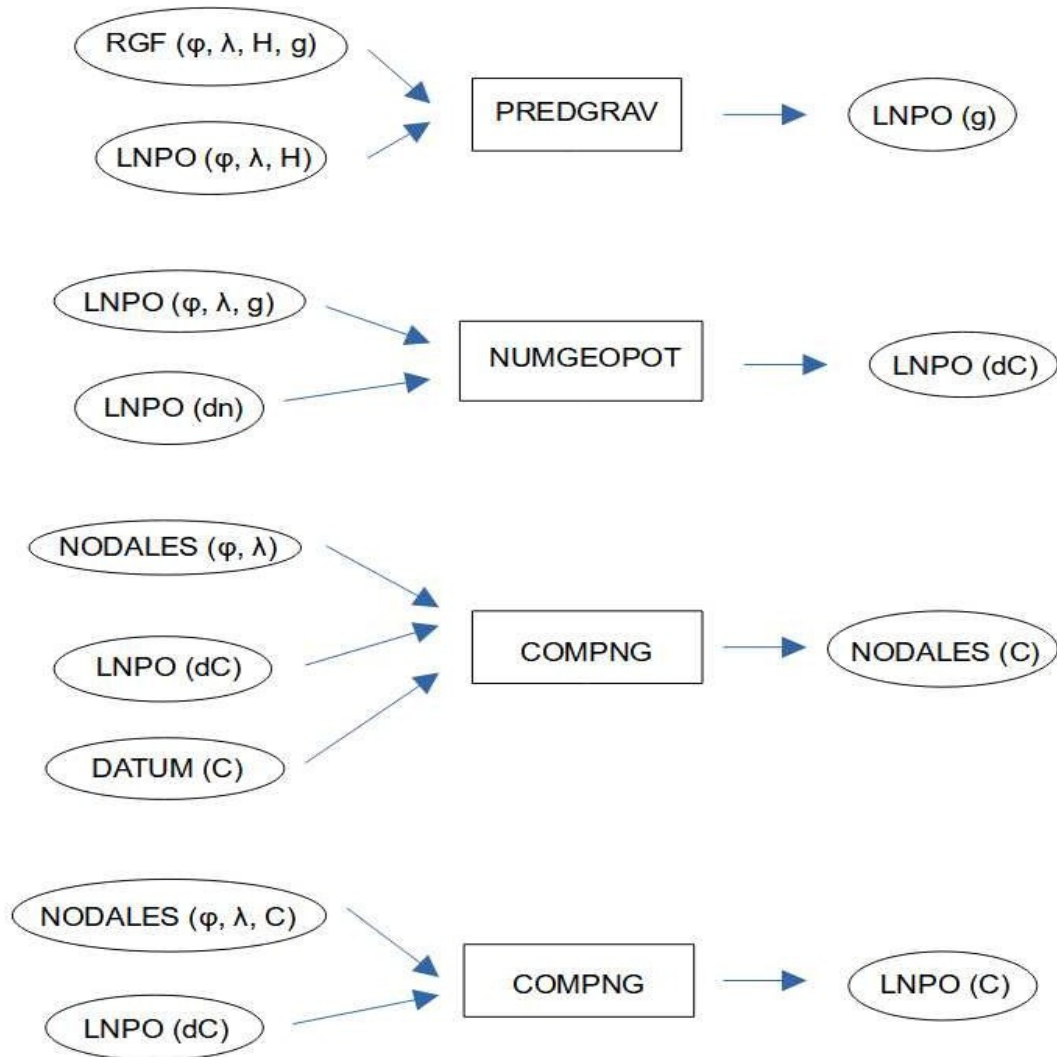


Figura 4.1: Diagrama de flujo de los cálculos realizados.

#### 4.1.1) Interpolación de gravedad en los puntos faltantes de las Líneas de Nivelación de Primer Orden.

A partir de los 843 puntos disponibles en el país con gravedad medida, y las coordenadas de los puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden sin gravedad conocida, se realiza la interpolación correspondiente. Para ello se cuenta con el software PREDGRAV (Drewes, 1976 y Drewes, 1978) el cual permite realizar la interpolación con el método de predicción por mínimos cuadrados a partir de las anomalías de Bouguer.

La Figura 4.2 muestra el mapa de anomalías de Bouguer en Uruguay elaborado por el Instituto Federal de Geociencias y Recursos Naturales (BGR16<sup>16</sup>), Hannover.

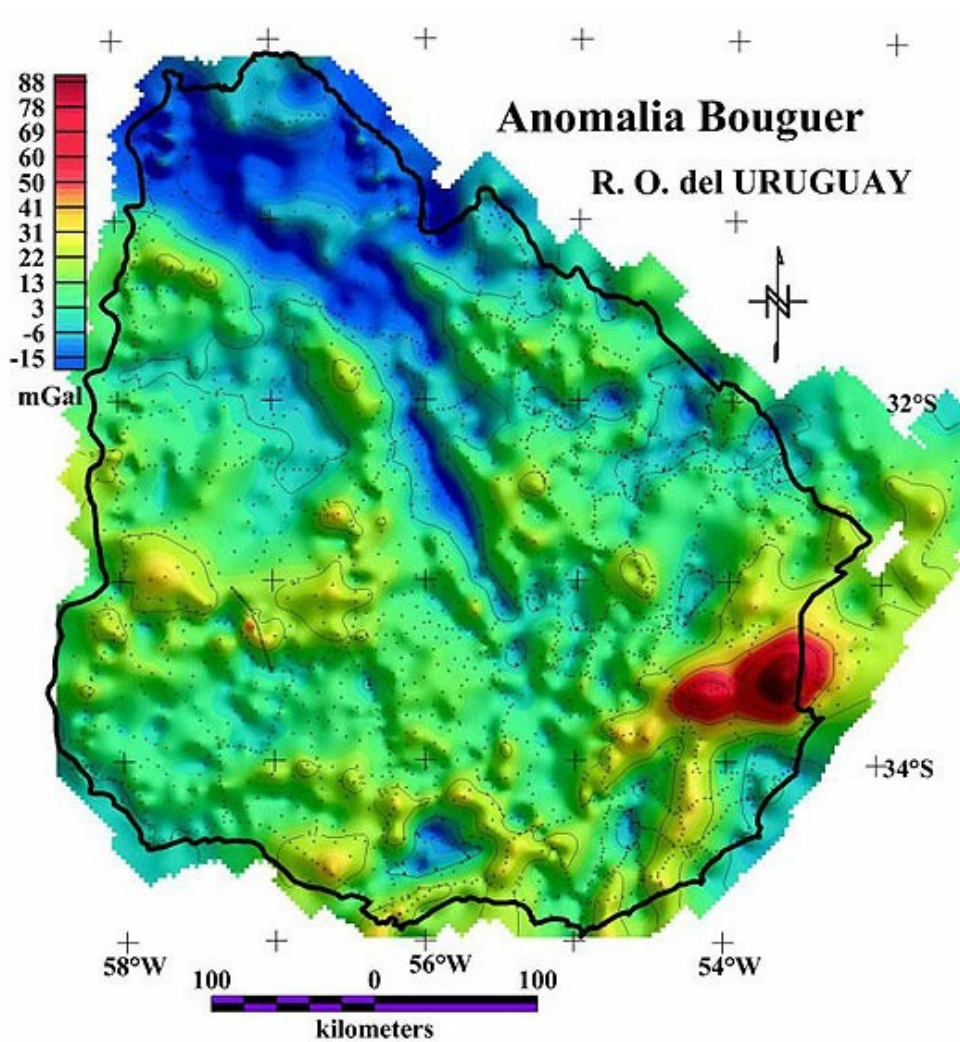


Figura 4.2: Mapa Anomalías de Bouguer en Uruguay (BGR).

Se destaca la presencia en el Sur-Este del país, limitando con Brasil, una anomalía positiva, extraordinariamente positiva: La Anomalía de la Laguna Merín. Esta anomalía, con un ancho aproximado de unos 80 km y una amplitud superior a los 100 mGal, es un fenómeno de escala mundial. (Reitmayr, 2001)

16 Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe



La Figura 4.3 muestra en detalle la Anomalía de la Laguna Merín.

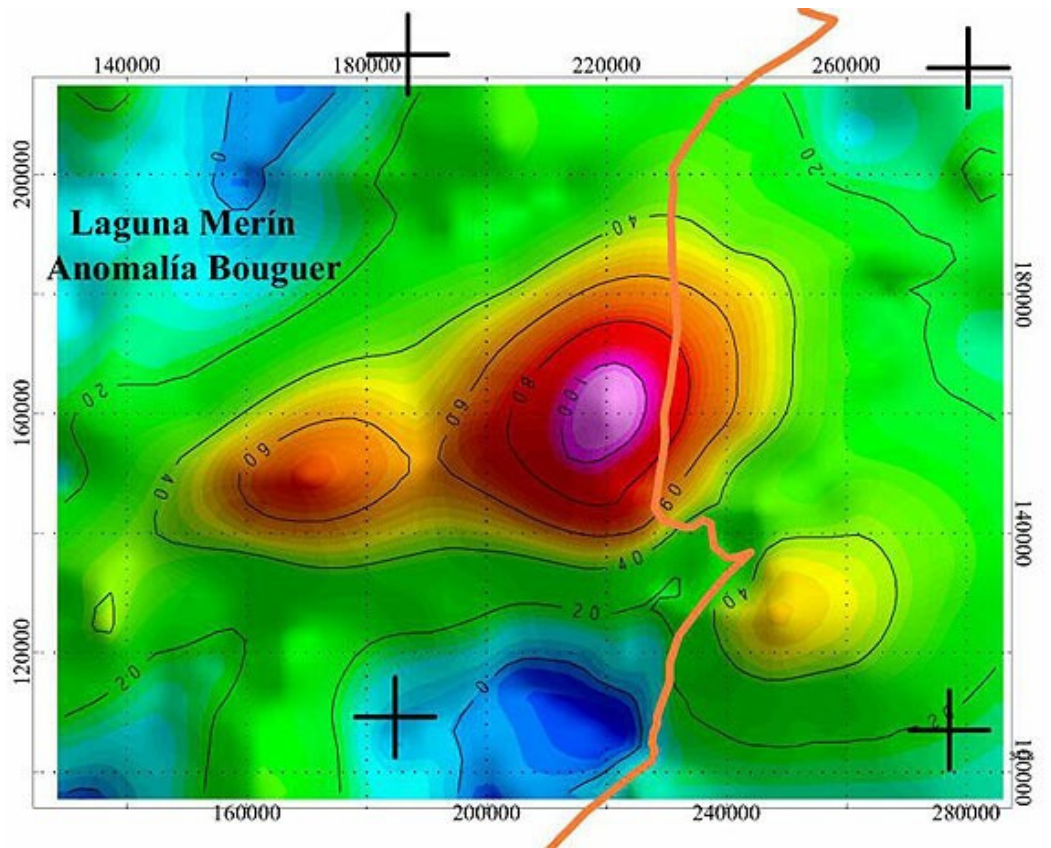


Figura 4.3: Mapa de la anomalía de la Laguna Merín (Reitmayr, 2001).

La particularidad de la fuerte anomalía gravimétrica positiva Laguna Merín, y la necesidad de realizar la interpolación de gravedad en los puntos de nivelación referidos previamente, sugiere la realización de un estudio de la precisión alcanzada en los valores interpolados.

La Figura 4.4 presenta el cálculo de los valores de anomalía de Bouguer (mGal) sobre las Líneas de Nivelación de Primer Orden. Dicho cálculo sobre los 487 puntos con gravedad conocida, muestra resultados acordes con la Figura 4.2 presentado previamente, verificándose los valores calculados.

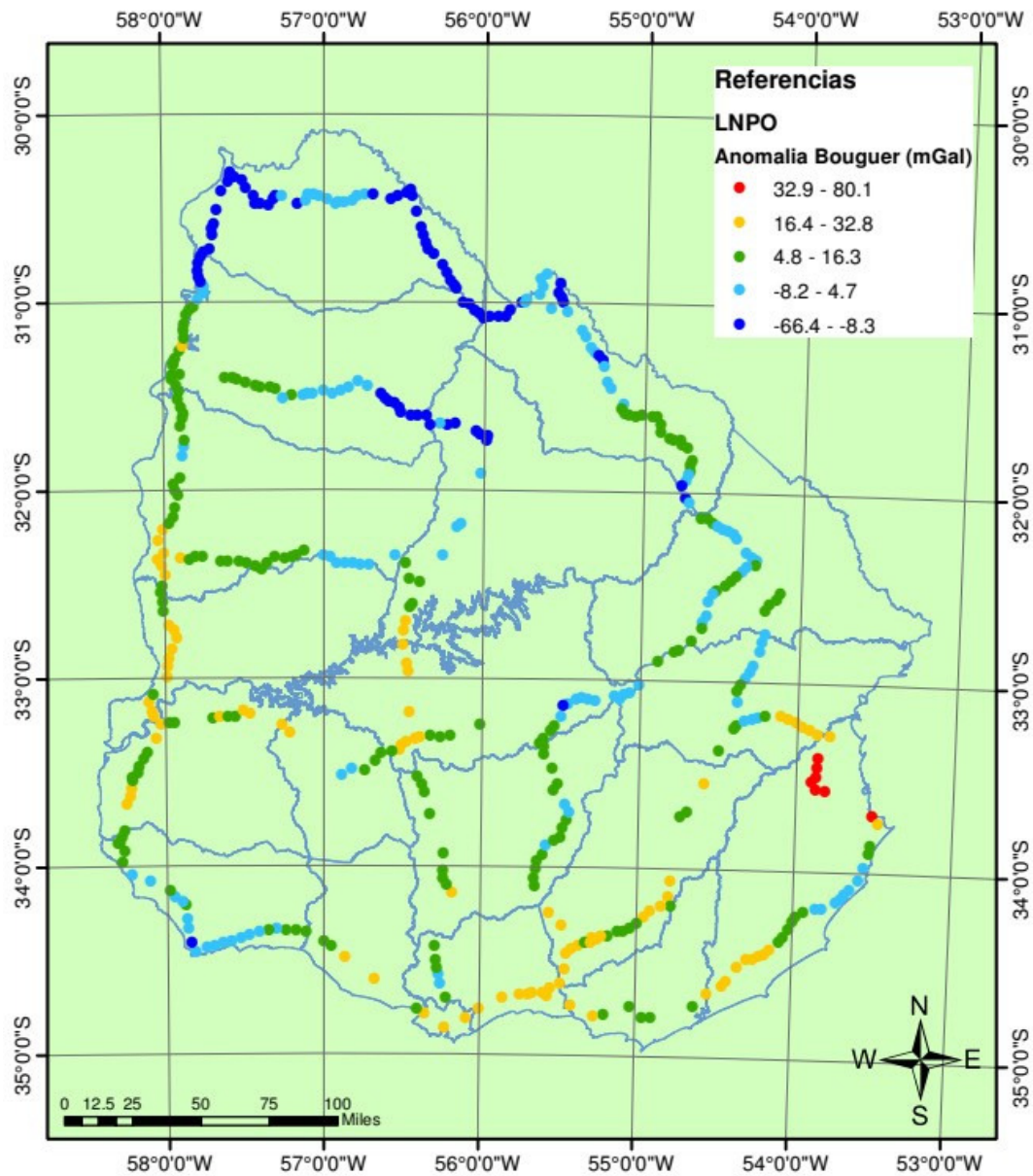


Figura 4.4: Anomalia de Bouguer (mGal) sobre Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO).

El programa PREDGRAV primero transforma la gravedad conocida en anomalías de Bouguer que luego se usan para interpolar los puntos nuevos. Los valores interpolados se retransforman a gravedad.

La Figura 4.5 muestra la precisión en la gravedad interpolada y su distribución en el territorio nacional. Se observa que las menores precisiones se ubican en las proximidades de la Anomalía de la Laguna Merin.

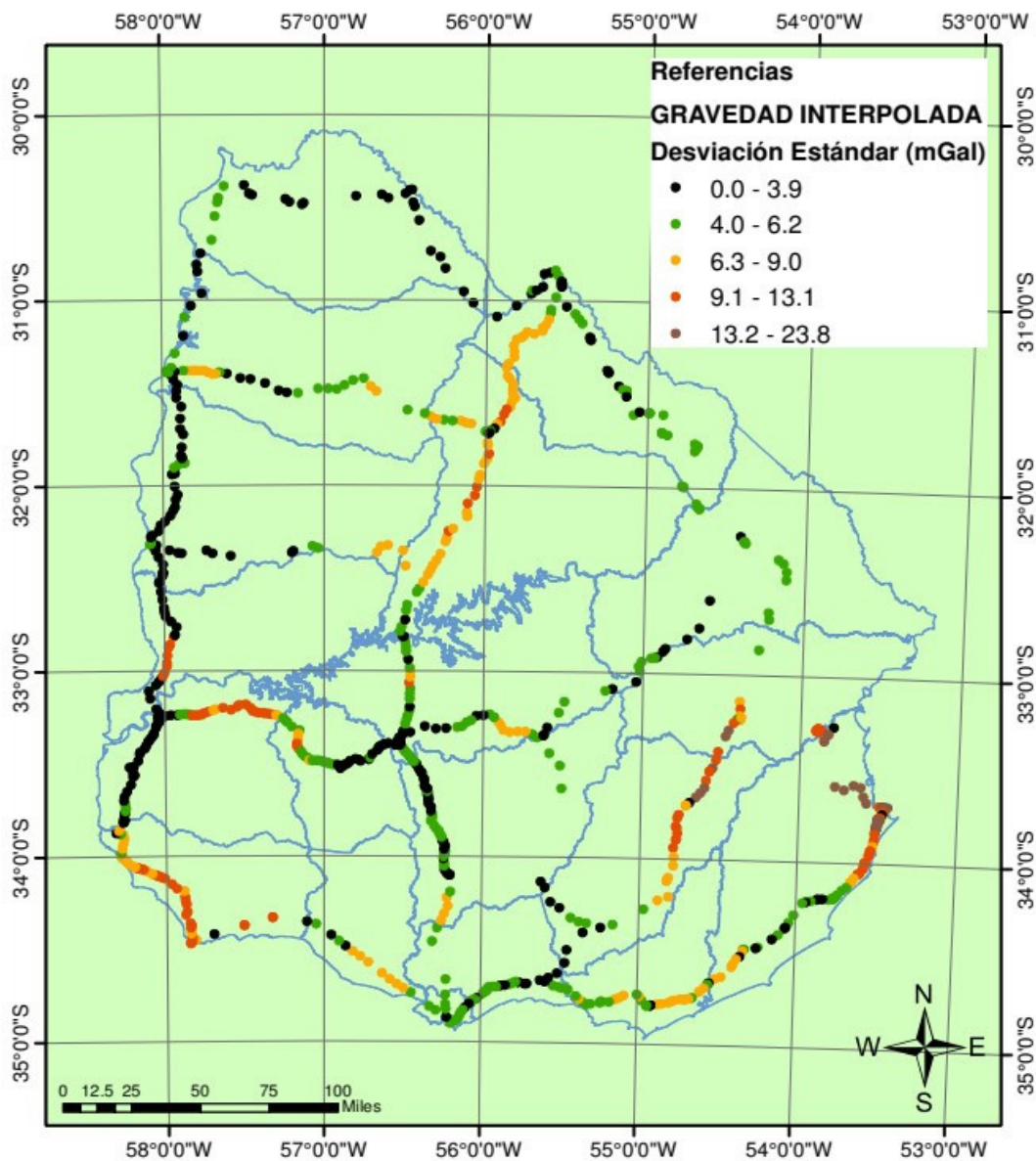


Figura 4.5: Desviación estándar de la gravedad interpolada (mGal).

En la Figura 4.6 se destacan únicamente los puntos interpolados con desviación estándar ( $\sigma$ ) en la gravedad interpolada superior a 13.2 mGal (rojos), así como los puntos con gravedad conocida que sirven de base en la interpolación (azules), resultando que los mismos se ubican en la zona de la anomalía de Laguna Merin.

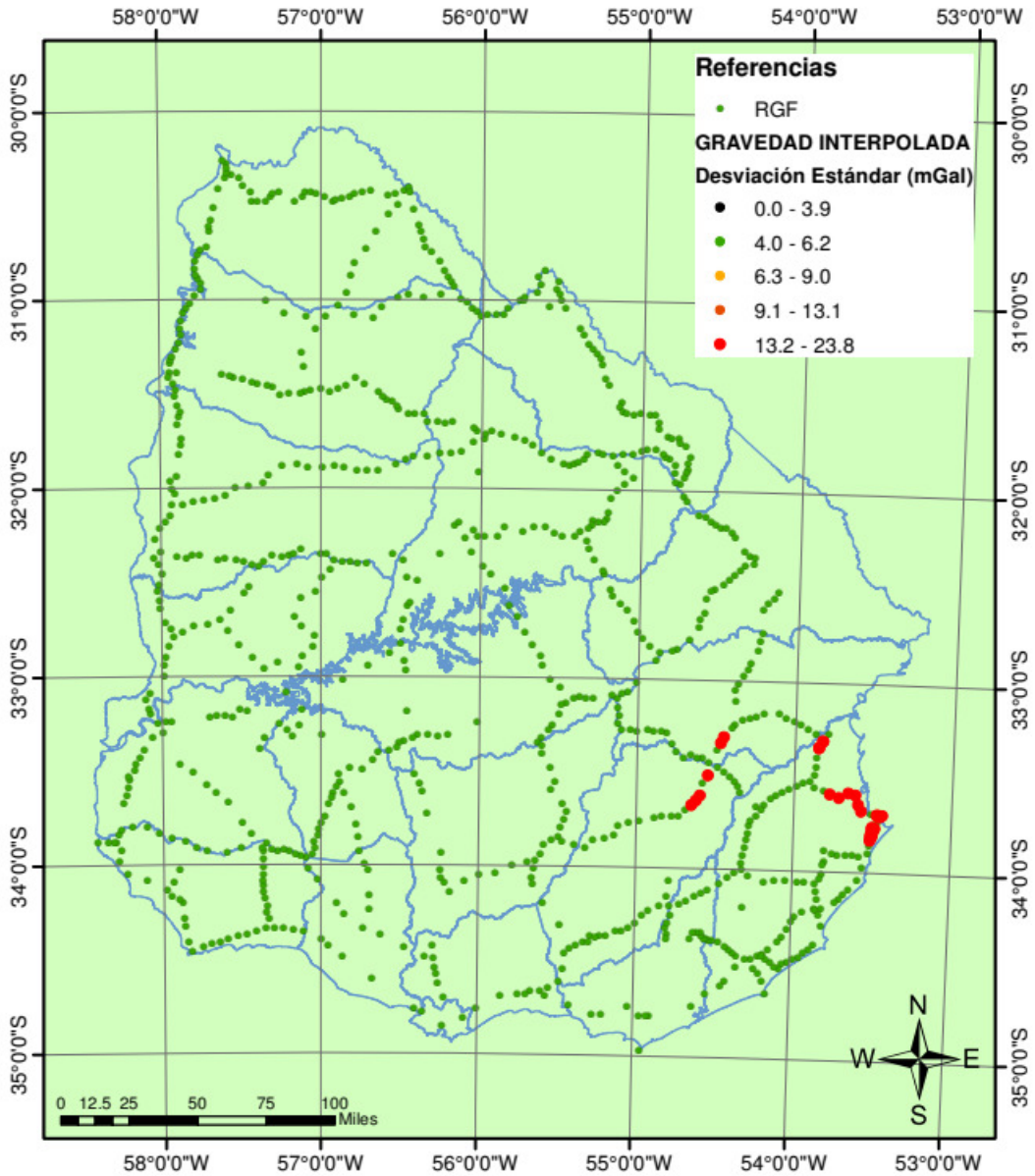


Figura 4.6: Puntos interpolados con desviación estándar superior a 13.2 mGal y puntos con gravedad conocida (RGF).

El análisis estadístico del conjunto de los 860 puntos interpolados, se presenta a través del histograma correspondiente de la desviación estándar ( $\sigma$ ) en la gravedad interpolada el cual se presenta en la Figura 4.7, así como la distribución porcentual según el rango de precisión (Tabla 4.1).

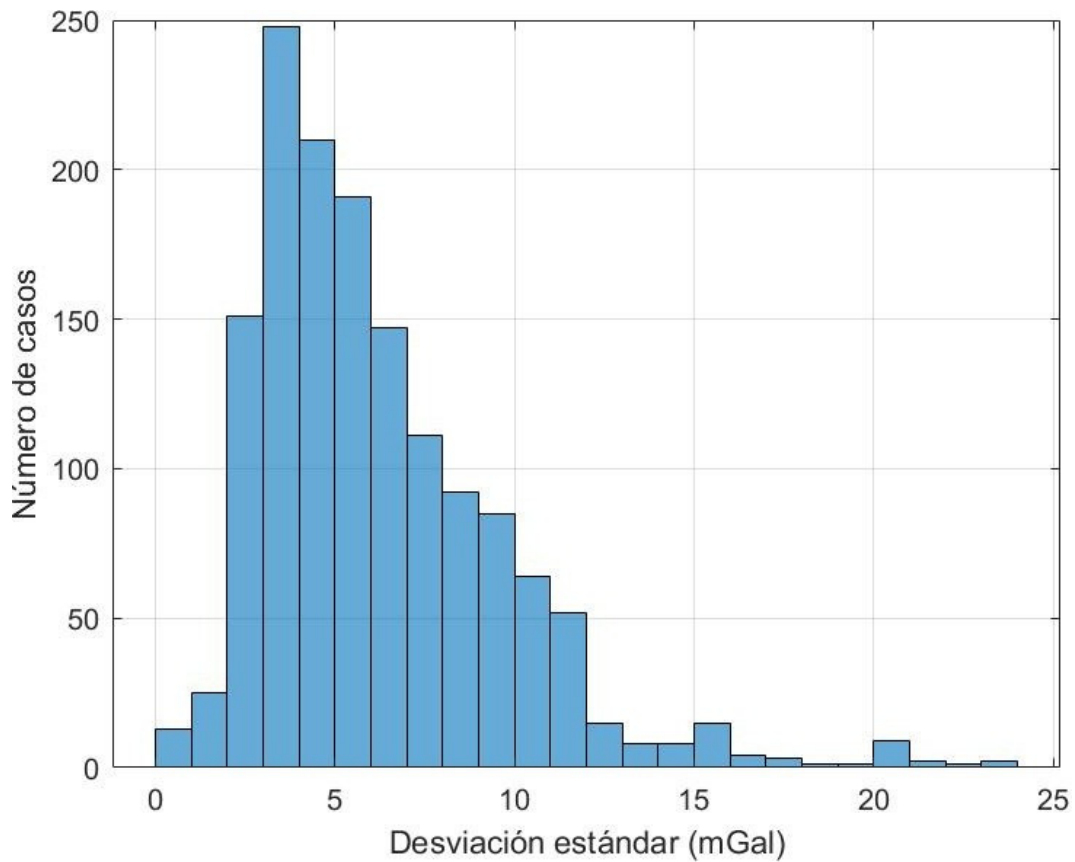


Figura 4.7: Histograma de la desviación estándar (mGal) de la gravedad interpolada.

Tabla 4.1: Distribución de casos por intervalos de precisión.

$\sigma$ (mGal)		Número de casos	Porcentaje del total	$\sigma$ (mGal)		Número de casos	Porcentaje del total
0	1	4	0.47%	12	13	9	1.05%
1	2	19	2.21%	13	14	6	0.70%
2	3	119	13.84%	14	15	7	0.81%
3	4	157	18.26%	15	16	13	1.51%
4	5	132	15.35%	16	17	4	0.47%
5	6	100	11.63%	17	18	1	0.12%
6	7	69	8.02%	18	19	1	0.12%
7	8	50	5.81%	19	20	0	0.00%
8	9	53	6.16%	20	21	0	0.00%
9	10	49	5.70%	21	22	2	0.23%
10	11	37	4.30%	22	23	0	0.00%
11	12	26	3.02%	23	24	2	0.23%

Las precisiones requeridas para la gravedad en el cálculo de los números geopotenciales, se detallan según la altura en la cual se produzca la determinación (Sánchez, 2002). La Tabla 4.2 indica dichas precisiones publicadas.

Tabla 4.2: Precisiones de gravedad requeridas según alturas (Sánchez, 2002).

<b>Altura en que la diferencia de altura es medida (m)</b>	<b><math>\sigma</math> (mGal)</b>
10	566
20	283
30	189
40	141
50	113
70	81
100	57
200	28
500	11
1000	8
2000	4
4000	2

En el caso de estudio se disponen de un total de 1347 puntos en las Líneas de Primer Orden y una longitud total de las Líneas de Primer Orden de 3882 km.

El análisis de las precisiones obtenidas en la interpolación de gravedad realizada, verifica que la totalidad de los puntos interpolados cumplen con la condición exigida de precisión.

La altura considerada para la interpolación de gravedad en cada punto surge de las nivelaciones brutas medidas, y el datum inicial.

Tabla 4.3: Precisiones de gravedad (mGal) alcanzadas con la interpolación.

Altura del terreno (m)		Desviación estándar g (mGal)			
Mínima	Máxima	Requerida	Mínima	Promedio	Máxima
0	10	566	0.0	8.2	23.8
10	20	283	0.0	7.8	18.6
20	30	189	2.2	5.8	15.5
30	40	141	1.4	5.1	12.6
40	50	113	1.5	6.0	15.5
50	70	81	1.1	6.2	15.7
70	100	57	1.5	5.4	15.8
100	200	28	0.0	5.3	11.6
200	500	11	2.0	4.7	10.0

El análisis de la exactitud en la interpolación realizada se realiza seleccionando 101 puntos distribuidos equitativamente entre las Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO) en todo el país, de los cuales se conoce previamente el valor de gravedad. A partir del resto de los puntos con gravedad conocida, se interpola el valor para los 101 puntos seleccionados.

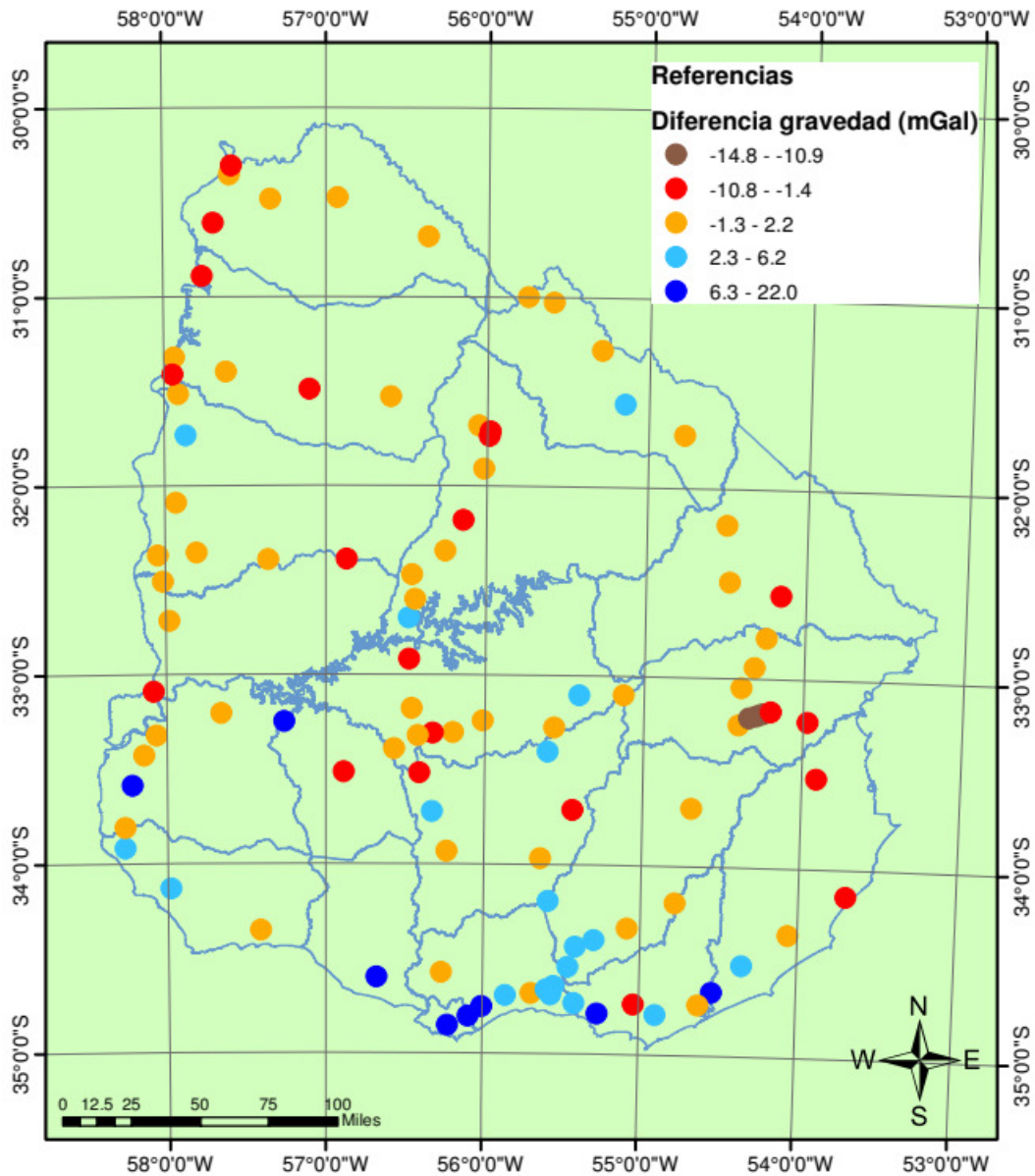


Figura 4.8: Diferencias en valor absoluto entre la gravedad interpolada y conocida en dg (mGal).

La Figura 4.8 muestra la distribución en el territorio de la diferencia (mGal) entre la gravedad conocida y la interpolada en cada uno de los 101 puntos seleccionados. Se observan las diferencias mayores en la zona de la Anomalía de Laguna Merin, así como en la zona costera del Río de la Plata, zona para la cual sólo se disponen de puntos con gravedad conocida en la parte continental, no así en la plataforma marina.



La Figura 4.9 muestra el histograma correspondiente a las diferencias en cada uno de los 101 puntos donde se interpoló la gravedad y de los cuales se conocía el valor.

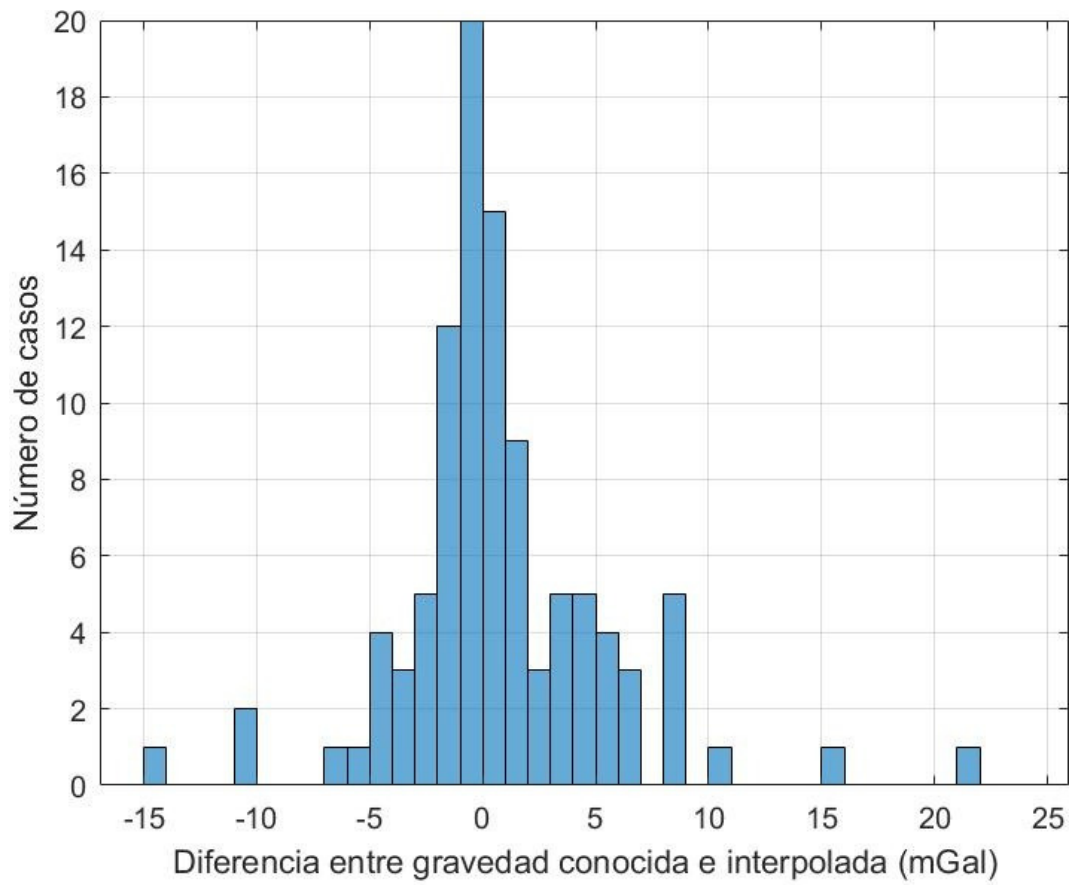


Figura 4.9: Histograma diferencias entre gravedad conocida e interpolada (mGal).

La Tabla 4.4 complementa el histograma, discriminando los casos por intervalos según la diferencia calculada.

Tabla 4.4: Distribución de casos por intervalos.

<b><math>g_{\text{observada}} - g_{\text{interpolada}}</math> (mGal)</b>		<b>Número de casos</b>	<b>Porcentaje del total</b>
<b>-15</b>	<b>-12</b>	1	0.99%
<b>-12</b>	<b>-9</b>	2	1.98%
<b>-9</b>	<b>-6</b>	1	0.99%
<b>-6</b>	<b>-3</b>	8	7.92%
<b>-3</b>	<b>0</b>	37	36.63%
<b>0</b>	<b>3</b>	27	26.73%
<b>3</b>	<b>6</b>	14	13.86%
<b>6</b>	<b>9</b>	8	7.92%
<b>9</b>	<b>12</b>	1	0.99%
<b>12</b>	<b>15</b>	0	0.00%
<b>15</b>	<b>18</b>	1	0.99%
<b>18</b>	<b>22</b>	1	0.99%

#### 4.1.2) Diferencias de números geopotenciales (dC) entre puntos Nodales de las Líneas de Nivelación de Primer Orden.

A partir de los desniveles medidos, y teniendo valores de gravedad (interpolados o medidos) para todos los puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO), es posible calcular las correcciones ortométricas (Ecuación (2.55)) aplicables a cada desnivel medido para obtener el respectivo desnivel ortométrico (Ecuación (2.56)).

La Tabla 4.5 presenta los cierres medidos y ortométricos calculados para cada uno de los 8 circuitos que conforman la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden (A, B, C, D, E, F, G, H) (Figura 3.5), permite mostrar en valores absolutos un descenso de dicho cierre en la mayoría de los casos, esto refleja el hecho que los cierres medidos contienen en su valor una parte del mismo atribuible a no considerar la parte física del problema, es decir, la influencia de la gravedad.

Tabla 4.5: Cierres nivelados y ortométricos de circuitos de Primer Orden.

Circuito	Cierre (mm)	
	Nivelado	Ortométrico
A	24	13
B	101	91
C	-114	-101
D	17	27
E	67	60
F	-27	-35
G	119	113
H	-33	-45

## 4.2) Diferencias de Números Geopotenciales por Línea.

En cada Línea de Nivelación de Primer Orden se dispone, ahora para cada punto, de su valor de gravedad, así como el desnivel medido entre puntos consecutivos, como se presenta en la Figura 4.10, donde  $dC$  es la diferencia de número geopotencial,  $g_i$  es la gravedad en el punto y  $dH$  es el desnivel medido.

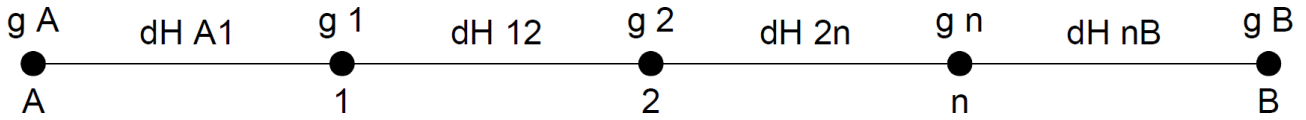


Figura 4.10: Esquema de observaciones geodésicas en una línea de nivelación.

El cálculo de las diferencias de número geopotencial ( $dC$ ) se realiza con la siguiente expresión:

$$dc_{AB} = dc_{A1} + dc_{12} + dc_{2n} + dc_{nB},$$

$$dc_{AB} = \frac{g_A + g_1}{2} dH_{A1} + \frac{g_1 + g_2}{2} dH_{12} + \frac{g_2 + g_n}{2} dH_{2n} + \frac{g_n + g_B}{2} dH_{nB}, \quad (4.1)$$

La propagación de errores en  $dC$  se realiza a través de la siguiente expresión:

$$\sigma_{dC_{AB}}^2 = J \cdot \Sigma \cdot J', \quad (4.2)$$

Donde:  $J$  es el Jacobiano de  $dC$  (dado por la Ecuación 4.3),  $\Sigma$  es la matriz covarianza de las observaciones, y  $J'$  es la traspuesta de la matriz Jacobiano.

$$J = \left[ \frac{\partial dC_{AB}}{\partial g_A}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial g_1}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial g_2}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial g_n}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial g_B}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial dH_{A1}}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial dH_{12}}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial dH_{2n}}, \frac{\partial dC_{AB}}{\partial dH_{nB}} \right], \quad (4.3)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{g_A}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{g_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{g_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{g_n}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{g_B}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dH_{A1}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dH_{12}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dH_{2n}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dH_{nB}}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

La Tabla 4.6 presenta las diferencias de números geopotenciales ( $dC$ ) y sus respectivas desviaciones estándar ( $\sigma$ ) calculados para cada Línea de Nivelación de Primer Orden.

Tabla 4.6: Diferencias de números geopotenciales y desviación estándar por línea.

# Línea	$dC$ ( $m^2/s^2$ )	$\sigma$ $dC$ ( $m^2/s^2$ )
1	1340.8565	0.8919
2	-754.5074	0.5465
3	-1046.8992	0.7343
4	460.6779	0.5878
5	-942.7373	0.8114
6	194.2219	0.7282
7	-589.2563	0.4934
8	900.8184	0.5322
9	-316.6667	0.5157
10	-603.8921	0.5206
11	817.7228	0.6525
12	-20.5987	0.6301
13	109.6248	0.2347
14	-204.4349	0.8102
15	-219.0660	0.4212
16	646.0290	0.4219
17	485.8365	0.3607
18	-430.9875	0.4294
19	307.5565	0.6746
20	371.8582	0.6776
21	-40.9015	0.8068
22	-23.7458	0.4559
23	1228.3214	0.6983
24	45.4666	0.5435
25	-135.6828	0.5678

### 4.3) Ajuste de los Nodales.

El modelo matemático determinado para las 25 Líneas de Nivelación de Primer Orden, implica los siguientes parámetros:

- Número total de Observaciones ( $n$ ): 25
- Número de Observaciones mínimas ( $n_0$ ): 17
- Observaciones redundantes ( $r=n-n_0$ ): 8
- El ajuste se efectúa mediante el Método de Mínimos Cuadrados, asumiendo como dato libre de error el número geopotencial del Nodal Belvedere.
- Cada línea de nivelación, genera una observación, la cual una vez aplicado el residual, determina la observación ajustada:

$$\hat{l} = l + v, \quad (4.5)$$

donde:  $l$  es la observación,  $v$  es el residual y  $\hat{l}$  es la observación ajustada.

Cada circuito cerrado de la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden (Figura 3.5), genera en el modelo matemático, una ecuación de condición, por lo tanto se dispone:

$$\begin{aligned}
 A: & \quad \hat{l}_1 + \hat{l}_2 + \hat{l}_3 + \hat{l}_4 = 0 \\
 B: & \quad \hat{l}_5 + \hat{l}_6 + \hat{l}_7 + \hat{l}_8 + \hat{l}_9 - \hat{l}_2 = 0 \\
 C: & \quad \hat{l}_{10} + \hat{l}_{11} + \hat{l}_{12} - \hat{l}_6 = 0 \\
 D: & \quad \hat{l}_{13} + \hat{l}_{14} + \hat{l}_{15} + \hat{l}_{16} + \hat{l}_{17} - \hat{l}_{11} = 0 \\
 E: & \quad \hat{l}_{18} + \hat{l}_{19} - \hat{l}_7 - \hat{l}_{12} - \hat{l}_{17} = 0 \\
 F: & \quad \hat{l}_{20} + \hat{l}_{21} + \hat{l}_{22} - \hat{l}_{19} = 0 \\
 G: & \quad \hat{l}_{23} + \hat{l}_{24} - \hat{l}_8 - \hat{l}_{20} = 0 \\
 H: & \quad \hat{l}_{25} - \hat{l}_3 - \hat{l}_9 - \hat{l}_{23} = 0
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

La compensación se realiza aplicando el método de las magnitudes, (Barbato y Barbato, 1995), el cual se expresa genéricamente con la siguiente expresión:

$$v + B \cdot \Delta = f, \quad (4.7)$$

donde:  $v$  es la matriz columna de residuales (25 x 1),  $B$  es la matriz de coeficientes numéricos (25 x 17),  $\Delta$  es la matriz columna de los parámetros (17 x 1) y  $f$  es la matriz columna de datos (17 x 1).

Considerando el modelo matemático motivo del presente ajuste, las respectivas variables involucradas son:

Matriz columna de residuales ( $v$ ), ( $25 \times 1$ ):

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{25} \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes numéricos ( $B$ ), ( $25 \times 17$ ):

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Matriz columna de los parámetros ( $\Delta$ ), (17 x 1):

$$\Delta = \begin{bmatrix} \text{SGM 2268} \\ \text{SGM 2270} \\ \text{SGM 2271} \\ \text{SGM 2272} \\ \text{SGM 2273} \\ \text{SGM 2274} \\ \text{SGM 2282} \\ \text{SGM 2288} \\ \text{SGM 2289} \\ \text{SGM 2290} \\ \text{SGM 2292} \\ \text{SGM 2293} \\ \text{SGM 2294} \\ \text{SGM 2295} \\ \text{SGM 2296} \\ \text{SGM 2297} \\ \text{SGM 2298} \end{bmatrix}$$

Matriz columna de datos ( $f$ ), (17 x 1):

$$f = \begin{bmatrix} -l_1 \\ -l_2 \\ -l_3 \\ -l_4 \\ -l_5 \\ -l_6 \\ -l_7 \\ -l_8 \\ -l_9 \\ -l_{10} \\ -l_{11} \\ -l_{12} \\ -l_{13} \\ -l_{14} \\ -l_{15} \\ -l_{16} \\ -l_{17} \\ C_0 - l_{18} \\ -C_0 - l_{19} \\ -l_{20} \\ -C_0 - l_{21} \\ -l_{22} \\ -l_{23} \\ -l_{24} \\ -l_{25} \end{bmatrix}$$

La resolución implica determinar los valores de los residuales ( $v$ ) que minimizan la función de mínimos cuadrados  $\Phi$ :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{17} w_i \cdot v_i^2, \quad (4.8)$$

donde  $w_i$  son los pesos de cada una de las observaciones ( $l_i$ ).

El algoritmo matemático de resolución, comprende el cálculo de las matrices  $N$  y  $t$ , para finalmente determinar la matriz columna de los parámetros ( $\Delta$ ), que contiene las magnitudes ajustadas de los parámetros calculados mediante mínimos cuadrados:



$$\begin{aligned}
N &= B' \cdot W \cdot B, \\
t &= B' \cdot W \cdot f, \\
\Delta &= N^{-1} \cdot t,
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

donde  $W$  es la matriz peso (diagonal) (17 x 17), y cada elemento de su diagonal se calcula a través de la siguiente expresión:

$$w_{ii} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \tag{4.10}$$

donde  $\sigma_0^2$  es la varianza referencial y  $\sigma_i^2$  es la varianza de cada observación. El algoritmo de propagación de varianzas y covarianzas es:

$$\begin{aligned}
Q_{\Delta\Delta} &= N^{-1}, \\
\sigma_{0p}^2 &= \frac{v' \cdot W \cdot v}{r}, \\
\Sigma_{\Delta\Delta} &= \sigma_{0p}^2 \cdot Q_{\Delta\Delta},
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

donde:  $\sigma_{0p}^2$  es la varianza referencial a posteriori,  $\Sigma_{\Delta\Delta}$  es la matriz covarianza de los parámetros y  $r$  es la redundancia.

La Tabla 4.7 presenta los números geopotenciales (C) y las desviaciones estándar ( $\sigma$ ) de todos los puntos Nodales que conforman la Red Altimétrica Nacional de Primer Orden.

Tabla 4.7: Números geopotenciales y desviación estándar en los Nodales.

<b>Estación</b>	<b>Número geopotencial [m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>]</b>	<b><math>\sigma</math> [m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>]</b>
SGM2268	515.776	0.301
SGM2270	1333.673	0.236
SGM2271	847.789	0.195
SGM2272	1313.383	0.267
SGM2273	1625.048	0.305
SGM2274	724.118	0.240
SGM2275	416.709	0.000
SGM2282	261.367	0.362
SGM2288	1119.593	0.312
SGM2289	397.102	0.324
SGM2290	1308.281	0.339
SGM2292	201.783	0.273
SGM2293	420.873	0.316
SGM2294	625.394	0.312
SGM2295	721.979	0.414
SGM2296	2062.685	0.357
SGM2297	375.694	0.297
SGM2298	351.911	0.291

La Figura 4.11 presenta la desviación estándar de la altura normal de Molodensky calculada en los 18 puntos Nodales, donde puede apreciarse claramente como a medida que nos alejamos del Nodal de referencia (Belvedere) decae la precisión obtenida.

Es necesario analizar la precisión de las alturas obtenidas a partir del ajuste de las Líneas

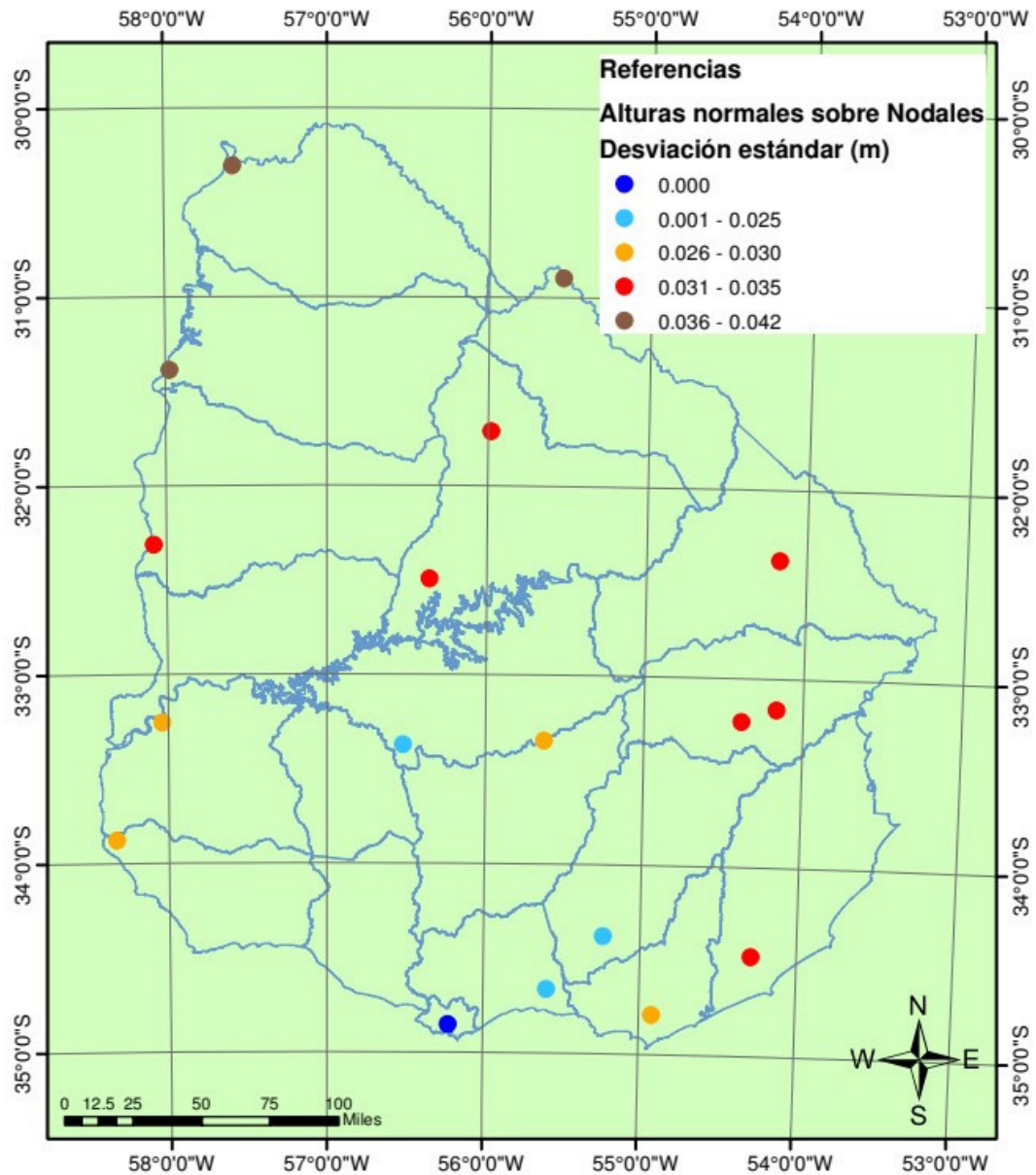


Figura 4.11: Desviación estándar de la altura normal de Molodensky en los Nodales (m).

de Nivelación de Primer Orden, considerando únicamente los desniveles geométricos y la altitud de referencia en el Nodal Belvedere.

En Uruguay, la determinación de las alturas existentes referidas al cero oficial se realizó según el procedimiento descrito en el párrafo anterior, con la salvedad que se incluyó una corrección ortométrica, con valores teóricos de la gravedad, tal cual fue indicado en el Capítulo 3.2.

El modelo matemático involucrado en el ajuste de las Líneas de Nivelación de Primer Orden en términos de desniveles geométricos, es similar al descrito para el ajuste en términos de números geopotenciales, con las siguientes diferencias:

- Se sustituyen las diferencias de números geopotenciales ( $dC$ ) por desniveles geométricos medidos ( $dh$ ).
- Se sustituye el número geopotencial de referencia ( $C_0$ ) por la altitud de referencia del Nodal Belvedere.
- Se recalcula la matriz peso ( $W$ ) en función de las nuevas observaciones.

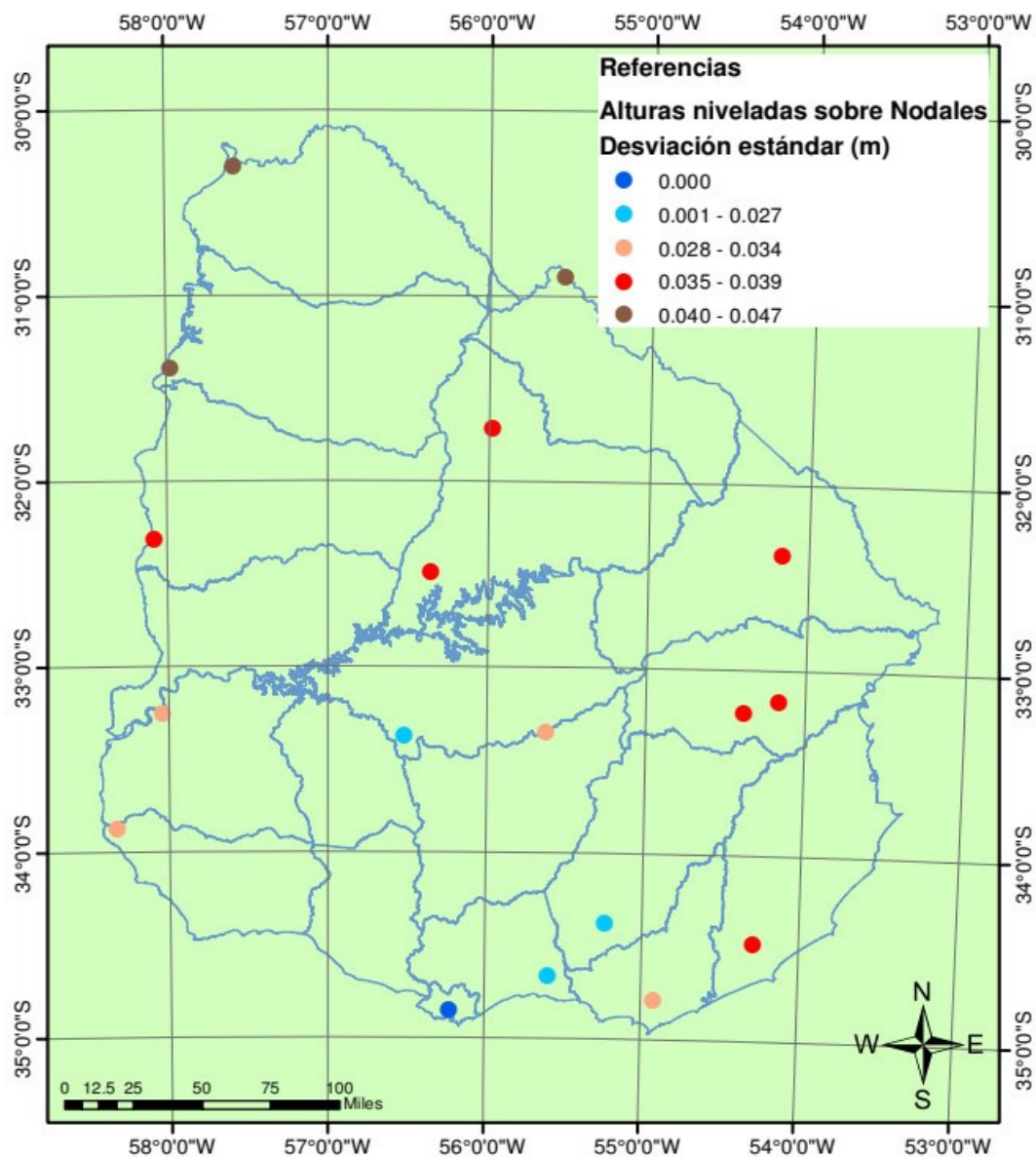


Figura 4.12: Desviación estándar de la altura nivelada en los Nodales (m).

La distribución territorial de los nodales y sus respectivas desviaciones estándar en altura geométrica (Figura 4.12), indica un comportamiento relativo similar al observado en la altura normal tras el ajuste en términos de números geopotenciales (Figura 4.11). A medida que el Nodal se aleja del punto de referencia, decrece la precisión.

El ajuste de la Red Altimétrica de Primer Orden en términos de los desniveles medidos, así como la propagación de errores tendiente a calcular las precisiones de las alturas niveladas ajustadas (concordantes con las alturas oficiales de Uruguay), permite afirmar claramente que el ajuste en términos de números geopotenciales mejora la precisión en todos los Nodales, tal cual se puede observar en Tabla 4.8 y Figura 4.13.

Tabla 4.8: Desviación estándar (m) de los Nodales según el tipo de ajuste realizado.

	<b>Desviación estándar (<math>\sigma</math>) en m.</b>	
	<b>Alturas niveladas</b>	<b>Alturas normales</b>
<b>SGM2268</b>	0.0343	0.0307
<b>SGM2270</b>	0.0270	0.0241
<b>SGM2271</b>	0.0223	0.0199
<b>SGM2272</b>	0.0305	0.0273
<b>SGM2273</b>	0.0348	0.0312
<b>SGM2274</b>	0.0274	0.0245
<b>SGM2282</b>	0.0413	0.0369
<b>SGM2288</b>	0.0356	0.0318
<b>SGM2289</b>	0.0369	0.0330
<b>SGM2290</b>	0.0387	0.0346
<b>SGM2292</b>	0.0312	0.0279
<b>SGM2293</b>	0.0361	0.0323
<b>SGM2294</b>	0.0356	0.0319
<b>SGM2295</b>	0.0473	0.0423
<b>SGM2296</b>	0.0408	0.0365
<b>SGM2297</b>	0.0339	0.0303
<b>SGM2298</b>	0.0332	0.0297

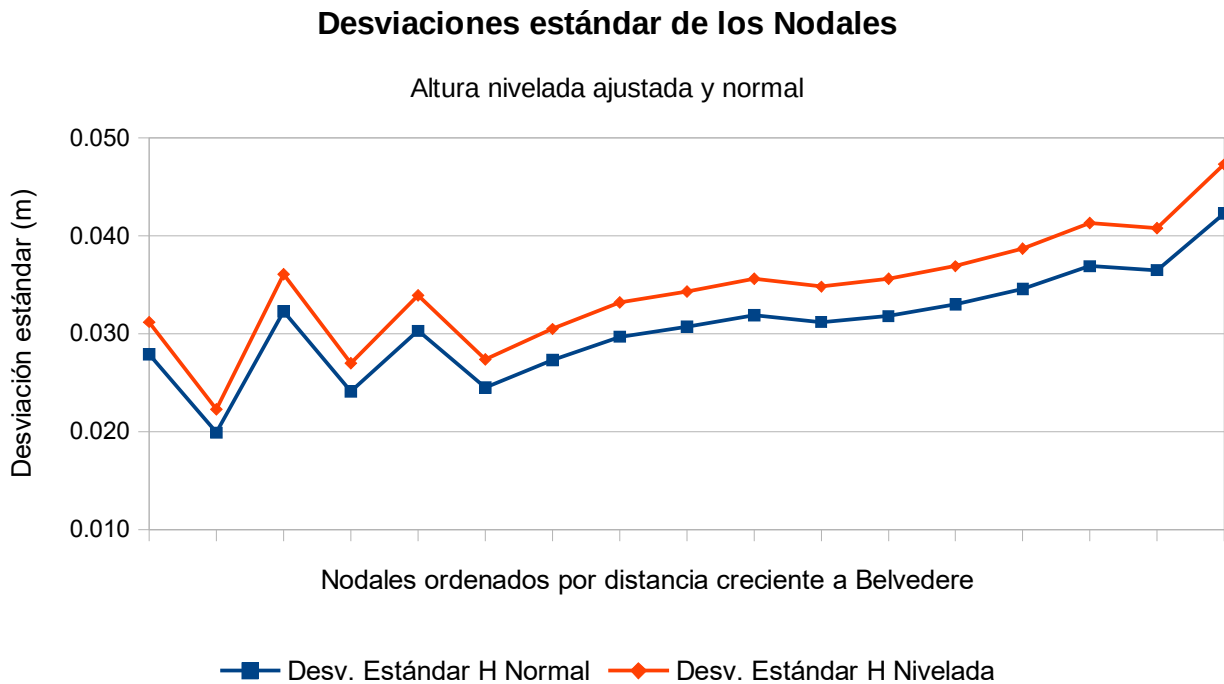


Figura 4.13: Gráfico comparativo de desviaciones estándar (m) en Nodales.

#### 4.4) Ajuste interno en cada línea.

Una vez obtenidos los números geopotenciales de los Nodales (C), se ajustan los vértices internos de cada línea, calculándose sus correspondientes alturas normales de Molodensky, así como sus respectivas desviaciones estándar ( $\sigma$ ) expresados en metros.

La Figura 4.14 presenta las desviaciones estándar de las alturas normales de Molodensky de todos los puntos pertenecientes a las Líneas de Nivelación de Primer Orden (LNPO).

En concordancia con los resultados obtenidos para los Nodales, las líneas más alejadas del Nodal Belvedere presentan una precisión menor en sus alturas, asimismo dentro de ellas, los puntos ubicados al centro de la línea, distantes de los extremos (Nodales) presentan también menor precisión.

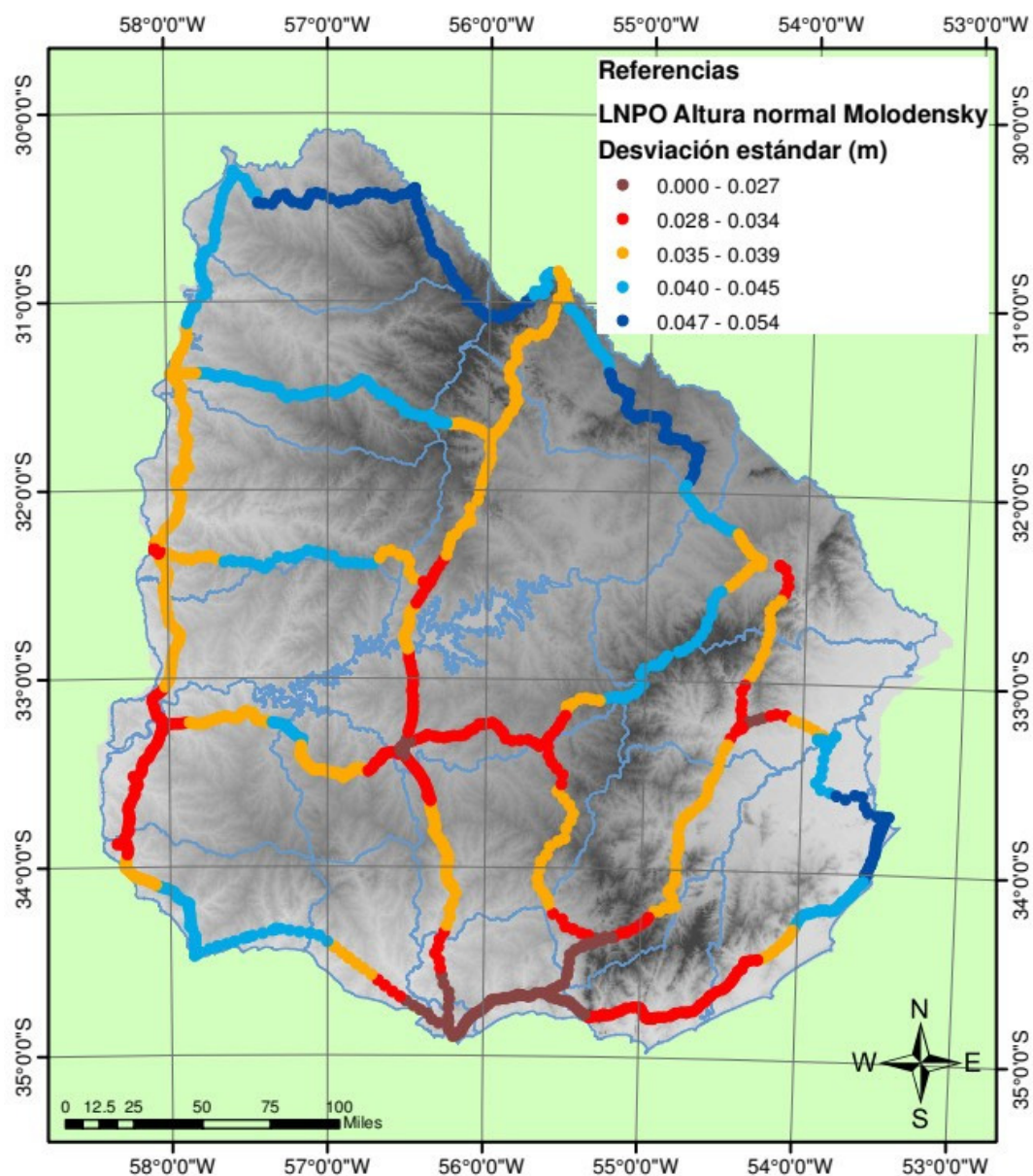


Figura 4.14: Desviación estándar de las alturas normales de Molodensky (m) sobre los puntos de las LNPO.

Las precisiones menores en altura normal se observan en la Línea 1, a mayor distancia del Nodal utilizado como referencia: Belvedere, ubicada al Norte del país, limitante con Brasil, y une los Nodales: Bella Unión con Rivera. En dicha línea se ubican vértices con desviación estándar de 5.35 cm, siendo este el valor más alto de la totalidad de vértices calculados.

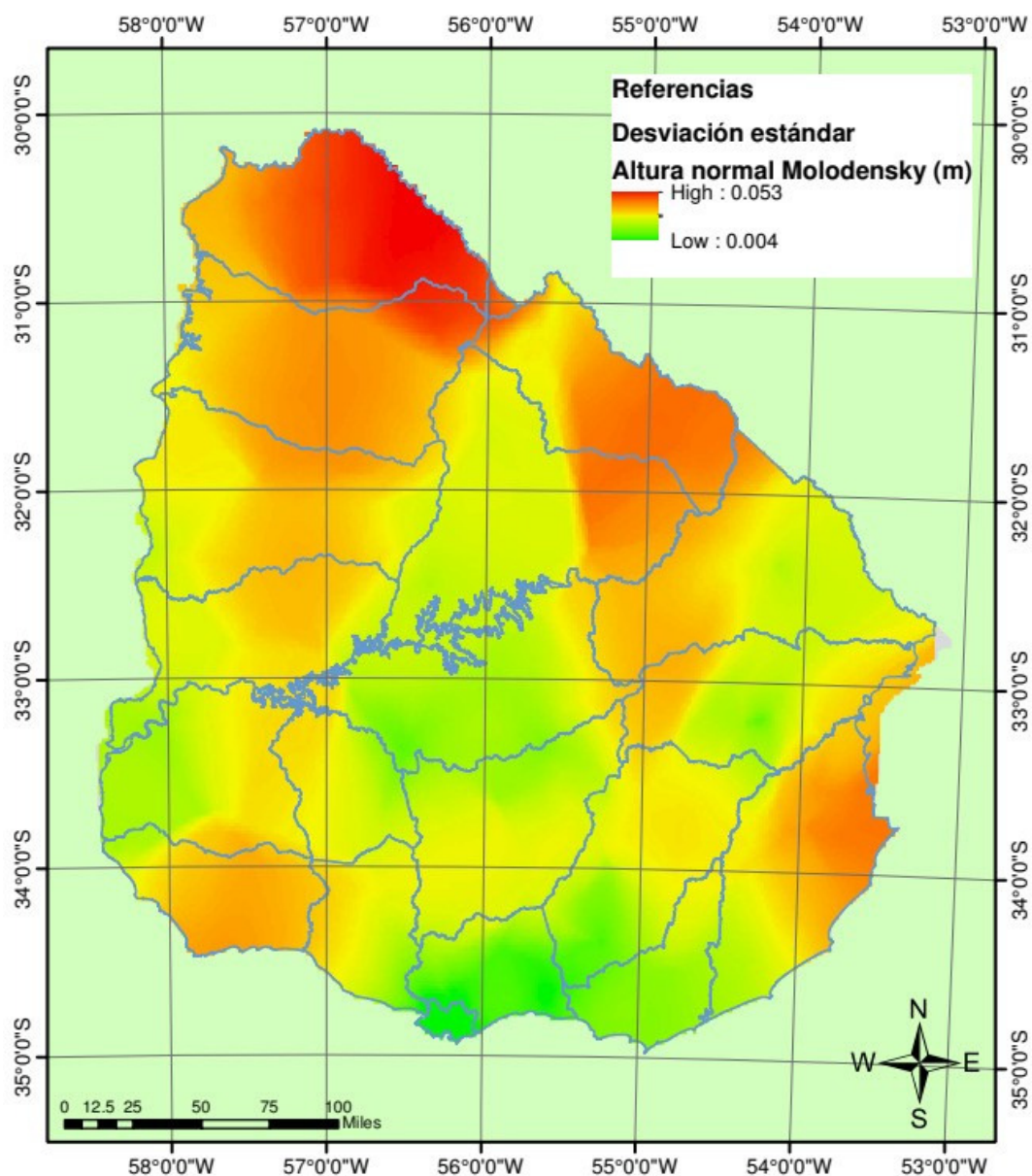


Figura 4.15: Desviación estándar de las alturas normales de Molodensky (m).

La Figura 4.15 presenta la desviación estándar de la altura normal de Molodensky sobre todo el territorio.

La Figura 4.16 presenta el histograma de la desviación estándar en alturas normales de Molodensky correspondientes a los 1347 puntos pertenecientes a las Líneas de Nivelación de Primer Orden.



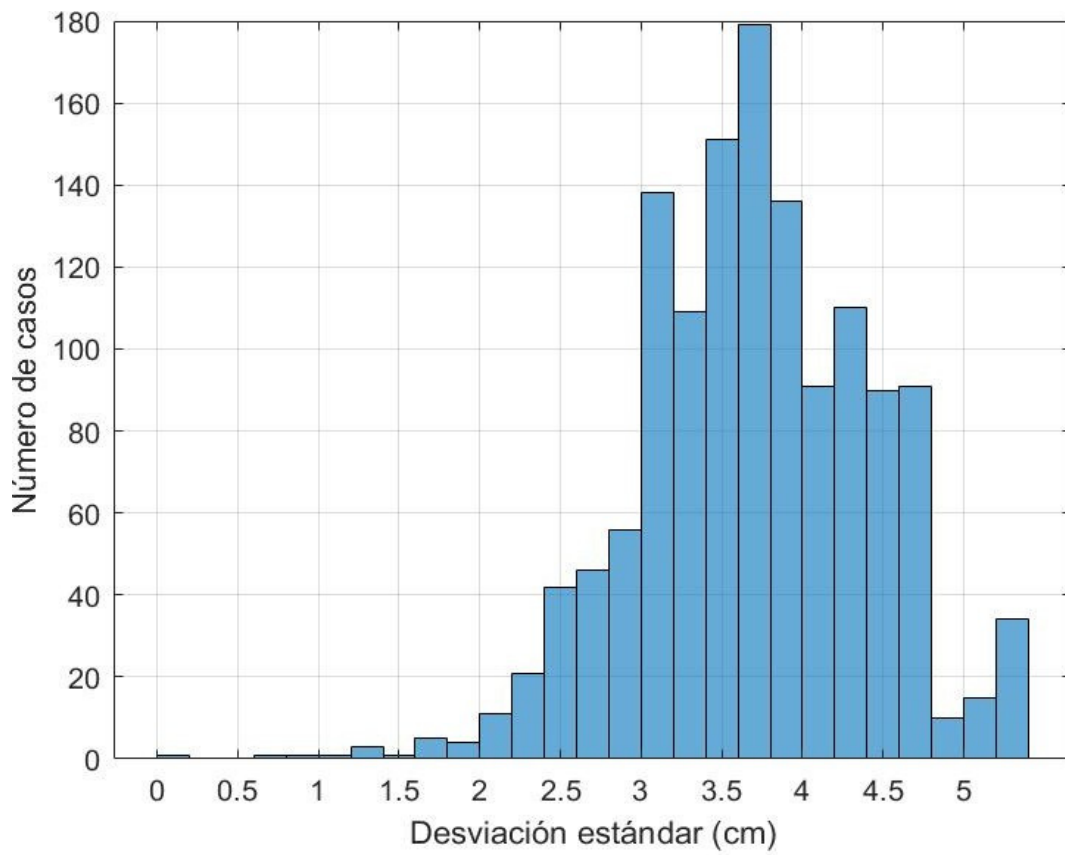


Figura 4.16: Histograma desviación estándar de las alturas normales de Molodensky (cm) en puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden.

La Tabla 4.9 presenta la distribución de los 1347 puntos según el intervalo en el cual se encuentra su desviación estándar en altura normal de Molodensky.

Tabla 4.9: Distribución de casos por intervalo en desviación estándar.

$\sigma$ altura normal (m)		Número de casos	Porcentaje	$\sigma$ altura normal (m)		Número de casos	Porcentaje
<b>0</b>	<b>0.002</b>	1	0.07%	<b>0.028</b>	<b>0.030</b>	64	4.75%
<b>0.002</b>	<b>0.004</b>	0	0.00%	<b>0.030</b>	<b>0.032</b>	138	10.24%
<b>0.004</b>	<b>0.006</b>	0	0.00%	<b>0.032</b>	<b>0.034</b>	99	7.35%
<b>0.006</b>	<b>0.008</b>	1	0.07%	<b>0.034</b>	<b>0.036</b>	169	12.55%
<b>0.008</b>	<b>0.010</b>	1	0.07%	<b>0.036</b>	<b>0.038</b>	166	12.32%
<b>0.010</b>	<b>0.012</b>	1	0.07%	<b>0.038</b>	<b>0.040</b>	141	10.47%
<b>0.012</b>	<b>0.014</b>	3	0.22%	<b>0.040</b>	<b>0.042</b>	91	6.76%
<b>0.014</b>	<b>0.016</b>	1	0.07%	<b>0.042</b>	<b>0.044</b>	110	8.17%
<b>0.016</b>	<b>0.018</b>	5	0.37%	<b>0.044</b>	<b>0.046</b>	88	6.53%
<b>0.018</b>	<b>0.020</b>	4	0.30%	<b>0.046</b>	<b>0.048</b>	84	6.24%
<b>0.020</b>	<b>0.022</b>	11	0.82%	<b>0.048</b>	<b>0.050</b>	19	1.41%
<b>0.022</b>	<b>0.024</b>	20	1.48%	<b>0.050</b>	<b>0.052</b>	17	1.26%
<b>0.024</b>	<b>0.026</b>	43	3.19%	<b>0.052</b>	<b>0.054</b>	32	2.38%
<b>0.026</b>	<b>0.028</b>	38	2.82%				

## **5. CÁLCULO DE LOS DIFERENTES TIPOS DE ALTURAS FÍSICAS**

A partir de los números geopotenciales, se derivan las diferentes alturas físicas: ortométricas (Helmert, Mader, Baranov) y normales (Molodensky, Vignal, Bomford, Hirvonen). Se comparan los diferentes tipos de cada una de ellas, evaluándose las diferencias puntuales que se producen.

Se comparan los resultados obtenidos con los valores generados a partir de un ajuste que únicamente considere los desniveles geométricos.

Se calculan y analiza la aplicación de correcciones normales y ortométricas a los desniveles geométricos medidos.

El cálculo de las alturas normales de Vignal, Bomford y Hirvonen implica en su proceso la utilización de una altura normal para la reducción de la gravedad normal y el cálculo de la latitud normal, por lo cual se adopta como valor inicial en dicho cálculo la altura normal de Molodensky.

En el caso de las alturas ortométricas de Helmert, se requiere una altura ortométrica inicial para la reducción de la gravedad, tomándose como valor inicial la altura normal de Molodensky.

En las alturas ortométricas de Mader, se cuenta con las Correcciones Topográficas, calculadas y brindadas por la Dra. Claudia Tocho.

## 5.1) Comparación puntual entre alturas normales de Molodensky y alturas ortométricas de Helmert.

La Figura 5.1 muestra las diferencias entre alturas normales de Molodensky y alturas ortométricas de Helmert, calculadas en todos los puntos de las Líneas de Nivelación de Primer Orden. Se observa que las mayores discrepancias se ubican en las zonas con mayor altitud, considerando el relieve del territorio nacional.

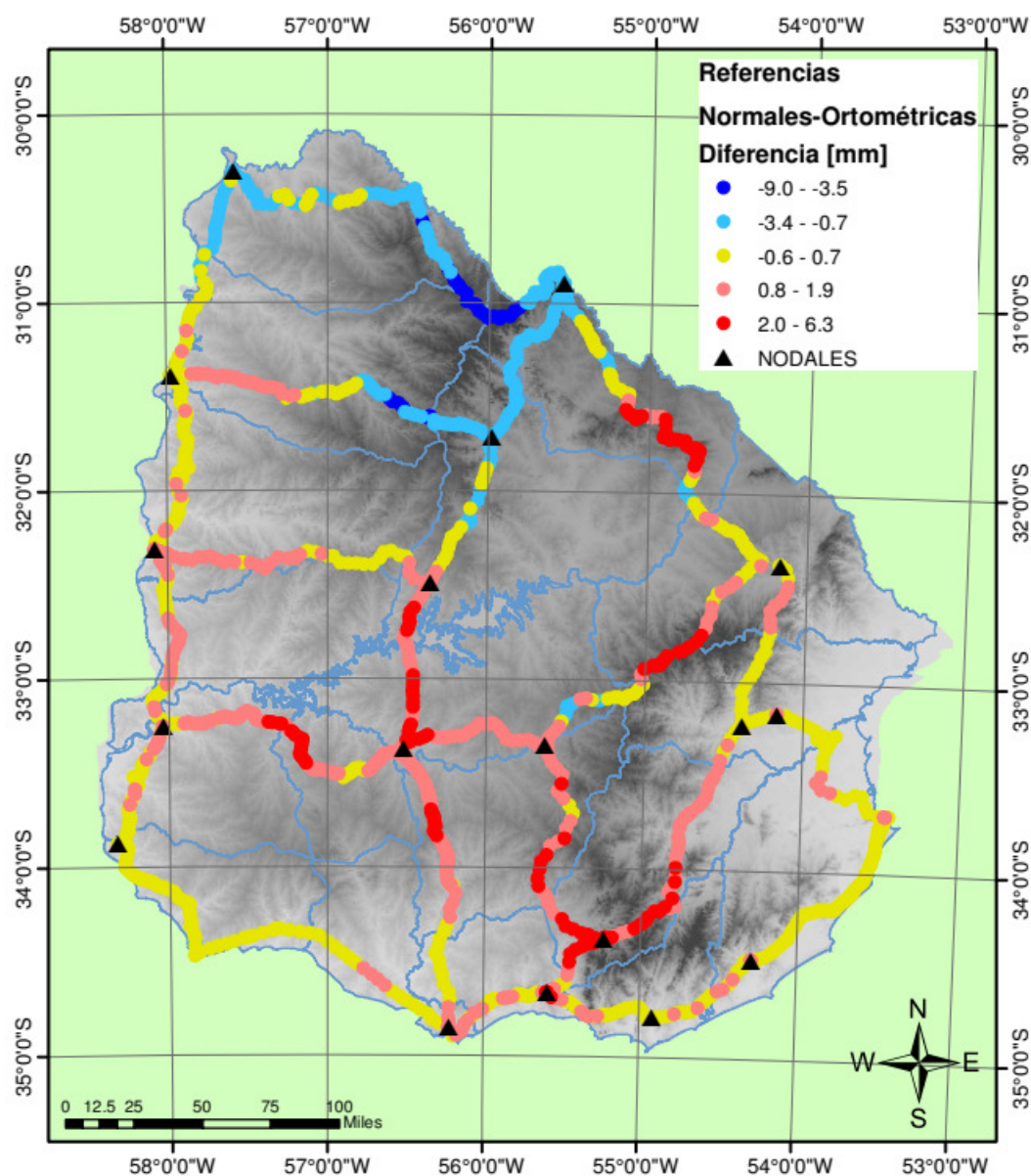


Figura 5.1: Diferencias entre alturas normales de Molodensky y alturas ortométricas de Helmert.

La Figura 5.2 destaca las zonas donde se producen las mayores discrepancias, superiores a 4mm en valor absoluto.

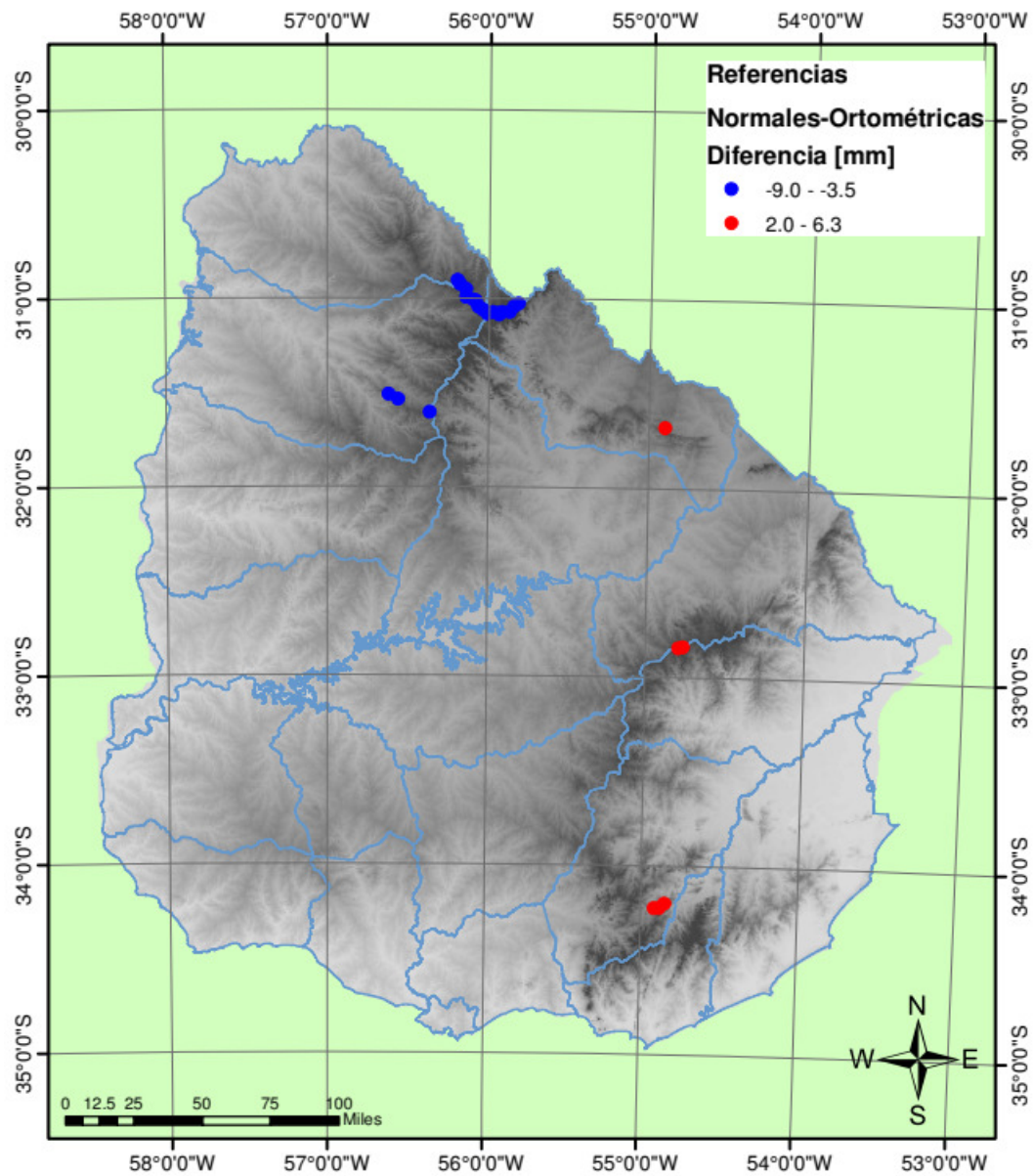


Figura 5.2: Diferencias menores a -4mm y mayores a 4mm.

Tabla 5.1: Diferencias entre alturas normales (Molodensky) y ortométricas (Helmert) en mm.

<b>Diferencias entre alturas normales (Molodensky) y ortométricas (Helmert) en mm</b>	
<b>Máxima</b>	6.3
<b>Mínima</b>	-9.0
<b>Promedio</b>	0.4
<b>Desviación estándar</b>	1.4

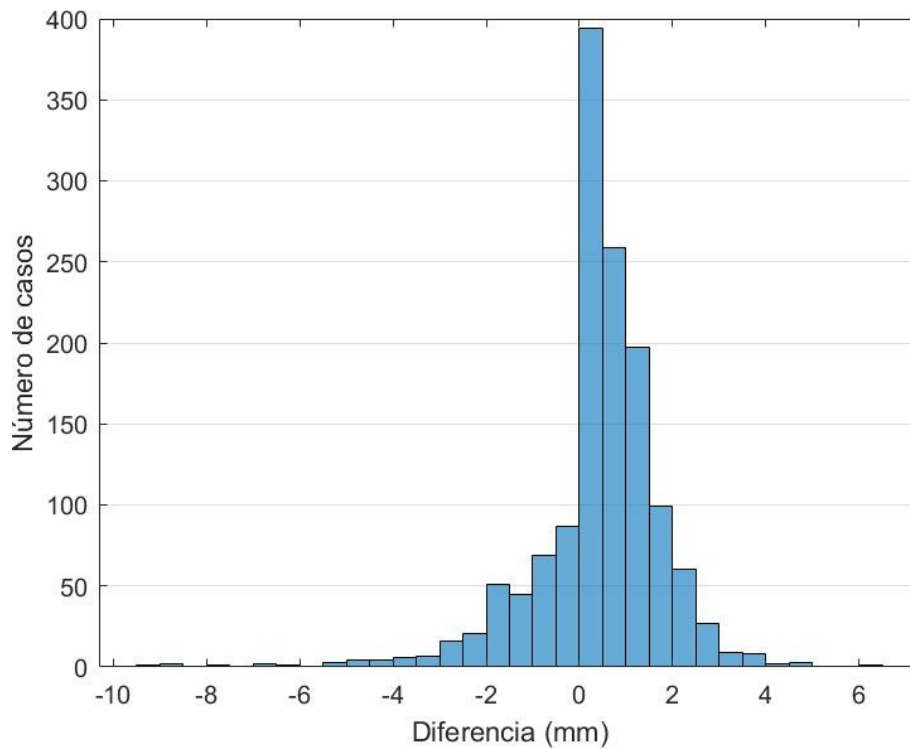


Figura 5.3: Histograma de la diferencia de alturas ortométricas (Helmert) y normales (Molodensky) sobre todas las LNPO.

La Figura 5.3, correspondiente al histograma, muestra claramente que la mayor cantidad de puntos presentan una diferencia entre ambos tipos de altura menor a 2mm en valor absoluto.

Las Líneas de Nivelación de Primer Orden 101 y 111 son las que presentan las mayores diferencias entre ambas alturas, llegando a valores de -9 mm y +6 mm, siempre considerando la diferencia Normal (Molodensky) menos Ortométrica (Helmert).

La Figura 5.4 presenta el correspondiente perfil de la línea 101 y la Figura 5.5 presenta la línea 111.

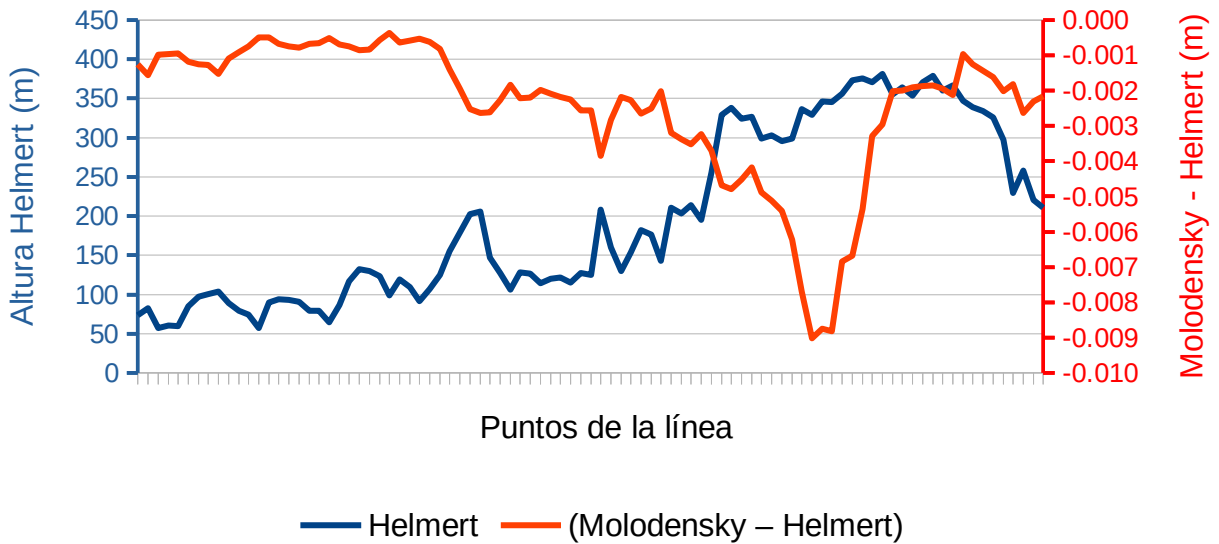


Figura 5.4: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 101.

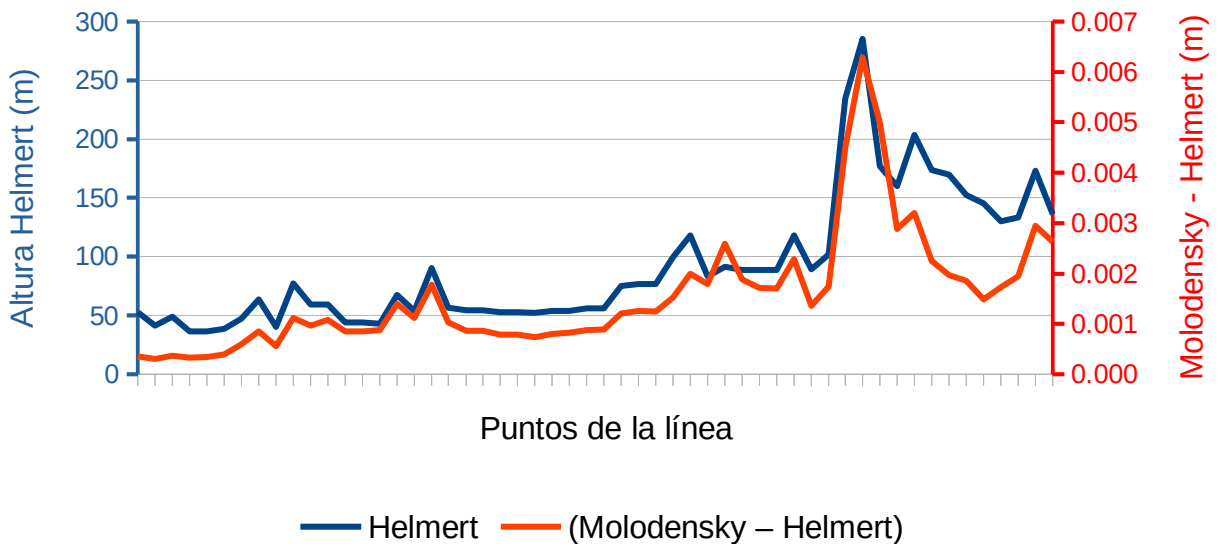


Figura 5.5: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 111.

## 5.2) Comparación puntual entre los diferentes tipos de alturas normales calculadas.

Las alturas de Vignal y Molodensky no presentan diferencias apreciables en los puntos calculados.

Similar situación se produce entre las alturas de Bomford y Hirvonen, las cuales no presentan tampoco diferencias significativas entre ellas.

La Figura 5.6 presenta las diferencias puntuales entre alturas normales de Bomford y Molodensky. Puede observarse que las mayores ocurren en la misma zona que para las mayores diferencias entre alturas normales (Molodensky) y ortométricas (Helmert).

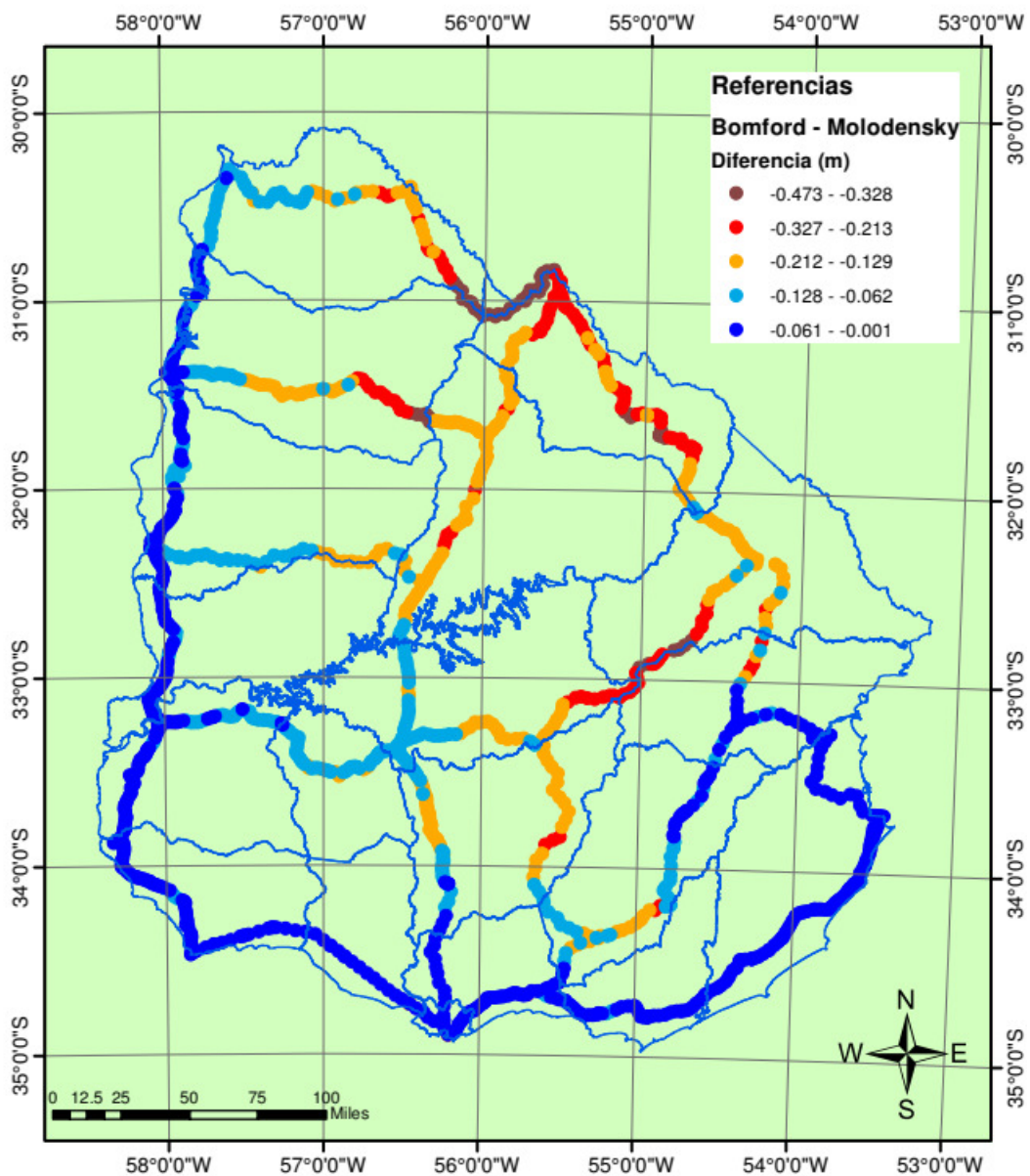


Figura 5.6: Diferencia puntual entre altura normal de Bomford y Molodensky (m).



Se observan las mayores diferencias en la Línea de Nivelación de Primer Orden 101, para la cual se presenta el perfil correspondiente en la Figura 5.7.

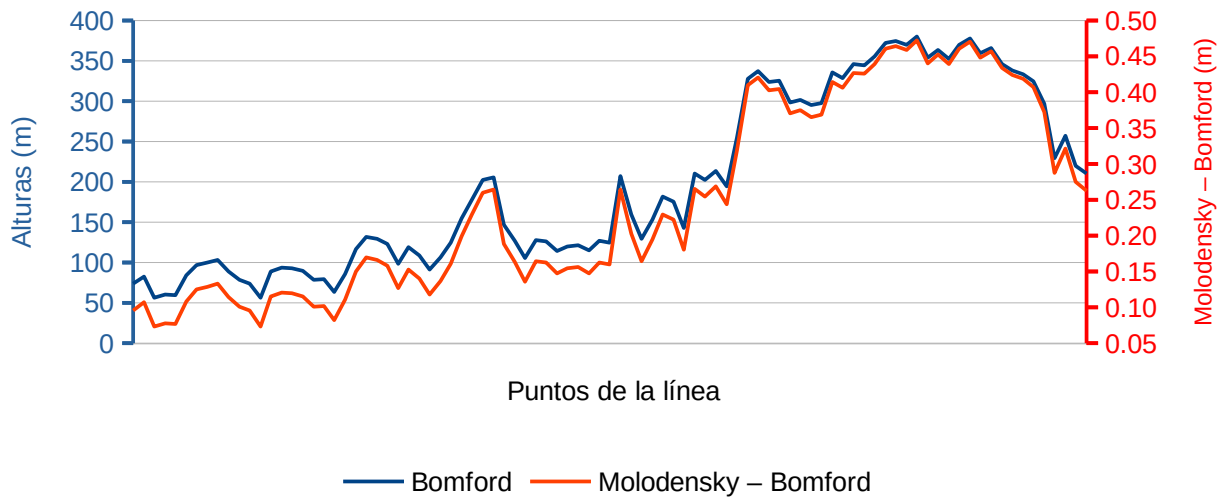


Figura 5.7: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 101, considerando alturas normales de Molodensky y Bomford.

En la Tabla 5.2 se presentan las comparaciones puntuales realizadas entre los diferentes tipos de alturas normales, expresados en metros.

Tabla 5.2: Diferencias entre las diferentes alturas normales (m).

		+						
		Vignal		Bomford		Hirvonen		
-	<b>Molodensky</b>	Máximo	0.000	Máximo	-0.001	Máximo	-0.001	
		Mínimo	0.000	Mínimo	-0.473	Mínimo	-0.473	
		Promedio	0.000	Promedio	-0.107	Promedio	-0.107	
		Desv. Est.	0.000	Desv. Est.	0.093	Desv. Est.	0.093	
	<b>Vignal</b>				Máximo	-0.001	Máximo	-0.001
					Mínimo	-0.473	Mínimo	-0.473
					Promedio	-0.107	Promedio	-0.107
					Desv. Est.	0.093	Desv. Est.	0.093
	<b>Bomford</b>						Máximo	0.000
							Mínimo	0.000
							Promedio	0.000
							Desv. Est.	0.000

### 5.3) Comparación puntual entre los diferentes tipos de alturas ortométricas calculadas.

#### 5.3.1) Alturas ortométricas de Baranov y Helmert.

La Figura 5.8 presenta las diferencias puntuales entre alturas ortométricas de Baranov y Helmert.

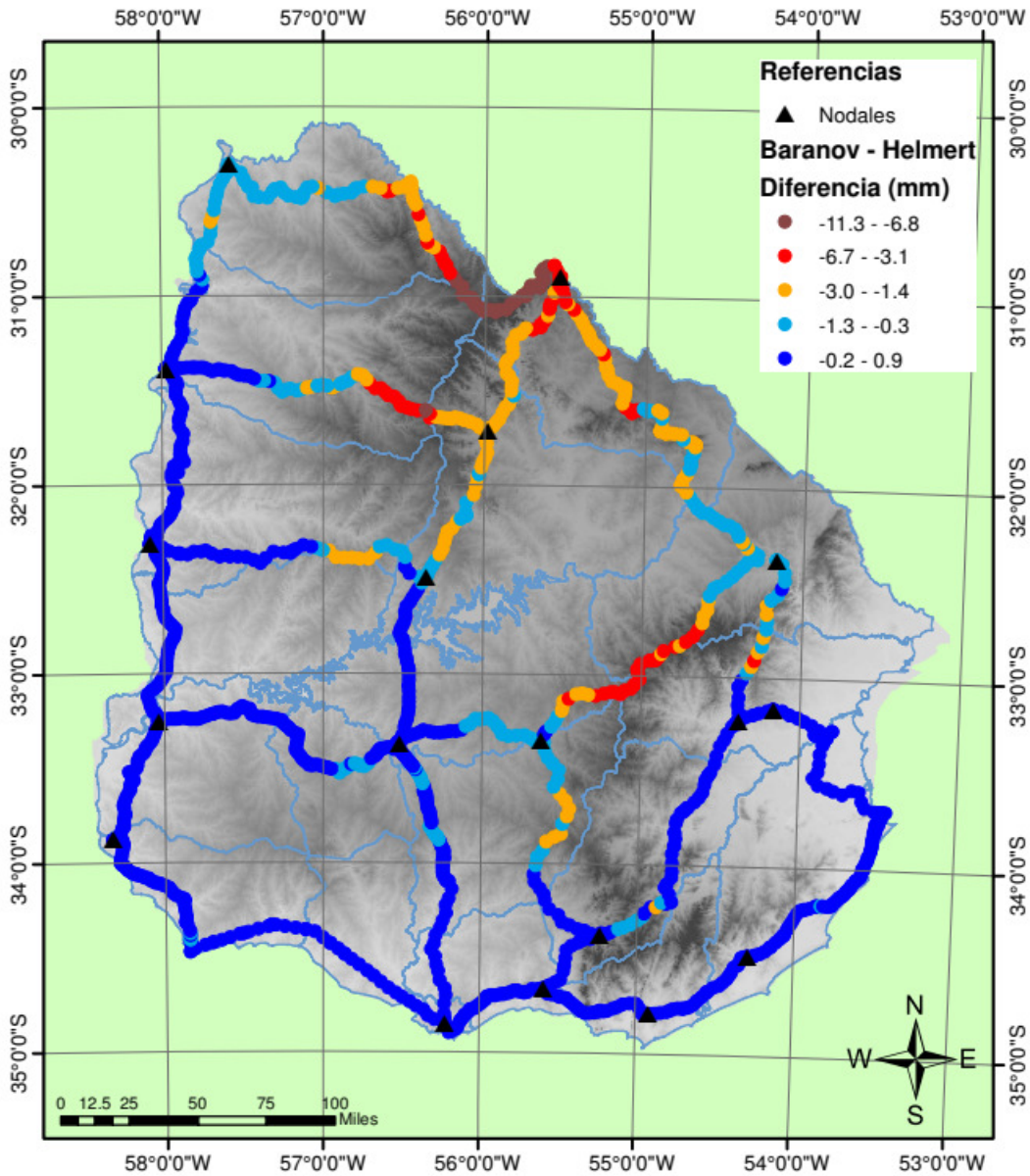


Figura 5.8: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Baranov y Helmert (mm).

Las discrepancias mayores ocurren en la zona Norte del territorio nacional, correspondiendo a zonas donde las Líneas de Nivelación de Primer Orden, en particular la LNPO 101, atraviesa alturas superiores a los 350 m. Para dicha línea se presenta el perfil correspondiente con ambos tipos de alturas, Figura 5.9.

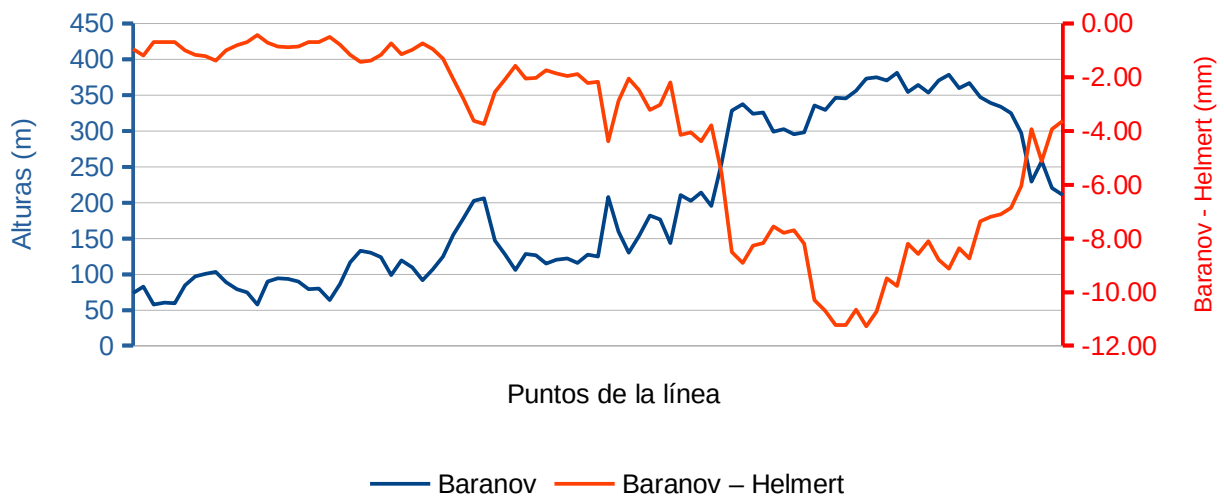


Figura 5.9: Perfil de la Línea de Nivelación de Primer Orden 101, considerando alturas ortométricas de Helmert y Baranov.

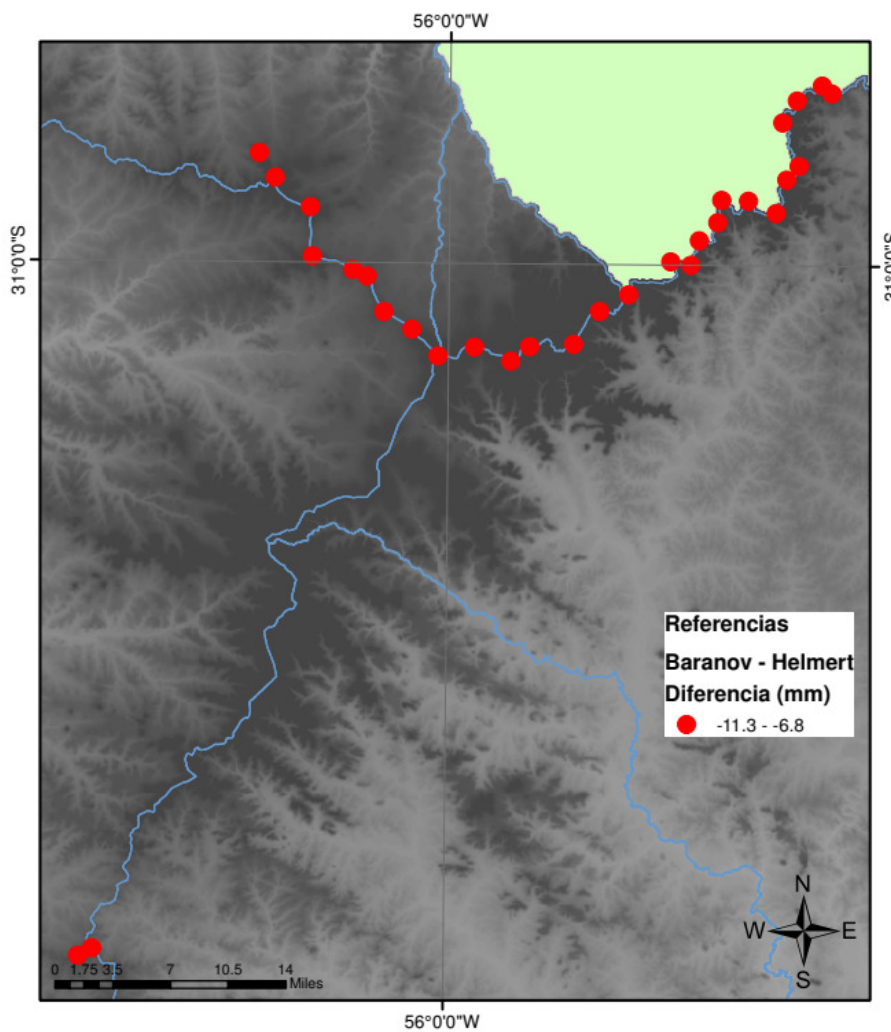


Figura 5.10: Mayores diferencias entre alturas ortométricas de Baranov y de Helmert (mm).

La Figura 5.10 presenta el detalle de la zona donde ocurren las mayores diferencias entre alturas ortométricas de Baranov y de Helmert, concordante con las zonas más elevadas del territorio nacional que son atravesadas por las Líneas de Nivelación de Primer Orden.

### 5.3.2) Alturas ortométricas de Mader y Helmert.

La Figura 5.11 presenta las diferencias puntuales entre alturas ortométricas de Mader y Helmert.

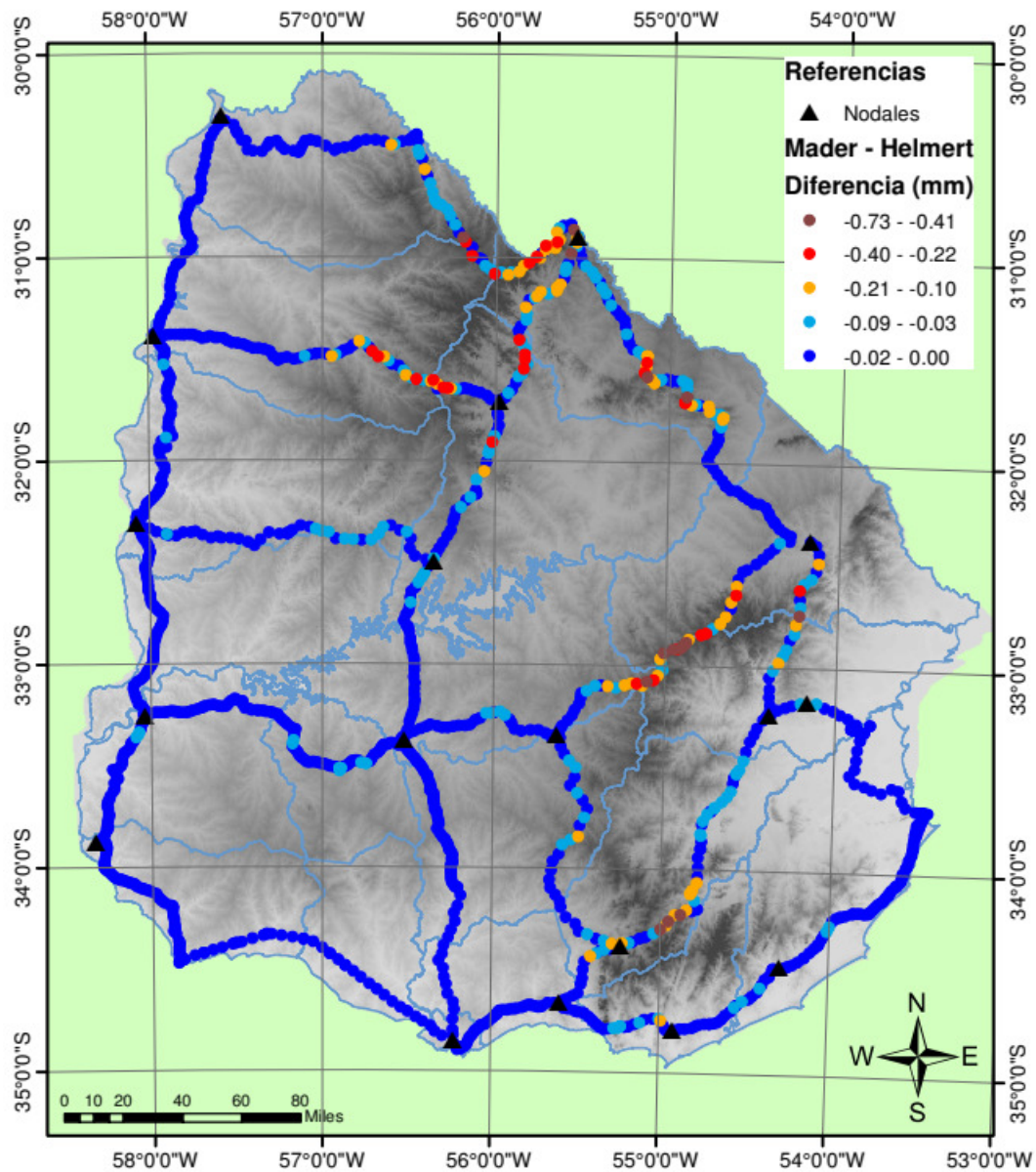


Figura 5.11: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Mader y Helmert (mm).

Se observan discrepancias menores a 1mm, coincidiendo mayormente las zonas críticas con los casos analizados previamente.

### 5.3.3) Alturas ortométricas de Mader y Baranov.

La presenta las diferencias puntuales entre alturas ortométricas de Mader y Baranov.

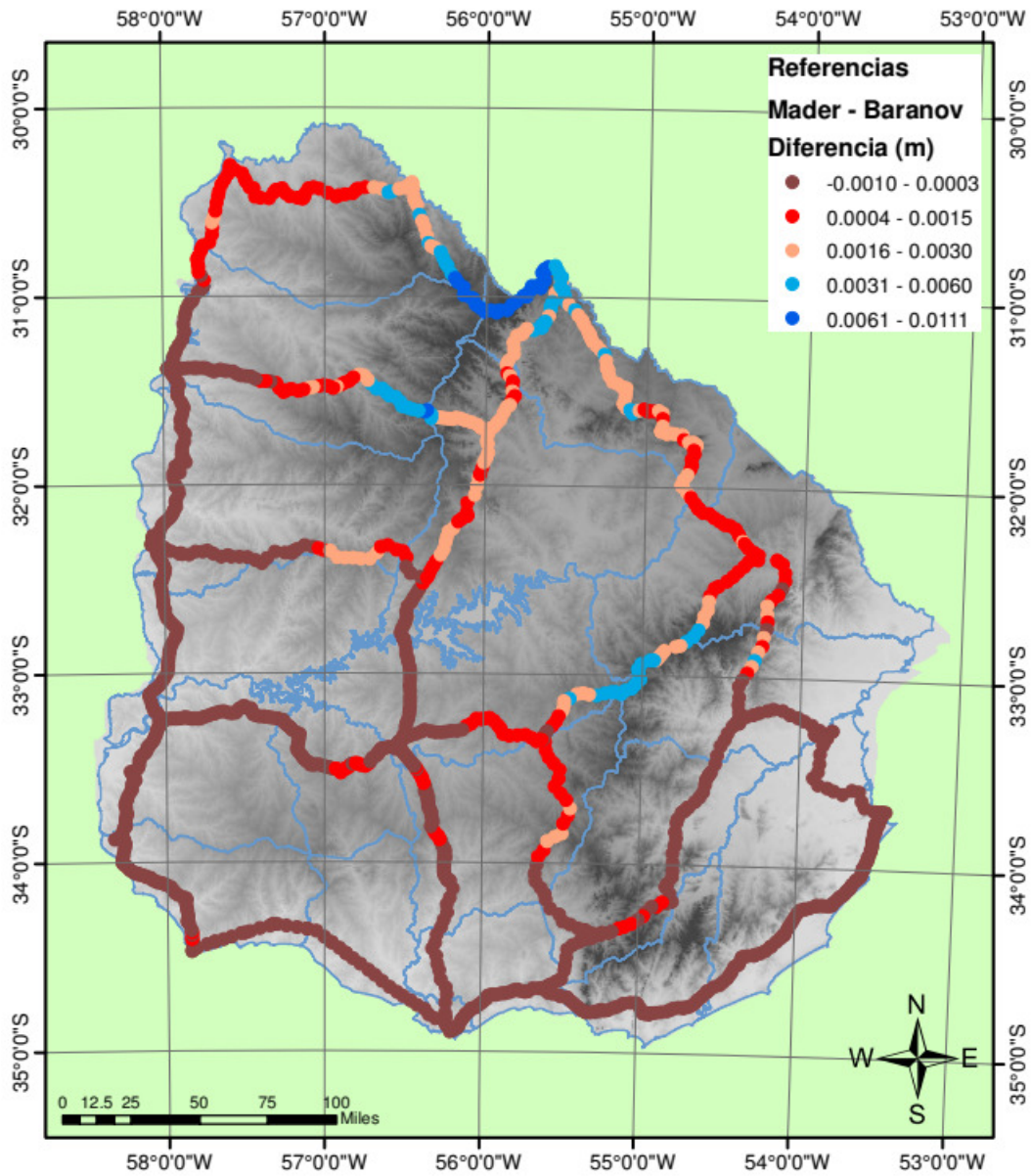


Figura 5.12: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Mader y Baranov (m).

Nuevamente se observan las mayores discrepancias en la zona de la Línea de Nivelación de Primer Orden 101.

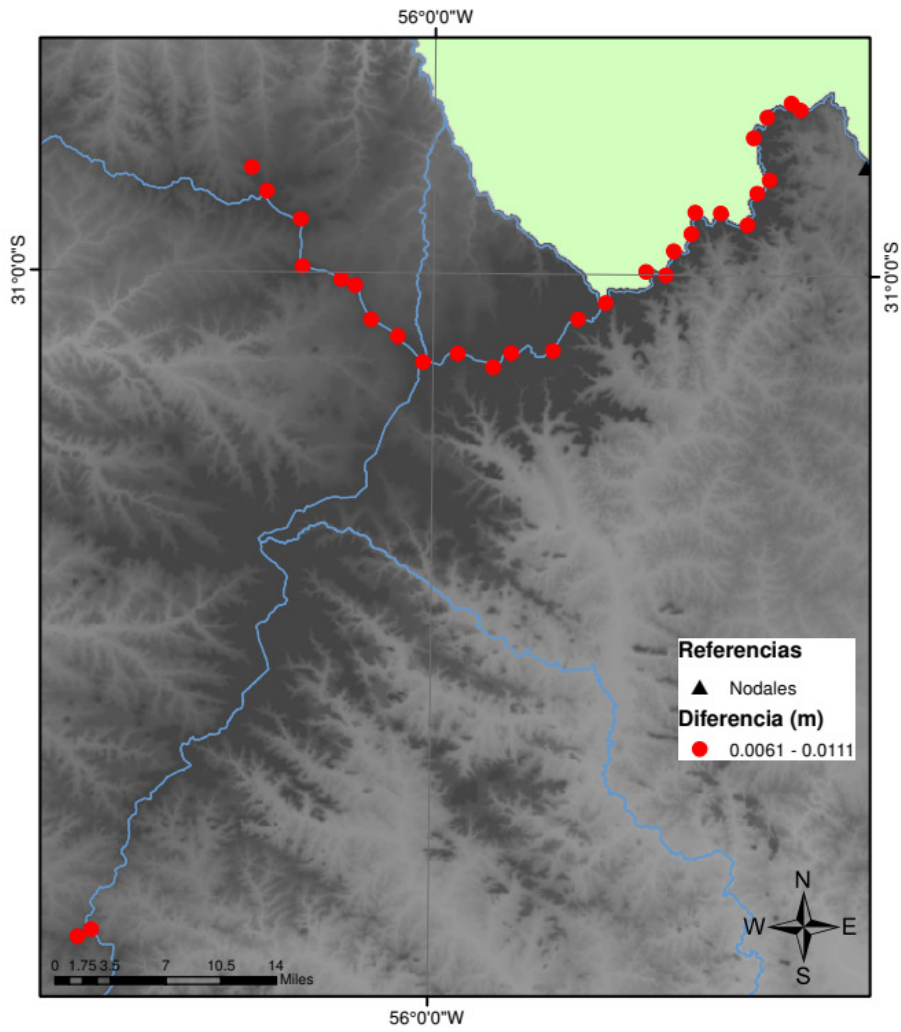


Figura 5.13: Mayores diferencias entre alturas ortométricas de Mader y Baranov (m).

La Figura 5.13 presenta el detalle de la zona donde ocurren las mayores diferencias entre alturas ortométricas de Mader y Baranov, concordante con los casos anteriores.

### 5.3.4) Resumen de la comparación entre diferentes tipos de alturas ortométricas.

Tabla 5.3: Diferencias entre las diferentes alturas ortométricas (m).

		+			
		Baranov		Mader	
-	Helmert	Máximo	0.001	Máximo	0.000
		Mínimo	-0.011	Mínimo	-0.001
		Promedio	-0.001	Promedio	0.000
		Desv. Est.	0.002	Desv. Est.	0.000
	Baranov			Máximo	0.011
				Mínimo	-0.001
				Promedio	0.001
				Desv. Est.	0.002

## 5.4) Comparación puntual de alturas sobre los puntos Nodales.

A partir del ajuste realizado, utilizando únicamente los desniveles medidos en campo, y la altura referida al cero oficial del Nodal Belvedere, se determinan las alturas ajustadas de cada uno de los nodales que componen las Líneas de Nivelación de Primer Orden.

Para cada nodal se cuenta con las siguientes alturas: nivelada ajustada, ortométrica (Helmert, Baranov, Mader), normal (Molodensky, Vignal, Bomford, Hirvonen).

### 5.4.1) Alturas normales de Molodensky y nivelada ajustada.

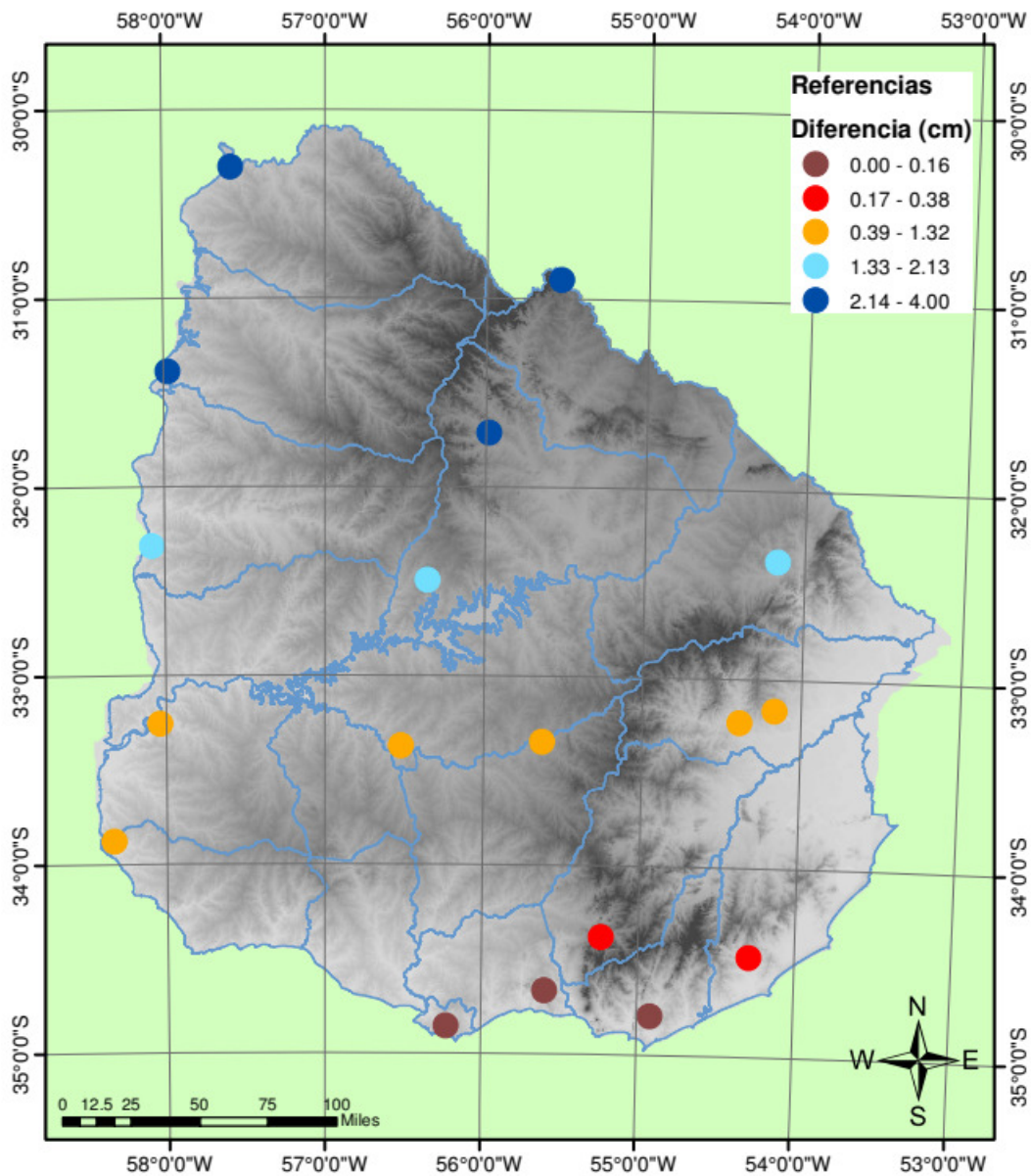


Figura 5.14: Diferencia puntual entre altura normal de Molodensky y nivelada ajustada en cada punto Nodal (cm).



La Figura 5.14 presenta las diferencias puntuales entre alturas normales de Molodensky y altura nivelada ajustada, según lo detallado en Capítulo 4.3.

#### 5.4.2) Alturas ortométricas de Helmert y nivelada ajustada.

La Figura 5.15 muestra la diferencia puntual entre la altura ortométrica de Helmert y la altura geométrica ajustada en cada punto nodal.

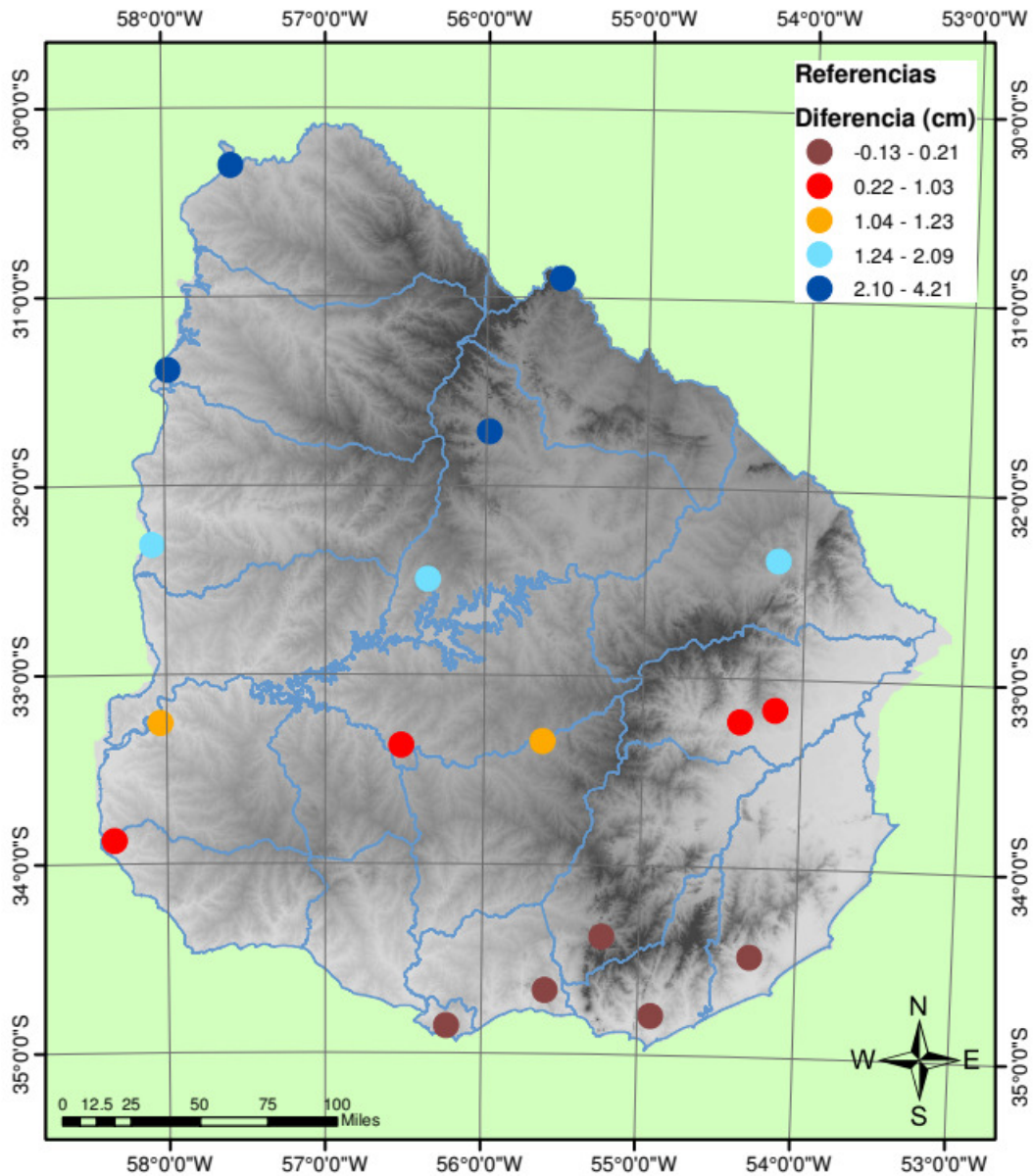


Figura 5.15: Diferencia puntual entre altura ortométrica de Helmert y nivelada ajustada en cada punto Nodal (cm).

Se aprecia claramente que las diferencias puntuales se incrementan en forma directamente proporcional a la distancia con el nodal Belvedere.

### 5.4.3) Resumen diferencias respecto a la las alturas niveladas ajustadas.

Tabla 5.4: Diferencias de las alturas respecto a la altura nivelada ajustada en los Nodales (cm).

	<b>Molodensky - Nivelada ajustada (cm)</b>	<b>Helmert – Nivelada ajustada (cm)</b>
<b>Máximo</b>	4.00	4.21
<b>Mínimo</b>	0.00	-0.13
<b>Promedio</b>	1.53	1.47
<b>Desv. Est.</b>	1.25	1.34

La Tabla 5.4 presenta las diferencias de alturas calculadas en los puntos Nodales.

### 5.5) Análisis de las correcciones normal (NC) y ortométrica (OC) a los desniveles medidos en cada tramo.

A partir de los desniveles medidos en campo, la gravedad observada y la gravedad normal calculada, pueden calcularse las correcciones normales (NC) y las correcciones ortométricas (OC) que deben aplicarse a cada desnivel entre puntos consecutivos de las líneas, para obtener los respectivos desniveles normales y ortométricos.

### 5.5.1) Correcciones normales.

La Figura 5.16 muestra las correcciones normales calculadas en cada tramo de las Líneas de Nivelación de Primer Orden, pudiendo apreciarse que mayormente se observan valores menores a los 2 mm, la Figura 5.17 corresponde al histograma de las correcciones normales.

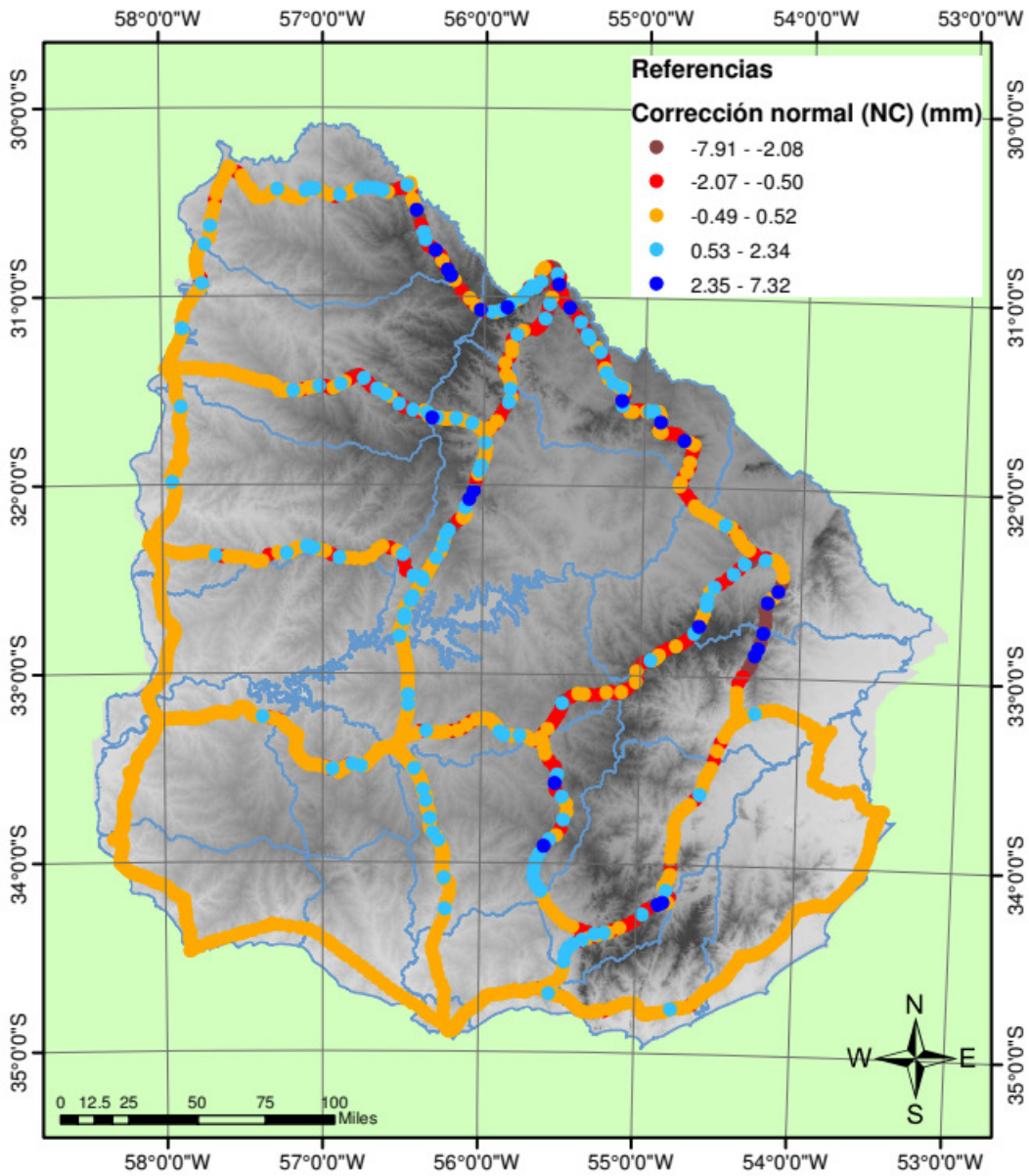


Figura 5.16: Correcciones normales sobre las Líneas de Nivelación de Primer Orden (mm).

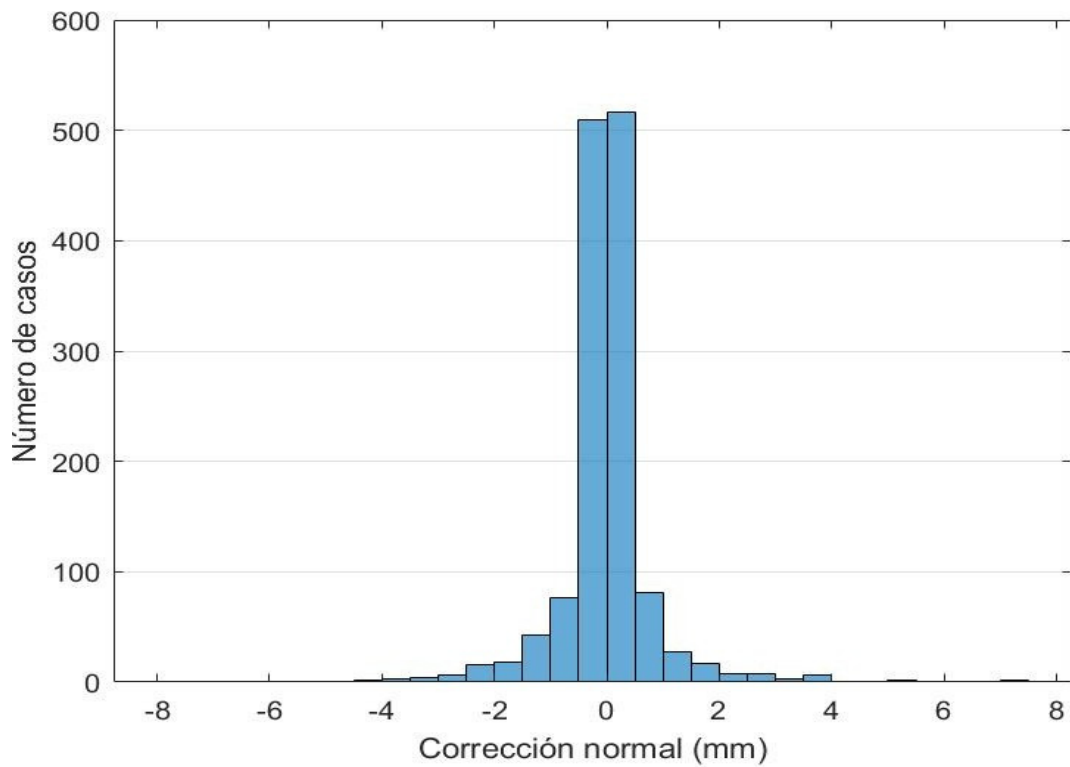


Figura 5.17: Histograma corrección normal (NC) en mm.

Entendiendo que la corrección normal indica el valor necesario de aplicar en el desnivel medido en campo para obtener un desnivel normal (altura de tipo física), se analiza y presenta aquellos desniveles en los cuales dicha corrección supera en valor absoluto los 4 mm, tomado como valor umbral.

La Figura 5.18 presenta las correcciones normales mayores a 4 mm en valor absoluto.

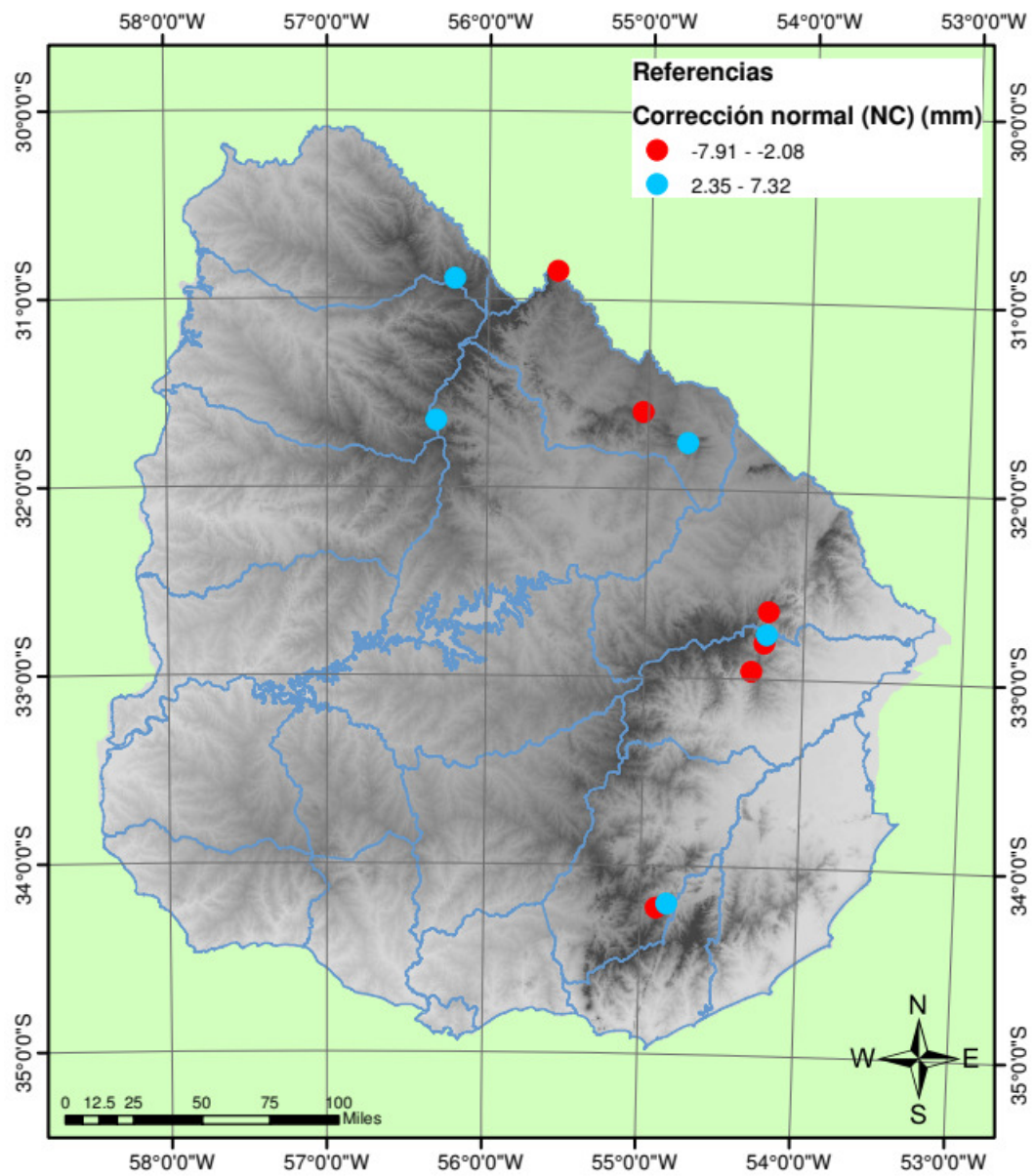


Figura 5.18: Correcciones normales mayores en valor absoluto a 4 mm.

### 5.5.2) Correcciones ortométricas.

La Figura 5.19 muestra las correcciones ortométricas calculadas en cada tramo de las Líneas de Nivelación de Primer Orden, pudiendo apreciarse que mayormente se observan valores de unos pocos milímetros, similares al caso de las correcciones normales. Las correcciones ortométricas presentan un rango de valores más acotado que las normales.

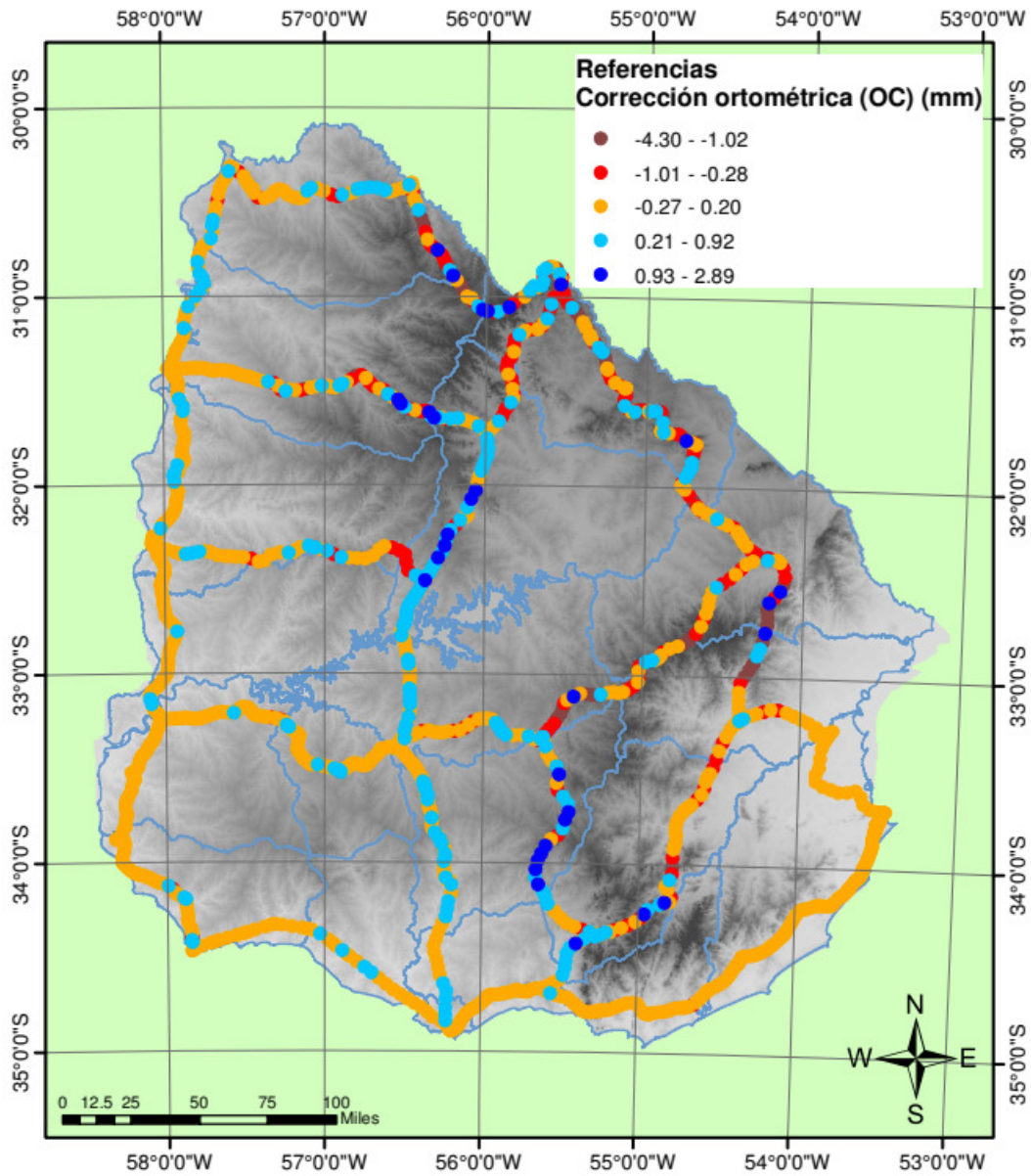


Figura 5.19: Correcciones ortométricas sobre las Líneas de Nivelación de Primer Orden (mm).

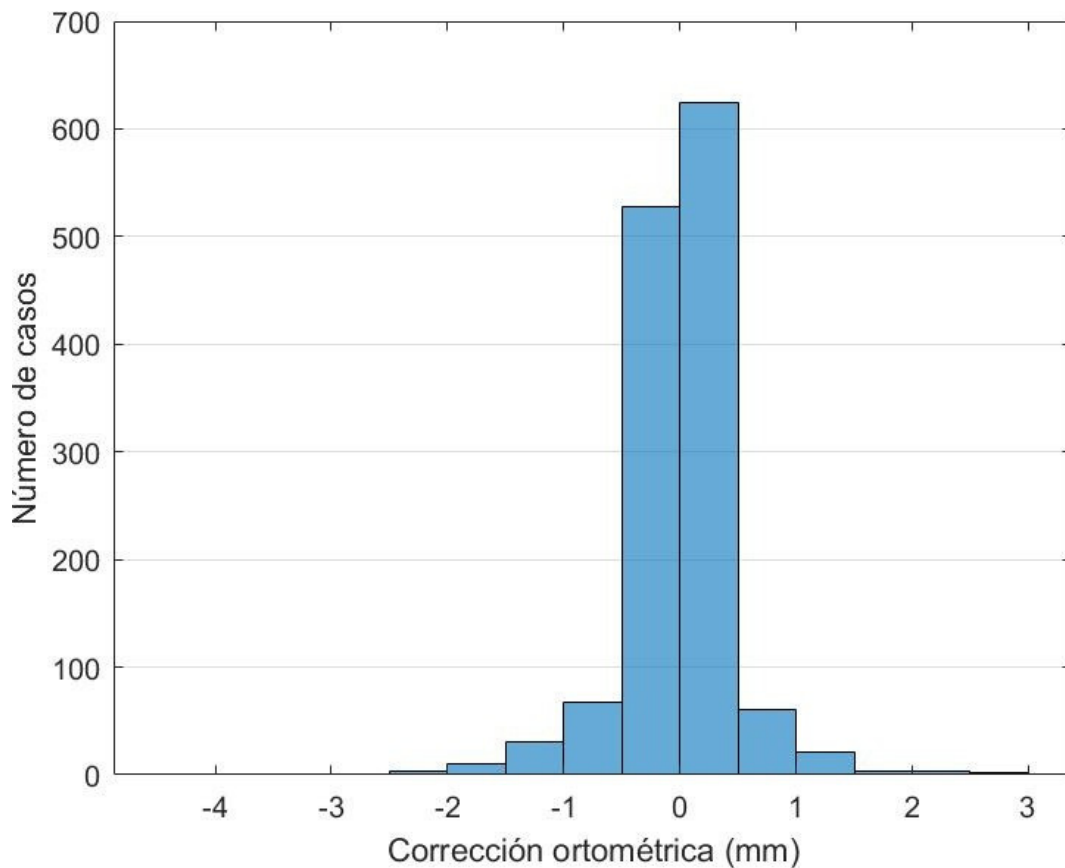


Figura 5.20: Histograma corrección ortométrica (OC) en mm.

La Figura 5.20 presenta el histograma donde permite visualizar claramente que la gran mayoría de los desniveles correspondientes a las Líneas de Nivelación de Primer Orden, presentan correcciones ortométricas inferiores a 1 mm en valor absoluto.

El análisis de las mayores correcciones ortométricas permite identificar que existe un solo tramo en todas las Líneas de Nivelación de Primer Orden, en el cual la corrección ortométrica supera los 4 mm en valor absoluto.

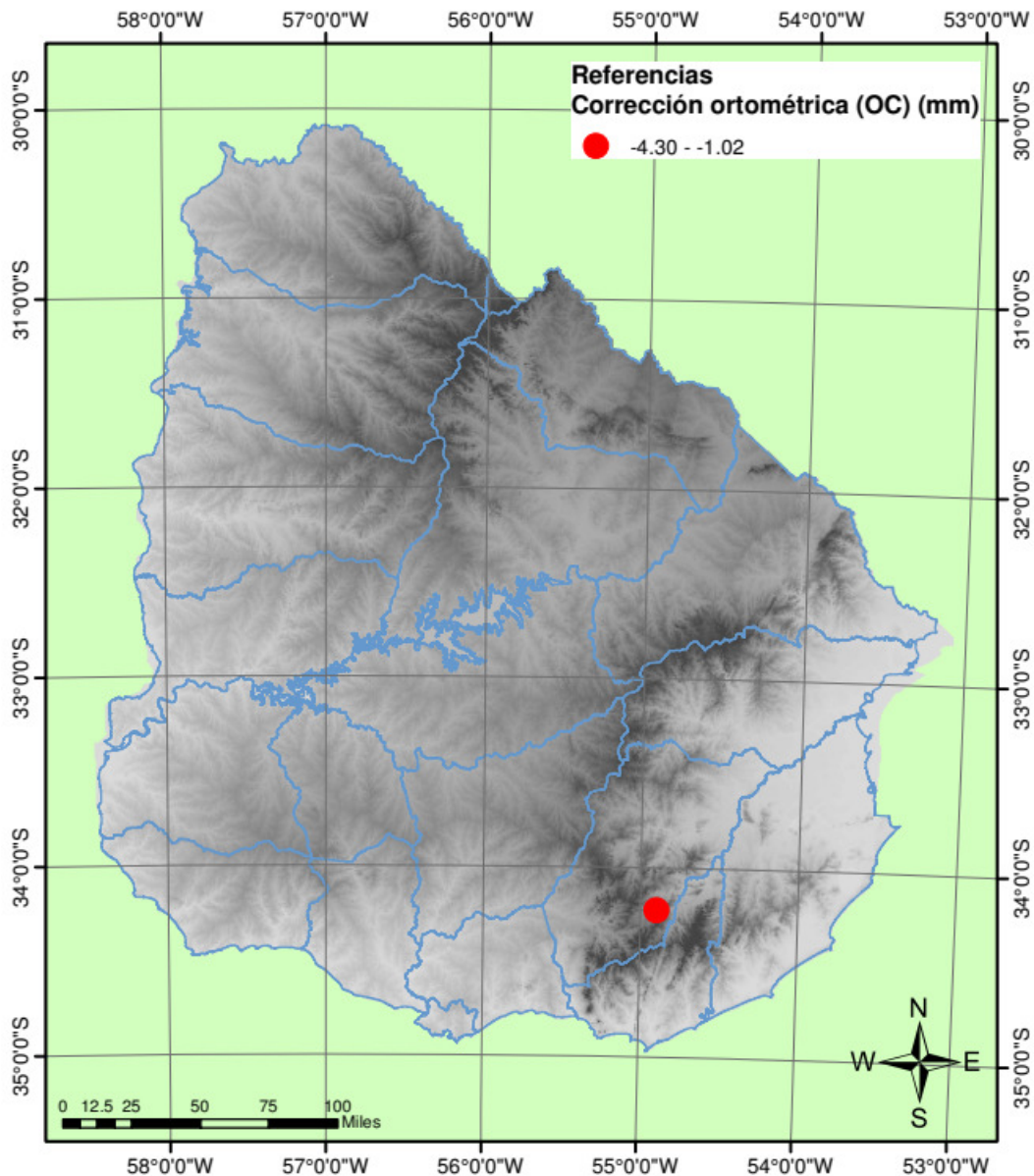


Figura 5.21: Correcciones ortométricas mayores en valor absoluto a 4 mm.

La Figura 5.21 presenta las correcciones ortométricas mayores a 4 mm en valor absoluto. El único tramo que presenta una corrección ortométrica mayor a 4 mm en valor absoluto se corresponde con el mismo tramo para el cual la corrección normal también supera los 4 mm, siendo los detalles del mismo:

- Desnivel medido: -108.5444 m
- Corrección normal: -0.0079 m
- Corrección ortométrica: -0.0043 m



## 5.6) Análisis de las correcciones normal (NC) y ortométrica (OC) a los desniveles medidos en las Líneas de Primer Orden.

En la sección anterior se analizó las correcciones necesarias de aplicar en cada tramo, para obtener un desnivel normal u ortométrico a partir del desnivel medido en campo.

Seguidamente se analiza la corrección total en cada Línea de Nivelación de Primer Orden.

La Tabla 5.5 indica que la mayor corrección, en valor absoluto, se produce en la Línea 105, la cual presenta un desnivel geométrico medido de -96.2512 m.

Tabla 5.5: Correcciones normales y ortométricas en cada Línea de Nivelación de Primer Orden.

<b>LÍNEA</b>	<b>NC (m)</b>	<b>OC (m)</b>	<b>LÍNEA</b>	<b>NC (m)</b>	<b>OC (m)</b>
<b>101</b>	-0.0003	-0.0064	<b>115</b>	-0.0010	-0.0005
<b>102</b>	-0.0151	-0.0120	<b>116</b>	0.0014	0.0004
<b>103</b>	0.0029	0.0010	<b>117</b>	0.0037	0.0035
<b>104</b>	0.0056	0.0065	<b>118</b>	-0.0015	-0.0010
<b>105</b>	-0.0274	-0.0272	<b>119</b>	0.0112	0.0116
<b>106</b>	-0.0168	-0.0169	<b>120</b>	-0.0006	-0.0004
<b>107</b>	-0.0018	-0.0017	<b>121</b>	0.0022	0.0026
<b>108</b>	0.0113	0.0105	<b>122</b>	0.0018	0.0009
<b>109</b>	0.0088	0.0133	<b>123</b>	0.0024	0.0010
<b>110</b>	-0.0112	-0.0103	<b>124</b>	0.0030	0.0032
<b>111</b>	-0.0060	-0.0088	<b>125</b>	0.0032	0.0038
<b>112</b>	0.0137	0.0156	<b>MINIMO</b>	-0.0274	-0.0272
<b>113</b>	0.0005	0.0000	<b>MAXIMO</b>	0.0137	0.0156
<b>114</b>	-0.0020	-0.0024			

## 6. CONCLUSIONES

La Red Altimétrica Nacional de Primer Orden presenta una alta precisión, lo cual se refleja en los resultados obtenidos, siendo la desviación estándar de las alturas calculadas coherentes con el nivel de Primer Orden.

La precisión alcanzada en los valores de gravedad interpolados, cumple con las exigencias establecidas para determinar los números geopotenciales en todos los casos.

Salvo situaciones puntuales analizadas, la influencia de la gravedad al momento de calcular alturas de tipo físico en Uruguay es baja, y en la práctica profesional de la Agrimensura, para fines topográficos, resulta mayormente despreciable, tal cual surge de los valores de corrección ortométrica calculados para los desniveles de las Líneas de Nivelación de Primer Orden, siendo el máximo o de 4 mm.

En cálculos geodésicos de alta precisión su efecto no puede ser despreciado.

A partir del ajuste realizado, y dados los resultados obtenidos, se está en condiciones de integrar las Líneas de Nivelación de Segundo y Tercer Orden, lo cual brindaría al país una mayor densidad de puntos con altura física disponible.

Los números geopotenciales calculados, refieren a un Datum local, a los efectos de poder referirlos al Datum global ( $W_0$ ) deberán realizarse las vinculaciones y cálculos geodésicos necesarios.

El ajuste realizado a partir de los números geopotenciales determina alturas derivadas de mayor precisión que las obtenidas a partir de los desniveles medidos sin intervención de datos gravimétricos, tal cual se puede apreciar en la Figura 4.13.

Este resultado permite afirmar que los nuevos valores de alturas calculados en el presente trabajo mejoran la calidad del dato altimétrico actualmente disponible.

Las diferentes alturas físicas calculadas (ortométricas, normales) presentan una precisión que decrece a medida que la distancia al Datum aumenta.

Los sistemas de altura clásicos no pueden descartarse, deben modernizarse mediante su integración (unificación) en un sistema de referencia vertical unificado global.

El objetivo de la unificación consiste en referir todas las alturas físicas a un mismo nivel de referencia para lo que hay que determinar las discrepancias ( $dW_i$ ), también llamadas parámetros del datum vertical, entre los diferentes datum verticales locales y el  $W_0$  global.

El enfoque básico se basa en la comparación de ondulaciones geoidales o anomalías de altura deducidas de la solución del problema de valor de contorno geodésico (Stokes o Molodensky) con las calculadas del posicionamiento GNSS colocalizadas con alturas físicas basadas en nivelación.

Para garantizar la confiabilidad de los parámetros de referencia verticales ( $dW_i$ ), los datos de entrada deben ser lo más precisos y consistentes posible. Las alturas elipsoidales y las

alturas del geoide/cuasigeoide deben referirse al mismo elipsoide de referencia y las alturas físicas y las alturas elipsoidales deben representar la misma superficie topográfica.

Se entiende necesario iniciar un proceso de modernización de la red geodésica vertical de Uruguay, el cual implicará:

- 1) Reajuste de la Red Gravimétrica.
- 2) Reajuste de la Red Vertical en números geopotenciales.
- 3) Actualización del modelo geoidal UruGeoide2007.

Este proyecto de modernización será llevado adelante por el Instituto Geográfico Militar, en el marco de los Proyectos SIRGAS e IHRS de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG), se estima una duración de 3 años, iniciándose en 2022.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- Acuña, Y. (1984). La Geodesia en el Uruguay. Boletín del Servicio Geográfico Militar. Ministerio de Defensa Nacional. Comando General del Ejército. Volumen 7.
- Barbato, F. D., y Barbato, M. N. (1995). Ajuste de operaciones de agrimensura por Método de Mínimos Cuadrados. Facultad de Ingeniería (UDELAR).
- Drewes, H. (1976). Berechnung regionaler Geoidundulationen durch gravimetrisches Nivellement mit Prädiktion der Schwereanomalien. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, Heft 63, Hannover.
- Drewes, H. (1978). Experiences with least squares collocation as applied to interpolation of geodetic and geophysical quantities. XII Symposium on Mathematical Geophysics. Caracas.
- Drewes, H, Kuglitsch, F, Ádám, J, Rózsa, S. (2016). Geodesist's handbook 2016. J Geod 90:907. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0948-z>.
- Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006). Physical geodesy. Springer Science & Business Media.
- Karl Mader, Wien (1954). Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions – Nivellements in den Hoen Tauern.
- Lazo, J. M., (2005). Infraestructura geodésica del Uruguay para el GT III – SIRGAS. Servicio Geográfico Militar. Reunión SIRGAS 2005.
- Mather R.S. (1978). The role of the geoid in four-dimensional geodesy. Marine Geodesy 1: 217-252.
- Mouret, Gómez A. E. (1947). Niveles de referencias altimétricas de la República. Revista Agrimensura. Año IX. Número 11. Asociación de Agrimensores del Uruguay.
- Mouret, Gómez A. E. (1950). Diferencia Zanetti – Wharton. Revista Agrimensura. Año XII. Número 14. Asociación de Agrimensores del Uruguay.
- Reitmayr, G. (2001). Una espectacular peculiaridad uruguaya: la anomalía gravimétrica de la Laguna Merín. Instituto Federal de Geociencias y Recursos Naturales, BGR, Alemania. Actas XI Congreso Latinoamericano de Geología y III Congreso Uruguayo de Geología.
- Rodríguez Tomeo, C. (2019). Centenario del Servicio Geográfico Militar de Uruguay, 1913-2013. Revista Cartográfica, (89), 189-191. <https://doi.org/10.35424/rcarto.i89.496>.
- Rovera, H. y Suárez, N. (2008). Hacia una infraestructura geodésica moderna en Uruguay. Servicio Geográfico Militar. Reunión SIRGAS 2008.
- Rovera, H. (2012). El Marco de Referencia Vertical: un patrimonio desconocido. Instituto histórico y geográfico del Uruguay.

Sánchez, L. (2002). Determinación de alturas físicas en Colombia. Institut für planetare geodäsie technische universität Dresden. Alemania.

Sánchez, L. y Drewes H. (2016). Programa NUMGEOPOT: Cálculo de números geopotenciales. Taller SIRGAS en Sistemas Verticales de Referencia, Quito, Ecuador. Noviembre 21 - 25, 2016. (2016).

Sánchez, L. y Drewes, H. (2016). Programa COMPNGP: Compensación de redes verticales en términos de números geopotenciales. Taller SIRGAS en Sistemas Verticales de Referencia, Quito, Ecuador. Noviembre 21 - 25, 2016.

Sánchez L. (2020). Sistema Internacional de Alturas IHRS (International Height Reference System), Webinar SIRGAS, 2020-06-25.

[https://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Webinar\\_20200625\\_Sanchez\\_IHRS.pdf](https://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Webinar_20200625_Sanchez_IHRS.pdf)

Sánchez, L. Jonas Ågren, Jianliang Huang, Yan Ming Wang, Jaakko Mäkinen, Roland Pail, Riccardo Barzaghi, Georgios S. Vergos, Kevin Ahlgren, Qing Liu .(2021). Strategy for the realization of the International Height Reference System (IHRS). J Geod 95, 33.

Seuáñez, R. y Olivera (1948). Planos cartográficos. Solución definitiva de este problema. Revista Agrimensura. Año X. Número 12. Asociación de Agrimensores del Uruguay.

Servicio Geográfico Militar. Red Gravimétrica Fundamental: Resumen de Valores (1970).

Servicio Geográfico Militar. (2004). Nuevo marco de referencia. <https://igm.gub.uy/documentos/>

Subiza, W. H., Timmen, L, Torge, W. (1996). El Ajuste de la red gravimétrica nacional de Uruguay. Servicio Geográfico Militar. <https://igm.gub.uy/documentos/>

Torge, W., Timmen, L., Röder, R. H., & Schnüll, M. (1995). Large Scale Absolute Gravity Control in South America—JILAG-3 Campaigns 1988–1991—. In Gravity and Geoid (pp. 46-55). Springer, Berlin, Heidelberg.

Torge, W., & Müller, J. (2012). Geodesy. de Gruyter.