TEORIA ABSTRACTA DE CONJUNTOS (*)

"Protesto... contra el uso de la magnitud infinita como si fuera algo ya concluido; este uso no es admisible en matemáticas. El infinito es sólo una **façon de parler**: nos imaginamos límites tan aproximados como sea posible a ciertas razones mientras que otras razones pueden crecer indefinidamente" (1). C. F. Gauss, probablemente el más notable matemático del siglo 19, emitía esta opinión en 1831 en respuesta a una idea de Schumacher, expresando de esta manera un **horror infiniti** que casi a fin de siglo fue la actitud común de los matemáticos y parecía inexpugnable, teniendo en cuenta la autoridad de Gauss. Los matemáticos sólo pueden tratar con magnitudes y números finitos, mientras que la consideración del infinito actual, ya sea infinitamente grande o pequeño, debe dejarse a la filosofía.

Fue el matemático Georg Cantor (1845-1918) (2), quien desafió esta actitud y la mayoría de los matemáticos del siglo 20 opinan que ha triunfado en la tarea de conferir legitimidad a las magnitudes infinitamente grandes. Además de la intuición creadora y del poder de producción artística (3) que guió a Cantor en su trabajo, una enorme cantidad de energía y perseverancia se requirió para llevar a cabo las nuevas ideas, que durante dos décadas fueron rechazadas por sus contemporáneos (4), argumentando que eran oscuras o faltas de sen-

---

(*) Este texto es la traducción de la Introducción y primera parte del Cap. I del libro de Abraham A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1961.

(1) *Briefwechsel Gauss-Schumacher*, vol. II (1860), pág. 269; *Gauss' Werke*, vol. VIII (1900), página 216.

(2) Cf. la biografía en Fraenkel 30 y la edición de la colección de los trabajos de Cantor (incluyendo notas de E. Zermelo y una biografía corta) Cantor 32; cf. también Schoenflies 22 y 28, Ternus 29, Cantor-Dedekind 37.

Todas las referencias bibliográficas de este libro, compuestas por el nombre del autor y el año de publicación, aparecen en la Bibliografía al final. En las fechas correspondientes al siglo 20 se suprimen los dígitos iniciales 19. Las referencias bibliográficas se dan para los lectores interesados en las fuentes o en detalles adicionales; el texto es independiente de ellos.

(3) Cf. con el lema anexado (Latín) al *Habilitationsschrift* de 1869 por el cual ganó la admisión como catedrático en la Universidad de Halle: *Eodem modo literis atque arte animos delectari posse.* (Cantor 32, pág. 62).

(4) Especialmente por Kronecker. Sin embargo, otros dos importantes matemáticos de aquella época, Weierstrass y (contrariamente a una tradición errónea) Hermite, pronto cambiaron su desconfianza inicial en apreciación y admiración. Anteriormente ya Mittag-Leffler había dado a Cantor activo apoyo persuadiendo a Poincaré y a otros a traducir los trabajos de Cantor al francés (cf. Mittag-Leffler 28); estas traducciones, publicadas en el volumen 2 del *Acta Mathematica*, contribuyeron mucho a propagar las ideas de Cantor.

tido, o "traídas al mundo con cien años de anticipación" (5). No sólo Gauss y otros importantes matemáticos se manifestaron en contra del infinito actual, sino también autoridades filosóficas descollantes, tales como Aristóteles, Descartes, Spinoza y los lógicos (6). La teoría de conjunto fue acusada de violar los principios de la religión, acusación rechazada por Cantor con especial rigor y minuciosidad (7). Sólo en los últimos años del siglo 19, cuando ya Cantor había abandonado la investigación matemática, la teoría de conjuntos comenzó a infiltrarse en muchas ramas de las matemáticas (8).

El propósito principal del presente libro, es mostrar cómo magnitudes infinitamente grandes, definidas y distintas, pueden ser introducidas y manejadas en matemáticas —otra evidencia de libre creación que caracteriza a las matemáticas en mayor medida que a otras ciencias. No es una mera coincidencia que en el nacimiento de la teoría de conjuntos (1883) fuera acuñado el slogan: la verdadera esencia de las matemáticas es su libertad (9).

Con qué claridad Cantor percibió el carácter revolucionario de sus investigaciones en tan temprano período y cuán seguro estaba de la victoria final de sus ideas por encima de las objeciones, puede inferirse del siguiente pasaje con que comienza su trabajo decisivo de 1879-84V:

Las primeras aplicaciones (cf. además § 12) a la teoría de funciones y a la geometría, se encuentran en Hurwitz 1883, Poincaré 1883, Mittag-Leffler 1884, Scheeffer 1884 y 1884a. Los trabajos de Bendixson de los mismos años (1883, 1883a, 1884, 1884a) tomaron un curso paralelo a la obra de Cantor.

(5) De acuerdo a Cantor-Stäckel 1897, este fue el argumento con el cual el *Acta Mathematica*, que previamente había apreciado las ideas de Cantor, rechazó la exposición final, que posteriormente (según Cantor 1895-97) apareció en los *Mathematische Annalen*. Aun los trabajos de 1874 y 1878 sólo fueron publicados por Kronecker después de muchas postergaciones y vacilaciones (cf. Schoenflies 22, pág. 99). Recién en 1908 Cantor se lamentó, en una carta a W. H. Young, de la poca apreciación dada a su obra en Alemania, a diferencia de Gran Bretaña (Young 26, pág. 422).

(6) Algunos filósofos importantes que *afirmaron* el infinito actual fueron ignorados por Cantor, en particular Lucretius (cf. Keyser 18) y Chasdai Crescas (cf. Wolfson 29).

(7) Cf. Cantor 1879-84 (particularmente V), 1886, 1887-88; Gutberlet 1886 y 1919; Ternus 26. Se sobreentiende que el concepto de infinito tiene su origen en el pensamiento *religioso;* al menos en la civilización occidental se introdujo en la *ciencia* por los griegos. En la teología escolástica medieval y en la filosofía en general (no sólo en lo concerniente al infinito) se encuentran una serie de pensamientos emparentados con los métodos teóricos de conjuntos, que dan preferencia al análisis lógico sobre las cuestiones existenciales. De hecho Cantor (y más aun Bolzano, su predecesor en alguna medida) tenían una buena formación escolástica. Cf. Isenkrahe 20, Klein 26 (págs. 52 y 56), Bodewig 32, Bochenski 34, 38 y 56.

En general para la historia del problema del infinito actual se remite al lector a Russell 14/26, Keyser 16 (Cap. VIII), Weyl 26/49, 31, 32; para la prehistoria y temprana historia de la teoría de conjuntos, a: Jourdain 05-14, Schoenflies 00-07, 13, Young-Young 06, Hessenberg 06, Cavalliès 38.

(8) Primeramente en Francia, en donde el apéndice de Couturat de 1896 y los trabajos clásicos de Borel de 1898 y de Baire de 1899 extendieron el conocimiento de la teoría de conjuntos a círculos más amplios.

(9) Cantor 1879-84V, pág. 564; cf. los parágrafos que preceden a este trabajo. La edición de este trabajo tiene un prólogo que conmueve por su humildad.

La exposición previa (es decir I-IV) de mis investigaciones en la teoría de los "múltiples" (10) ha llegado a un punto tal que, para continuar, es necesaria una generalización del concepto de entero real más allá de los límites usuales; una generalización que toma una dirección, que a mi entender, nadie ha buscado aún.

Dependo de esa generalización del concepto de número en tal medida que sin ella sería muy difícil que libremente pudiera adelantar en la teoría de conjuntos; esto puede servir como una justificación o, si fuera necesario, como excusa para introducir ideas aparentemente extrañas en mis consideraciones. De hecho, el riesgo está en generalizar o continuar las series de enteros reales más allá del infinito. Osada como podría parecer, expreso no sólo la esperanza sino la firme convicción que a su debido tiempo esta generalización será recibida como un paso absolutamente sencillo, adecuado y natural. No obstante, estoy bien enterado que dando este paso me pongo en una cierta oposición a los conceptos muy divulgados del infinito en matemáticas y a las opiniones corrientes respecto a la naturaleza del número.

Corresponderá al lector formar su propio juicio, de acuerdo al desarrollo sistemático dado a partir del § 2 en adelante, si esta generalización del concepto de número es legítima y ha sido lo suficientemente restringida a una indudable consistencia.

CAPITULO I

FUNDAMENTOS. EL CONCEPTO DE NUMERO CARDINAL

§ 1. Ejemplos. El concepto de conjunto de Cantor

El intento de Cantor de **definir** el concepto de conjunto será analizado de acuerdo a los siguientes ejemplos simples de conjuntos. Estos ejemplos informales no forman parte del sistema que vamos a desarrollar a partir del § 2 en adelante.

a) Consideremos una colección de objetos concretos, por ejemplo de manzanas, naranjas, etc., en una frutería. Podemos llamarlo un conjunto de frutas, siendo los miembros (o elementos) del conjunto las manzanas individuales, etc. Concebir la colección como un nuevo concepto único es un acto intelectual elemental.

Podemos asignar a cada fruta un rótulo con un número usando los enteros positivos 1,2,3, etc., arbitrariamente, pero asignando diferentes enteros a diferentes frutas. Si consideramos el conjunto, cuyos miembros son los enteros usados en este proceso, obtenemos un conjunto de números en lugar de un conjunto de frutas, se ha obtenido entonces un conjunto de miembros abstractos; hay una correspondencia definida (uno a uno) entre los miembros de ambos conjuntos, por lo cual a cada fruta le corresponde un único número e inversa-

(10) Este término *(Mannichfaltigkeit)* fue tempranamente usado por Cantor, quien luego, siempre en el mismo trabajo, lo llamó *Menge* (conjunto; *set* en inglés; *ensemble* en francés). En inglés, en un primer momento el término *aggregate* se usó como sinónimo de *set*.

mente, y así hasta el último entero usado para designar la fruta. Entonces usando el orden natural de los enteros de acuerdo a la magnitud, podemos también introducir una determinada sucesión de las frutas, mientras que originariamente no se definió ninguna sucesión definida en ningún conjunto.

Considerando la sucesión así definida, o cualquier otra sucesión, sin tener en cuenta la naturaleza de los miembros, es decir que sean frutas o enteros, obtenemos un esquema de orden: primero, segundo, tercero, etc., es decir, un conjunto ordenado de unidades; más aún, en ambos casos **el mismo** grupo ordenado. Si no tomamos en cuenta la sucesión, nos queda una simple colección (conjunto) de unidades, que determina un cierto número (cardinal), es decir, el número de los miembros contenidos en la colección. Evidentemente este número es independiente de que los miembros originales sean frutas o enteros.

Nada esencial cambia si en la frutería sólo hay una fruta, digamos una manzana. Podemos asignar el entero 1 a esta manzana. El conjunto que contiene a la manzana, al ser un concepto abstracto, puede ser distinguido de la manzana misma, y lo mismo se aplica al conjunto cuyo único miembro es el entero 1.

b) Sea cual fuere el tamaño de nuestro negocio, el número de miembros contenidos en los conjuntos recién considerados, es finito; la situación cambia fundamentalmente si el conjunto contiene como miembros a **todos** los enteros 1, 2, 3, 4... Es decir, cada miembro del conjunto es un entero positivo y cada entero está contenido en el conjunto. **Este conjunto de todos los enteros positivos** (o números naturales) tiene infinitos miembros y se lo llama "conjunto infinito", en contraste con los "conjuntos finitos" del ejemplo a), cualquiera sea el significado lógico de las nociones "finito" e "infinito": cf. § 2, 5.

Si en el ejemplo a) tomamos números enteros como miembros del conjunto, podemos designar el conjunto señalando todos sus miembros. Mientras que esta manera de designar completamente un conjunto por sus miembros llega a ser impracticable, si el conjunto finito contiene muchos miembros, para un conjunto infinito en principio es imposible; algunos usan la palabra "etc." o puntos, como abajo. Así el conjunto de todos los números enteros positivos se puede denotar

$$\{1,2,3,4,\ldots\} \text{ ó } \{\ldots,4,3,2,1,\}, \text{ etc.}$$

No es accidental que como ejemplo de un conjunto infinito tengamos que usar miembros de **índole matemática** (enteros). En efecto, el reciente desarrollo de la ciencia, en particular física y astronomía, sugiere que todos los conjuntos cuyos miembros son extraídos de la naturaleza serán finitos, propio de la estructura atómica de la materia y energía y de la limitación de la materia en la naturaleza (y posiblemente de la naturaleza del mismo espacio físico). Por otra parte, pareciera como si juntar **todos** los enteros en un conjunto fuera psicológicamente más simple que juntar un billón de números, aunque la última colección es finita; pero en este caso consideramos un gran número de individuos diferentes mientras que el conjunto de todos los enteros sólo comprende un número inicial (1) y la ley general de procedimiento para cualquier entero **n** y su sucesor n + 1.

En casi todas las ramas de las matemáticas, especialmente en análisis (por ejemplo, en la teoría de las series y en el "cálculo infinitesimal"), el término "infinito" aparece frecuentemente. Sin embargo, casi siempre este infinito es una **façon de parler** (ver más arriba); el enunciado

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

nada afirma acerca de la infinitud (como el signo ∞ parece sugerir) sino que es una abreviatura de la sentencia $\frac{1}{n}$ puede tender a cero tanto como se desee aumentando suficientemente el entero positivo **n.** En contraste con esto, el conjunto de todos los enteros es infinito (infinitamente comprehensivo) en sentido "actual" (propio) y no solamente "potencial". (Podría ser, sin embargo, un error fundamental considerar que este conjunto es infinito porque los enteros 1, 2, 3, 4, ..., **n**, ... aumentan infinitamente, o mejor dicho, indefinidamente).

Para ilustrar el abismo entre la finitud y el infinito actual tal como aparece en un conjunto infinito, podemos recurrir a la siguiente idea utópica, pero tal vez intuitiva que por lo menos nos hace volver a E. E. Kummer. 1.000 tipos diferentes para consonantes, vocales, dígitos, marcas de puntuación, etc., así como para el espacio vacío, pueden servir con material bruto para imprimir libros. Teniendo en cuenta que los libros "cortos" pueden extenderse agregando espacios, y los libros "largos" pueden descomponerse en muchos volúmenes, podemos definir como un **libro** cualquier distribución (con repeticiones) de los tipos, es decir, entre un millón de manchas dispuestas sobre el papel. Si bien la mayoría de tales libros son acumulaciones sin sentido de tipos y espacios; también todos los libros reales, poemas, propagandas, menus, etc., publicados en el pasado o para ser publicado en algún futuro —entre ellos la Biblia, los Elementos de Euclides, los dramas de Shakespeare, tablas de logaritmos, informes sobre el primer vuelo tripulado a la luna— constituyen cada uno un "libro".

La "Biblioteca Universal" de todos esos libros, impresos en el más fino papel utilizable, podrían llenar el universo más allá de las lejanas estrellas visibles; sin embargo la Biblioteca constituye un conjunto finito de libros, que contiene exactamente $1.000^{1{,}000{,}000}$ volúmenes.

Desde ya que, teniendo en cuenta la utópica suposición de que hay infinidad de cuerpos celestes (es decir, correspondientes a todos los enteros positivos) en donde seres inteligentes vivieron y escribieron libros de matemáticas, podríamos concluir que en infinitas y diferentes estrellas deberían aparecer idénticos libros de matemáticas del mismo autor y aun con las mismas erratas; porque todos los libros —por lo menos un libro de matemáticas por cada estrella— están contenidos en la Biblioteca Universal, que contiene sólo un número finito de **libros diferentes.**

c) Dibujar un segmento arbitrario (ver fig. 1) y marcar su mitad en P_1.

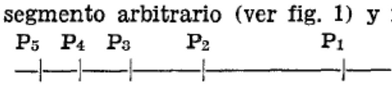


Fig. 1

Dividir en dos partes una de las mitades (es decir, sobre la mitad de la izquierda, como en la fig. 1), llamemos P_2, y así proceder indefinidamente, deneominando las mitades hacia la izquierda con P_3, P_4, ...; en el enésimo paso, donde **n** denota cualquier entero positivo, se obtendrá entonces un punto P_n y sobre su izquierda un segmento cuya longitud es $\frac{1}{2^n}$ del segmento original.

El conjunto completo (no ordenado) de todos los puntos P_n, difiere del conjunto de todos los enteros positivos (ejemplo b)) sólo por la naturaleza de sus miembros, como vemos al relacionar el punto P_n con el entero **n.** Aun concebidos como conjuntos ordenados, ambos conjuntos dan origen al mismo esquema de orden si se toma la sucesión de enteros desde los números menores a los mayores y la sucesión de puntos en la fig. 1 de derecha a izquierda.

También podemos interpretar la fig. 1 como un posible esquema de la **carrera entre Aquiles y la tortuga**, que ha demostrado ser muy estimulante en matemáticas, física y filosofía desde su invención por la escuela Eleática de Zenón en el siglo V a. C a nuestros días [1].

Con este propósito podemos concebir al punto final derecho del segmento original como el punto de partida de Aquiles, P^1 como el punto de partida de la tortuga, y el segmento entre P_n a $P_n + 1$ como el enésimo paso en la carrera de la tortuga. Además, el conjunto cuyos miembros son todos estos **segmentos** es un conjunto infinito de la misma clase que el conjunto de todos los enteros positivos o de todos los puntos P_n.

d) El conjunto considerado en b) está sin duda incluído en el **conjunto** de todos los números reales. Posponiendo un desarrollo más amplio del concepto de número real a §§ 4 y 9, aquí sólo señalaremos que un número real es o bien **racional,** por ejemplo de la forma $\frac{m}{n}$ (donde **n** es un entero positivo y **m** cualquier entero), o bien un número real **irracional.** Los enteros son los racionales de la forma $m = \frac{m}{1}$ donde **m** es positivo, negativo, ó O.

(1) Hay una gran cantidad de bibliografía acerca de esta carrera. Algo sobre lo mucho tratado es: Russell 03 (págs. 346 ff.) y Hasse-Scholz 28, desde el punto de vista matemático; Morris 29, Weiss 38 (págs. 232 ff.), Shiraisi 54, Grünbaum 55, desde el punto de vista filosófico.

Un conjunto de naturaleza geométrica que está muy relacionado con el conjunto de todos los números reales, se obtiene de la siguiente manera. Sobre una línea recta dada (fig. 2) elegimos en primer lugar un **punto** arbitrario Po de la línea que denotamos por O; en segundo lugar, una de las dos posibles direcciones sobre la línea se llamará **dirección positiva** (en la fig. 2 la dirección hacia la derecha); en tercer lugar, una **unidad de medida** arbitraria. Proce-

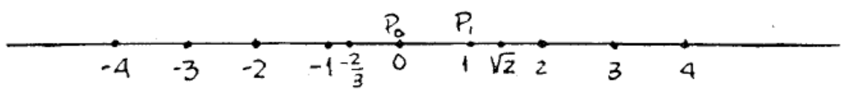


Fig. 2

diendo desde O en dirección positiva agregando la unidad sucesivamente, obtenemos los puntos 2, 3, ... que corresponden a los enteros positivos; al mismo tiempo procediendo desde O en la dirección negativa, es decir opuesta a la positiva, alcanzamos los puntos denotados por —1, —2, —3, ... Además, dividimos el segmento unidad (0,1) en dos, tres, cuatro, ... partes iguales; de este modo obtenemos puntos denotados por $\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$ $(O < \mathbf{k} < \mathbf{n})$; transfiriendo la misma división a todos los otros segmentos $(\mathbf{m} - 1, \mathbf{m})$ llegamos a todos los **puntos racionales** $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$. Sin embargo para una concepción "natural" de la noción de **punto de una línea** (ver § 9, **1**)) los puntos racionales no son suficientes; agregando otros, los llamados **puntos irracionales** (entre ellos, por ejemplo, el punto $\sqrt{2}$), se obtiene el **conjunto de todos los puntos** de la línea.

El concepto de "punto de una línea" se amplía así hasta relacionar cada punto con cada número real e inversamente. Esto nos permite usar alternativamente el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos de una línea (**línea de números**). Nuestra correspondencia incluye una **orden** correspondiente si los números reales son ordenados de acuerdo a magnitudes y los puntos en la fig. 2 en dirección de izquierda a derecha. Cf. § 9, **1.**

e) Un último ejemplo sirve al doble propósito de ilustrar algunas complicaciones del concepto de conjunto y de preparar una importante aplicación de la teoría de conjuntos al análisis matemático.

Toda raíz **x** de la ecuación algebraica

$$\mathbf{a}_0\mathbf{x}^n + \mathbf{a}_1\mathbf{x}^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_n - \mathbf{1}^x + \mathbf{a}_n = O \quad (a_0 \neq O)$$

con un integral positivo de grado **n** y coeficientes integrales a_k ($\mathbf{k} = 0{,}1, \ldots, \mathbf{n}$) se llama **número algebraico.** Aquí, y posteriormente, nos restringimos por mera simplicidad a los números **reales** algebraicos, si bien hay también otros, por ejemplo las raíces de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 1 = 0$: los números algebraicos imaginarios y complejos. Sin duda todo número racional $\frac{m}{l}$ es algebraico, a saber la (única) raíz de $lx - m = 0$; la ecuación $x^2 - 2 = 0$, por ejemplo, muestra que hay también números irracionales algebraico, en nuestro caso $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ (ver § 9). Finalmente, cada número (real) que no es algebraico, es llamado **trascendental.** (Aquí nuevamente no es esencial la restricción a los números reales)

Estas definiciones nada revelan acerca de la **existencia** de números trascendentales, una pregunta que ha quedado abierta desde la mistad del siglo 19 y que podremos contestar afirmativamente en el § 4. Aun independientemente de la respuesta debemos considerar **el conjunto de todos los números** (reales) **trascendentales;** si nada existiera en absoluto entonces el conjunto en cuestión sería vacío, caso que trataremos en el § 2. Una dificultad real, sin embargo, se da en el hecho de que no hay un **método general** de decidir, con respecto a cada número real **r** "dado", (dado, por ejemplo, como un decimal, o como una fracción continua regular con una ley que produce los sucesivos dígitos o denominadores), si **r** es algebraico o trascendental. Si bien la naturaleza algebraica de un número **r** puede ser confirmada produciendo una ecuación algebraica satisfecha por **r**, la prueba de su trascendencia es en principio una "prueba imposible", mostrando que **r** no es raíz de **ninguna** ecuación; esto ocurre por la dificultad del problema. De hecho, solamente en las últimas décadas del siglo diecinueve se probó que las números ya conocidos **e** y π eran trascendentales.

No obstante, la noción del conjunto de todos los números reales trascendentales sería admisible y lógicamente clara. Cualquier número real dado es algebraico o trascendental, no importa saber cuál, y en caso de saberse tiene que integrar nuestro conjunto.

A la luz de estos ejemplos podemos valorar **la definición del concepto de conjunto de Cantor** (2): Un conjunto es una colección en un todo de objetos determinados y distintos de nuestra intuición o de nuestro entendimiento. Los objetos se llaman elementos (miembros) del conjunto.

Con dificultad se puede relacionar esta referencia al primitivo proceso de coleccionar objetos individuales con una nueva unidad y considerarla como una definición apropiada; es más bien una paráfrasis de la noción de "conjunto". Menos aún, puede considerarse la referencia a nuestra intuición y entendimiento como parte de una definición; precisamente significa que **cualquier cosa** puede ser miembro de un conjunto. (Sería preferible restringir los miembros

(2) Dada por Cantor en 1895, pág. 481, al comienzo de la exposición final del trabajo de toda su vida sobre teoría de conjuntos. Para los intentos iniciales de definición del concepto, ver Cantor 1879-84III, págs. 114 ff. y V, pág. 587.

a objetos matemáticos o incluso sólo a conjuntos (3)).Los ingredientes significativos en la definición de Cantor son las restricciones contenidas en los atributos **definido** y **distinto.**

El significado de esto último es simple. Se establece que dos objetos cualesquiera que aparezcan como miembros del mismo conjunto son **diferentes;** en otras palabras, que un objeto puede pertenecer, o no pertenecer, a un conjunto pero no puede "más que pertenecer" por ejemplo pertencer repetidamente, como puede darse en el caso de una **secuencia** tal como la secuencia $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, 1, \ldots\right)$ que contiene al miembro 1 infinitas veces. (El concepto de secuencia es esencial en análisis pero no tanto en teoría de conjuntos; ver p. 55).

El significado de "definido" es más complicado. Expresa que, dado un conjunto s, puede ser establecido intrinsecamente para cualquier objeto posible x sea o no x un miembro de s. Aquí el agregado "intrínsecamente" pone de relieve que la intención no es la decibilidad real en base a los recursos presentes (o futuros) de la experiencia o de la ciencia; es suficiente una definición que intrínsecamente establece el objeto, tal como la definición de "trascendental" en el caso del conjunto de todos los números trascendentales. Para estar seguros usamos fundamentalmente el **principio del tercero excluído** aristotélico que garantiza que para un objeto dado no existe un tercer caso adicional para aquellos que pertenecen o no al conjunto en cuestión (4).

Sin embargo la pregunta principal conectada con la definición precedente, si la referencia al acto lógico de coleccionar individuos con el propósito de formar una unidad "superior" que comprenda los individuos, es admisible sin dar lugar a rodeos. Los filósofos y matemáticos del siglo 19 se inclinaron a contestarla afirmativamente aunque sin pensar que valía la pena de entrar a una seria investigación; podrían haber agregado que este acto lógico era familiar a los primitivos, al pensamiento pre-científico y no merecía análisis posterior. (5) En consecuencia fue una de las conmociones más grandes en la historia de la lógica y las matemáticas —algo comparable con la conmoción causada en la escuela Pitagórica del siglo V a. C. por el descubrimiento de la magnitud inconmensurable ((irracional), aunque aparentemente mucho más resistente a posibles soluciones— cuando hacia fines del siglo 19 se descubren **contradicciones y antinomias** de varias clases que directa o indirectamente se **originaron de la noción de conjunto,** es decir de coleccionar individuos para formar una unidad.

---

(3) Ver § 2, 1 y *Foundations,* págs. 28-31. A lo largo del presente libro, *Foundations* siempre se refiere al libro *Foundations of Set Theory* (Fraenkel-Bar Hillel 58 en la Bibliografía).

(4) El Capítulo IV de *Foundations* se refiere al *neo-intuicionismo,* una doctrina matemática que rechaza el principio del tercero excluido.

(5) Para un interesante comentario de Dedekind sobre sus concepciones y de las de Cantor de conjunto, cf. Dedekind 30-32 III, págs. 447-449. (Las notas datan de 1887.)

En el presente libro ocasionalmente trataremos alguna de estas contradicciones; una discusión más amplia y una bibliografía más completa se encuentran en el Capítulo Uno de **Foundations.**

Durante muchas décadas el intento de "mejorar" la definición de Cantor resultó completamente infructuoso, y se ha vuelto inevitable **renunciar a una definición del concepto general de conjunto.** Las soluciones posibles para esta situación son principalmente tres, a saber: concebir y definir el concepto de conjunto en un sentido tan limitado que la mayor parte de las matemáticas "clásicas" (análisis, geometría, teoría de conjuntos) se vuelven sin sentido o inadmisibles; o adoptar una reforma de fondo de la lógica como base de las matemáticas, camino que implica dificultades que aún no han sido vencidas; o recurrir al **método axiomático,** que en otras ramas de las matemáticas sirve como una alternativa a una aproximación definitoria pero que en este caso podría constituir la única salida.

Estas tres actitudes son expuestas con detalle en los Capítulos Cuatro, Tres y Dos de **Foundations,** aunque parezcan ser demasiado complicados para el presente libro elemental. Los textos corrientes de teoría de conjuntos [6] se reducen a partir, explícita o implícitamente, de la definición de Cantor, inclusive usándola con cautela, o sea con un alcance que parece evitar a las antinomias conocidas por nosotros.

En el presente libro nos mantendremos entre una exposición axiomática formal y una exposición intuitiva. Cuando sea necesario serán introducidos Principios o **Axiomas** que principalmente corresponden a los axiomas "generales" del sistema **Z** desarrollado en el Capítulo Dos de **Foundations.** Como regla general, nos restringiremos a conjuntos que pueden demostrarse que existen a causa de estos axiomas y ocasionalmente esbozaremos esta conexión explícitamente. Cuando excepcionalmente una colección de objetos se menciona en el más puro sentido intuitivo, usaremos el término lógico "clase" en lugar de "conjunto". De aquí, que si mencionamos la **existencia de un conjunto,** por ejemplo en los Axiomas II-VII, esto significará que tenemos en mente un conjunto en sentido estricto y no meramente una clase. Sin embargo, a menos que la exposición se vuelva demasiado complicada o pedante, en general procederemos más libremente sin hacer referencia a los axiomas mientras que podamos evitar estrictamente los puntos peligrosos que se derivan de utilizar la definición cantoriana de manera poco estricta.

(6) Los trabajos más amplios de Hausdorff 14(49) y 27(57), Sierpinski 28 y 58; Kamke 28(50) y H. Bachmann 55 son buenos textos breves. Cf. además Littlewood 26, Eyraud 47, Beth 59 (ch. 14), y particularmente Bourbaki 51-56. Schoenflies-Baire 09 y Kamke 39 son exposiciones enciclopédicas concisas. Haalmeijer-Schogt 26 está en alemán, Kuratowski-Mostowski 52 en polaco, Cuesta 59 en español.

No entraremos en la discusión del carácter lógico de los objetos llamados "conjuntos" o "clases" (7); la actitud particular que se tome, no tiene efecto en la teoría matemática de conjuntos, pues la aritmética es independiente de todas las teorías lógicas (y psicológicas) relacionadas con la naturaleza del número.

Conceptos fundamentales en matemáticas, tales como el de grupo, anillo, campo, se obtienen por especializaciones del concepto de conjunto. Para ampliar este punto, abarcando conceptos, tales como número, función, mapeo, ver § 12; cf. § **4**, **6**; § 7, 2; § 2, **4**; etc.

Siempre que no se tenga en cuenta la naturaleza de los miembros del conjunto se puede hablar de un **conjunto abstracto.** A lo largo de este libro, exceptuando partes del § 9 y ejemplos incidentales que no pertenecen propiamente a la materia en cuestión, **trataremos sólo con conjuntos abstractos.** Mientras que la teoría abstracta de conjuntos (8) es, por supuesto, el sustrato de toda teoría que sustente supuestos particulares sobre la naturaleza de los miembros, tales teorías tempranamente se apartan de la teoría abstracta de conjuntos a causa de los problemas originados por la naturaleza específica de los miembros. La especialización más importante se refiere a **conjuntos de puntos** o de números (reales, complejos); cf. § 9.

2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES. CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

1. **Relación de pertenencia. Igualdad.** La teoría de conjuntos tal como ha sido desarrollada en esta sección y las siguientes, se basa en una relación primitiva singular, la **relación de pertenencia,** denotada por ε. Es una relación diádica (binaria), o sea, tiene dos argumentos $\varkappa$ e γ; $\varkappa \varepsilon \gamma$ se lee "$\varkappa$ es un miembro (o elemento) de γ" o "$\varkappa$ está contenido en γ" o "$\varkappa$ pertenece a γ". o "$\varkappa$ contiene a γ (como miembro)". La negación de $\varkappa \varepsilon \gamma$ se denota por $\varkappa \notin \gamma$ ("$\varkappa$ no es miembro de γ"). A la luz de la definición de Cantor (p. 46) la relación de pertenencia pareciera estar definida; desde el momento que abandonamos esta definición podría más bien considerarse como una relación (primitiva) no-definida y solamente usada en la medida en que esté justificada por los axiomas.

En general, consideraremos sólo una clase de objetos que son admisibles como argumento de la relación de pertenencia, estos objetos serán llamados **conjuntos** y pueden, salvo una excepción, que se establecerá en el Teorema 2, caracterizarse como aquellos s para los cuales existe al menos un único $\varkappa$ tal que $\varkappa \varepsilon \underline{S}$ es verdadero.

---

(7) Una interesante lectura sobre esto, en el Capítulo 17 de Russell 19 donde los conjuntos son considerados más bien "ficciones lógicas" que propiamente "objetos"; cf. Stebbing 30, pág. 453. Esta actitud está en parte influenciada por el pensamiento de Occam (*"entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem"*). Para un estudio más amplio con referencias a la bibliografía, ver ***Foundations***, Capítulo V, § 8. El término "ficción" usado por Russell no tiene nada que ver con su uso en ***Philosophy of the Als-ob*** de Vaihinger.

(8) "Teoría de conjuntos abstractos" sería lógicamente más correcta.

Nota: A falta del signo adecuado se ha utilizado $\notin$ para simbolizar la no-pertenencia.

Suponemos que al menos existe un objeto, es decir, que nuestra teoría no es vacía. Para estar seguros, trataremos con números, funciones, puntos, etc., como miembros de un conjunto. Sin embargo, los enteros pueden concebirse fácilmente como conjuntos, y por lo tanto, como toda clase de números y tambien funciones, etc., como veremos luego (en particular en § § 7 y 11). Además, tales objetos son, por lo general, usados como meras ilustraciones y no como partes integrales de un desarrollo sistemático.

La relación de **igualdad** (identidad) entre conjuntos (objetos), **a** $=$ **b**, la concebiremos en el sentido que por lo menos desde Leibniz ha sido generalmente adoptado, conocido como **identitas indiscernibilium**; es decir, **a** y **b** son iguales si no pueden distinguirse dentro del sistema. Puesto que la relación de pertenencia es la única relación primitiva, esto significa que **a** $=$ **b vale si y sólo si para todo conjunto x, a** ε **x implica b** ε **x y viceversa.** De acuerdo a esto la relación de igualdad es **reflexiva** (**a** $=$ **a**), **simétrica** (**a** $=$ **b** implica **b** $=$ **a**) y **transitiva** (**a**$=$ **b** y **b** $=$ **c** implica **a** $=$ **c**); la sustitución hacia la izquierda (por ejemplo, **a** ε **x** y **a** $=$ **b** implican **b** ε **x**) forma parte de la misma definición, mientras que la sustitución hacia la derecha surgirá más adelante (Axioma I).

Generalmente denotamos la negación de **a** $=$ **b** por **a** $\neq$ **b**, que se lee "**a** es diferente de **b**".

2. **Subconjuntos.** Comenzaremos con dos definiciones simples.

> DEFINICION I. Si todo miembro de S es también miembro de T (es decir, si para todo **x, x** ε S implica **x** ε T) S se llama **subconjunto** de T, o **incluido en** T. Si, además, T tiene por lo menos un miembro que no es miembro de S, entonces S se llama también **subconjunto propio** de T.

La relación de subconjunto (inclusión) se expresa por S $\subseteq$ T; si deseamos enfatizar que S es un conjunto propio, escribimos S $\subset$ T.

Es esencial distinguir entre las relaciones de pertenencia e inclusión (relación parte-todo) que en tiempos pasados fue frecuentemente confundida debido al uso equívoco en el lenguaje cotidiano. (T "contiene a" S, o "comprende a" S (9), pareciera significar ambos S ε T y S $\subset$ T, y el uso de la cópula "es", por ejemplo en "el hombre es un animal", ha contribuido más aún a la confusión). Frege y Peano lograron hacer una distinción, reconocida y aceptada, entre ambas relaciones.

De nuestra definición, inmediatamente concluimos

Teorema 1. **Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo, y un subconjunto de un subconjunto T es también un subconjunto de T.** En símbolo: S $\subseteq$ S; R $\subseteq$ S y S $\subseteq$ T implican (10) R $\subseteq$ T.

(9) Aún más ambiguo es el término "constar de". Un tren, que consta de vagones, ciertamente no contiene los vagones como miembros; que sus vagones puedan considerarse como subconjuntos, es una cuestión convencional. Lo referente a conjuntos unitarios, es decir conjuntos que contienen un único miembro, será tratado más adelante.

(10) A lo largo de este libro el término "implica" está usado en el sentido de "si—entonces—".

De aquí que la relación $\subseteq$ es reflexiva y transitiva (pero no-simétrica) mientras que la relación $\subset$ evidentemente es irreflexiva, asimétrica (es decir, si $S \subset T$ es verdadera, $T \subset S$ es falsa), y transitiva.

DEFINICION II. Si los conjuntos S y T no tienen ningún miembro en común, se llaman **conjuntos disyuntos** (11). Un conjunto tal que siempre dos de sus miembros sean disyuntos, se llama **conjunto disyunto**. (De aquí que cualquier conjunto que no tiene más que un miembro puede considerarse disyunto).

Para desarrollar la teoría de conjuntos comenzaremos con tres axiomas (12).

Axioma (o Principio) **de extensionalidad (I). Dos conjuntos que contienen los mismos miembros son iguales.**

Usando símbolos expresamos esto de la siguiente manera: si para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in S$ implica $\mathbf{x} \in T$ y viceversa, luego $S = T$; o teniendo en cuenta la Definición I, $S \subseteq T$ y $T \subseteq S$ juntos implican $S = T$.

De esta manera se postula una característica adicional de igualdad, no contenida en la definición I. En resumen, el axioma establece que un conjunto S está determinado por la totalidad de sus miembros **a, b, c**, ...; de aquí que denotaremos a S también por

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots] \qquad (13)$$

donde los corchetes [ ] indican la relación de pertenencia. Dentro de estos corchetes se escriben cualesquiera de los miembros de S; si esto no resulta práctico o posible, se utilizan puntos para indicar a todos los miembros inequívocamente.

El Axioma I tiene por efecto —que puede considerarse deseable o lamentable, de acuerdo a lo que uno se proponga— que **no puede existir más que un conjunto vacío**, es decir que no tenga ningún miembro. Concluyendo, cada uno de los dos conjuntos vacíos en un subconjunto del otro por la Definición I.

En los casos en que se requieren diversos y diferentes "individuos", es decir, objetos que no tienen miembros, se puede debilitar al Axioma I de tal manera que pueda aplicarse sólo a "conjuntos propios", es decir, conjuntos con miembros. Para nuestra exposición, que en sus partes sistemáticas no usa

---

(11) Para la generalización de "conjuntos casi disyuntos" ver Sierpinski 28a; también el ejercicio 8) en la pág. 125.

(12) Los axiomas establecidos en el presente libro, llamados *principios* en la primera edición, son aproximadamente los Axiomas **I-VII** introducidos en el Capítulo **II**, §§ 2-5, de *Foundations*. Sin embargo ellos aparecen aquí en una sucesión diferente, motivada por razones didácticas (y no, como en *Foundations*, por razones sistemáticas); sólo el axioma de extensionalidad es el primero en ambos casos.

(13) Es verdad que aquí los miembros aparecen con una cierta sucesión mientras que el concepto de conjunto no incluye orden. Pero esto sólo se debe a la incapacidad del hombre para nombrar o escribir cosas *simultáneamente*. De aquí que la no ordenación de los miembros se intente con la siguiente notación, [*c*, *a*, *b*, ...] etc., como se prefiera.

individuos excepto en el Teorema 2 dado más abajo, no se requiere tal modificación del axioma (14).

Además del problema específico de los individuos, el Axioma I tiene una significación general. Garantiza que, no importa cómo sea definido un conjunto, él está determinado por la totalidad de sus miembros. Ciertamente "el conjunto de todos los números primos pares" y "el conjunto unitario que contiene a 2" son lógicamente designaciones diferentes; puesto que ambos tienen a 2 como su único miembro, son iguales (15). Este rasgo distintivo de la igualdad es más sorprendente cuando está involucrada una mínima trivalidad o aun un problema matemático insoluble, por ejemplo la cuestión acerca de si el conjunto de todos los enteros positivos **n**, para el cual la ecuación diofántica con las incógnitas **x, y, z**

$$x^n + y^n = z^n$$

tiene soluciones integrales **x, y, z**, es igual al conjunto [1, 2] o no, depende de la cuestión (aún no resuelta) de si el último Teorema de Fermat es verdadero (16).

Volviendo al tema de los subconjuntos, podría acentuarse que la Definición I, si bien nos habilita a determinar que uno de los dos conjuntos dados es un subconjunto del otro, no es un instrumento para **producir subconjuntos**, por ejemplo para obtener del conjunto de todos los enteros el subconjunto de todos los enteros impares. En verdad, la actitud ingenua que data de Cantor y que aún prevalece en los libros de texto de teoría de conjuntos, supone que si se toma alguno de los miembros de un conjunto se obtiene un subconjunto. Sin embargo, hace ya más de cincuenta años esta actitud condujo a antinomias de tipo semántico (**Foundations,** Capítulo I). En consecuencia, debe adoptarse un método estricto tal como se expresa en el

Axioma (o Principio) **de los subconjuntos** (II). **Para cualquier conjunto S y cualquier predicado P (en otras palabras, cualquier condición de x, P (x) que tiene significado („definido") para todos los miembros x de S existe el conjunto $\overline{S}$ que contiene precisamente a aquellos miembros x de S que satisfacen al predicado P (la condición P (x)).**

El conjunto $\overline{S}$ —como los conjuntos introducidos en los siguientes axiomas— es definido unívocamente desde el punto de vista de la extensionalidad (Axioma I) y es un subconjunto de S. **Será denotado por $\overline{S} = S_p$.**

---

(14) Para una discusión más amplia sobre las posibles actitudes respecto de la relación de igualdad y de la admisión de individuos, cf. *Foundations,* págs. 28-33.

(15) Cf. Specker 54, p. 235 f.

(16) La formulación "$a = b$ si a y b denotan el mismo objeto" no es de utilidad en este contexto. Cf. la discusión entre Alicia y la paloma acerca de las niñas que se vuelven serpientes, a raíz de la definición que da la paloma de las serpientes, como animales que tienen cuellos largos y comen huevos.

El concepto de "predicado definido" requiere algunas precisiones. Obviamente predicados tales como "impar", "mayor que —", "primo", "trascendental" son significativos si S es un conjunto de números [17], pero no "verde", "eterno", "cuadrilátero". Desde 1921 han surgido vivaces discusiones alrededor de este concepto que no necesitamos tratar aquí [18]. $\mathbf{x} \varepsilon \mathbf{t}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ tanto como sus negaciones son, sin duda, condiciones significativas sobre **x**, cualquiera sean los conjuntos fijos **t** y **u.**

Si tomamos para P (x) la condición "x es un miembro de S", o cualquier otra condición satisfecha por **cada** miembro de S, obtenemos S como el subconjunto $\overline{S}$ de S. Pero ¿qué sucede si **ningún** miembro de S satisface la condición? (Este caso se verifica simplemente tomando el predicado "no es un miembro de S"; si S es el conjunto de todos los enteros podemos, por ejemplo, además, usar el predicado "es irracional"). En este caso el conjunto $\overline{S}$, que ciertamente existe teniendo en cuenta el Axioma II, no contiene ningún miembro. Por otra parte, este conjunto es, de acuerdo a la extensionalidad, el **único** conjunto sin miembros; por la Definición I es un subconjunto de **todo** conjunto, por definición es completamente "vacío". Por lo tanto tenemos

TEOREMA 2. **Existe uno y solamente un conjunto que no tiene miembros. Es un subconjunto de todo conjunto.**

Llamamos a este conjunto, **conjunto nulo** o **conjunto vacío** y lo denotamos por 0 [19].

El Teorema 2 se deriva del Axioma II sin excepción; las excepciones, tan familiares en gramática son aborrecidas por el matemático y pueden evitarse. por lo general, definiéndolas de una manera apropiada si bien algunas veces insólita o aun paradójica. Algunos filósofos han objetado que se incluya bajo el concepto de conjunto a un conjunto que no contiene miembros (y más aún llamar a un conjunto subconjunto de sí mismo, lo que se corresponde con llamar a un entero divisor de sí mismo [20]. Tales objeciones derivan de la incomprensión de la **naturaleza de una definición,** que no es un enunciado (verdadero o falso) sino una abreviatura convencional (útil o no). Sólo la ventaja que origina la definición puede justificarla, y en el caso del conjunto nulo la ventaja es obvia, como ya lo vimos (con respecto al Axioma II) y seguiremos viendo con frecuencia (por ejemplo, en el parágrafo siguiente y

---

(17) Naturalmente "significativo" no implica que para todo x puede realmente *decidirse* si x satisface al predicado; cf. la nota en la p. 46 donde se trata el conjunto de los números trascendentales.

(18) Un examen histórico y lógico con referencias a la bibliografía, se da en *Foundations*, p. 38-42. El concepto "condición sobre x" está, por ejemplo, definido en Rosser 53, p. 200. En la formulación anterior se supone que el predicado es monádico, es decir, que tiene un único argumento; sin embargo, el axioma además puede extenderse de tal manera que permita agregar argumentos adicionales al entero P.

(19) La clase nula por primera vez se usó en lógica simbólica; cf. la reseña histórica Cipolla 37. En teoría de conjuntos el conjunto nulo fue introducido solamente al comienzo del presente siglo por Russell, Zermelo y otros. Además de O, se usan otros símbolos (por ejemplo, $\varnothing$ o Λ).

(20) Algunas de estas objeciones se originan de confundir relación de pertenencia y relación de inclusión, por ejemplo, Carmichael 43.

en las Definiciones III y IV). Preguntarse si es verdad que un conjunto vacío constituye un conjunto, es tan absurdo como discutir si el hombre es o no un animal.

De acuerdo con la Definición I, el Axioma II, y el Teorema 2, el conjunto [1, 2, 3,] tiene $8 = 2^3$ subconjuntos, es decir

[1, 2, 3] , [1, 2] , [2, 3] , [3, 1] , [1] , [2] , [3] , 0.

Veremos en los § § **5** y **7** que este enunciado acerca del número de subconjuntos no sólo es un caso especial de un conocido teorema de análisis combinatorio, sino también de un teorema de largo alcance de la teoría de conjuntos que es válido igualmente para conjuntos finitos como infinitos.

Nuestro ejemplo sugiere dos acepciones generales. En primer lugar, evidentemente, el conjunto [1] difiere del número 1, y "en general" debe distinguirse entre un objeto **a** y su conjunto unitario [**a**]. La cuestión sobre si existen objetos (conjuntos "extraordinarios" **a** tal que [**a** = **a**] queda abierta. En el presente libro no aparecen tales conjuntos; la pregunta en principio está planteada en **Foundations,** Capítulo II, § 5.

Más urgente para nuestro sistema es la pregunta si cada uno de los ocho conjuntos nombrados anteriormente **existen** (independientemente de la definición de conjunto de Cantor), es decir, si ellos constituyen conjuntos y no "clases". Con respecto a 0 la respuesta es afirmativa. Aceptando la existencia del conjunto del cual partimos [1, 2, 3], los otros seis conjuntos se obtienen fácilmente por medio del axioma de subconjuntos gracias a predicados de la forma "igual a——o——" para los conjuntos con dos miembros, y de la forma "igual a——" para los conjuntos unitarios. Sin embargo, dados los objetos 1, 2, 3, de los Axiomas I y II no se obtiene el conjunto [1, 2, 3] ni conjuntos similares si son dados dos o más objetos. Un instrumento parcial, que (conjuntamente con el Axioma IV) demostraremos suficientemente con respecto a muchos objetos finitos dados, es el

Axioma (o Principio) **de Paridad** (III). **Para dos objetos cualesquiera a y b existe un conjunto que contiene a a y b.**

Se llama el **par a** y **b,** y se denota, tal como lo señalamos en la página 51, por [**a, b**] o por [**b, a**]

El Axioma III se formula sólo para el caso **a** $\neq$ **b.** Si **a** = **b,** es decir si la existencia del conjunto unitario [**a**] corresponde a un objeto **a,,** podemos **demostrar** el enunciado. De acuerdo al Teorema 2 y al Axioma III (21) existe el par [**a, 0**], del cual surge el conjunto [**a**] por medio del predicado "igual a **a**" (o "es distinto de 0"). De aquí

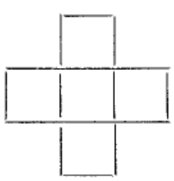
---

(21) Esta demostración fracasa si $a = 0$. Pero en este caso el axioma del conjunto potencial (§ 5, 3), que produce el conjunto que contiene todos los subconjuntos de un conjunto dado, produce el conjunto [O], ya que el único subconjunto del conjunto vacío es él mismo.

TEOREMA 3. Para cualquier objeto dado a existe el conjunto unitario [a] cuyo único miembro es a.

En el ejemplo de la pág. 54 se usó sólo informalmente un conjunto de tres miembros, pero aun si se dieran tres objetos diferentes **a, b, c** no podríamos afirmar la existencia del conjunto [**a, b, c**] con los recursos (axiomas) que disponemos. (Será resuelto en **3**). Por otra parte, **suponiendo** que se dé un conjunto suficientemente amplio, cualquier subconjunto finito que contiene **a, b, c**, ... existe por el Axioma II, por medio de los predicados de la forma "igual a **a** o a **b** o a **c** ...".

3. Unión, Intersección, Diferencia. Si S y T son conjuntos, podemos preguntar por los conjuntos que contienen los miembros que pertenecen a **todos** ellos, o por aquellos que pertenecen a **cada uno** de ellos. La primera operación corresponde a la **disyunción** lógica ("o" (22)), la segunda a la **conjunción** lógica ("y": miembros que pertenecen a ambos, S y T). Si en la figura 3 el conjunto de todos los puntos que pertenecen al rectángulo principal se denotan por S, y el conjunto de todos los que pertenecen al rectángulo vertical por T, entonces la primera operación produce el conjunto de todos los puntos contenidos en la figura formada en cruz, el segundo sólo el conjunto de los puntos del cuadrado interior.



Ahora generalizaremos estas operaciones, en primer lugar de dos conjuntos a cualquier número finito de conjuntos, en segundo lugar, a cualquier secuencia (infinita) de conjuntos. (Como es usual en matemáticas, una secuencia es una colección ordenada que contiene para cada entero positivo **n**, un unésimo miembro, e inversamente todo miembro de una colección es el enésimo de un cierto **n**. Esta definición de secuencia permite la aparición repetida del mismo miembro, en contraposición con los conjuntos como señalamos en las páginas 47 y 51). Una generalización de cualquier **conjunto** infinito de conjuntos la daremos en el § 6, 2.

DEFINICION III. Consideremos una cantidad finita de conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ o una secuencia (23) de conjuntos $(S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots)$.

---

(22) En el sentido de la "alternativa", es decir, "por lo menos uno de ambos", y no de la disyunción exclusiva que significa "a lo sumo uno de ambos". Esta confusión ha surgido de los defectos de muchos idiomas que usan la misma palabra (*o, or, ou, oder*, etc.) para ambas clases de disyunciones; en latín, sin embargo, la disyunción alternativa se escribe *vel* y la exclusiva *aut*. Para el uso lógico la disyunción alternativa es la más adecuada.

Comparar el uso de "o" en los enunciados "en esta o en la próxima calle encontrará un taxi" y "el recién nacido es hombre o mujer".

(23) Una secuencia es comúnmente denotada por paréntesis (), en contraposición con un conjunto que se denota por corchetes [ ]. Aunque la noción de secuencia fundamentalmente difiere de la de conjunto, usaremos en el § 6 (Definiciones III y VI) un método para incorporar las secuencias a la terminología de conjuntos; por lo tanto es innecesario mencionar a las secuencias en el Axioma IV.

El conjunto U de todos los miembros contenidos en **por lo menos** S_k se llama **unión** de los conjuntos dados; el conjunto I de todos los miembros contenidos en **cada** S_k se llama **intersección** de los conjuntos dados.

Escribimos (24)

$$U = S_1 \cup S_2 \cup \ldots, \qquad I = S_1 \cap S_2 \cap \ldots$$

De acuerdo a esta definición, cada término S_k es un subconjunto de la **unión** mientras que la intersección es un subconjunto de cada término S_k.

Ejemplos.

1) $S_1 = [1,2,3,\ldots]$, $S_2 = [2,3,4,\ldots]$, $S_k = [\mathbf{k}, \mathbf{k}+1, \mathbf{k}+2,\ldots]$ para todo entero positivo **k**. La unión de todos los S_k es S_1, la intersección es el conjunto nulo; porque **n** denota **cualquier** miembro de S_1, hay conjuntos en los cuales **n** no está contenido, es decir todo S_k con $\mathbf{k} > \mathbf{n}$.

2) $S_1 = [1, 2, 3, \ldots]$, $S_2 = \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right]$ (todos los múltiplos positivos de $\frac{1}{2}$), $S_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots\right]$, $\ldots$, $S_k = \left[\frac{1}{\mathbf{k}}, \frac{2}{\mathbf{k}}, \frac{3}{\mathbf{k}}, \ldots\right]$. La unión todo los S_k es el conjunto de todos los números positivos racionales, la intersección es S_1.

3) Sea S_1 el conjunto de todos los números reales, excepto los enteros; S_2 el conjunto S_1, excepto los racionales con los denominadores $1, 2, 3, \ldots, k$. La unión es S_1, la intersección es el conjunto de todos los números irracionales.

Los ejemplos 1) y 3) muestran que la intersección de una secuencia de conjuntos infinitos, donde cada uno es un subconjunto propio de su predecesor, puede estar vacío o contener miembros (aún infinitamente).

Se mostrará la utilidad de esta observación en el § 5, **4.** Incidentalmente el ejemplo 1) muestra nuevamente la conveniencia de tener un conjunto vacío (el conjunto nulo) a nuestra disposición; de otra manera, la intersección de conjuntos dados (no vacíos) puede no ser necesariamente un conjunto.

Sin embargo, no podemos asegurar todavía la **existencia** de los conjuntos anteriormente definidos (unión e intersección). Para llevar a cabo esto en un sentido más amplio (como se requiere en el § 6) introducimos el

---

(24) Muchos autores (en particular franceses y polacos) usan los símbolos $+$ y . respectivamente para nuestros signos $\cup$ y $\cap$; así como también Kleene 52. Esta notación tiene su origen en una analogía parcial que luego mencionaremos en esta subsección; para $+$ también en las Definiciones II y III del § 6.

Axioma (o Principio) **del conjunto-suma** (IV). **Para cualquier conjunto A de conjuntos** [25] **existe el conjunto que sólo contiene los miembros de los miembros de A.**

Este conjunto se llama el **conjunto-suma de A** o **unión de los miembros de A,** y se denota $\bigcup$ A o, si **a, a'**, ... son miembros de A, por a $\cup$ **a'** $\cup$ ...

El Axioma IV garantiza no sólo la existencia de la unión, sino también de la **intersección** de los miembros de A que, además de la notación de la Definición III, **también será denotada por** $\bigcap$ A. En resumen, sea a un miembro arbitrario de A [26], y P (x) la condición "**x** es un miembro de **cada** miembro de A". Entonces obtenemos, de acuerdo con el axioma de subconjuntos, un subconjunto **ap** de **a** que es la intersección de los miembros de A, de acuerdo con la Definición III (aun para cualquier **conjunto** A de conjuntos).

Dada una cantidad finita de conjuntos $s_1, s_2, \ldots, s_n$, estamos en condiciones de formar el conjunto que los contiene. El método se tornará sumamente claro tomando **n** = 4 y **n** = 3.

Por el axioma de paridad de conjuntos

$$[\, s_1, s_2,] = S, \ [s_3, s_4] = S', \ [\, S, S'] \qquad (27)$$

existe, por lo tanto, por el axioma de conjunto-suma también

$$\bigcup [\, S, \ S'] = S \cup S' = [\, s_1, s_2, s_3, s_4,].$$

Para obtener el conjunto s_1, s_2, s_3 usamos en lugar de S' el conjunto $[\, s_3]$ que existe por el Teorema 3.

Si bien las leyes formales de validez para las operaciones de la Definición III están formuladas sólo en el § 6 con toda generalidad, es preferible anticipar en esta ocasión sus casos más simples.

Las **leyes conmutativas**

$$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1, \qquad S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$$

que establecen que el resultado de las operaciones es independiente del orden de los términos (y que además lo sostienen para cualquier número de términos) no necesitan ser demostradas, ya que no aparece en la Definición III ningún orden de los términos ("por lo menos una S_k", "cada S_k"). Esta situación difiere fundamentalmente de aquélla en aritmética donde, por ejemplo, la suma de dos miembros se define de una manera inductiva que distingue el primer término del segundo (cf. § 10, 2); de aquí que en aritmética la ley conmutativa es un teorema que requiere una demostración.

---

(25) Las palabras "de conjuntos" son esencialmente superfluas; sólo nos sirven para entender más fácilmente. Además, como señalamos en 1, no usaremos objetos que no sean conjuntos.

(26) Es evidente que el conjunto *ap* es independiente del miembro particular *a* elegido. También podemos evitar la arbitrariedad de *a* y en lugar de *a*, partir del conjunto-suma $\bigcup$ A; nuestra condición $P(x)$ entonces produce el mismo subconjunto, o sea la intersección.

(27) Puesto que supusimos que s_k es diferente, tenemos $S \neq S'$.

Las **leyes asociativas**

$$(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = S_1 \cup S_2 \cup S_3,$$

$$(S \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3) = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

requieren demostraciones también en el presente caso —y aun demostraciones adicionales a las de la aritmética, donde $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ es sólo una abreviatura para el valor común de $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, mientras que aquí por ejemplo, $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ está independientemente definido por la Definición III. Será suficiente demostrar dos de los enunciados anteriores, ya que las demostraciones de los otros dos son exactamente las mismas.

Para demostrar $(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ tenemos que mostrar, de acuerdo a la extensionalidad, que los conjuntos de la derecha e izquierda contienen los mismos miembros. Si $\mathbf{x}$ pertenece a $(S_1 \cup S_2) \cup S_3$ pertenece o bien a $S_1 \cup S_2$ o a S_3 (o a ambos): de aquí que $\mathbf{x}$ pertenece a $S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Si sucede esto último entonces $\mathbf{x}$ pertenece por lo menos a uno de los conjuntos S_1, S_2, S_3, y por lo tanto a $S_1 \cup S_2$ o bien a S_3, en consecuencia a $(S_1 \cup S_2) \cup S_3$.

La demostración de $(S_1 \cap S_2 \cap S_3 = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ es bastante similar. Que $\mathbf{x}$ pertenezca al conjunto de la izquierda significa que también $\mathbf{x}$ pertenece a ambos $S_1 \cap S_2$ S_3, de aquí que pertenezca tanto a S_1 como a S_2, de aquí que también a $S_1 \cap S_2 \cap S_3$. Recíprocamente, si $\mathbf{x}$ pertenece al último conjunto, es decir a cada conjunto S_1, S_2, S_3, entonces $\mathbf{x}$ pertenece a $S_1 \cap S_2$ como también a S_3, de aquí que pertenezca a $(S_1 \cap S_2) \cap S_3$. Con esto hemos completado la demostración.

Finalmente, las operaciones de la Definición III están conectadas con las otras por las siguientes dos **leyes distributivas**

$$S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = S_1 \cap S_2 \cup S_1 \cap S_3, \qquad (28)$$

$$S_1 \cup S_2 \cap S_3 = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3).$$

Resumiendo, si $\mathbf{x}$ pertenece a $S_1 \cap (S_2 \cup S_3)$, es decir a S_1 y a $S_2 \cup S_3$, $\mathbf{x}$ pertenece a S_1 y S_2 o a S_1 y S_3, de aquí que pertenezca a $S_1 \cap S_2 \cup S_1 \cap S_3$; la recíproca se confirma muy fácilmente.

Para la segunda ley mostraremos que cualquier $\mathbf{x}$ que pertenece a S_1 o a S_2 y S_3, también pertenece a la expresión de la derecha; en síntesis, en cualquiera de los dos casos $\mathbf{x}$ pertenece a $S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cup S_3$. La demostración en la dirección de derecha a izquierda es análoga.

Todas estas leyes formales, con una excepción, corresponden a las leyes formales de la aritmética —si, por ejemplo, tomamos la suma en lugar de la unión y la multiplicación en lugar de la intersección. Las correspondientes leyes aritméticas se escriben de la siguiente forma

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1,\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3),$$

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1\ (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3),\ \mathbf{a}_1\ (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3.$$

(28) Aquí, como en la notación aritmética $ab + ac$, se omite el paréntesis de $S_1 \cap S_2$ etc.

La excepción es la segunda ley distributiva, cuya contraparte

$$a_1 + a_2 a_3 = (a_1 + a_2)(a_1 + a_3)$$

no es válida en aritmética. (Hemos reemplazado la unión por la multiplicacion, y la intersección por la suma, entonces la primera ley distributiva podría ser la excepción).

Hay una razón intrínseca para la excepción. A diferencia de las operaciones de unión e intersección, que son paralelas a las otras, y aún **duales,** (ver § 6, **9**), la multiplicación aritmética se basa en la suma —en los casos más simples sólo definida como una suma repetida, y no viceversa.

Concluimos con una noción que sólo tiene importancia limitada.

Definición IV. Si S_0 es un subconjunto del conjunto S (29), el conde aquellos miembros de S que **no** pertenecen a S_0 se llama la **diferencia** de S y S_0 y se denota por $S - S_0$.

La diferencia existe por el axioma de subconjuntos gracias al predicado "no es un miembro de S_0". Si $S_0 = S$, tenemos $S - S_0 = O$.

4. **Mapeo y Equivalencia.** En el primer ejemplo del § 1 nos ocupamos de la correspondencia entre un conjunto de frutas y un conjunto de números. Tales correspondencias pueden considerarse como las bases del concepto de número finito y veremos en § 4 que además, por sus significados, puede introducirse el concepto de número infinito.

La noción de **correspondencia unívoca** (con un valor único) o **función** es bien conocida dentro y fuera de las matemáticas. Un termógrafo es un instrumento que registra la temperatura T en todo momento (en un lugar dado, durante una semana dada). La función $T = f(t)$ señalada por el termógrafo, es un valor único para cada momento **t** que corresponde a una temperatura definida unívocamente. Sin embargo, si preguntamos en qué momento ha sido alcanzada una cierta temperatura (es decir dentro de los límites de la temperatura en cuestión) entonces la respuesta está dada por una función —la inversa de la función $T = f(t)$— que en general no es un valor único porque la misma temperatura puede ser alcanzada en diferentes momentos. El concepto de valor único, pero no de una función unívocamente invertible, es muy usado en el análisis matemático; cf. § 7.

Sin embargo, tanto en la vida cotidiana como en la ciencia se usan correspondencias con una propiedad adicional. Los antropólogos nos hablan de tribus primitivas que sólo conocen tres numerales, a saber, uno, dos, muchos. No obstante para comparar una gran cantidad de manzanas, la noción de "subconjunto propio" puede ser suficiente. Pero se da un paso decisivo hacia la creación del **concepto de número,** cuando con el propósito de intercambio un montón

(29) Algunos autores han abandonado esta condición. Sin embargo, para nuestros propósitos no se requiere una definición más general.

de manzanas se compara con una gran cantidad de huevos. Asignar (relacionar) un huevo a cada manzana no es suficiente porque entonces a diferentes manzanas pueden corresponderles el mismo huevo. Es necesario usar la **correspondencia de uno a uno** (biunívoca, es decir, de un valor único y unívocamente invertible), es decir, tal como atribuir un huevo a cada manzana y diferentes huevos a diferentes manzanas; de aquí que además una manzana se atribuya a cada huevo (30). Si dos montones tienen la propiedad de que entre ellos exista tal correspondencia, entonces existen varias correspondencias, salvo en el caso trivial donde el "montón" contiene sólo un objeto.

Correspondencias de este tipo no sólo pertenecen al simple material de los procesos matemáticos sino a la actividad más primitiva y fundamental de la mente humana en general. Ellos producen la noción de **número** como un entero positivo o "número cardinal" que responde a la pregunta "¿cuántos?"; para cantidades de objetos arbitrarios entre los que existe una correspondencia de uno a uno, puede definirse tener "el mismo número cardinal", de aquí que el número cardinal puede introducirse como la característica común de tales cantidades (31).

Un ejemplo bien conocido en el que se logró tal proceso para cantidades que no son finitas, se da en el ejemplo d) del § 1. Otros ejemplos aparecerán en esta sección y en las siguientes.

El mismo concepto de número cardinal finito desarrollado de esta manera —cuya importancia para los comienzos de la civilización pueden, en general, difícilmente sobreestimarse— también nos proporciona una clase de objetos universales e inagotables para ser usados como mediadores generales, de esta manera nos ahorra la comparación directa de cantidades de objetos diferentes. Estos mediadores son los enteros 1, 2, 3,... Ellos tienen la ventaja de no poseer propiedades accidentales, pues están sólo calificados para el proceso de contar y producen conjuntos "normales" que pueden ser comparados con cantidades de objetos cualesquiera.

Sin introducir una limitación (superflua) a las cantidades finitas (conjuntos) definimos:

> Definición V. Si los mimbros de un conjunto T pueden relacionarse con los miembros de un conjunto S en una **Correspondencia de uno a uno** (biunívoca), es decir, que un miembro de T corresponde a uno de S y

(30) En una sociedad poligámica los maridos están relacionados unívocamente con sus mujeres, en una sociedad monogámica sólo biunívocamente; en esta última, por lo tanto, el conjunto de las mujeres casadas es "equivalente" al conjunto de los hombres casados en el sentido de la Definición V.

(31) Para una exposición no técnica de este tema de conjuntos finitos y números, cf. por ejemplo, Russell 19 o Dantzig 30. Un estricto tratamiento que incluye conjuntos infinitos se dará luego en el § 4.

viceversa, hablamos de un **mapeo** (uno a uno) **de** S **sobre** T [32]. En este caso el conjunto T se llama **equivalente** [33] del conjunto S, y se escribe $\mathbf{T} \sim \mathbf{S}$.

Los mapeos usualmente se denotan por las letras griegas tales como φ, ψ, Φ, etcétera.

Para demostrar que los conjuntos dados son equivalentes es suficiente definir un cierto mapeo (entre varios, y aun infinitos mapeos que pueden existir). Sin embargo, para la demostración de que T **no** es equivalente a S no podemos atenernos al fracaso en el intento de construir un mapeo sino que tenemos que mostrar que todos esos intentos están destinados a fracasar. Cf. § 4, 3.

Cuando se trata de conjuntos finitos, un mapeo puede definirse registrando la **imagen,** para cada miembro de uno de los conjuntos, en el otro con el cual será relacionado. Esto es imposible respecto a infinitos miembros, entonces la correspondencia puede ser definida solamente por una ley (función), es decir, por una regla que define, aunque formulada de una manera finita, para cada uno de los infinitos miembros de uno de los conjuntos su imagen en el otro. En general, es preferible una ley a una lista completa, también para los conjuntos finitos que contienen un número considerable de miembros.

La equivalencia tal como ha sido definida antes, no es una propiedad sino una **relación** [34] más estrictamente, una relación diádica [35] (binaria, de dos variables) $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ con dos argumentos, es decir variables libres, **X** e **Y** las cuales pueden reemplazarse por conjuntos. Una relación puede tener ciertas propiedades: ahora demostraremos que la relación de equivalencia tiene las propiedades de **reflexividad, simetría y transitividad.**

---

(32) En el presente libro no se usan otros mapeos, de aquí que el atributo "uno a uno" generalmente se suprime. Algunos autores hablan de "representación" en lugar de "mapeo".

Nosotros distinguiremos entre *correspondencia* (entre los miembros del conjunto) y *mapeo* (entre los conjuntos).

(33) En verdad, el término "equivalente", introducido en este sentido por Cantor, está recargado por sus múltiples significados en lógica y matemáticas. Evitaremos equívocos usando "equipolente" (en lugar de "equivalente") para la equivalencia lógica.

Algunos autores utilizan "similar" para la equivalencia teórica de conjuntos. No obstante recurriremos a "similar" para un propósito diferente (§ 8).

(34) La filosofía griega, y aun la filosofía medieval y moderna hasta fines del siglo 19 no distinguieron entre propiedades y relaciones, debido a la similitud en la estructura gramatical de los enunciados que expresan propiedad o los enunciados de relación. Sólo con el desarrollo de la lógica simbólica (cf. *Foundations*, Capítulos II y III) fue de fundamental importancia reconocer las relaciones. Un recurso fundamental para poner de relieve la distinción entre una propiedad y una relación diádica se da en la siguiente anécdota. Una mujer visita a su amiga que había dado a luz a mellizos y le dice, tus niños son muy hermosos, especialmente el de la izquierda. Luego otra amiga la visita y le dice, tus niños son muy semejantes, especialmente el de la izquierda. Gramaticalmente los enunciados son de la misma forma, pero "hermosos" expresa una propiedad, "semejante" una relación.

(35) Cf. al comienzo del § 2. Hay además relaciones triádicas y otras con más variables. Por ejemplo, es triádica "el punto y está situado entre los puntos x y z" o "el número z es la suma de x e y"; es decir, $z = x + y$. Las propiedades (predicados) pueden considerarse relaciones monádicas (de una variable).

La equivalencia es reflexiva, es decir, para todo conjunto S es válido $S \sim S$. Esto está probado, por ejemplo, por el **mapeo-identidad** ("identical mapping") que relaciona cada miembro de S con sí mismo. (El conjunto nulo se llama también equivalente de sí mismo.)

La equivalencia es simétrica, es decir, de $T \sim S$ se sigue $S \sim T$. Esto es una consecuencia inmediata del hecho de que nuestras correspondencias son biunívocas (uno a uno); si $t \varepsilon T$, corresponde a $s \varepsilon S$, la viceversa $s \varepsilon S$ corresponde a $t \epsilon T$, por lo cual se produce un mapeo de T sobre S.

La simetría de la relación de equivalencia nos permite tratar a S y T homogéneamente, es decir, hablar de la equivalencia y de un mapeo, entre los conjuntos S y T (y de la correspondencia uno a uno entre sus miembros), o establecer que S y T son equivalentes.

Finalmente, la equivalencia es transitiva, es decir, de $S \sim T$ y $T \sim U$ se sigue $S \sim U$. Teniendo en cuenta la simetría podemos además formular la transitividad de la forma: si dos conjuntos S y U son equivalente a un mismo conjunto T, son equivalentes entre sí; porque $U \sim T$ implica $T \sim U$.

Para demostrar la transitividad, sea φ un mapeo arbitrario entre S y T, ψ un mapeo arbitrario entre T y U. De aquí en adelante nos atendremos a estos mapeos y nos referiremos a ellos al hablar de "la imagen". Entonces si $t \epsilon T$ es la imagen de un $s \epsilon S$ arbitrario y $u \epsilon U$ es la imagen de $t \epsilon T$, entonces la correspondencia $\varkappa$ uno a uno entre los miembros de S y de U se produce relacionando $u \epsilon U$ con $s \epsilon S$. De lo supuesto se sigue que la correspondencia definida es unívoca; que también es biunívoca se sigue de $t \epsilon T$ siendo la imagen de $u \varepsilon U$ y $s \varepsilon S$ la imagen de $t \varepsilon T$. De aquí que $\varkappa$ sea un mapeo, es decir $S \sim U$. Esta demostración pretende eliminar la mediación del conjunto T por una transición directa de S a U (de aquí el término **transitivo**). De esta manera hemos demostrado.

TEOREMA 4. **La equivalencia entre conjuntos es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. De aquí que en una colección de conjuntos tal que cada conjunto es equivalente a un conjunto definido, cada conjunto es además equivalente a cualquier otro.**

Los diversos significados con que se usa el término "equivalente" en diferentes ramas de las matemáticas y de la lógica, tienen el rasgo común de que las respectivas relaciones tienen las tres propiedades expresadas en el Teorema 4. (Naturalmente cualquier relación de igualdad, por ejemplo la igualdad de conjuntos, es también una relación equivalente). Estas propiedades **no son independientes**; porque $S \sim T$ implica $T \sim S$, de aquí (por transitividad) $S \sim S$. En efecto, si para todo S existe un T tal que $S \sim T$, la reflexividad es una consecuencia de la simetría y de la transitividad. (36)

(36) Cf., no obstante, el ejercicio 5) al final de esta sección.

Luego (§§ 5 y 8) trataremos con relaciones que tienen otras propiedades, por ejemplo tales como las reflexivas, no-simétricas, o aún simétricas; además la relación de pertenencia ϵ no tiene ninguna de las propiedades antedichas.

Antes de un tratamiento más general en § 6, estableceremos aquí las siguientes propiedades de la equivalencia conectadas con los conceptos ya introducidos en esta sección.

1) Un mapeo dado entre S y T **mapea cada subconjunto propio de S sobre un subconjunto propio de T.**

2) Si S_1 y S_2 son conjuntos disyuntos y si los mapeos φ_1 y φ_2 respectivamente mapean S_1 y S_2 sobre los conjuntos **disyuntos** T_1 y T_2, entonces $S_1 \cup S_2$ **está mapeado sobre $T_1 \cup T_2$ por la "unión" de los mapeos** φ_1 y φ_2, cuya unión es también un mapeo. De aquí que $S_1 \cup S_2 \sim T_1 \cup T_2$.

La demostración se sigue de la misma definición de mapeo.

Finalmente, surgirá una pregunta de principio con respecto a la relación de equivalencia. En la subsección 1 establecimos que nuestro sistema de la teoría de conjuntos está basado en una simple relación primitiva, la relación de pertenencia ε. Sin embargo en la Definición V se introdujo una nueva relación, la de mapeo o equivalencia. ¿Es esto compatible con el enunciador anterior?

La respuesta es que **la relación de equivalencia puede reducirse a la relación de pertenencia** (37). Restringiéndonos al caso donde los conjuntos dados S y T son disyuntos (38), podemos fácilmente demostrar (cf. § 6, 5) la existencia del conjunto P de todos los pares **[s, t]** con $s \varepsilon S$ y $t \varepsilon T$. Posiblemente P tiene subconjuntos $\overline{P}$ de la siguiente propiedad π: cada miembro de $S \cup T$ aparece en **uno y sólo** un miembro de $\overline{P}$. Cualquier subconjunto $\overline{P}$ puede considerarse como un mapeo entre S y T. En síntesis, para una $s \varepsilon S$ dada, hay un único miembro (un par [**s, t**] de $\overline{P}$) que contiene a **s**, y el otro miembro del par, **t**, puede considerarse relacionado con **s** por el mapeo $\overline{P}$: por otra parte, de acuerdo con la propiedad π todo $t \varepsilon T$ está relacionado en este sentido a un único $s \varepsilon S$. Por lo tanto tenemos $S \sim T$. Si tal subconjunto $\overline{P}$ no existe, entonces los conjuntos S y T no son equivalentes. Por lo tanto la equivalencia se define por medio de la relación de pertenencia.

Mediante el Axioma VI y el axioma de subconjuntos puede mostrarse fácilmente (**Foundations**, p. 126) que existe el conjunto de todos los subconjuntos $\overline{P}$ de P con la propiedad π. Si contiene miembros, entonces cada uno es un mapeo entre S y T; si es vacío entonces S y T no son equivalentes.

5. Conjuntos finitos e infinitos. Hasta ahora hemos usados en un sentido ingenuo los términos conjuntos "finitos" e "infinitos" o cantidades "finitas" e "infinitas" de objetos, tal como se presuponen en otras ramas de las matemáticas. La teoría de conjuntos, sin embargo, se conecta con la noción de infinitud (39)

---

(37) Para estar seguros, a tal efecto se requiere un axioma que se introduce con un propósito más general en el § 5, 3, a saber, el Axioma VI (el axioma del conjunto potencial).

(38) Si no son disyuntos debe usarse un artificio más complicado; ver *Foundations*, págs. 126 f.

a tal punto que una estricta discusión no puede postergarse, y el concepto de equivalencia demuestra lo útil de esta discusión. Con toda seguridad a través del presente libro no cesaremos de discutir la noción de infinito, que es además el tema principal del libro **Foundations**.

La manera más obvia es referirse al concepto de entero y definirlo como sigue:

> **DEFINICION VI. Un conjunto I se llama finito y más precisamente inductivo si existe un entero positivo n tal que I contiene sólo n miembros. El conjunto nulo O se llama también finito. Un conjunto que no es inductivo se llama infinito (no-inductivo).**

Las objeciones al uso del concepto de entero pueden ser de dos clases. Una de las objeciones se basa en la convicción de que el principal propósito de la teoría de conjuntos es fundamentar el concepto de entero, de aquí que este concepto no debe aparecer fundando la teoría de conjuntos, ya sea explícita o implícitamente; sin embargo, parece dificultoso ver como cualquier doctrina abstracta puede desarrollarse sin algún uso (posiblemente intuitivo) de la noción de número (cf. § 10, 6). Por otra parte la objeción puede significar que el concepto de entero podría no ser presupuesto sino derivado de conceptos (real o aparentemente) más generales. A pesar de todo esta actitud no se tiene en cuenta en el presente libro por su carácter elemental, la referencia explícita al concepto de número en la Definición VI se puede eliminar fácilmente, por ejemplo de la siguiente manera ideada por Bertrand Russell:

a) Un conjunto de números (cardinales) se llama **hereditario** si al contener un número **n** implica que contiene **n** + 1 (Se ha concebido + 1 usando el concepto de unión; cf. § 6, Definición II.)

b) Un número (cardinal) se llama **inductivo** si pertenece a todo conjunto hereditario que contenga 0.

c) Un **conjunto** se llama inductivo si su cardinal es inductivo.

Posteriormente daremos definiciones más simples, por ejemplo la siguiente definición de Tarski: (40) I es inductivo si todo conjunto no vacío K de subconjuntos de I tiene por lo menos un miembro maximal, es decir un miembro que no es un subconjunto de ningún otro miembro de K.

Mientras que ocasionalmente usaremos enunciados muy conocidos de aritmética finita sin demostrarlos, se dará una demostración explícita del siguiente teorema en razón de su gran importancia en el presente contexto.

TEOREMA 5. **Un conjunto inductivo I no es equivalente a ningún subconjunto propio de I.**

Demostración. El teorema es evidentemente verdadero si I no contiene ningún miembro (I = O) o contiene un único miembro; en el primer caso

(39) H. Weyl, uno de los más famosos matemáticos de las últimas generaciones, comienza su disertación 25 con la consigna: la matemática es la ciencia del infinito. Esto parece sugerir que la matemática, en su totalidad, puede basarse en la teoría de conjuntos, que de hecho es la opinión de muchos matemáticos (si bien no fue la propia opinión de Weyl); cf. § 12.

(40) Tarski 25; cf. también A. Lévy 58 y 58a. Tarski demuestra de una manera "elemental", es decir, sin el axioma de elección (§ 6, 5), que esta definición es equipolente a la de Russell, ver § 10, 6.

porque O no tiene subconjunto propio, en el segundo porque su único subconjunto propio es O, y un conjunto que contiene un miembro no es equivalente al conjunto vacío.

Para demostrar el teorema por lo general usamos el método de números finitos (enteros positivos) característico de la aritmética, es decir **inducción matemática**. Mientras que este método será tratado detalladamente en el § 10.2 donde aparece como un caso particular de un método más general propio de la teoría de conjuntos, nosotros aquí sólo usamos el enunciado elemental de la aritmética de que un teorema sobre números finitos (inductivos) es verdadero si es verdadero para un último número, por lo general O ó 1, y si su verdad para cualquier número **n** implica su verdad para **n** + 1.

Por lo tanto, supongamos que el enunciado del Teorema 5 es verdadero para todos los conjuntos inductivos que contienen **n** miembros; **n** denota cualquier entero positivo dado, y sea S cualquier conjunto de **n** + 1 miembros. Mostraremos la verdad para S del enunciado del Teorema 5 por la prueba indirecta, es decir, presuponiendo lo contrario y luego derivando una contradicción.

Suponemos que S es equivalente a $S_0 \subset S$ y que φ es un determinado mapeo. Posiblemente hay un miembro de S que también pertenece a S_0 y que está relacionado a sí mismo por φ; entonces desprendiendo este miembro tanto de S como S_0 obtenemos un mapeo (es decir, una parte de φ) entre un conjunto de **n** miembros y un subconjunto propio de este conjunto, contrario a nuestra suposición. Si S no contiene ningún miembro del tipo antedicho. entonces sea **a** un miembro arbitrario de S que no está contenido en el subconjunto propio S_0. desprendiendo **a** de S y la imagen de **a** en S_0 (por φ) —es decir, **b**— de S_0 nuevamente obtenemos un mapeo entre un conjunto que contiene **n** miembros (es decir, S — [**a**]) y su subconjunto propio S_0 — [**b**].

La contradicción que sigue a nuestra presuposición en ambos casos muestra que el enunciado del Teorema 5, si es verdadero para los conjuntos que contienen **n** miembros, es también verdadero para aquellos que contienen **n** + 1 miembros. El teorema ha sido demostrado, puesto que es verdadero para todo conjunto unitario.

Mientras que la Definición VI es una de las posibles maneras de caracterizar a los conjuntos infinitos, es decir, como conjuntos no-inductivos, en la filosofía medieval (41) y más precisamente en Galileo (**Discorsi I, Opere Complete XIII**) se señaló otra característica del infinito, que posteriormente fue propuesta como **definición** del infinito por Peirce y Dedekind (independientemente) (42), a saber

> DEFINICION VII. Se llama **infinito** a un conjunto R y más estrictamente **reflexivo** si R tiene un subconjunto propio que es equivalente a R. El conjunto que no es reflexivo se llama **finito (no-reflexivo)**; en otras palabras, un conjunto no-vacío es no-reflexivo si todo mapeo **en** sí mismo es una mapeo **sobre** sí mismo.

(41) Cf. Thomas 58.

En el primer ejemplo de un conjunto infinito considerado en el § 1, b), se muestra que existen conjuntos que son reflexivos, es decir, el conjunto N de todos los enteros positivos. Si N_0 es el conjunto de todos los enteros mayores que 1, tenemos $N_0 \subset N$ y $N_0 \sim N$, como muestra el mapeo que relaciona todo $\mathbf{n} \in N_0$ a $(\mathbf{n} - 1) \in N$, de aquí que relacione todo $\mathbf{n} \in N$ a $(\mathbf{n} + 1) \in N_0$. Este mapeo está ilustrado por el esquema

$$\begin{array}{lccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & \ldots & \mathbf{n} - 1 & \mathbf{n} & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ N_0: & 2 & 3 & 4 & \ldots & \mathbf{n} & \mathbf{n} + 1 & \ldots \end{array}$$

La resistencia de muchos neófitos a aceptar la posibilidad de tales mapeos, se origina en una muy vaga concepción de que cada miembro de un conjunto podría relacionarse **con sí mismo** en el otro. Obviamente ningún mapeo sobre un subconjunto propio puede manejarse de esta manera, por lo tanto, es importante comprender completamente el ejemplo anterior, al que seguirán muchos otros mapeos entre un conjunto y un subconjunto propio en las secciones siguientes.

Además, que algunos filósofos más capacitados hayan adoptado la misma actitud de rechazo puede explicarse por su adhesión al principio clásico **totum parte maius** (el todo es mayor que la parte). Este principio en su significado propio está sin embargo limitado al dominio de los conjuntos finitos (Teorema 5); precisamente, su invalidez en el dominio de lo infinito [43] es su característica. Desafortunadamente, la adhesión dogmática a ese principio entorpeció el desarrollo de la teoría de conjuntos, aún en manos de un pionero tan osado como Bolzano (cf. § 12).

Una consecuencia inmediata de las Definiciones VI y VII es

TEOREMA 6. **Un conjunto que es equivalente a un conjunto finito (infinito) es también finito (infinito).**

Dejando la demostración al lector en todo lo que concierne a la Definición VI, mostramos que un conjunto S que es equivalente a un conjunto reflexivo R, es también reflexivo.

R, siendo reflexivo, tiene su subconjunto propio $R_0 \subset R$ tal que $R \sim R_0$. De acuerdo, son nuestra suposición, hay un mapeo φ entre S y R, y φ mapea R_0 sobre un subconjunto propio S_0 de S (ver 1) en p. 38). Pero las relaciones

$$S \sim R, \ R \sim R_0, \ R_0 \sim S_0$$

(42) Peirce 33, págs. 210-249 (publicada en 1885), además pág. 360 (cf. Keyser 41); Dedekind 1888. Cf. además Bolzano 1851 (§ 20) y Cantor 1878.

(43) La impresión paradójica es más intensa cuando el fenómeno de equivalencia entre conjuntos, que es obvio que tienen diferentes medidas, se transfiere a la vida real. Por supuesto esta pretendida realidad es ficticia; por ejemplo en la historia de *Tristram Shandy* que escribe su autobiografía tan pedantemente que la descripción de cada día le lleva un año. Si fuera mortal no hubiera podido terminarla nunca; pero como era inmortal entonces ninguna parte de su biografía quedaría sin escribir, a cada día de su vida correspondería un año dedicado a la descripción del día.

producen $S \sim S_0$ por la transitividad de la equivalencia; de aquí que S sea equivalente a su subconjunto propio S_0, es decir, S es reflexivo.

Por lo tanto, por la inversión lógica, un conjunto que es equivalente a un conjunto no-reflexivo es no-reflexivo.

Examinaremos ahora la conexión entre las Definiciones VI y VII, que además de la diferencia material, son también formalmente heterogéneas, puesto que la Definición VI comienza con lo finito y concibe el infinito como su negación, mientras que en VII el infinito es el concepto primario y lo finito secundario. La equipolencia entre ambas definiciones, que mostraremos más adelante, depende de un teorema más profundo que corresponderá tratar en la próxima sección (Teorema 4 del § 3); por supuesto, en la demostración de este teorema no se hará uso de esta conclusión.

De acuerdo al Teorema 5 anterior, todo conjunto inductivo es no-reflexivo, de aquí que todo conjunto reflexivo sea no-inductivo. La pregunta que queda es, por lo tanto, si hay conjuntos que no sean ni inductivos ni reflexivos ("mediate" sets). Para negar su existencia demostramos que **todo conjunto S no inductivo es reflexivo.**

En resumen, la demostración es la siguiente: Un subconjunto S^* de S que es equivalente al conjunto de enteros positivos, tiene un subconjunto propio, equivalente a S^*, como se muestra más arriba. Separando S en S^* y $S - S^*$, se obtiene además un subconjunto propio de S que es equivalente a S.

Ahora describiremos esto en detalle. De acuerdo al Teorema 4 del § 3, S tiene un subconjunto S^* que es equivalente al conjunto N de todos los enteros positivos. Tomando un mapeo definido S^* y N y señalando los miembros de S^* por los índices correspondientes, podemos escribir

$$S^* = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k, \ldots] \quad .$$

Si $S - S^* = S'$ (de aquí $S' = 0$ en el caso $S^* = S$) tenemos $S = S^* \cup S'$, donde S^* y S' son disyuntos.

Separando a $\mathbf{s}_1$ del conjunto S^* obtenemos un subconjunto propio $S^* - [\mathbf{s}_1] = S^*_0$ que se demuestra que es equivalente a S^* de acuerdo al mapeo que relaciona $\mathbf{s}_{k+1} \varepsilon S^*$ con $S_k \varepsilon S^*$, como en la p. 66. Además, $S^*_0 \cup S' = S_0$ es un subconjunto propio de S puesto que $\mathbf{s}_1 \varepsilon S$ pero $s_1 \notin S_0$. Finalmente, tenemos $S^* \cup S' \sim S^*_0 \cup S'$ es decir, $S \sim S_0$, de acuerdo al mapeo anterior entre S^* y S por una parte, y al mapeo-identidad entre S' y S' por la otra; de acuerdo con 2) de la p. 63, de esta manera hemos obtenido un mapeo entre S y su subconjunto propio S_0, que demuestra nuestro enunciado.

Durante la demostración del Teorema 4 del § 3, hemos mostrado que "inductivo" y "no-reflexivo", así como "no-inductivo" y "reflexivo", son conceptos equipolentes. Por consiguiente, en lo sucesivo hablaremos simplemente de **conjuntos finitos** y de **conjuntos infinitos**, sin distinguir entre las Definiciones VI y VII. Para la consideración de distinciones más sutiles de los conceptos "finito" e "infinito" (conjuntos y números) se remite al lector al § 10, 6 y a **Foundations** (especialmente Capítulo II, § 4).

Concluimos esta sección con una observación referida a **la existencia de conjuntos infinitos.** Por medio de los axiomas introducidos hasta aquí, no esta-

Nota: A falta del signo adecuado se ha utilizado $\varepsilon\!\!\not|$ para simbolizar la no-pertenencia.

mos capacitados para demostrar que existe un conjunto infinito. Mientras que el Axioma I sin duda no sirve para este problema, el Axioma II produce únicamente subconjuntos de conjuntos previamente garantizados, y el Axioma III conjuntos con dos miembros; el Axioma IV comienza con un conjunto A de conjuntos. dado, y si A es finito como sus miembros, lo mismo es válido para el conjunto-suma $\bigcup A$. En consecuencia introducimos

Axioma (o Principio) **del Infinito** (V). **Existe un conjunto infinito (reflexivo)**; por ejemplo, el conjunto N de todos los enteros positivos $[1, 2, 3 \ldots]$. Anteriormente mostramos que N es reflexivo.

El uso explícito del concepto de entero puede evitarse en el axioma de infinito (cf. p. 63) postulando la existencia de por lo menos un conjunto Z que satisfaga las dos condiciones siguientes:

a) $0 \varepsilon Z$

b) si $a \varepsilon Z$ entonces también $[a] \varepsilon Z$ (44).

Si bien Z no está determinado unívocamente por a) y b) se puede demostrar (usando el Axioma VI en el § 5, 3) la existencia de por lo menos un conjunto Z_0 unívocamente definido que satisfaga a a) y b). Z_0 contiene precisamente los miembros.

$$0, [0], [[0]], [[[0]]], \ldots$$

que se demuestra que son diferentes entre sí.

Escribiendo 1 por 0, 2 por $[0]$, etc., en general $k + 1$ por $[k]$, se percibe que Z_0 es, excepto por la notación, el conjunto de todos los enteros positivos. Para la demostración de estas observaciones, ver **Foundations**, p. 83. Cf. más adelante § 11, 2.

Ejercicios

1) Probar que las siguientes relaciones entre conjuntos son equipolentes.

a) $S \subseteq T$, $S = S \cap T$, $S \cup T = T$.

b) $S \equiv T$ y $S \cap T = S \cup T$.

c) $S \subseteq T \subseteq U$ y $S \cup T = T \cap U$.

2) Dado un mapeo entre dos conjuntos equivalentes, ¿hay algún otro mapeo? (Dar algunos ejemplos). ¿Hay algunas excepciones a la respuesta? Desarrolle preferentemente el caso de un mapeo de un conjunto sobre sí mismo.

3) ¿Es posible usar, respectivamente, las funciones

$$y = 3x + 5, \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \text{sen } x$$

para mapear el conjunto de los valores-argumentos de x sobre el conjunto de los valores-funciones de y, en el sentido de un mapeo uno a uno? Cuando esto es imposible, ¿puede efectuarse lo propuesto por medio de restricciones convenientes a la variabilidad de x, es decir con un intervalo, etc.?

(44) Este es el procedimiento de Zermelo 08a (su Axioma VII). Algo diferente es el procedimiento de von Neumann (cf. más adelante § 11, 2).

4) Tenga en cuenta que para definir una relación hay que fijar los dominios de variabilidad para los argumentos de la relación. Por ejemplo la simetría de la relación "x es hermano de y" depende del dominio abarcado por y, como se muestra en los ejemplos: x = Moisés, y = Aaron o = Miriam.

5) La conexión entre las propiedades de las relaciones diádicas llamadas "reflexividad", "simetría", y "transitividad" es más complejo de lo que pareciera, según la nota de la p. 62, como se muestra en el siguiente ejemplo: La relación diádica "x e y son números primos", donde el dominio de ambos argumentos es el de los enteros positivos, es simétrica y transitiva. Sin embargo, no es completamente reflexiva; "6 y 6 son números primos" no es verdadero. Esta observación conduce a una distinción entre "reflexividad" y "reflexividad total" (45).

6) ¿Por qué es conveniente comenzar con un conjunto **reflexivo** la demostración de que conjuntos no-reflexivos y reflexivos no pueden ser equivalentes? (p. 66/67).

(Continuará)

(Traducción del inglés de BEATRIZ M. APREDA)

(45) Ver las profundas investigaciones en Scholz-Schweitzer 35, § 5, y en Aubert 49 y 52. En estos trabajos no sólo se contemplan relaciones diádicas, sino también n-ádicas o $2n$-ádicas. Un tratamiento más amplio de relaciones n-ádicas, incluyendo sus clasificaciones, se da en Fraïssé 55. Para investigaciones anteriores cf. Peano 24, Padoa 30, Ito 33-35. $xy \neq 0$ es un ejemplo interesante de una relación simétrica, transitiva y también reflexiva, pero no totalmente reflexiva (es decir, para x, y reales).

N. del T. — Por razones tipográficas se han alterado los siguientes símbolos usados por el autor: las llaves han sido reemplazadas por "[", "]"; el signo no-pertenencia a un conjunto por "$".

BIBLIOGRAFIA

AUBERT, K. E.

1949. Relations généralisées et indépendance logique des notions de réflexivité, symétrie et transitivité. C. R. *Paris* **229**, 284-286, 538-540.

1952. On the foundation of the theory of relations and the logical independence of generalized concepts of reflexiveness, symmetry, and transitivity. *Archiv f. Math. og Naturvid.* (Oslo) **52**, Nº 2. 48 páginas.

BACHMANN, F.

1955. *Transfinite Zahlen.* (*Ergebnisse der Math.* etc., N. S., Heft 1.) Berlin, Götingen und Heidelberg. 204 páginas.

BAIRE, R.

1899. Sur les fonctions des variables réelles. *Annali di Math. p. ed appl.* (3) 3, 1-123. (Apareció también como Tesis, Paris.)

BENDIXSON, I.

1883. Quelques Théorèmes de la théorie des ensembles de points. *Acta Math.* **2**, 415-429.

1883a. Nagra studier öfver oändliga punktmängder. *Oefvers. af K. Svenska Vet.-Akad. Förhandl.* **40**, Nº 2, págs. 31-35.

1884. Sur la puissance des ensembles parfaits de points. *Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar* **9**, Nº 6.

1884a. Un théoreme auxiliaire de la théorie des ensembles. *Ibid,* Nº 7.

BETH, E. W.

1959. *The foundations of mathematics.* Amsterdam. 741 páginas.

BOCHÉNSKI, I. M.

1934. Logistique et logique classique. *Bull. Thomiste* **11**, 240-248.

1938. De consequentiis scholasticorum earumque origine. *Angelicum* (Roma) 15, 1-18. (Cf. *ibid.* **12**, 397-399, 1935, y **13**, 109-123, 1936.)

1956. *Formale logik.* Freiburg und München. 639 páginas.

BODEWING, E.

1932. Die Stellung des hl. Thomas von Aquino zur Mathematik. *Archiv f. Geschichte der Philos.* 41, 401-434. (Cf. los ensayos de Langenberg e Isenkrahe citados al comienzo de este trabajo.)

BOLZANO, B.

1851. *Pradoxien des Unendlichen* (Ed. original póstuma de F. Prihonsky, 1851). Nueva edición de A. Höfler, con notas de H. Hahn (*Philos. Bibliothek*, vol. 99). Leipzig, 1920. Ed. inglesa 1950. 189 páginas.

BOREL, E.

1898. *Leçons sur la théorie des fonctions.* París, 2ª ed., 1914, 260 páginas. (3ª [4ª] ed., 1928 [1950]).

BOURBAKI, N.

1951-56. *Eléments de mathématique.* Premiere Partie, Livre I. Théorie des ensembles. Fascicule de résultas (1939); 2ª ed., *Act. Sc. Ind.* **1141** (1951), 50 páginas. Cap. I-II, *Act. Sc. Ind.* **1212** (1954), 136 páginas. Cap. III, *Act. Sc. Ind.* **1243** (1956), 118 páginas.

CANTOR, G.

1874. Uber eine Eigenschaft des Ibengriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *J. f. Math.* **77**, 258-262 (Cf. B. Minnigerode: *Math Annalen* **4**, 497-498,1871).

1878. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Ibid.* **84**, 242-258.

1879-84. Uber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Math. Annalen:* I, **15**, 1-7, 1879. II. **17**, 355-358, 1880. III. **20**, 113-121, 1882. IV. **21**, 51-58, 1883. V. *Ibid.*, 545-591 (Apareció también como libro: Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer. Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig, 1883. 47 páginas). VI. **23**, 453-488, 1884. (I-V aparecieron en francés, en parte en forma de extractos, en el *Acta Mathematica* **2**, 1883).

1886. Uber die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendliche. *Z. f. Philos. u. philos. Kritik, N. S.* **88**, 224-233 (Apareció además con algunas modificaciones en *Bihang till K. Svenska Vet. - Akad. Handlingar* **11**, Nº 19, 1887).

1887-88. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. I. *Ibid.* **91**, 81-125, 252-270, 1887. II. *Ibid.* **92**, 240-265, 1888.

1895. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I. *Math. Annalen* **46**, 481-512.

1897. *Idem.* II. *Ibid.* **49**, 207-246.

Estos dos trabajos aparecieron también en inglés, editados por P. E. B. Jourdain, Chicago, 1915. La edición francesa, *Mémoires de la Soc. des Sc. Phys. et Nat. de Bordeaux* (5) 3, 343-437, 1899; además en forma separada: París, 1899. La edición italiana de I en *Riv. di Mat.* 5, 129-162, 1895.

1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Ed. por E. Zermelo, Berlín, 486 páginas.

CANTOR, G. y DEDEKIND, R.

1937. (*Briefwechsel*, ed. por E. Noether y J. Cavaillès). *Act. Sc. Ind.* **518**. París, 61 páginas.

CANTOR-STÄCKEL

1897. (Esta cita corresponde a una conferencia dada por Cantor en Braunschweig, el 24 de setiembre de 1897, que no ha sido publicada sino recopilada por P. Stäckel; nos hemos permitido usarla).

CARMICHAEL, P. A.

1943. The null class nullified. *Philos. Review* **52**, 61-68.

CAVAILLÈS, J.

1938. *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, Etude historique et critique* (Tesis). París. 156 páginas.

CIPOLLA, M.

1937. Nulla e zero. *Esercitazioni Mat.* (2) **10**, 1-10.

COUTURAT, L.

1896. De l'infini mathématique (Tesis). París.

CUESTA, D. N.

1959. *Matemática del orden.* Madrid. 513 páginas.

DANTZIG, T.

1930. *Number. The language of science.* London (Ed. francesa, París, 1931).

DEDEKIND, R.

1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig (6ª ed. 1930). 58 páginas —Reimpreso en 1930-32. III—. Ed. inglesa de W. W. Beman, en: *Essays on the theory of numbers* de R. Dedekind, Chicago y London, 1901; ed. italiana de O. Zariski, Bologna, 1926.

1930-32. *Gesammelte mathematische Werke.* Ed. por R. Fricke, E. Noether, O. Ore. 3 vols. Braunschweig.

Ver además en Cantor.

EYRAUD, H.

1947. *Leçons sur la théorie des ensembles, les nombres transfinis et le problème du continu.* I & II. Inst. de Math. Lyon, 65 + 28 páginas.

FRAENKEL, A. (A.)

1930. Georg Cantor. *Jahresb. D. M. V.* **39**, 189-266.

FRAENKEL, A. A. y BAR-HILLEL, Y.
1958. *Foundations of set theory.* Amsterdam. 415 páginas.

FRAISSÉ, R.
1955. *Sur quelques classifications des systèmes de relations.* Tesis, Fac. des Sc., Univ. de París. 154 páginas (Además *Public. Scientif. Univ.* Alger **A1**, 35-182, 1954/5).

GRÜNBAUM, A.
1955. Modern science and refutation of the paradoxes of Zeno. *Scientific Monthly* **81**, 234-239.

GUTBERLET, C.
1886. Das Problem des Unendlichen. *Z. f. Philos. u. philos. Kritik*, N. S. **88**, 179-223.
1919. (Review of A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 1919) *Philos. Jahrbuch des Görresgesellschaft* 32, 364-370.

HAALMEIJER, B. P. y SCHOGT, J. H.
1926. *Inleiding tot de leerder verzamelingen.* Groningen. 159 páginas.

HASSE, H. y SCHOLZ, H.
1928. Die Grundlagenkrisis der griechsichen Mathematik. *Kantstudien* **33**, 4-34.

HAUSDORFF, F.
1914. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig. 476 páginas. Reimpreso en New York, 1949.
1927. *Mengenlehre* (2ª ed. revisada de 1914). Berlin und Leipzig. 285 páginas. 3ª ed., 1935; reimpresa en New York, 1944. Ed. inglesa, New York, 1957.

HESSEMBERG, G.
1906. Grundbegriffe der Mengenlehre. (*Abh. der Friesschen Schule*, N. S. [1], Heft 4) Göttingen. 220 páginas.

HURWITZ, A.
1883. Beweis des Satzes etc. *J. f. Math.* **95**, 201-206.

ISENKRAHE, K.
1920. *Die Lehre des hl. Thomas vom Unendlichen... und ihr Verhältnis zur neuzeitlichen Mathematik.* Bonn. 230 páginas.

ITÔ, M.
1933-35. Einige Anwendungen der Theorie des Entscheidungsproblems zur Axiomatik. *Tôhoku Math. J.* **37**, 222-235; **40**, 241-251.

JOURDAIN, P. E. B.
1905-14. The development of the theory of transfinite number. *Archiv der Math. u. Ph.* (3) **10**, 254-281, 1905; **14**, 289-311, 1909; **16**, 21-43, 1910; **22**, 1-21, 1914.

KAMKE, E.
1928 (1950). *Mengenlehre. (Samml. Göschen* **999**.) Berlin & Leipzig, 1928. 160 páginas. 2ª ed., 1947. Ed. inglesa New York, 1950. 144 páginas.
1939. Allgemeine Mengenlehre. *Enzykl. der Math. Wiss.*, Band I, 1. Teil, Heft 2, Art. A5. Leipzig. 56 páginas.

KEYSER, C. J.
1916. *The human worth of rigorous thinking.* Essays and addresses. New York. (2ª ed. 1925.)
1918. The role of the concept of infinity in the work of Lucretius. *Bull. A. M. S.* **24**, 321-327. (Cf. *Scr. Math.* **4**, 221-240, 1939; además el ensayo de P. Schrecker "On the infinite number of infinite orders": *Studies and Essays... in Homage to G. Sarton etc.* [New York, 1947], págs. 359-373.)
1941. Charles Sanders Peirce as a pioneer. *Galois Lectures (Scr. Math. Library* **5**), 87-112. (Cf. *Scr. Math.* **3**, 11-37, 1935; además la revista de A. Church: *J. S. L.* **6**, 161-162, 1941.)

KLEENE, S. C.
1952. Introduction to Metamathematics. New York, D. Van Nostrand.

KLEIN, FELIX
1926. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Teil I. Berlin 386 páginas.

KURATOWSKI, C. y MOSTOWSKI, A.
1952. *Teoria mnogosci* (Teoría de conjuntos). *Monografie Mat.* XXVII. Warszawa & Wroclaw. 311 páginas.

LÉVY, AZRIEL
1958. *Contributions to the metamathematics of set theory.* (En hebreo con sumario en inglés.) Tesis, Hebrew University. Jerusalem.
1959a. A note on definitions of finiteness. *Bull. of the Research Council of Israel*, F Nº 2, 83-84. (Cf. *F. M.* 46, 1-13, 1958.)

LITTLEWOOD, J. E.
1926. *The elements of the theory of real functions.* 2ª ed. Cambridge. 60 páginas.

MITTAG-LEFFLER, G.
1884. Sur la représentation analytique des fonctions monogenes uniformes d'une variable indépendante. *Acta Math.* 4, 1-79.
1928. Zusätzliche Bemerkungen (zu Schoenflies 1928). *Ibid.* 50, 25-26.

MORRIS, C. W.
1929. Has Russell passed the Tortoise? *J. of Philos.* 26, 449-459.

PADOA, A.
1930. Proposizioni assiomatiche. *Congr. Bologna 1928*, III, 381-387.

PEANO, G.
1924. De aequalitate. *Acad pro Interlingua, Circulare*, 1924, Nº 5, 8-11. Reprinted in *Proc. of the Intern. Congr. of Math., Toronto 1924*, II, 988-989, 1928.

PEIRCE, C. S.
1933. *Collected papers.* Ed. por C. Hartshorne y P. Weiss. Vol. III, Cambridge Mass. 433 páginas.

POINCARÉ, H.
1883. Mémoire sur les groupes Kleinéens. *Acta Math.* 3, 49-92.

ROSSER, J. B.
1953. *Logic for mathematicians.* New York, 540 páginas.

RUSSELL, B.
1903. *The principles of mathematics.* I. London. 2ª ed. con una nueva introducción. London 1937 & New York 1938. 534 páginas. Reprinted 1950. Ed. italiana 1951.
1914/26. *Our knoweldge of the externald world.* (Que apareció originariamente en 1914.) 2ª ed.; London, 1926, 251 páginas; New York, 1929, 268 páginas; ed. alemana: Leipzig, 1926. Ed. francesa "Méthode scientifique en philosophie": París, 1929.
1919. *Introduction to mathematical philosophy.* London & New York. 206 páginas. 2ª ed., 1920. 6ª impresión, 1948. Ed. alemana, 1923; ed. francesa, 1928; ed. española, 1945.
Ver también sobre Withehead.

SHEEFFER, L.
1884. Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven. *Acta Math.* 5, 49-82 (Cf. *ibid.* 4, 397. 1884).
1884a. Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Ibid.*, 183-194, 279-296.

SCHOENFLIES, A.

1900-07. *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* I. Teil. (*Jahresb. D. M. V.* 8, part 2). Leipzig, 1900. 251 páginas. II. Teil (2. *Ergänzungsband zu den Jahresb. D. M. V.*).Leipzig, 1907. 331 páginas.

1913. *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. 1. Hälfte.* Leipzig & Berlin. 388 páginas.

1922. Zur Erinnerung an Georg Cantor. *Jahresb. D. M. V.* **31**, 97-106.

1928. Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen. *Acta Math.* **50**, 1-23.

SCHOENFLIES-BAIRE

1909. *Théorie des ensembles.* Exposé d' après l' article allemand de A. Schoenflies par R. Baire. *Encycl. des Sc. Math.*, I 1, 489-531. París & Leipzig.

SCHOLZ, H. y SCHWEITZER, H.

1935. *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion.* (Litografiado) Leipzig. 106 páginas.

SHIRAISHI, S.

1954. The structure of the continuity of psychological experiences and the physical world. *The Sc. of Thought* (Tokyo), Nº 1, 12-24.

SIERPINSKI, W.

1928. *Leçons sur les nombres transfinis.* Paris. 240 páginas. Reprinted 1950.

1928a. Sur une décomposition d'ensembles. *Monatsh. Math. Ph.* **35**, 239-242. (Cf. *Ann. de la Soc. Polon. de Math.* **7**, 265-266, 1929; *F. M.* **28**, 115-119, 1937; *Mathematica* [Cluj] **14**, 15-17, 1938; A. Tarski: *F. M.* **12**, 188-205 y **14**, 205-215, 1928/29; P. Erdös y A. Tarski: *Annals of Math.* (2) **44**, 315-329, 1943.)

1958. *Cardinal and ordinal numbers.* Warszawa. 487 páginas.

SPECKER, E.

1954. Die Antinomien der Mengenlhere. *Dialectica* **8**, 234-244.

STEBBING, L. SUSAN

1930. *A modern introduction to logic.* London, 1930 & New York, 1931. 505 páginas.

TARSKI, A.

1925. Sur les ensembles finis. *Ibid.* **6**, 45-95. (Cf. C. Kuratowski: *ibid.* **1**, 131-132, 1920.)

TERNUS, J., S. J.

1926. Zur Philosophie der Mathematik. *Philos. Jahrb. der Görresgesellschaft* **39**, 217-231.

1929. Ein Brief Georg Cantors an P. Joseph Hontheim S. J. *Scholastik* **4**, 561-571.

THOMAS, I.

1958. A 12th century paradox of the infinite. *J. S. L.* **23**, 133-134.

WEISS, P.

1938. *Reality.* Princeton N. J. 314 páginas.

WEYL, H.

1925. Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik. *Symposion* **1**, 1-32. (También apareció como un folleto: *Sonderdrucke des Symposion*, Nº 3, Erlangen, 1926.)

1926/49. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* Parte I. (*Handbuch der Philos.* IIA.) München & Berlin 1926. 64 páginas. Reprinted 1950. Ed. hebrea: Jerusalem 1945. *Philosophy of mathematics and natural science.* (Ed. inglesa revisada y aumentada de las Partes I y II.) Princeton, 1949. 311 páginas.

1931. *Die Stufen des Unendlichen.* Jena. 19 páginas.

1932. *The open world.* Three lectures on the metaphysical implications of science. New Haven y London. (El ensayo *Infinity* en págs. 57-84.)

WOLFSON, H. A.

1929. *Crescas' critique of Aristotle.* Cambridge Mass.

YOUNG, W. H.
1926. The progress of mathematical analysis in the twentieth century. *Proc. London M. S.* (2) 24, 421-434.

YOUNG, W. H. y YOUN, GRACE C.
1906. *The theory of sets of points.* Cambridge. 316 páginas.

ZERMELO, E.
1908a. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Ibid.*, 261-281.
(No ha sido continuado.)