ELEMENTOS LOGICOS DE LA DEDUCCION MATEMATICA

por **Ana H. Maróstica**

I. *Los sistemas deductivos*

A) Desde un punto de vista teórico la Lógica es una de las bases fundamentales en la edificación de la Matemática. El método deductivo es un rasgo de ella. La deducción, en términos generales es un encadenamiento de enunciados de los cuales los iniciales se llaman premisas o hipótesis y el último conclusión. De otro modo: Deducir C de enunciados (o de fórmulas) es exhibir una secuencia finita P_1, P_2, $\ldots P_n$, C (de enunciados o de fórmulas) de la cual C es el último (a) y cada enunciado o fórmula de la misma es aceptado (a) convencionalmente a partir de los anteriores de la secuencia mediante el uso de determinadas reglas que deben garantizar que C nunca es falsa si son verdaderas P_1 P_2 $\ldots P_n$.

Lo que puede deducirse depende de lo que se admita como punto de partida. La demostración, ya lo afirmaba Aristóteles, no genera verdades sino que asegura que si las premisas son verdaderas, la conclusión también lo será.

Por ejemplo, si admitimos como cierto:

P_1 "Si hoy es domingo, entonces el comercio está cerrado".
P_2 "Hoy es domingo"

podemos concluir

C "El comercio está cerrado"

Si abstraemos la forma lógica de este razonamiento, obtenemos el esquema de la regla de separación, conocida también como Modus Ponens.

$p \longrightarrow q, p / \therefore q$.

Se verifica que

$[(p \longrightarrow q) . p] \longrightarrow q$, es una tautología o sea, no puede darse el caso que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso; la regla de separación puede pues utilizarse para deducir a partir de determinadas premisas una determinada conclusión.

B) En Matemática el concepto de deducción debe ser considerado en relación a un sistema axiomático.

Los sistemas axiomáticos, más allá de las diferencias que se verifican entre sistemas de lógica y sistemas científicos, constan de:

1. Una completa especificación del **vocabulario primitivo** (signos que convencionalmente no se definen).

2. Una definición de **fórmula** del sistema o sea de aquellas secuencias de dos o más signos primitivos en orden consecutivo o lineal aceptados en el sistema.

3. **Definiciones** o estipulaciones que permitan abreviar expresiones en determinadas maneras y que legitiman la introducción de nuevos signos en el sistema.

4. **Axiomas** o listas de fórmulas consideradas convencionalmente como primitivas.

5. **Reglas de inferencia:** son reglas de acuerdo a las cuales, de fórmulas bien formadas como premisas es "'inmediatamente" inferida una fórmula bien formada como conclusión (inferir inmediatamente significa que requiere una sola aplicación de la regla correspondiente).

6. **Teoremas y Reglas derivadas.**

Una demostración en un sistema axiomático es una secuencia finita de fórmulas del sistema cada una de las cuales es un axioma o es tal que se ha llegado a ella a partir de las anteriores en la secuencia mediante el uso de las reglas de inferencia. La última de las fórmulas de la secuencia es un **teorema** del sistema. Con más precisión: Teorema de un sistema axiomático es toda fórmula del mismo para la cual hay pruebas o demostración. (Se ha presentado el concepto de teorema en sentido estricto; en sentido amplio, se llaman también teoremas a los axiomas del sistema).

Si en la secuencia figuran fórmulas bien formadas del sistema P_1, P_2, P_n que ni son axiomas ni obtenidas por reglas de inferencia siendo la última fórmula C el argumento $P_1, P_2, P_n \vdash C$ es llamado **regla derivada de inferencia.**

Se ha explicitado brevemente lo que debe entenderse por sistema axiomático cuando se lo considera sintácticamente. Los sistemas axiomáticos considerados semánticamente obtiénense dotando al sistema sintáctico de una **interpretación.**

Una "interpretación" es una asignación sistemática de "denotata" a alguna parte del vocabulario primitivo. En general esta asignación sistemática la hacen las reglas semánticas (reglas de designación y reglas de verdad). Se dice que la interpretación del sistema es **adecuada** cuando todas las fórmulas del mismo se transforman en enunciados verdaderos. El conjunto de denotata que hace que la interpretación del sistema sea adecuada llámase "**modelo**" del sistema.

C) En general, los sistemas deductivos **no** explicitan todos los niveles antes especificados. En los distintos sistemas deductivos de las ciencias no se hace la enumeración de las reglas de inferencia ni tampoco la enumeración de las fórmulas del sistema. Se dice por ello que tales sistemas "presuponen" la Lógica. Explicitar la Lógica presupuesta es explicitar los niveles antes citados y muy especialmente las reglas de inferencia.

De ahí que sea importante distinguir entre:

a) **Sistemas logísticos:** son los sistemas deductivos de Lógica. En tales sistemas deben figurar los seis niveles de todo sistema axiomático considerado sintácticamente.

b) **Sistemas deductivos desarrollados por el método axiomático informal:** Es todo sistema exiomático (no logístico) donde se explicita la Lógica.

c) **Sistemas deductivos desarrollados por el método axiomático formal.** Es todo sistema axiomático (no logístico) donde se explicita la Lógica presupuesta. Particularmente para el caso de Matemática organizada según este método se distingue entre: 1) los símbolos lógicos primitivos y los símbolos primitivos pensados como pertenecientes a la rama particular de la matemática en cuestión. Análogamente los axiomas son tales que contienen únicamente símbolos lógicos primitivos o contienen símbolos primitivos pertenecientes a la Matemática.

Ejemplifiquemos cada uno de los tipos de sistemas deductivos anteriormente caracterizados:

Ejemplo: SISTEMA LOGISTICO RS (Extractado de "Symbolic Logic" de I. Copi. The Mac Millan Co. N. York, 59)

1. Símbolos Primitivos.

a) Símbolos proposicionales: letras mayúsculas del alfabeto con o sin subíndice.

A, A_1, A_2, A_3

B, B_1, B_2, B_3

b) Símbolos operadores.

$. \, , \sim , (,)$

En el metalenguaje sintáctico se introducen las letras 'P', 'Q', 'R', 'S' con o sin subíndice como "variables proposicionales". Toda variable proposicional refiere secuencias de símbolos o fórmulas del sistema logístico de modo que en el mismo contexto siempre refiere la misma fórmula.

Análogamente deben introducirse en el metalenguaje sintáctico $. \, , \sim , (,)$

2. Definición recursiva de fórmulas bien formadas.

a) Todo símbolo proposicional es F. B. F.

b) Si una fórmula P es B.F., entonces $\sim$ P es B.F.

c) Si P y Q son ambas B. F. entonces (P) . (Q) es B. F.

d) Ninguna otra fórmula del lenguaje será considerada como bien formada a menos que responda a las reglas anteriores.

3. Definiciones.

D^1 'P v Q' = df '$\sim ((-(P)) \,.\, (\sim (Q)))$'

D^2 '$P \supset Q$' = df '$\sim ((P) \,.\, (\sim (Q)))$'

D^3 '$P \equiv Q$' = df '$(P \supset Q) \,.\, (Q \supset P)$'

4. Axionas.

A^1 $P \supset (P \,.\, P)$

A^2 $(P \,.\, Q) \supset P$

A^3 $(P \supset Q) \supset [\sim (Q \,.\, R) \supset \sim (R \,.\, P)]$

El sistema RS consta pues de infinitos axiomas, pues cada una de las fórmulas arriba establecidas representa una lista infinita de fórmulas bien formadas de R S (lenguaje objeto).

5. Regla de Inferencia.

R1. So P y $P \supset Q$ entonces Q.

6. Teoremas y Reglas derivadas.

RD 1 $\quad P \supset Q \,,\, Q \supset R \vdash \sim (\sim R \cdot P)$

1 –	$(P \supset Q) \supset (\sim (Q \cdot \sim R) \supset \sim (\sim R \,.\, P))$	A1
2 –	$P \supset Q$	Premisa
3 –	$\sim (Q \cdot \sim R) \supset \sim (\sim R \cdot P)$	1, 2 R1
3' –	$(Q \supset R) \supset \sim (\sim R \cdot P)$	3 y Df2
4 –	$Q \supset R$	Premisa
5 –	$\sim (\sim R \cdot P)$	3' , 4 , R 1

T 1 – $\quad \vdash \sim (\sim P \cdot P)$

1 –	$P \supset P \cdot P$	A 1
2 –	$P \cdot P \supset P$	A 2
3 –	$\sim (\sim P \cdot P)$	1, 2 R D 1

Una interpretación adecuada de este sistema logístico es aquella en la cual los símbolos proposicionales son la traducción simbólica de enunciados del Castellano que no contiene a otros enunciados como componentes mientras que el significado de $\sim$, $\cdot$ queda determinado por las tablas de verdad de la negación y conjunción, respectivamente.

2. *La deducción en Euclides*

El método deductivo no es una conquista de los tiempos modernos; lo encontramos ya en los **Elementos** de Euclides, que desde el punto de vista de los principios metodológicos expuestos presenta fallas evidentes. Esta obra fue durante más de dos mil años el ideal de exactitud científica para los matemáticos.

Con los **Elementos** de Euclides, toda la geometría que había sido casi exclusivamente hasta entonces una reunión de reglas empíricas para medir o dividir figuras, se convierte en una ciencia deductiva.

A la Geometría, la condensa en unos pocos postulados, de los cuales deriva el resto por sucesivos razonamientos lógicos. Los **Elementos** de Euclides constituyen el más antiguo manual de geometría que llegó hasta nosotros.

Muchos autores sostienen que las soluciones de los teoremas no le pertenecen, pero esto no le quita grandeza a Euclides. En época de Aristóteles ya existían Elementos de Geometría, y Euclides, que es de una generación posterior, no hizo más que aumentar y refundir.

Los **Elementos** es el modelo más antiguo y típico de la concepción aristotélica de ciencia demostrativa. La demostración para Aristóteles es un silogismo científico, es decir, un silogismo que es conocimiento, no opinión. Las premisas deben cumplir ciertos requisitos:

a) Ser verdaderas.
b) Ser primarias (inmediatas e indemostrables).
c) Ser más inteligibles y anteriores que la conclusión.
d) Ser causa de la conclusión.

Para Aristóteles los puntos de partida de una ciencia son de tres clases (1):

1) **Principios formales (axiomas)** (2): Son aquellos de acuerdo con los cuales demostramos o razonamos. Ejemplos de estos principios son las leyes de no-contradicción, subsidiaria de la anterior: la de identidad, y la de tercero excluido. También figuran entre estos principios algunas proposiciones comunes a algunas ciencias.

2) **Principios materiales (tesis)**: Son peculiares de cada ciencia y a partir de los cuales demostramos. Se subdividen en:

   a) **Hipótesis**: afirman la existencia de algo, dicen "que tal o cual cosa es o no es".

   b) **Definiciones**: Son afirmaciones de esencias y dicen "lo que es tal o cual cosa".

3) **Principios secundarios (postulados)**: Son útiles para la demostración; no son absolutamente seguros, son indemostrados no indemostrables, y como no los demostró nadie nunca, se acercan un poco a la autoevidencia. Por eso, para proceder en una demostración, se pide que se los admitan.

(1) Aristóteles tenía en cuenta la matemática, que era la única ciencia que no estaba en la etapa de su constitución.

(2) El término "axioma" lo tomó también de la matemática.

Comparando las presuposiciones necesarias de la ciencia para Aristóteles y Euclides, encontramos algunas diferencias que señalaremos posteriormente.

Haremos a continuación una breve exposición del contenido de los **Elementos.** Estos se dividen en trece libros: del I al VI tratan de geometría plana. El libro I trata de triángulos, paralelas, paralelogramos, etc.. El libro II de Algebra geométrica; el III trata de la geometría del círculo; el IV de polígonos regulares; el V de una nueva teoría de las proporciones aplicadas a las cantidades inconmensurables y conmensurables; el libro VI trata de aplicaciones de dicha teoría a la geometría plana; los libros VII al X tratan de aritmética y teoría de los números. El libro X es la obra maestra de Euclides, está dedicado a las líneas irracionales. Los libros XI al XIII tratan de la geometría de los sólidos. El libro XIII trata de los poliedros regulares: tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro. Estas figuras llamadas platónicas, muestran según Proclo que Euclides era platónico, y que con el instrumental aristotélico trataba de probar la tesis platónica de construir el universo con estas cinco figuras.

El Libro I es el más importante del tratado; comienza con definiciones, postulados y nociones comunes (3).

Los ὁρισμοί (definiciones) de Aristóteles responden en cierta medida a los ὅροι de Euclides. Las hipótesis de Aristóteles tienen alguna semejanza con los postulados (αἰτήματα) de Euclides. Los axiomas aristotélicos corresponden a las nociones comunes (κοιναὶ ἔννοιαι) de Euclides.

Sólo cinco nociones comunes son auténticas y la tercera: "Si de cosas iguales se quitan otras iguales, las restantes son iguales", se remonta hasta Aristóteles que la usaba frecuentmente.

Euclides en lugar de usar la palabra "axioma", que es pitagórica, adopta la de "noción común" que proviene de Demócrito.

Los **Elementos** presentan algunas diferencias con el esquema de ciencia deductiva de Aristóteles, emplea además de las reglas de la silogística aristotélica, otras forma de inferencias. En la obra de Euclides hay elementos lógicos implicados, aunque los usa sin enunciarlos explícitamente.

El sistema de Euclides constituiría pues un ejemplo de sistema deductivo considerado semánticamente y desarrollado por el método axiomático informal.

Explicitamos a continuación algunos elementos de la lógica presupuesta:

1. **Transposición lógica.**

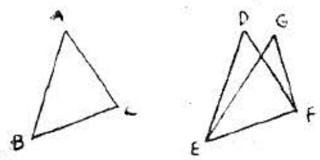
   $(p' \longrightarrow q') \longrightarrow (q \longrightarrow p)$

   Ejemplo: Libro I, proposición 8 - 30 (4).

---

(1) El Libro I está ordenado de acuerdo a dos teoremas significativos: a) La suma de los ángulos de un triángulo y b) el Teorema de Pitágoras.

(2) En Hearth, Th., *Euclid's Elements in English*, Cambridge, 1926.



"...Por lo tanto, no es posible que, si la base BC se aplica a la base EF, los lados BA, AC no coincidan con ED, DF; ellos por lo tanto caincí-den..."

Reordenándolo en forma lógica tenemos:

Si la base BC no se puede aplicar a la base EF, entonces los lados BA, AC no coincidarán con ED, DF; entonces BC se puede aplicar a la base EF.

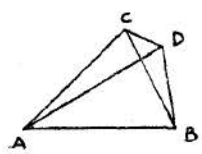
Se utiliza acá la equivalencia de dos formas conjugadas ($p' \longrightarrow q'$) y ($q \longrightarrow p$). La primera sería la original y la segunda su contarrecíproca.

2. **Reducción al absurdo** (reductio ad absurdum).

Hay dos tipos de reducción al absurdo, la primera es más elemental pero menos utilizada; la segunda es más común en Matemática. En Euclides encontramos las dos formas.

a) $(p \longrightarrow p') \longrightarrow p'$

Ejemplo: Libro I, proposición 7 - 20.



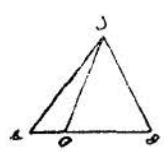
"...Serán iguales los ángulos CDB y DCB. Ahora bien, se acaba de demostrar que uno de ellos es mayor que el otro. Resulta pues un imposible..."

Reordenándolo tenemos:

$$[\,(C\hat{D}B = D\hat{C}B) \longrightarrow (C\hat{D}B \neq D\hat{C}B)\,] \longrightarrow (C\hat{D}B \neq D\hat{C}B).$$

b) $[\,(p' \longrightarrow q)\,.\,q'\,] \longrightarrow p$ **(Esta forma se basa en el Modus Tollens).**

Ejemplo: Libro I, proposición 6.



"...Los dos lados DB, BC son iguales a los dos lados AC, CB respectivamente; y el ángulo DBC es igual al ángulo ACB; luego la base DC es igual a la base AC, y el triángulo DBC será igual al triángulo ACB, el menor al mayor: lo que es absurdo. Luego, AB no es desigual a AC..."

Reordenándolo, se tendría el siguiente esquema:

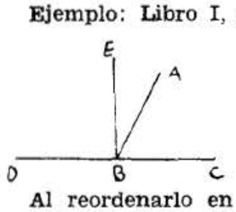
$$\left\{ [\,(\overline{AB} = \overline{AC})' \longrightarrow (D\overset{\triangle}{B}C = A\overset{\triangle}{C}B)\,]\,.\,(D\overset{\triangle}{B}C \neq A\overset{\triangle}{C}B) \right\} \longrightarrow (\overline{AB} = \overline{AC})$$

3. Formas silogísticas de deducción.

Silogismo proposicional

$p \longrightarrow q,\ q \longrightarrow r / \therefore p \longrightarrow r.$

Ejemplo: Libro I, proposición **13-25.**



"...Y cosas que son iguales a una misma cosa son iguales entre sí; por lo tanto los ángulos **CBE**, **EBD** son también iguales a los ángulos DBA, ABC. Pero los ángulos **CBE**, **EBD** son dos ángulos rectos. Luego los ángulos DBA, **ABC** son también iguales a dos ángulos rectos..."

Al reordenarlo en forma lógica tenemos:

$$D\hat{B}A + A\hat{B}C = C\hat{B}E + E\hat{B}D$$

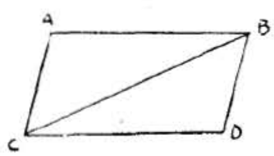
$$C\hat{B}E = \text{dos rectos}$$

$$\therefore\ D\hat{B}E = \text{dos rectos}$$

4. Ampliación lógica.

$p, q / \therefore p \cdot q$

Ejemplo: Libro I, proposición 34-20



"...Luego el lado AB es igual al CD, y AC al BD, y además el ángulo BAC es igual al ángulo CDB, el ángulo completo ABD es igual al ángulo completo ACD. Y el ángulo BAC fue también probado igual al ángulo CDB. Luego en los paralelogramos los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí..."

Al reordenarlos tenemos:

$$(\overline{AB} = \overline{CD}),\ (\overline{AC} = \overline{BD}) / \therefore (\overline{AB} = \overline{CD} \cdot (\overline{AC} = \overline{BD})$$

$$(B\hat{A}C = C\hat{D}B),\ (A\hat{B}D = A\hat{C}D) / \therefore (B\hat{A}C = C\hat{D}B) \cdot (A\hat{B}D = A\hat{C}D)$$

5. Conversión.

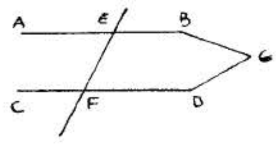
La conversión lógica es diferente a la conversión geométrica. La conversión de una proposición cuantificada universalmente "Todos los X son Y", es "Algunos Y son X". Esto se explica por la distribución de los términos; Y no está tomado en toda su extensión, en cambio X sí lo está.

Para que la conversa de una proposición sea igual a la original debe cumplirse un requisito: X debe ser equivalente a Y.

En la conversión simple geométrica (ἥκυρίος ἀντιστροφή) la hipótesis y la conclusión de la proposición cambian solo de lugar. "Si X es Y, luego Y es X".
Ejemplo: Libro I, proposiciones 27, 28 y 29.

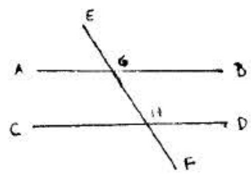
Un ejemplo de conversión lo tenemos en el enunciado de la proposición 29, que es la conversa de los enunciados de las proposiciones 27 y 28.

El enunciado de la proposición 27, dice:



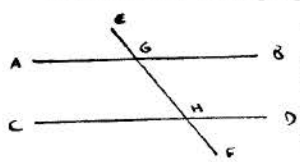
"...Si una línea recta al caer sobre dos líneas rectas hace ángulos alternos iguales entre sí, las líneas rectas serán paralelas entre sí..."

El enunciado de la proposición 28 dice:



"...Si una línea recta al caer sobre dos líneas rectas hace el ángulo exterior igual al ángulo interior y opuesto sobre el mismo lado, o los ángulos interiores del mismo lado igual a dos ángulos rectos, las líneas rectas serán paralelas entre sí..."

El enunciado de la proposición 29, dice:



"...Una línea recta al caer sobre líneas rectas paralelas, hace los ángulos alternos iguales entre sí, el ángulo exterior igual al ángulo interior y opuesto, y los ángulos interiores sobre el mismo lado, igual a dos ángulos rectos..."

Si ordenamos los enunciados de las proposiciones 27 y 28 del siguiente modo, obtenemos:

Dos rectas que forman con una tercera ángulos alternos iguales o ángulos correspondientes iguales o ángulos interiores suplementarios del mismo lado, son paralelas.

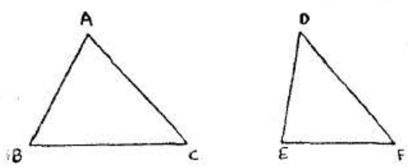
El enunciado de la proposición 29, que es la conversa de lo anterior dice: Dos rectas paralelas al ser cortadas por una transversal formarán ángulos correspondientes iguales o ángulos interiores suplementarios del mismo lado.

La conversión simple geométrica es posible desde el punto de vista lógico, si cumple el requisito siguiente: para obtener a partir del teorema directo "p ——> q", — el teorema recíproco "q ——> p", necesitamos de la siguiente condición, que "p" y "q" sean equivalentes, "p <——> q".

6) **Reglas de deducción:**

a) **Modus Ponens**

Ejemplo: Libro I, proposición 25



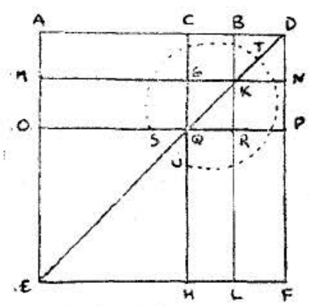
"...Luego el ángulo BAC no es menor que el ángulo EDF. Pero se probó que no son iguales entre sí, luego el ángulo BAC es más grande que el ángulo EDF..."

Al reordenarlo en forma lógica tenemos:

Si los ángulos BAC y EDF son desiguales, entonces son o menor uno con respecto al otro, o mayor uno con respecto al otro. Los ángulos BAC y EDF son desiguales. Luego BAC es menor o mayor que EDF.

b) **Regla de sustitución:**

Ejemplo: Libro II, proposición 8



"...Luego cuatro veces el rectángulo AB, BD junto con el cuadrado sobre AC es igual al cuadrado sobre AD, pero BD es igual a BC; en consecuencia cuatro veces el rectángulo contenido por AB, BC junto con el cuadrado sobre AC es igual al cuadrado sobre AD..."

Reordenándolo, tenemos:

1) $4\,(\overline{AB}\,.\,\overline{BD}) + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2$

2) $\overline{BD} = \overline{BC}$

3) $4\,(\overline{AB}\,.\,\overline{BC}) + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2$ (1, 2, Sust.)

(continuará)