TEORIA ABSTRACTA DE CONJUNTO

por **Abraham A. Fraenkel**

(Continuación)

3. CONJUNTOS NUMERABLES

1. Numerabilidad. En esta sección trataremos con los tipos simples de conjuntos infinitos, es decir, los conjuntos numerables.

> DEFINICION I. Un conjunto que es equivalente al conjunto de todos los enteros positivos se llama **numerable** (o contable). Si sus miembros están **ordenados** de acuerdo a la magnitud de los enteros con ellos relacionados, se habla de un conjunto enumerado (ordenado).

Con respecto a la totalidad de los miembros de un conjunto numerable a menudo es conveniente decir "numerablemente muchos" *, de la misma manera que con respecto a los miembros de un conjunto finito se dice "finitamente muchos" **.

Si **N** es el conjunto de todos los enteros positivos y **D** cualquier conjunto numerable, existen, de acuerdo con la definición, mapeos *** entre **N** y **D**. De estos mapeos, (incidentalmente, infinitamente muchos ****) sea uno arbitrariamente denotado por φ y sea $\mathbf{d}_n$ el miembro de **D** que está relacionado por φ con el entero **n** ($\mathbf{n} = 1, 2, 3, \ldots$); el índice **n** de $\mathbf{d}_n$ es, entonces, la imagen en **N** (por φ) de d_n que es, para abreviar, también llamado "el **enésimo** miembro de **D**". De esta manera, todo entero positivo aparece como el índice de un único miembro $\mathbf{d}_n$ de **D** y sólo estos miembros $\mathbf{d}_n$ pertenecen a **D**.

De aquí que podamos escribir a **D** de la siguiente manera

$$[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \ldots, \mathbf{d}_n, \ldots]^{*****}$$

N del T:

(*) En adelante usaremos la expresión *pluralidad infinita numerable*, toda vez que aparezca "numerablemente muchos" ("denumerably many").

(**) Usareos *pluralidad finita* toda vez que apareza "finitamente mucho" (finitely many").

(***) "Mapeo" ("mapping") también puede traducirse como *aplicación*.

(****) Usaremos *pluralidad infinita* toda vez que aparezca "infinitamente muchos" ("infinitely many").

(*****) Por razones tipográficas se usarán corchetes "[" "]" en lugar de llaves.

sin expresar por esto un orden en **D**, de acuerdo con el concepto de conjunto que no implica ninguna noción de orden. Sin embargo, si el $\mathbf{d}_n$ fuera ordenado de acuerdo a los valores crecientes de **n**, obtendremos la secuencia [46] o el conjunto enumerado

$$(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \ldots, \mathbf{d}_n, \ldots).$$

Si bien trataremos en general con conjuntos ordenados recién en el § 8, la noción de conjuntos enumerados será de utilidad antes del llegar al mismo.

Una consecuencia inmediata de la Definición I es que **un conjunto equivalente a un conjunto numerable es él mismo numerable.** Un conjunto numerable es infinito tanto en el sentido de la Definición VI como en el sentido de la Definición VII del § 2. El axioma de infinitud garantiza que **existen conjuntos numerables.**

2. Ejemplos Simples y Teoremas. Cualquier conjunto **M** que se origina a partir de **N**, o de cuaquier conjunto numerable prescindiendo de una pluralidad finita de miembros, **es también numerable**; para formar un mapeo sobre **N** sólo tenemos que relacionar el primer miembro restante con 1, el segundo con 2, etc. El caso particular de prescindir de un único miembro fue considerado en la pág.

El resultado no se limita sólo al caso donde se eliminan una pluralidad finita de miembros de un conjunto numerable, sino que continúa siendo válido para una pluralidad infinita de miembros, teniendo en cuenta que el resto sea infinito. Así, el conjunto **E** de todos los enteros positivos pares se obtiene de **N** derivando todos los enteros impares (una pluralidad infinita). Un mapeo se denota por el esquema

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{N}: & 1 & 2 & 3 & \ldots & \mathbf{n} & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \\ \mathbf{E}: & 2 & 4 & 5 & \ldots & \mathbf{2n} & \ldots \end{array}$$

En otras palabras, todo $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ está relacionado con $(\mathbf{2n}) \in \mathbf{E}$, y todo $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ con $\frac{\mathbf{e}}{2} \in \mathbf{N}$. En general tenemos

TEOREMA 1. **Cualquier subconjunto de un conjunto numerable D es o bien finito o bien numerable.**

Demostración. Sea nuevamente $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \ldots \mathbf{d}_n, \ldots]$ y sea $\mathbf{D}_0$ cualquier subconjunto de **D**. Si $\mathbf{D}_0$ es vacío, es finito; de otro modo, sea $\mathbf{n}_1$ el último entero [47] tal que $\overline{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{n}_1}} \in D_0$, $\mathbf{n}_2$ el último entero tal que $\overline{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{n}_2}} \in \left(\mathbf{D}_0 - \left[\overline{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{n}_1}}\right]\right)$ y así sucesivamente, de acuerdo a la inducción matemática.

46. Sin embargo no toda secuencia es un conjunto enumerado, porque en una secuencia, a diferencia del conjunto, puede aparecer el mismo miembro repetidamente. Una secuencia (infinita) sólo puede entonces contener una pluralidad finita de miembros *diferentes*.
N. del T:

47. Aquí apelamos al hecho aritmético de que en todo conjunto no vacío de enteros positivos hay un entero *mínimo*.

Distinguiremos entre dos casos:

a) Un determinado paso del procedimiento, digamos el **k**-ésimo, es el último porque el conjunto $D_0 - \left[\frac{\overline{d}}{n_1}, \frac{\overline{d}}{n_2}, \ldots, \frac{\overline{d}}{n_k}\right]$ es vacío.

Entonces $D_0 = \left[\frac{\overline{d}}{n_1}, \frac{\overline{d}}{n_2}, \ldots, \frac{\overline{d}}{n_k}\right]$, es decir D_0 es un conjunto finito.

b) El procedimiento puede continuar indefinidamente, es decir, a **cada** entero positivo **k** le corresponde un miembro $\frac{\overline{d}}{n_k} \in D_0$. Entonces por la definición anterior D_0 es numerable, lo cual completa la demostración.

Sin embargo, también un conjunto que es más amplio que **N*** puede ser numerable. Comencemos nuevamente con un ejemplo, es decir el conjunto **I** de **todos los enteros** que además contiene a 0 y a todos los enteros negativos. Ordenado de acuerdo con la magnitud de los números este conjunto no es enumerado ya que todo entero es precedido por una pluralidad infinita de enteros negativos (y posiblemente algunos positivos) menores. No obstante obtenemos una enumeración, es decir, una demostración de que **I** es numerable, colocando todos los enteros negativos $-\mathbf{n}$ inmediatamente después del positivo **n** correspondiente y dejando que 0 preceda a todos los otros enteros. Así surge un mapeo entre **I** y **N** de acuerdo al siguiente esquema

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbf{I}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \ldots & \mathbf{n} & -\mathbf{n} & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbf{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2\mathbf{n} & 2n+1 & \ldots \end{array}$$

donde **n** varía sobre los enteros positivos.

A través de este ejemplo, en el cual no se usa otra propiedad de los enteros más que la numerabilidad de **N** e **I** — **N**, percibimos que la adición de una pluralidad infinita numerable de miembros (cuanto más una pluralidad finita) a la de un conjunto numerable, produce un conjunto numerable.

Ya que este procedimiento puede repetirse cualquier número finito de veces, tenemos

TEOREMA 2. **La unión de una pluralidad finita de conjuntos cada uno de los cuales es finito o numerable, y uno por lo menos numerable, es un conjunto numerable.**

El Teorema 2 es la contraparte del Teorema 1; el último trata de "reducciones"; el Teorema 2 de cierta "extensiones" de un conjunto numerable.

(*) Es decir, comprende a *N* en sentido estricto.

3. El Conjunto de Todos los Racionales. Para obtener un resultado esencialmente eficaz, nuevamente comenzamos con un ejemplo, digamos con el conjunto **R** de todos los **números racionales** (fracciones comunes) $\frac{m}{n}$ doble $n \neq 0$. Es preferible considerar los racionales en su **forma reducida** solamente cuando el denominador **n** es un entero **positivo** y el numerador positivo o negativo **m es primo de n;** el número 0 se representa entonces de la forma $\frac{0}{1}$. Los racionales reducidos $\frac{m_1}{n_1}$ y $\frac{m_2}{n_2}$ son, por lo tanto, iguales solamente si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$.

Ordenando las relaciones de acuerdo a su magnitud observamos que entre dos racionales diferentes cualesquiera $\frac{m_1}{n_1}$ y $\frac{m_2}{n_2}$ hay una pluralidad infinita de otros diferentes; porque si $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$ podemos dividir la diferencia positiva $\frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1}$ en dos, tres, ..., **k**, ... partes iguales que son también racionales, y agregándolas a $\frac{m_1}{n_1}$ obtenemos racionales mayores que $\frac{m_1}{n_1}$ y menores que $\frac{m_2}{n_2}$. De esta manera el conjunto de todos los racionales es en un sentido definido infinitamente más amplio que los ejemplos considerados anteriormente.

Sin embargo **R resulta ser también numerable.** Una de las muchas maneras de mostrar esto es la siguiente. En un plano dibujamos muchas líneas rectas horizontales numerables y muchas líneas verticales numerables; ambos sistemas se corresponden con todos los enteros. (Ver fig. 4). Denotemos respectivamente con 0 una línea horizontal arbitraria y una línea vertical arbitraria; las líneas arriba y hacia la derecha de 0 sucesivamente por 1, 2, 3, ..., las líneas por debajo y a la izquierda de 0 por $-1, -2, -3, \ldots$. Toda intersección entre una línea horizontal y una vertical se llama **punto de reticulado.** Cada punto de reticulado está determinado por las líneas horizontales y vertical respectivas **m** y **n**, y a todo por ordenado de enteros **m** y **n** le pertenece un punto de reticulado unívocamente determinado que se denota por (m, n).

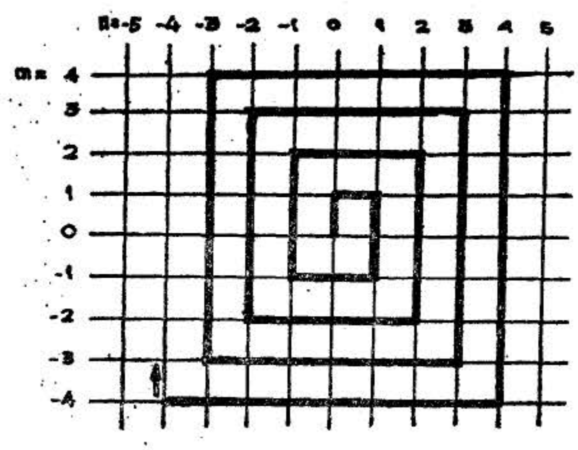

Fig. 4

Para enumerar, en primer término, los puntos de reticulado seguimos la línea quebrada en negrita dibujada en la Fig. 4 desde su punto de partida (0,0) pasando por (1,0), (1,1), (0,1) etc. Disponemos los puntos en este orden obteniendo así todos los puntos de reticulado como miembros de una secuencia. (Por lo general el procedimiento de reordenar una secuencia de secuencias en una única secuencia se llama **método diagonal de Cauchy**, cf. § 6, 8. De esta secuencia derivamos todos aquellos puntos de reticulado **(m, n)** para los cuales el correspondiente $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ no es un racional **reducido**, en partciular aquellos para los cuales **n** es 0 ó un entero negativo. Finalmente concebimos la pluralidad infinita de puntos restantes **(m, n)** como los racionales correspondientes $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$; ellos también forman una secuencia (Teorema 1), **el conjunto numerable de todos los racionales (reducidos)**. Su numeración, de acuerdo al procedimiento recién usado, comienza con

$$\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}$$

Este ordenamiento difiere fundamentalmente de aquel que se realiza de acuerdo con la magnitud, ilustrado por la línea de números (Fig. 2, § 1); si tomamos los racionales en este último orden, entonces no puede surgir ninguna enumeración.

No se apeló a ninguna demostración geométrica para formar nuestra enumeración de los racionales. No obstante daremos también una enumeración (ligeramente diferente) de los racionales, basada en una descripción aritmética.

A todo entero racional positivo reducido $\frac{m}{n}$ relacionamos la suma $a = m + n$ que es un entero positivo. Mientras que a esté unívocamente determinada por $\frac{m}{n}$ no se cumple la conversa. Sin embargo para un entero positivo a dado, sólo existe una pluralidad finita de racionales positivos reducidos $\frac{m}{n}$ tal que $m + n = a$, es decir aquellos entre las fracciones

$$\frac{a-1}{1}, \frac{a-2}{2}, \ldots, \frac{2}{a-2}, \frac{1}{a-1}$$

que son reducidas, y el mismo racional no puede aparecer más que una vez, es decir, relacionado solamente a un único a.

De aquí que podemos enumerar todos los racionales positivos de acuerdo a los valores crecientes de $a = 2, 3, 4, \ldots$; para una a definida usamos, digamos, los ordenamientos anteriormente mencionados de acuerdo a los denominadores crecientes. Si comenzamos con $0 = \frac{0}{1}$ y suponemos a los racionales positivos $\frac{m}{n}$ seguidos por el negativo $-\frac{m}{n}$ entonces surge una enumeración de todos los racionales que apenas difiere de la anterior; ella comienza con

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}; \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \ldots$$

El mapeo de un conjunto de todos los racionales $r = \frac{m}{n}$ sobre el conjunto de todos los enteros positivos n de cualquier modo, es lo suficientemente claro, si bien para un r grande no es fácil calcular el entero n que está relacionado con r. A tal efecto han sido construidas de varias maneras funciones $n = f(r)$ de un solo valor [48] y unívocamente invertibles.

Finalmente, lo que se ha logrado en esta subsección es una enumeración no precisamente de los racionales sino, en general, de cualquier secuencia de se-

48. Faber 05, Oglobin 29 (cf. Boehm 29), Godfrey 38, Johnston 48, Hanani 55.

cuencias. En efecto, no hemos usado ninguna propiedad especial de los racionales positivos sino solamente su propiedad de formar una secuencia (para $n = 1, 2, 3, \ldots$) de secuencias $\frac{m}{n}$ donde para cada n, m varía sobre una secuencia de enteros positivos. Podemos expresar entonces nuestros resultados de la siguiente manera que amplía el resultado del Teorema 2:

TEOREMA 3. **La unión de una pluralidad infinita numerable de conjuntos diferentes, cada una de las cuales es finita** [49] **o numerable, es un conjunto numerable.**

4. **El Conjunto de todos los Números Algebraicos.** Vimos en **3** que entre dos racionales diferentes cualesquiera hay una pluralidad infinita de otros. Consideramos un mapeo biunívoco entre los números reales y los puntos de una línea (§ 1, Fig. 2), esto significa que el subconjunto de aquellos puntos de la línea que están relacionados con los números racionales —en síntesis, el subconjunto de todos los **puntos racionales**— es infinitamente **denso,** término que está definido en el § 9, 1 para conjuntos ordenados de puntos en general. Sin embargo se señaló en el § **1** que a pesar de su densidad los puntos racionales no agotan el concepto de "punto de una línea". Ahora extenderemos, a través de un ejemplo que fue el primer descubrimiento de Cantor en teoría de conjuntos, el conjunto de todos los racionales a un conjunto de números aún más amplio (y denso) que además demostraremos que es numerable. La cuestión de si el conjunto correspondiente de puntos constituye la **totalidad** de los puntos de la línea (o al menos si esta totalidad es numerable) asumirá gran importancia. En efecto, durante sus primeros estudios del problema, Cantor tomó el resultado de la presente subsección como sugiriendo la numerabilidad del conjunto de todos los puntos de la línea. Por lo tanto la respuesta (contraria) que está dada en el § 4 constituirá la piedra angular de la teoría de conjuntos como una nueva rama de la matemática y al mismo tiempo la primera aplicación importante de esta teoría a otro dominio clásico de la matemática.

Tal como fue definida en el § 1, toda raíz de la ecuación algebraica de grado $n \neq 0$

$$(1) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots \quad a_{n-1} + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

con coeficientes **integrales** a_k se llama **número algebraico.** Dicha raíz no necesita ser real; sin embargo ya que la inclusión de raíces imaginarias y complejas no aportaría nada importante a nuestros argumentos (en tanto no trasciende los límites geométrico-intuitivos de los puntos de una línea), nos restringiremos, por motivos de simplicidad, a números algebraicos **reales** y siempre concibiremos al término **número algebraico** con restricción (un tanto artificial).

49. Esta ampliación de nuestro resultado es abiertamente admisible teniendo en cuenta el Teorema 1, sin la condición (afirmada en el Teorema 2) de que por lo menos uno de los conjuntos sea numerable. De hecho, una pluralidad infinita de conjuntos finitos diferentes dan lugar a una unión infinita.

Los racionales son los números algebraicos que son raíces de ecuaciones lineales ($n = 1$); la totalidad de los números algebraicos contiene, además, las raíces de ecuaciones de una pluralidad infinita de grados 2, 3, 4, ...[50]. Cf. § 9, 2.

En la demostración de esta subsección no usaremos el tan mentado teorema fundamental del álgebra que es algo complicado y establece que toda ecuación algebraica de grado positivo tiene una raíz (real o compleja), sino sólo el siguiente teorema elemental: **una ecuación algebraica de grado n no tiene más que n raíces reales.**

En efecto, si al polinomio del lado izquierdo de (1) lo denotamos por $p(x)$ y si r_1 es una raíz real de (1), la división de $p(x)$ por $x - r_1$ da

$$p(x) = (x - r_1)\, p_1(x) + s_1 \tag{2}$$

Reemplazando r_1 por x en (2) da $0 = 0 + s_1$, es decir, $s_1 = 0$. Repitiendo este procedimiento con respecto a una raíz real r_2 (si la hay) de la ecuación $p_1(x) = 0$ y procediendo nuevamente de la misma manera, finalmente llegamos a una identidad de la forma

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_k)\, p_k(x) \tag{3}$$

donde $p(x) = 0$ no tiene raíz real y $k \leq n$. (Si el polinomio $p_k(x)$ es una constante tenemos $k = n$ y $p_n(x) = a_o$.

(1) no tiene raíz real fuera de $r_1, r_2, \ldots r_k$; en efecto, para cualquier otro real $x = r_k + 1$ cada factor del lado derecho de (3) es diferente de 0, de aquí también $p(r_k + 1) \neq 0$.

Para demostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable [51] comenzamos enumerando las **ecuaciones** algebraicas. Esto ciertamente no puede lograrse ordenando las ecuaciones, como es usual en álgebra, de acuerdo a sus grados, porque entonces las ecuaciones lineales, es decir los números racionales, agotarían la enumeración. Para cumplir nuestra tarea asignamos a la ecuación (1) no sus grados sino el entero positivo

$$h = (n - 1) + |a_o| + |a_1| + \ldots + |a_n| \tag{4}$$

donde $|a_k|$ denota el valor absoluto de a_k; **h** se llamará la **cantidad** de la ecuación (1). Por ejemplo, $2x^2 - 3x + 1 = 0$ tiene la cantidad de $1 + 2 + 3 + 1 = 7$, $x^3 = 0$ la cantidad de $2 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3$.

Mientras que toda ecuación algebraica tiene un entero positivo definido para su cantidad, ahora demostraremos que a un entero positivo **h** dado, per-

---

50. Sin duda m/l es además una raíz (de una pluralidad infinita) de grado > 1, por ejemplo, de la ecuación $l^2x^2 - m^2 = 0$. Sin embargo para cada grado existen números algebraicos que no son raíces de ecuaciones de un grado más bajo —hecho que aquí no se requiere para nuestra argumentación.

51. La demostración es fundamentalmente la de Cantor de 1874, 1. Para una función enumerada explícitamente cf. Vandiver 36.

tenecen solamente una pluralidad finita de ecuaciones algebraicas de cantidad **h** En primer lugar, el grado **n** de tal ecuación no puede exceder a **h**, por (4) y $|a_0| \geq 1$. De aquí que no hay más que $h + 2$ términos, a lo sumo, sobre el lado derecho de (4). Pero obviamente el entero positivo **h** puede descomponerse en la suma de a lo sumo $h + 2$ términos no-negativos, sólo en un número finito de pasos. Estas descomposiciones pueden ordenarse en un orden definido dando sucesivamente a **n** los valores h, $h - 1$, ..., 2, 1 y tomando siempre para cada valor único de **n**, para a_k el entero positivo maximal respectivo aun admisible, incluyendo 0 si $k > 0$. Finalmente, cuando todas las soluciones enteras no-negativas A_k de la ecuación diofántica

$$h = (n - 1) + A_0 + A_1 + \dots + A_n \quad (\text{dados } h \text{ y } n\ (\leq h),\ A_0 \neq 0)$$

han sido obtenidas de esta manera, entonces las soluciones respectivas a_k de (4) surgen tomando independientemente

$$a_0 = \pm A_0, a_1 = \pm A_1, \dots, a_n = \pm A_n;$$

esto produce a lo sumo 2^{n+1} sistemas de soluciones diferentes (exactamente 2^{n+1} si todos los A_k son diferentes de 0). De esta manera han sido ordenadas todas las ecuaciones (1) de cantidad **h**.

Ejemplo. $h = 3$; sólo se considerarán los grados $n = 3, 2, 1$. Consideramos entonces las ecuaciones diofánticas

$$3 = (n - 1) + |a_0| + \dots + |a_n|$$

para cada uno de los valores $n = 3, 2, 1$ y con la restricción $a_0 \neq 0$. Se obtiene las siguientes siete soluciones:

$$\begin{aligned} 3 &= 2 + 1 + 0 + 0 + 0 && (n = 3) \\ &= 1 + 2 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 0 + 1 && (n = 2) \\ &= 0 + 3 + 0 = 0 + 2 + 1 = 0 + 1 + 2. && (n = 1) \end{aligned}$$

Finalmente para cada una de estas soluciones tenemos que distribuir independientemente los signos + y − sobre todos los términos $\neq 0$, excepto para el primer término que se refiere al grado. Por ejemplo, la primera solución produce las dos descomposiciones correspondientes a (4)

$$3 = 2 + |1| + 0 + 0 + 0 = 2 + |-1| + 0 + 0 + 0$$

y la tercera solución produce $2^2 = 4$ descomposiciones

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + |1| + |1| + 0 = 1 + |-1| + |1| + 0 \\ &= 1 + |1| + |-1| + 0 = 1 + |-1| + |-1| + 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones algebraicas correspondientes son respectivamente

$$x^3 = 0, -x^3 = 0, x^2 + x = 0, -x^2 + x = 0, x^2 - x = 0, -x^2 - x = 0.$$

Evidentemente las siete soluciones anteriormente obtenidas producen un total de $2 + 2 + 4 + 4 + 2 + 4 + 4 = 22$ ecuaciones algebraicas formalmente diferentes, y estas son todas las ecuaciones de cantidad 3.

Por esto **todas** las **ecuaciones algebraicas** se enumeran de una manera definida, o sea tomando las ecuaciones correspondientes a las cantidades de pluralidad infinita $\mathbf{h} = 1, 2, 3, \ldots$ en este orden y colocando, para cada **h**, las ecuaciones de pluralidad finita con la cantidad **h** tal como se mostró anteriormente. De aquí que, por el Teorema 3, obtenemos una **secuencia** que contiene todas las ecuaciones algebraicas.

El último paso es el pasaje de las ecuaciones a sus raíces (reales), es decir, a los números algebraicos. Puesto que cada ecuación tiene solamente una pluralidad finita de raíces (o sea una ecuación de grado **n** a lo sumo **n** raíces diferentes) podemos concebir estas raíces ordenadas de cualquier manera, por ejemplo, de acuerdo a la magnitud. De esta manera se obtiene una secuencia que contiene a todos los números reales algebraicos. En verdad, por este medio se registra el mismo número varias veces (aun una pluralidad infinita); por ejemplo, el número 2 como una raíz de las ecuaciones con cantidades diferentes

$$x - 2 = 0 \ (\mathbf{h} = 3), \quad x^2 - 4 = 0 \ (\mathbf{h} = 6), \quad x^4 - 16 = 0 \ (\mathbf{h} = 20), \quad \text{etc.}$$

y además como la raíz de ecuaciones con cantidades iguales, por ejemplo, $x - 2 = 0$ y $-x + 2 = 0$. Para obtener una secuencia que contiene sólo diferentes números derivamos de la seceuncia anterior todos los números que han aparecido antes; entonces cada número algebraico aparece entre las raíces de una ecuación con una cantidad mínima. De esta manera hemos demostrado:

El conjunto de todos los números algebraicos (reales) es numerable.

De manera similar a las enumeraciones de los racionales definidos anteriormente, esta enumeración de los números algebraicos destruye completamente el orden "natural" de los números de acuerdo a su magnitud. Por ejemplo, los números $-\frac{1}{8} = -0{,}125$ y $7 = 2.645 \ldots$ como las raíces de ecuaciones de cantidad 9

$$8x + 1 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 7 = 0$$

aparecen próximas unas a otras en nuestra numeración mientras que $-\frac{1001}{8000}$ (aunque difiere muy poco de $-\frac{1}{8}$) aparece muy posteriormente entre las raíces de las ecuaciones de cantidad 9001.

5. Aplicaciones a Conjuntos Infinitos en General. Mientras que hasta ahora hemos tratado con conjuntos numerables en sí mismos, ahora usaremos la numerabilidad como un instrumento para la investigación de conjuntos infinitos en general. El trampolín del cual podemos saltar es el siguiente teorema que tiene un carácter fundamental y que también atraerá nuestra atención más adelante.

TEOREMA 4. Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

Ya usamos este teorema para demostrar la equipolencia entre dos definiciones (VI y VII) de infinito y finito en el § 2, 5. De aquí que no debemos usar esta equipolencia para demostrar el Teorema 4; en efecto, tenemos que realizar en forma separada las demostraciones concernientes a cómo está considerado el "infinito" en el Teorema 4 en tanto "no - inductivo" o "reflexivo". Las demostraciones tienen un carácter completamente diferente y, como el lector verificará, es la demostración A (y no la demostración B) la que mostrará la equipolencia entre nuestras definiciones de infinito.

Demostración A. Sea **S** un conjunto no - inductivo; es decir un conjunto no - vacío que no puede agotarse derivando **k** miembros donde **k** denota cualquier entero positivo.

En primer término, mostraremos por inducción matemática que, para todo entero positvo **n**, **existe un subconjunto de S que contiene precisamente n miembros.** Para $\mathbf{n} = 1$ esto es claro puesto que, por hipótesis, **S** es no - vacío, y, para cualquier $s_1 \varepsilon \mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1 = [s_1]$ es un subconjunto satisfactorio. Si **k** es cualquier entero positivo suponemos que el enunciado es verdadero para $\mathbf{n} = \mathbf{k}$; esto significa que $\mathbf{S}_k = [s_1, s_2, \ldots, s_k]$ es un subconjunto de **S**. Por hipótesis este subconjunto no agota a **S**, y por lo tanto $\mathbf{S} - \mathbf{S}_k \neq 0$. Sea s_{k+1} un miembro arbitrario de $\mathbf{S} - \mathbf{S}_k$; entonces $\mathbf{S}_{k+1} = [s_1, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1}]$ es también un subconjunto de **S** y contiene $\mathbf{k} + 1$ miembros. De esta manera se ha mostrado que el enunciado anterior es verdadero para $\mathbf{n} = 1$, y si es verdadero para $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ lo es también para $\mathbf{n} = \mathbf{k} + 1$; por inducción matemática, entonces es verdadero para **todo n.** Por otra parte, los subconjuntos finitos $\mathbf{S}_k$ de **S** muestran tener sucesivamente la propiedad de que $\mathbf{S}_{k+1}$ incluye a $\mathbf{S}_k$ como subconjunto propio.

En segundo término, los conjuntos $\mathbf{S}_k$ para $\mathbf{k} = 1, 2, 3, \ldots$ forman una secuencia de subconjuntos de **S**, y su unión, que contiene a **todos** los miembros s_k, para $k = 1, 2, 3, \ldots$, constituye un subconjunto numerable $\overline{\mathbf{S}}$ de **S**. ($S = \overline{S}$ no está excluido). De esta manera se completa la demostración **A** del Teorema 4.

Esta demostración, aparentemente muy simple, se atiene a un procedimiento generalmente no utilizado en matemáticas y por cierto no incluido en nuestros anteriores axiomas, es decir sobre una **infinidad** de elecciones de miembros arbitrarios de **S**. En efecto, para cada **k** hemos elegido un s_k arbitrario para formar los conjuntos s_k. Retomaremos este punto en los § **6**, **5** y § 11, **6**.

Demostración B. Sea **S** un conjunto reflexivo, es decir $\mathbf{S} \sim \overline{\mathbf{S}}$, y sea φ un mapeo arbitrario de **S** sobre su propio subconjunto $\overline{\mathbf{S}}$; φ se conservará a lo largo de la demostración. El miembro de $\overline{\mathbf{S}}$ que por φ corresponde a $\mathbf{s} \varepsilon \mathbf{S}$ será denotado por $\varphi(\mathbf{s})$.

Sea $\mathbf{t}_1$ un miembro arbitrario del conjunto no-vacío $\mathbf{S} - \overline{\mathbf{S}}$. Sucesivamente definidos los miembros.

$$\mathbf{t}_1,\ \varphi(\mathbf{t}_1) = \mathbf{t}_2,\ \varphi(\mathbf{t}_2) = \mathbf{t}_3,\ \ldots,\ \varphi(\mathbf{t}_k) = \mathbf{t}_{k+1},\ \ldots$$

Después de haber sido elegido $\mathbf{t}_1$ estos miembros se determinan unívocamente; todos ellos pertenecen a $\overline{S}$, excepto $\mathbf{t}_1$ que pertenece a $S - \overline{S}$, de aquí que no pertenezca a $\overline{S}$.

De esta manera obtenemos un subconjunto numerable $[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \ldots]$ de **S siempre que estos miembros sean diferentes.** Mostraremos, por consiguiente, por una demostración indirecta, que $\mathbf{t}_i \neq \mathbf{t}_k$ si $\mathbf{i} \neq \mathbf{k}$.

Si los $\mathbf{t}_k$ no fueron todos diferentes, sea $\mathbf{t}_m$ el primer $\mathbf{t}_k$ que iguala al $\mathbf{t}_l$ precedente:

$$(1)\ t_m = t_l.\ (\mathbf{l} < \mathbf{m}, \text{ de aquí } \mathbf{m} > 1)$$

$\mathbf{t}_m$, entonces, pertenece a $\overline{S}$ y es, por consiguiente, diferente de $\mathbf{t}_1$, de aquí que también $\mathbf{t}_l \neq \mathbf{t}_1$, es decir $\mathbf{l} > 1$. De acuerdo a la definición de los miembros $\mathbf{t}_k$ tenemos $\mathbf{t}_l = \varphi\ (\mathbf{t}_{l-1})$ y $\mathbf{t}_m = \varphi\ (\mathbf{t}_{m-1})$.

Escribiendo a (1) en la forma $\varphi\ (\mathbf{t}_{m-1}) = \varphi\ (\mathbf{t}_{l-1})$ y utilizando la biunivocidad del mapeo φ, concluimos $\mathbf{t}_{m-1} = \mathbf{t}_{l-1}$. Pero esto contradice nuestro supuesto de que $\mathbf{t}_m$ es el primer $\mathbf{t}_k$ que iguala al precedente. La contradicción muestra que ningún $\mathbf{t}_k$ iguala al precedente; o sea que todos los miembros $\mathbf{t}_k$ $(\mathbf{k} = 1, 2, 3, \ldots)$ son diferentes.

De aquí que $[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \ldots]$ es un conjunto numerable y un subconjunto de **S**, lo cual completa la demostración.

En contraste con la demostración A, en la presente demostración sólo ha sido elegido arbitrariamente un único miembro del conjunto, es decir $\mathbf{t}_1$. No es difícil mostrar (cf. **Foundations**, Cap. 11, § 8) que los axiomas introducidos hasta aquí, con el agregado del Axioma VI (§ 5, 3), son suficientes para la demostración B — pero no para la demostración A en la cual se utilizó el axioma de elección (§ 6, 5).

El Teorema 4 nos permite demostrar para **cualquier conjunto infinito** [52] ciertas propiedades que son análogas a aquellas expresadas para los conjuntos **numerables** por los Teoremas 1 y 2.

Sea **S** cualquier conjunto infinito y S_o un subconjunto finito o numerable de **S** tal que $\overline{S} = S - S_o$ es aun un conjunto inifinito [53]. Mostraremos que $\overline{S} \sim S$.

Sea $\overline{S}'$ un subconjunto **numerable** de $\overline{S}$ (Teorema 4) y $\overline{S} - \overline{S}' = \overline{S}''$. ($\overline{S}''$ puede ser infinito, finito, o vacío). Esto significa

$$\overline{S} = \overline{S}' \cup \overline{S}''. \qquad (\overline{S}' \text{ y } \overline{S}'' \text{ conjuntos disyuntos})$$

De aquí que cualquier miembro de S pertenece a un único conjunto de los pares disyuntos S_o, $\overline{S}'$, $\overline{S}''$.

---

52. Después de haber completado la demostración de la equipolencia mediante el Teorema 4, no distinguiremos más entre conjuntos inductivos y no-reflexivos, o no-inductivos y reflexivos, sino que simplemente hablaremos de conjuntos *finitos* e *infinitos*.

53. Si S_o es finito esta condición es superflua. Sin embargo para S_o numerable puede requerírsela; si S es el conjunto de todos los enteros positivos y S_o el conjunto de todos los enteros $> 10^{10}$ entonces la condición no se satisface.

Ahora construimos un mapeo del conjunto $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \cup \overline{\mathbf{S}}' \cup \overline{\mathbf{S}}'' = (\mathbf{S}_0 \cup \overline{\mathbf{S}}') \cup \overline{\mathbf{S}}''$ sobre su subconjunto $\overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{S}}' \cup \overline{\mathbf{S}}''$ relacionando todo miembro de $\overline{\mathbf{S}}''$ (si lo hay) a él mismo (54) y mapeando $\mathbf{S}_0 \cup \overline{\mathbf{S}}'$ y $\overline{\mathbf{S}}'$ de acuerdo al Teorema 2. De aquí:

TEOREMA 5. **Si de un conjunto infinito S se derivan muchos miembros o una pluralidad numerable de miembros, tal que aun queda una pluralidad infinita de miembros, se obtiene un conjunto que es equivalente a S.**

Del Teorema 5 inmediatamente concluímos:

TEOREMA 6. **Si se suma a un conjunto infinito una pluralidad finita o una pluralidad numerable de miembros, se obtiene un conjunto que es equivalente al conjunto original.**

Esto se sigue al tomar el nuevo conjunto (más amplio) como el conjunto **S** del Teorema 5.

Los Teoremas 5 y 6 no contienen nada nuevo (cf. los Teoremas 1 y 2) si el conjunto infinito en cuestión es numerable. Su importancia se pondrá de relieve cuando en el § 4, se garantice la existencia de conjuntos infinitos no-numerables; para estos conjuntos **S** la condición del Teorema 5 ("tal que ...") se tornará superflua.

EJERCICIOS

1) Demostrar que el conjunto de todas las fracciones que terminan en decimales, o el conjunto de todos los números algebraicos entre 0 y 1, es numerable.

2) Ejemplificar la manera aritmética de enumerar los racionales (en 3) con respecto a los puntos de reticulado de la fig. 4.

3) Demostrar que el conjunto de aquellos puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas, con respecto a un par de ejes dados, son racionales, es numerable.

4) Representar cualquier conjunto numerable dado como la unión de una pluralidad numerable de pares disyuntos de conjuntos numerables.

5) Enumerar el conjunto de todas las ecuaciones algebraicas por medio del siguiente método (que difiere esencialmente del de Cantor). Asignar al polinomio $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{x}^n$ con coeficientes integrales $\mathbf{a}_k$ el entero positivo $\mathbf{N}(\mathbf{f}) = \mathbf{p}_1^{A_0}\, \mathbf{p}_2^{A_1} \ldots \mathbf{p}_{n+1}^{A_n}$ donde $\mathbf{p}_k$ denota el **k**-ésimo número primo (es decir, $\mathbf{p}_1 = 2$, $\mathbf{p}_2 = 3$, $\mathbf{p}_3 = 5$, etc.) y donde los enteros no-negativos $\mathbf{A}_k$ se

54. Tenemos que usar ese mapeo idéntico ya que nada conocemos acerca de la naturaleza de $\overline{S''}$.

obtienen de a_k mapeando el conjunto de todos los enteros sobre el conjunto de los enteros no-negativos. Analizar si esta correspondencia entre polinomios y enteros positivos permite un mapeo biunívoco.

6) ¿Qué conjuntos numerables de **S** se obtienen si la demostración **A** del Teorema 4 se usa sujeta a cada una de las siguientes reglas?:

a) **S** es el conjunto de todos los enteros positivos; el miembro arbitrario elegido en **S** y sus subconjuntos será el **menor entero** del conjunto respectivo.

b) **S** es el conjunto de todos los enteros positivos; el miembro arbitrario será el **menor entero divisible por 5.**

c) **S** es el conjunto de todos los enteros positivos; el miembro arbitrario será el **menor número primo.**

d) S es el conjunto de todos los racionales positivos escritos como fracciones reducidas $\frac{m}{n}$; el miembro arbitrario será la fracción con la **menor suma** $m + n$, y si esta suma corresponde a varias fracciones, entonces la menor (de acuerdo a la magnitud) entre esas fracciones.

7) ¿Qué subconjunto numerable de **S** se obtiene si la demostración B del Teorema 4 se usa sujeta a esta regla?: **S** es el conjunto de todos los enteros positivos, $\overline{S}$ el subconjunto de todos los enteros pares, el mapeo que relaciona $x \varepsilon S$ a $(2x) \varepsilon \overline{S}$ y $t_1 = 5$.

8) (Cf. el Teorema 5) Mostrar que a partir de todo conjunto infinito dado se pueden derivar una pluralidad numerable de miembros tal que quede una pluralidad infinita de miembros.

9) Demostrar el Teorema 6, sin referirlo al Teorema 5, de una manera análoga a la demostración del Teorema 5.

10) Suponiendo que existan una pluralidad infinita de números trascendentales (reales), mostrar que el conjunto de todos los números trascendentales es equivalente al conjunto de todos los números reales.

Los ejercicios 11) - 13) son par lectores avanzados

11) Llamamos a dos intervalos cerrados, es decir, sobre la línea de números (§ 1), **no-superpuestos** si no tienen ningún punto en común, excepto posiblemente para los puntos finales. Demostrar que cualquier conjunto de intervalos cerrados no-superpuestos sobre la línea es a lo sumo numerable (es decir, finito o numerable). (Indicar: dado el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, sea k el menor entero mayor que $\frac{1}{b-a}$, y $1 = [k \,.\, a]$ [55]; relacionar $\frac{1+1}{k}$ al intervalo dado).

55. Comúnmente, $[[c]]$ denota el entero $\leq c$ y que sigue a c.

Es fácil generalizar el teorema de la línea al plano (utilizando intervalos bidimensionales, es decir, rectangulares) o a espacios de tres y más dimensiones.

12) Demostrar que un conjunto infinitos de puntos (es decir, de una línea o un plano) que sólo tiene un número finito de puntos acumulados (§ 9, 5) es numerable, y mostrar a través de un ejemplo que este enunciado no puede invertirse.

13) Demostrar que una función **monotónica** tiene a lo sumo una pluralidad numerable de puntos de discontinuidad. (indicar: para un entero positivo **n** hay, en cualquier intervalo cerrado, sólo una pluralidad finita de saltos con una cantidad mayor que $\frac{1}{n}$.)

§ 4. EL CONTINUO. CARDINALES TRANSFINITOS

1. Ejemplos Adicionales de Conjuntos Equivalentes. En las subsecciones 1 - 4 del § 3 consideramos varios conjuntos de dimensiones aparentemente muy diversas, que por medio de varios artificios, cada vez más ingeniosos demostramos que son **equivalentes**, o sea numerables. Comparando esta situación con las propiedades de conjuntos finitos, en donde derivar o sumar miembros produce conjuntos que son **no-equivalentes** al conjunto original, la sospecha se basa en que **dos conjuntos infinitos cualesquiera pueden ser equivalentes.** Esto significaría que hay solamente un número cardinal infinito "infinito (∞)". Todo escolar talentoso de quince años ha llegado a esta noción y ha visto relaciones tales como $\infty + \infty = \infty$ y $\infty \cdot \infty = \infty$ que parecen corresponder al Teorema 2 y 3 del § 3. Así, los conjuntos infinitos serían triviales con respecto a su equivalencia (incluyendo a los números cardinales) y ciertamente no serían materia de una nueva rama de la matemática.

Corroboraremos esta sospecha presentando nuevos ejemplos de conjuntos esencialmente diferentes que a pesar de su extensión obviamente distinta demuestran ser equivalentes. Estos ejemplos, sin embargo, serán seguidos en la subsección 2 por una exposición del descubrimiento de Cantor (de 1874) de que **existen conjuntos infinitos que no son equivalentes.** Este sorprendente y dramático descubrimiento que está en la base de la Teoría de Conjuntos, se torna más evidente por medio de los siguientes ejemplos.

Estamos considerando conjuntos cuyos miembros son puntos. Dados dos segmentos [56] de diferente longitud, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (Fig. 5), **M** denota el conjunto de todos los puntos $\overline{AB}$, **N** el conjunto de todos los puntos de $\overline{CD}$, incluyendo los puntos finales. Demostraremos que $M \sim N$.

56. A fin de simplificar tomamos segmentos rectos, pero también podría hacerse con arcos de un círculo o de otra curva.

Por ejemplo, puede establecerse un mapeo de la siguiente manera. Dibujamos los segmentos paralelos entre sí como en la Fig. 5, unimos **C** con **A**, y **D** con **B**, por líneas rectas que se intersectarán en el punto **P** por la diferente longitud de los segmentos. Cualquier semirrecta trazada desde P, o bien corta a ambos segmentos o a ninguno; en el primer caso el punto de intersección con $\overline{AB}$ se relacionará con el punto de intersección $\overline{CD}$, con lo cual se produce una correspondencia claramente biunívoca entre los puntos de ambos segmentos. De aquí que $M \sim N$.

Esta demostración ilustra dos observaciones anteriores. En primer lugar, trazando $\overline{AB}$ sobre $\overline{CD}$ podemos considerar a **M** como un subconjunto propio de **N** y de esta manera obtenemos un nuevo ejemplo de equivalencia entre el todo y una parte (§ 2, **5**). En segundo lugar, las objeciones a nuestra demostración de que $M \sim N$ han sido presentadas alegando que se "debe" establecer una correspondencia entre los puntos de **M** y **N** trazando **paralelas** (por ejemplo, paralelas a $\overline{AC}$) en lugar de semirrectas con centro en **P.**

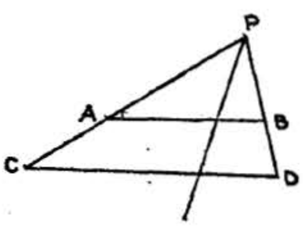

Fig. 5

En verdad, de esta manera **no** obtendríamos una correspondencia biunívoca, pues quedarán puntos en $\overline{CD}$ a los que no corresponderán ninguna imagen en $\overline{AB}$. Este supuesto fracaso, sin embargo, no tiene ninguna significación teniendo en cuenta nuestra demostración. Como todo estudiante secundario sabe, siempre hay una gran variedad de formas por medio de las cuales **no se consigue** demostrar un teorema matemático dado (verdadero o falso); son insignificantes, porque lo que realmente importa es si hay una **única forma** (o varias formas) de conseguirlo, o bien si se puede dar una demostración

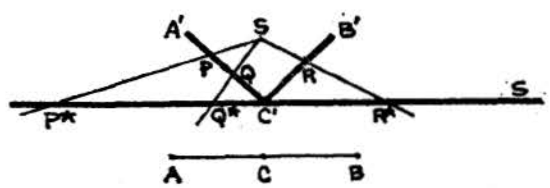

Fig. 6

general de que **no hay forma** de conseguirlo (como la demostración del Teorema 1 daba más adelante en 2).

Un hecho aún más sorprendente que **M** $\sim$ **N** es la equivalencia entre un segmento (abierto) considerado como el conjunto **K** de sus puntos o de los números correspondientes, y el conjunto **L** de todos los puntos de una línea ilimitada (infinita) o de todos los números reales. Un mapeo que muestre la equivalencia puede constituirse de la siguiente manera (ver Fig. 6). Denotando la línea recta con s, el segmento con $\overline{\mathbf{AB}}$, y su centro con **C**, doblamos el segmento (como si fuera un alambre fino) en **C** y lo proyectamos en s tal que **C** sea un punto **C'** de **s** y tal que **A** y **B** —en la nueva posición, **A'** y **B'**— se encuentren sibre el mismo lado de s (en la Fig. 6 arriba de s) a igual distancia de s. Finalmente el punto medio de $\overline{\mathbf{A'B'}}$ (cuyo segmento no aparece en la figura) será denotado con **S**.

Puede establecerse una simple correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento abierto $\overline{\mathbf{A'C'B'}}$ y los puntos de la línea s trazando semirrectas desde **S**. Cualquiera de cstas semirectas intersectará o bien a ambos, al segmento abierto y a **s**, o no intersectará a ninguno. En el primer caso, los puntos del segmento y de la línea pertenecientes a la misma semirecta se relacionarán unos con otros; en la Fig. 6, por ejemplo, **P** y **P***, **Q** y **Q***, **R** y **R*** (mientras que **C'** se corresponde a sí mismo). De esta manera se construye un mapeo que muestra la equivalencia entre los conjuntos **K** y **L**, si bien el último es, por así decirlo, infinitamente más amplio que el primero.

Nuestro particular método de mapeo es adecuado para segmentos abiertos (sin sus extremos **A** y **B**) y no para segmentos cerrados [57]. Además de acuerdo al Teorema 6 del § 3, 5, la equivalencia también vale después de la suma de los extremos o de uno de ellos.

En lugar de la definición geométrica podemos usar un método analítico, por ejemplo la función trigonométrica **y** = tang **x** (Fig. 7). Si **x** está restringido al intervalo abierto.

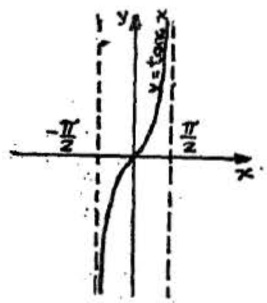

Fig. 7

57. De hecho, las semirrectas de *S* que atraviesan *A'* y *B'* siendo paralelas a *s*, no intersectan a *s*.

$$-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}$$

(es decir, de -90° a 90°), y aumenta monotónicamente y asume todos los valores reales. Esta función, entonces, produce un mapeo del conjunto de todos los números reales sobre el segmento abierto finito de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

2. Demostración de que el Continuo no es numerable. Hemos tratado repetidamente con el conjunto **N** de todos los enteros positivos y el conjunto **C** (**continuo**) de todos los puntos de un segmento o intervalo, y con muchos conjuntos que se demostró eran equivalentes a **N** o a **C**. Además podemos concebir a **C** como un conjunto de números, es decir, de todos los números de un intervalo. La sospecha expresada en la subsección **1** incluiría que **N** puede ser equivalente a **C**.

Ahora refutamos esta conjetura demostrando que **N** y **C** no son equivalentes de aquí que **hay conjuntos infinitos no-equivalentes.** Como mencionamos antes, este es el resultado fundamental del cual parte la teoría de conjuntos (infinitos).

No se diferencia **qué** intervalo usamos como continuo (cf. 1) y si incluimos los extremos o uno de ellos. Por razones prácticas que enseguida mostraremos, elegimos para **C** el intervalo "semicerrado" $0 < X \leq 1$ de los números reales positivos hasta, e incluyendo, 1. Es conveniente considerar los miembros de **C** como números **t** en lugar de puntos; escribiremos los números como **fracciones decimales** (decimales) —no porque esta representación de los números reales sea superior a las otras representaciones, por ejemplo como fracciones continuas sino porque todos los lectores están familiarizados con ésta.

Aquí y más adelante, usaremos el siguiente **teorema auxiliar** de la teoría de los decimales:

Todo número real positivo [58] A tiene uno y sólo un desarrollo en un decimal "infinito".

$$A = m\,.\,c_1\,c_2\,c_3\,\ldots\,c_k\,\ldots$$

donde m es un entero no-negativo y los dígitos c_k pueden asumir los valores 0, 1, 2, ..., 9, con la condición de que después de todos los c_k aparecerán dígitos diferentes de 0. (Esta condición está expresada por **infinito**; de otra manera, si a partir de un cierto lugar donde sólo aparecen ceros, hablamos de un decimal con terminación). **Luego, dos decimales infinitos que no son idénticos representan diferentes números reales.**

58. El número 0, por cierto, no tiene expansión infinita. Esta es la razón por la cual no hemos incluido a 0 en nuestro intervalo.

Un número real positivo que puede desarrollarse en un decimal con terminación [59]

$$\mathbf{m} \,.\, \mathbf{c}_1\, \mathbf{c}_2\, \mathbf{c}_3 \ldots \mathbf{c}_n \qquad (\mathbf{c}_n \neq 0)$$

es igual al decimal infinito

$$\mathbf{m} \,.\, \mathbf{c}_1\, \mathbf{c}_2\, \mathbf{c}_3 \ldots (\mathbf{c}_n - 1)\; 999 \ldots$$

(o, si es el entero positivo m, a $(\mathbf{m} - 1)$, 999 ...)[60].

Mientras que estos hechos son muy conocidos por su uso escolar, no pueden darse sus rigurosas demostraciones sin un análisis del concepto de número **real.** Para esta demostración, entonces, se remite al lector a los libros de textos introductorios (cf. además 9, 1). La existencia de números reales con dos desarrollos decimales no-idénticos (uno infinito y el otro con terminación) para varios propósitos es un inconveniente, pues hace a las fracciones continuas superiores a los decimales.

De acuerdo a este teorema, nuestro intervalo **C** puede definirse como el conjunto de todos los decimales infinitos de la forma $0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots c_k \ldots$ (que incluye el número $1 = 0{,}999 \ldots$).

Para mostrar que **C** no es equivalente al conjunto **N** de todos los enteros positivos demostramos el siguiente

LEMA. **Dado cualquier subconjunto numerable $\mathbf{C}_0$ de C, existen miembros de C que no están contenidos en $\mathbf{C}_0$; es decir, $\mathbf{C}_0$ es un subconjunto propio de C.** En otras palabras, no hay un conjunto numerable que contenga a todos los miembros de **C.**

(Más claramente, existen subconjuntos propios numerables de **C**; por ejemplo el conjunto de todos los decimales **periódicos** positivos entre **0 y 1,** cuyos miembros son números racionales).

Demostración del lema [61]. Que $\mathbf{C}_0$ sea numerable significa que existen mapeos entre $\mathbf{C}_0$ y el conjunto **N** de todos los enteros positivos. Elegimos un mapeo φ y lo expresamos por el siguiente esquema:

---

59. Como es bien sabido, esto es válido para los racionales $\dfrac{m}{n}$ cuyo denominador en la forma reducida no es divisible por otros números primos que no sean 2 y 5.

60. El lector que encontrara esto sorprendente puede, por ejemplo, concebir a la igualdad $1 = 0{,}999 \ldots$ multiplicando por 9 a la igualdad —— $= 0{,}111 \ldots$

61. Seguimos fundamentalmente el método de Cantor de 1892, que es la demostración más simple del Teorema 1 y la más conveniente para la generalización (cf. la subsección 7). La primera demostración la da Cantor en 1874, simplificada en 1879-84 I; cf. el ingenioso método de Poincaré 10. Todas estas demostraciones son *in nuce* similares, o sea basadas en el método diagonal (ver más adelante).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\textbf{miembros de } \mathbf{N} & & & & & & \textbf{miembros de } \mathbf{C}_0 & & & & \\
1 & \longleftrightarrow & 0. & \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} & \cdots & & & \\
2 & \longleftrightarrow & 0. & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} & \cdots & & & \\
3 & \longleftrightarrow & 0. & \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} & \cdots & & & \\
4 & \longleftrightarrow & 0. & \mathbf{a}_{41} & \mathbf{a}_{42} & \mathbf{a}_{43} & \mathbf{a}_{44} & \cdots & & & \\
\cdot & & & & & & & & & & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & \\
\cdot & & & & & & & & & & \\
\mathbf{n} & \longleftrightarrow & 0. & \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \mathbf{a}_{nn} & \cdots & \\
\cdot & & \cdot & & & & & & & & \\
\cdot & & \cdot & & & & & & & & \\
\cdot & & \cdot & & & & & & & &
\end{array}
$$

El decimal relacionado al entero **n** por φ se lo denota aquí por $0.\ \mathbf{a}_{n1}\ \mathbf{a}_{n2}\ \mathbf{a}_{n3}\ldots$ Generalmente el primer índice **i** de un dígito $\mathbf{a}_{ik}$ se refiere al "número" decimal considerado, es decir, al entero al cual está relacionado el decimal, mientras que el segundo índice **k** señala el lugar después del punto decimal donde el dígito $\mathbf{a}_{ik}$ aparece en el **i**-ésimo decimal. El lado derecho del esquema puede describirse como un "cuadrado infinito" extendido hacia la derecha y hacia abajo a partir del vértice $\mathbf{a}_{11}$.

Los dígitos "diagonales" $\mathbf{a}_{11},\ \mathbf{a}_{22},\ \ldots,\ \mathbf{a}_{ii},\ \ldots$ (es decir, los $\mathbf{a}_{ik}$ para los cuales $\mathbf{k}=\mathbf{i}$), señalados en nuestro esquema por flechas, servirán para definir un decimal

$$d = 0\,.\,\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2\ \mathbf{d}_3\ldots\mathbf{d}_i\ldots$$

de la siguiente manera: en general $\mathbf{d}_i$ será igual a 1; solamente si $\mathbf{a}_{ii} = 1$, $\mathbf{d}_i$ será igual a 2. En otras palabras, para todo $\mathbf{n} = 1, 2, \ldots\ \mathbf{d}_n = 1$ ó $= 2$ según sea $\mathbf{a}_{nn} \neq 1$ ó $= 1$. Entonces **d es un miembro de C no contenido en $\mathbf{C}_0$.** En primer lugar, **d** es un decimal infinito entre 0 y 1. Además **d** es diferente de **todos** los miembros de $\mathbf{C}_0$, es decir, a partir de enésimo miembro (el miembro relacionado a **n** por φ) para todo $\mathbf{n} = 1, 2, \ldots$; en efecto, el **n**-ésimo dígito del **n**-ésimo miembro es $\mathbf{a}_{nn}$ mientras que el enésimo dígito de **d** es $\mathbf{d}_n \neq \mathbf{a}_{nn}$, y puesto que ambos, el enésimo miembro y **d** son decimales infinitos, representan también diferentes números reales.

De aquí que $\mathbf{C}_0$ es un subconjunto propio de **C**, que completa la demostración del lema.

Finalmente, el lema expresa la siguiente propiedad del conjunto **C** de todos los números reales **x** con $0 < \mathbf{x} \leq 1$:

TEOREMA 1. **C no es numerable, es decir, no es equivalente al conjunto N de todos los enteros positivos.**

De esta manera hemos confirmado la existencia de dos conjuntos infinitos que no son equivalentes.

3. Observaciones y Alcance de la Demostración. Ciertos aspectos de la demostración requieren observaciones adicionales.

Los principiantes a menudo se inclinan a sostener: bien, ha sido construido un número real **d** no contenido en $\mathbf{C}_0$, pero su suma a los miembros de $\mathbf{C}_0$ no perjudica su propiedad de ser numerable, de acuerdo con el Teorema 2 del § 3. Este es un grave error del carácter lógico de la demostración. Aun si sólo se hubiera introducido un único miembro de **C** no perteneciente a $\mathbf{C}_0$ se hubiera logrado nuestro propósito. Porque el mapeo φ se refiere a **N** y a **cualquier** subconjunto numerable de **C**, incluyendo a otros más amplios que $\mathbf{C}_0$ El significado de la demostración, entonces, es que **ningún** conjunto numerable agota a **C**.

El lector podrá preguntar correctamente cuál es el papel especial de los dígitos 1 y 2 en la demostración y por qué ha sido favorecido 1 contra 2. La respuesta es: no tiene en absoluto ningún papel especial (el propósito de nuestro particular procedimiento será explicado luego); **d** también podría haber sido definido por la regla: **para todo i sea $\mathbf{d}_i$ cualquier dígito diferente del dígito diagonal $\mathbf{a}_{ii}$**, cuya regla produce una pluralidad infinita de **d** miembros.

Procediendo de esta manera sólo seríamos cautelosos respecto al dígito 0, o bien excluyendo $\mathbf{d}_i = 0$ totalmente, o bien garantizando finalmente que no todos los $\mathbf{d}_i$ son iguales a 0 (es decir, todos a partir de un cierto $\mathbf{i} = \mathbf{k}$ en adelante); porque de otra manera **d** debería ser un decimal con terminación que volvería ilusorio el argumento fundamental de la demostración, porque entonces **d** debería **igualar** a uno de los decimales infinitos de $\mathbf{C}_0$.

¿Por qué entonces la restricción a los dígitos 1 y 2 en nuestra demostración? Precisamente para acabar con el prejuicio, encontrado en algunos tratamientos de la demostración, como si el método fuera puramente existencial, es decir, como si la demostración, en tanto muestra que **existen** decimales pertenecientes a **C** pero no a $\mathbf{C}_0$, no hubiera permitido **construir** tales decimales. La manera arbitraria de señalar especialmente los dígitos 1 y 2 nos permite formar tal decimal unívocamente definido, aunque no tiene preferencia sobre otros; en **4** daremos una aplicación cuasi práctica de esta constructividad.

En nuestra demostración se han usado **decimales.** Es claro que la elección de la base 10 no puede tener una razón matemática. El uso de la escala decádica (decimal) de notación, incluyendo fracciones decimales, en nuestra civilización (en contraste con los antiguos de la Mesopotamia y otras civilizaciones que usaron como bases 6 u 8, etc.) reside en el hecho que el hombre tiene 10 dedos con los cuales acostumbraba contar y calcular. Cualquier entero positivo, con la excepción de 1 cuyas potencias no aumentan, es también adecuado para servir como base; los matemáticos dan preferencia a la mínima base posible, es decir 2 (Cf. § 7), que también se prefiere en muchas aplicaciones del sistema Morse a computadoras electrónicas[62]. El uso del sistema de fracciones con cualquier base $\geqq 3$, en lugar de decimales, no cambiaría nuestra demostración ni siquiera en sus detalles; sólo la base 2 requiere una leve modificación ya que entonces para $\mathbf{a}_{ik}$ y $\mathbf{d}_i$ solamente son utilizables los valores 0 y 1, que afecta nuestra regla acerca de la exclusión de ceros. (Cf. el ejercicio 2) al final de esta sección).

A causa del papel que juegan los dígitos diagonales $\mathbf{a}_{ii}$ en nuestra demostración, su método se llama (el de Cantor) **método diagonal.** Es uno de los métodos más fuertes y famosos en la matemática moderna y lo usaremos en varias ocasiones en la presente exposición de teoría de conjuntos[63]. Las objeciones al método diagonal han aparecido en un nivel bajo[64] y en un nivel alto[65], pero su uso para demostrar nuestro lema es legítimo aun desde el

62. Para la aritmética práctica, 2 demuestra demasiado poco; en el sistema didáctico el 27 ya puede escribirse con cinco dígitos, es decir como 11011.

63. El método se usa incluso fuera de la teoría abstracta de conjuntos, por ejemplo en la teoría de conjuntos de puntos y de los órdenes de infinitos.

64. Por ejemplo, por Bentley 32 y Bridgman 34. Estas objeciones son refutadas en Rust 34 y Fraenkel 35.

65. Ver en particular Kreisel 50.

punto de vista intuicionista[66] (quienes objetan el Teorema 1 porque ellos no admitirían al continuo **C** como un objeto matemático).

Juzgada a la luz de la técnica matemática, la demostración de nuestro resultado por medio del método diagonal es sorprendentemente simple en comparación con sus consecuencias de largo alcance dentro y fuera de la teoría de conjuntos (Cf. subsección 4). La simplicidad y brillantez de muchas de las demostraciones fundamentales de Cantor es un encanto de la teoría de conjuntos y contrastan favorablemente con las demostraciones más difíciles y técnicas de importantes teoremas en otras ramas de la matemática, incluyendo la rama que en muchos aspectos es análoga a la teoría de conjuntos, es decir, la teoría de los números.

Finalmente, podría señalarse que nuestro resultado tiene el carácter de un **enunciado de imposibilidad.** En el § 3 y en la subsección 1 del § 4 se obtuvieron mediante la construcción de mapeos adecuados muchos resultados que mostraban la equivalencia de diferentes conjuntos. En contraste con esto, el Teorema 1 afirma que es **imposible** producir un mapeo entre los conjuntos **N** y **C**.

En muchas ramas de la matemática han surgido problemas de imposibilidad que en parte han sido resueltos. Los más antiguos entre ellos son los problemas de la geometría griega, tales como la duplicación de cuadrado, la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo (estos tres restringidos al uso de regla y compás), la demostración del postulado de las paralelas de Euclides; todos estos fueron resueltos (negativamente) recién en el siglo 19. La dificultad (y el encanto) de la mayoría de las demostraciones de imposibilidad tiene sus raíces en la necesidad de, por decirlo así, escudriñar todas las maneras posibles de solución y de mostrar su inutilidad. Por este carácter distintivo la demostración del Teorema 1 se distingue de las primeras demostraciones de equivalencia.

En principio esta diferencia entre demostraciones de equivalencia y de no-equivalencias desaparecen en la comparación entre conjuntos **finitos.** Aquí, una sola falla en el intento de formar un mapeo es suficiente para afirmar la no-equivalencia, del mismo modo que u nsolo resultado favorable muestra la equivalencia. ¿Contradice esto lo que ya fue señalado?

En absoluto. En principio la diferencia permanece. Que esto no sea visible tratando con conjuntos finitos se debe a una propiedad particular de estos conjuntos que tienen un carácter aritmético y son demostrados por el método característico de la aritmética, es decir, por inducción matemática. Al comienzo del § 8 expresaremos esta propiedad como sigue: a un número cardinal finito dado pertenece sólo un único número ordinal correspondiente; en otras palabras, de cualquier manera que puedan ser ordenados los miembros de un conjunto finito, siempre surge el mismo esquema de orden: un primero, segundo, ..., **enésimo** miembro con la misma terminación **n.** A causa de esta propiedad, un error en el mapeo muestra que todo intento está destinado a fracasar.

Para mostrar la conducta completamente diferente de los conjuntos **infinitos** es suficiente referirnos a nuestras experiencias con los **números racionales**

66. Ver *Foundations*, capítulo IV.

(§ 3, 3). Si ellos están ordenados de acuerdo a la magnitud no hay ningún racional mínimo y entre dos racionales cualesquiera hay otros en pluralidad infinita. Pero si los enumeramos, hay un primero, y cada racional es inmediatamente seguido por otro unívocamente definido. Estas son precisamente dos de las infinitas maneras **esencialmente diferentes** de ordenar el conjunto de los racionales (ver § 8, 6); para conjuntos infinitos más amplios la variedad aumenta. En efecto hay muchas maneras de intentar formar un mapeo entre conjuntos infinitos y un fracaso nada demuestra. Por el contrario, como vimos en el § 2, 5, todo conjunto infinito es equivalente a un **subconjunto propio:** de aquí que además de las correspondencias biunívocas entre los miembros de dos conjuntos equivalentes hay otras que agotan los miembros de uno de los conjuntos pero no del otro. Una demostración de la no-equivalencia, por lo tanto, es una demostración intrínsecamente imposible.

4. **Extensión del Teorema 1. Los Números Trascendentales.** En **1** vimos que intervalos de diferente longitud, cuando consideramos los conjuntos de todos los números reales (o puntos) como contenidos en el intervalo abierto (o cerrado, o semicerrado), son mutuamente equivalentes y también al conjunto de **todos** los números reales (todos los puntos de una línea). La propiedad de ser no-numerable no se altera por la transición a un conjunto equivalente.

Llamando, como es habitual, a cada uno de los conjuntos que acabamos de mencionar un **continuo** (de números o puntos) —y aun **el** continuo en cuanto le concierne las propiedades comunes de estos conjuntos— podemos formular

TEOREMA 2. **El continuo es un conjunto no numerable (infinito).**

Sin duda, no hemos afirmado la **existencia** de un continuo, la cual no puede demostrarse por medio de los 5 axiomas (incluyendo el axioma de infinitud) introducidos hasta aquí. La existencia del continuo se inferirá por medio de un axioma adicional (VI) que será introducido en el § 5, **3** para un propósito más general.

Ahora daremos una importante, y a la vez muy sorprendente, aplicación de nuestro resultado a un problema fuera de la teoría de conjuntos.

El concepto de número real trascendental, como número real que no es algebraico, fue introducido en el § 1. Hasta el primer cuarto del presente siglo, antes de los descubrimientos de Gelfond, Siegel, y otros [67], poco se sabía acerca de los números trascendentales, y las demostraciones de que los números tales como **e** y π son trascendentales (1873/1883) son difíciles. Si bien el método original (Liouville, 1851) de demostrar la existencia de números trascendentales admite una clase íntegra de tales números, se obtiene un resultado de mayor alcance y más sorprendente que por nuestros métodos relativamente simples.

El conjunto **C** de todos los números reales es la unión de los conjuntos disyuntos de todos los números reales algebraicos (**A**) y todos los números reales

---

67. Cf., por ejemplo, Schneider 59.

trascendentales (**T**); **C** = **A** ∪ **T**. Aplicando el Teorema 5 del § 3 [68] tenemos **T** ∼ **C**, porque **A** es numerable. De aquí

TEOREMA 3. **El conjunto de los números reales trascendentales, o de los números trascendentales de un intervalo arbitrario, es equivalente al conjunto de todos los números reales.**

Se podría decir que un número real es "normalmente" trascendental y "sólo en casos excepcionales" algebraico.

La restricción a los números reales es tan insignificante como lo fue anteriormente. El resultado es sorprendente porque los números estudiados y usados por los matemáticos son "casi todos" algebraicos [69].

Para evitar la impresión de que el Teorema 3 es un enunciado meramente existencial nos remitiremos a lo que ya se dijo en el § 3. En la demostración del lema sea C_0 una enumeración del conjunto de todos los números algebraicos tal como fue construido en § 3. 4. Entonces **el decimal d definido unívocamente es un número trascendental** obtenido constructivamente. En verdad, no sabemos, completa y simultáneamente, las expansiones decimales de todos los números algebraicos de una manera comparable con nuestro conocimiento de, digamos, los decimales periódicos. Pero tenemos a nuestra disposición leyes para construir en nuestra enumeración el **enésimo** dígito del **enésimo** número algebraico para cada entero positivo **n** y podemos, en efecto, computar el **enésimo** dígito del número trascendental **d**. Para hacerlo más claro construimos **d** tal como se hizo antes, tomando los dígitos 1 y 2.

Sin duda, después de haber avanzado hacia cualquier **n** no estamos en posesión de un número trascendental, de aquí que debamos continuar, por ejemplo, de una manera periódica y por este medio obtener un número racional. Aun las objeciones de este tipo no tienen peso; la situación similar, por ejemplo, para el número π de cuya expansión decimal solamente conocemos una cantidad finita de dígitos (a diferencia de, por ejemplo, la expansión de los números racionales). Esta es la **ley** fundamental de construcción de **d** (o de π) que define unívocamente la expansión. Por otra parte, la construcción naturalmente tiene solamente un carácter teórico y no admite un trascendental **d** de una manera intuitiva.

5. El Concepto de Número Cardinal. Los Cardinales $\varkappa_0$ y $\varkappa$. Del Teorema 1 hemos extraído una importante conclusión y posteriormente se darán otros

68. Los importantes teoremas 4 y 5 del § 3 no se requieren para demostrar que **T** es un conjunto *infinito no-numerable* porque del elemental Teorema 2 del § 3 se sigue que **T** no puede ser finito o numerable.

69. Es de notar que en su trabajo de 1874 Cantor pone énfasis principalmente en el primero de los dos resultados contenidos, es decir, en la numerabilidad del conjunto de los números reales algebraicos —un resultado que nos parece casi trivial. El segundo es un resultado sin lugar a dudas más importante: la no-numerabilidad del conjunto de todos los números reales, aparece allí más bien como una aplicación del primero al problema de los números trascendentales.

* Se utilizó kappa por alef.

empleos. Ahora, sin embargo, nos concentramos en sus consecuencias dentro de la teoría de conjuntos propiamente dicha y señalaremos en qué sentido el teorema será considerado **la misma base de la teoría de conjuntos.** En primer término esto está hecho de una manera informal; en la subsección **6** se dará un análisis más elaborado del tema.

En el § 2, **4** se esbozó un procedimiento que conduce de los conjuntos equivalentes **finitos** al concepto de su número cardinal común, tal como lo hicieron Descartes en el siglo 17 y Hume, de una manera más satisfactoria, un tiempo después. Recíprocamente, si dos conjuntos infinitos tienen el mismo número de miembros, son equivalentes.

Ya que este procedimiento no utiliza la propiedad de los conjuntos de ser finitos, es natural atribuir el mismo cardinal a **cualquier** conjunto equivalente, no importa si es finito o infinito. Mentras que la existencia de conjuntos finitos no-equivalentes es bien conocida, en el caso de los conjuntos infinitos es el Teorema 1 el que suministra el procedimiento no-trivial, garantizando que existen infinitos conjuntos que no son equivalentes, y por lo tanto cardinales infinitos diferentes. (Nadie antes de Cantor se había arriesgado a demostrar esto, si bien los matemáticos habían tratado mucho antes con conjuntos infinitos y correspondencia biunívoca entre sus miembros). La existencia de diferentes (como veremos en el § 5, infinitamente diferentes) cardinales infinitos nos impone (engañosamente) la tarea de comparar los cardinales y calcular con ellos.

Pero antes que nada tenemos que **definir** los cardinales infinitos. La situación en el dominio de las cantidades finitas (conjuntos y números) sugiere distribuir los conjuntos, ya sean finitos o infinitos, en clases (conjuntos) de conjuntos [70] de tal manera que los conjuntos de la misma clase son equivalentes y los conjuntos de diferentes clases no lo son. Ahora, dice Cantor en su exposición final de la teoría [71], el cardinal de un conjunto **S** debe entenderse como el concepto general (universal) el cual por medio de nuestro "activo poder mental" surge del conjunto **S** **abstrayendo** de ambos la naturaleza especial de los miembros de **S** y el orden en el cual ellos pueden aparecer en **S**. Esto reflejaría precisamente lo que es común a todos los conjuntos equivalentes a **S**, es decir, a todos los conjuntos de la clase a la cual pertenece **S**.

En verdad, la formulación de Cantor será difícilmente admitida como una **definición** de cardinales. Aun se podría proceder a una definición concibiendo la gran cantidad de clases definidas anteriormente como cardinales, es decir, definiendo:

(A) El cardinal de un conjunto **S** es la clase (conjunto) de todos los conjuntos que son equivalentes a **S**.

Esta definición parece algo paradójica. Sin embargo, tales definiciones son actualmente lugares comunes en matemática; por ejemplo, un número

70. El término "clase" no significa aquí algo diferente de "conjunto" y es adoptado sólo con el fin de simplificar la expresión.

71. Cantor 1895, pág. 481.

real se define como un conjunto de secuencias de racionales con ciertas propiedades. De aquí que las objeciones a (A) que sostienen que "los enteros son objetos mucho más simples que los conjuntos de conjuntos" no necesitan ser consideradas seriamente. Por otra parte, el "conjunto de todos los conjuntos equivalentes a S" es capaz de contener antinomias a menos que se tomen ciertas precauciones; para éstas ver **Foundations**, capítulos II y III.

El lógico ciertamente prefiere una definición explícita de cardinal tal como (A). Para el matemático, sin embargo, lo explícito de la definición no es un primer requisito, porque a él más bien le concierne el manejo de los objetos matemáticos que investigar su naturaleza —algo similar al ajedrecista, a quien no le interesa lo que "significan" el alfil y el peón, sino cómo operar con ellos. Han sido propuestas muchas teorías filosóficas divergentes para clarificar la naturaleza de los enteros, pero las reglas de la aritmética son independientes de la teoría a la que uno se adhiere. Además, con respecto a los cardinales es suficiente dar una **definición de trabajo** [72] como la siguiente, dada anteriormente para cardinales finitos:

(B) Se dice que los conjuntos S_1 y S_2 tienen **cardinales iguales** si son equivalentes, es decir si $S_1 \sim S_2$: de lo contrario sus cardinales se llaman **diferentes**.

Como puede suponerse de acuerdo a la aritmética ordinaria y tal como será confirmado en las secciones siguientes, todas las relaciones entre cardinales pueden reducirse, además de la relación de pertenencia para conjuntos, a la igualdad y desigualdad de cardinales; por lo tanto, teniendo en cuenta (B) a la equivalencia y no-equivalencia de conjuntos tal como fue definida en el § 2. Por consiguiente, no necesitamos señalar lo que es un cardinal y podemos traducir los enunciados sobre cardinales en lenguaje de conjuntos.

Se puede considerar un paso adicional evitando totalmente el uso de cardinales, restringiéndonos a los **conjuntos** correspondientes y su equivalencia. Para los propósitos usuales de la teoría de conjuntos y para la mayoría de sus aplicaciones, esto causaría una inconveniencia considerable, aunque no dificultosa en principio, pero en teoría axiomática de conjuntos (ver **Foundations**, capítulo II, §§ 1-5 y 8) esta forma demuestra ser practicable.

Desarrollando el concepto general de cardinal y garantizando la existencia de diferentes cardinales infinitos, estamos capacitados para contestar la pregunta "¿cuántos miembros están contenidos en el conjunto?" para conjuntos infinitos en el mismo sentido definido para conjuntos finitos y no precisamente con la vaga expresión "pluralidad infinita". Sin duda, entre conjuntos finitos e infinitos la diferencia específica es que la respuesta a la pregunta anterior necesariamente no se cambia cuando se insertan miembros adicionales en un conjunto infinito, tal como es el caso para los conjuntos finitos; esto se debe al hecho de que un conjunto infinito, pero no uno finito, es equivalente a un subconjunto propio.

---

72. Para este concepto y su significación en matemática cf. Carnap 27, Weyl 26/49.

Los cardinales de los conjuntos infinitos se llaman **cardinales transfinitos. En general** para su notación usaremos **negritas**, en lo posible haciendo corresponder con la notación de los conjuntos de los cuales ellos son cardinales; de esta manera el cardinal de **S** ó s será denotado por **s**, etc. Frecuentemente la notación general incluye también **cardinales finitos,** es decir, cardinales de conjuntos finitos; aun cuando nos limitemos a cardinales finitos usaremos *bastardilla*, por ejemplo k, n. A menudo es conveniente seguir la costumbre de Cantor, que desde 1887 en adelante denotaba el cardinal del conjunto **S** por **S** (= **s**); la doble barra significa que se omite tanto la naturaleza especial de los miembros como su sucesión.

Para denotar cardinales transfinitos **particulares**, correspondientes a la notación de los cardinales finitos 0, 1, 2, . . . , se ha adoptado universalmente el modo de Cantor de escribir $\aleph$ (Alef), la primera letra del alfabeto hebreo, con un índice correspondiente, por ejemplo $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_\alpha$. Esto demostrará ser impracticable en el caso del cardinal del continuo (también llamado **potencia del continuo**, ver § 5 y § 11, 7) para el cual, por lo tanto, escribimos $\aleph$ sin índice, siguiendo a Hausdorff (y no a Cantor). Se demostrará que el cardinal de los conjuntos numerables es el mínimo cardinal transfinito (§ 5) y se denota por $\aleph$.

6. Análisis Adicionales del Concepto de Cardinal. La cuasi-definición de Cantor (la última) del concepto se citó anteriormente [73]. La esencia de su definición por abstracción expresada por el símbolo $\overline{\overline{\mathbf{S}}}$ no es propia de la teoría de conjuntos. Si siempre que en matemática, o en cualquier otra parte encontremos una relación **R** que sea reflexiva, simétrica y transitiva (ver § 2, 4) [74], podemos formar un nuevo concepto "por abstracción", tal como lo muestran los siguientes ejemplos. Por medio de la relación de paralelismo (dirigido) el conjunto de todas las semirrectas produce el concepto de **dirección;** por medio de la relación de similitud (geométrica), el conjunto de todos los planos polígonos produce el concepto de **figura;** por medio de la relación de congruencia **módulo m,** el conjunto de todos los enteros produce **las clases de congruencia,** etcétera. En nuestro caso, los conjuntos (finitos e infinitos) producen, por medio de la relación de equivalencia en el sentido del § 2, 4 el concepto de **cardinal.** Si expresamos la validez de **x R y** diciendo, **x** e **y** son del mismo tipo **R**, podemos llamar al nuevo concepto "el tipo **R**" de los objetos a los cuales se refiere; esto es lo mismo que decir los tipos **x** e **y** son iguales sí y sólo sí **x R y** es verdadero. O, más próxima a la

---

73. En esencia la misma explicación se encuentra en Cantor 1887, pág. 82, donde se refiere a formulaciones similares dadas en una conferencia en Friburgo (1883) y en una carta a Kurd Lasswitz de 1884. Aún en sus escritos más antiguos de 1878 y 1879-84 Cantor evita una definición explícita y se contenta con la definición operativa (B). Por otra parte, en su análisis de 1885 del libro fundamental de Frege de 1884 (reimpreso en Cantor 32, pág. 440-441) usa una definición similar a la de Frege.

La diferencia de opinión entre Cantor y Frege sobre este punto es insignificante y apenas justifica la tensión reinante entre estos grandes científicos. En particular, el análisis mencionado no hace justicia ni a las intenciones de Frege ni a la importancia de sus ideas. La moda matemática de este período desaprobó la actitud de Frege y pretendió concebir los números como meros signos sobre papel, confundiendo de esta manera los conceptos y sus notaciones.

74. Orc 42 muestra que la teoría ampliada puede desarrollarse sobre las bases de este concepto. Cf. además Dubreil-Dubreil 39.

formulación de Cantor, el tipo **R** se forma despreciando las propiedades de los objetos a los cuales se refiere, conservando aquellas basadas en la relación **R**; por lo tanto el cardinal **S** significaría la totalidad de aquellas propiedades de **S** las cuales son compartidas por todos los conjuntos equivalentes a **S**.

Esta definición por abstracción es un caso particular (el más importante) del procedimiento definicional a menudo llamado **definición matemática creativa**[75]. Sin embargo, desde el punto de vista lógico el fundamento de la definición por abstracción tal como se da en el parágrafo precedente, apenas puede considerarse satisfactoria[76]; ha sido rescatada por Frege y Russell en forma independiente.

El procedimiento de Russell[77] es muy general. Usa el término **principio de abstracción** más bien en el sentido de reemplazar la concepción de Cantor por un argumento lógico exacto, que esencialmente consiste en lo siguiente. Dada una relación **R** simétrica y transitiva, existe[78] una **R*** de uno a muchos tal que **x R y** implica **z R* x** y **z R* y** donde **z** está unívocamente determinado por **x** (o **y**) pero no conversamente. A **z** se lo llama el tipo **R** de **x**, en consecuencia de cualquier **u** para el cual **u R x**. Si **R** es equivalencia entre conjuntos entonces **z** es el cardinal de **x**. Con los métodos de la lógica moderna, por ej. los de **Principia Mathematica**, puede demostrarse la existencia de **R***; de esta manera son justificados los cardinales.

La justificación de Frege[79] que precede a la de Russel pero se limita a los cardinales finitos, está sin embargo más próxima a (A) que la de Russell. Sin embargo al igual que el sistema lógico de Frege, en general también su definición de cardinales se ignoró hasta que Russell señaló su importancia[80].

En Cuanto a (B) de 5, ya se ha puesto de relieve que ésta es una "definición de trabajo". No se debe desvirtuar el uso de "símbolos incompletos" introducidos a través de tales definiciones alegando que en principio sería posible **eliminar** cualquier símbolo introducido por medio de una definición —que es precisamente otra expresión para formular la pregunta qué es el nuevo concepto y no qué tarea desempeña. De todos modos para la matemática esta pretensión va demasiado lejos, tal como se muestra por medio de las definiciones inductivas, basadas en la inducción matemática o transfinitiva (ver § 10, 2); aquí, en general, la eliminación es imposible.

Finalmente uno puede proponerse definir cardinales mediante **ejemplos efectivos**, es decir, como objetos particulares (conjuntos) entre aquellos mencionados en la definición (A) —con cierta analogía con la definición de unidad de longitud mediante el metro normal guardado en París. El objeto particular representaría entonces el

---

75. Así es en Weyl 26/49, Nº 2; cf. Pasch 1882, pág. 40; el meollo del procedimiento puede derivarse de Leibniz. Desde fines de siglo, también en la literatura filosófica en general, la concepción clásica (aristotélica) de la definición por *género próximo* y *diferencia específica* ha sido reemplazada por una concepción funcional, basada en las *relaciones* entre el *definiendum* y otros conceptos; cf. Cassirer 10, Schlick 25, Nagel 39. En un contexto más general, la importancia del proceso de abstracción (y aun de la identificación de distintos conceptos) dentro y fuera de la matemática ha sido puesto de relieve por Meyerson 31 (cf. Lichtenstein 32).

76. Es significativo que un especialista tan estricto y cuidadoso como Dedekind para justificar la definición por abstracción apele al poder creativo del hombre ("somos de origen divino") y se oponga a una concepción en el sentido de (A); ver Dedekind 30-32 III, pág. 489.

77. Russell 03, págs. 166 y 120; Whitehead-Russell 10-13 I, 72, 66. Cf. Russell 19, Nicod 22.

78. Cf. § 2, 4. "z es el padre de x" es un ejemplo de esa relación.

79. Frege 1889, especialmente § § 63-68. La crítica de la lógica de Frege en Smart 45 es injustificada.

80. El trabajo de Scholz-Schweitzer 35 (cf. F. Bachmann 34) da una amplia explicación de las justificaciones de Frege y Russell de la definición por abstracción, junto con una crítica a los procedimientos de Cantor y a otros anteriores. Además se incluye una ampliación a las relaciones con 2n argumentos.

cardinal de todo conjunto equivalente a él. A pirmera vista este método (representando el cardinal 3, o sea como el conjunto [sol, tierra, luna]) parece arbitrario e impracticable. En el § 11, 2, sin embargo, veremos que en el sentido de von Neumann este método generalmente puede llevarse a cabo, aunque no es práctico para cualquier propósito. Su esencia puede aprehenderse a partir del caso particular de un cardinal **finito** que puede definirse como el conjunto de todos los cardinales menores incluyendo a 0, es decir

$$\mathsf{n} = [0, 1, 2, \ldots, \mathsf{n} - 1].$$

Mientras que las explicaciones precedentes ponen de relieve que los ataques de varios filósofos al concepto de cardinal (transfinito) no son pertinentes, la actitud de los neointuicionalistas de que no existen en absoluto conjuntos infinitos no-equivalentes —en particular que no existe el continuo— es consistente, aunque a menudo suicida para la matemática; ver **Fundations**, cap. IV, §6.

Queda aún la cuestión acerca de si nuestros axiomas nos permiten construir cardinales. La respuesta es negativa. De aquí que si se intenta [81] una fundamentación axiomática estricta de la teoría de conjuntos (y no una semi-axiomática como en el presente libro) debe tomarse uno de los dos caminos. Uno y otro rechazan el uso explícito de los cardinales y se contentan con la consideración de la equivalencia y no-equivalencia de conjuntos; este es el camino de Zermelo [82] y sus seguidores. O bien se introducen cardinales como conjuntos particulares en el sentido de von Neumann y sus seguidores; estos conjuntos pueden garantizarse mediante la admisión de un axioma adicional, el axioma de sustitución o reemplazo (ver § 11, 2). Sin embargo, aun en este caso es preferible para muchos propósitos operar con conjuntos en vez de cardinales. Al lector interesado en estas cuestiones de principio se lo remite a **Foundations**, capítulo II.

7. El Conjunto de todas las Funciones y sus Cardinales. Hasta aquí hemos tratado con dos cardinales transfinitos $\aleph_0$ y $\aleph$. Ahora construiremos un tercero.

Consideremos el intervalo cerrado **I** definido por $0 \leq x \leq 1$. Una función real de un único valor $f(x)$ se define en **I** cuando por medio de una regla apropiada para todo **x** de **I** se atribuye un número real $f(x) = y$ unívocamente determinado. No se requiere la correspondencia entre los valores **x** e **y**.

Sea **F** el conjunto de todas las funciones tales como $f(x)$. (Aquí **F** se toma precisamente como un ejemplo, la demostración de que **F** existe a causa de nuestros axiomas incluyendo el axioma formulado en el § 5, 3 se basa en los conceptos introducidos en el § 7.) Dos de los miembros de **F**, $f_1(x)$ y $f_2(x)$, se los considera diferentes si y sólo si hay al menos un $x = x_0$ en **I** para el cual $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$.

Hay subconjuntos propios de **F** que son equivalentes al continuo, por ejemplo el conjunto de aquellas funciones que son constantes en **I**. Para mostrar esto podemos referir la función constante $f(x) = c$ al número real **c**. De aquí que sea como fuere **F** no es numerable.

Para demostrar que **F** no es aun equivalente al continuo usaremos el método diagonal. Sea **C** el conjunto (contínuo) de todos los números del intervalo **I** y F_0 **cualquier subconjunto de F que es equivalente a C**; será suficiente

81. En Baer 29 se da una axiomatización de cardinales independientemente de la teoría axiomática de conjuntos.

82. Zermelo 08a.

demostrar que $\mathbf{F}_0$, por este supuesto, un subconjunto **propio** de **F**, es decir que hay funciones en **F** que no pertenecen a $\mathbf{F}_0$. (Cf. las subsecciones 2 y 3 más arriba). Usando un mapeo arbitrario Φ entre $\mathbf{F}_0$ y **C** designaremos dicha función.

La función (miembro de $\mathbf{F}_0$) que por Φ corresponde al número real $\mathbf{c} \varepsilon \mathbf{C}$ será denotada por $\mathbf{f}_c\ (\mathbf{x})$; $\mathbf{f}_{3/4}\ (\mathbf{x})$, por ejemplo, es la función relacionada por Φ a $3/4\ \varepsilon\ \mathbf{C}$. $\varphi\ (\mathbf{x})$ será función "diagonal" que por cada $\mathbf{x}_0\ \varepsilon\ \mathbf{C}$, iguala la función $\mathbf{f}_{\mathbf{x}_0}\ (\mathbf{x})$; en síntesis, $\varphi\ (\mathbf{x}) = \mathbf{f}_x\ (\mathbf{x})$. En otras palabras, para determinar el valor $\varphi\ (\mathbf{c})$ de $\varphi\ (\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tenemos que tomar la función $\mathbf{f}_c\ (\mathbf{x})$; su valor para $\mathbf{x} = \mathbf{c}$, es decir $\mathbf{f}_c\ (\mathbf{c})$, es $\varphi\ (\mathbf{c})$ [83]. Por esto la función $\varphi\ (\mathbf{x})$ está unívocamente determinada.

Finalmente, $\psi\ (\mathbf{x})$ será una función de **F** que en todas partes difiere de $\varphi\ (\mathbf{x})$; ej., $\psi\ (\mathbf{x}) = \varphi\ (\mathbf{x}) + 1$. $\psi\ (\mathbf{x})$ no pertenece a $\mathbf{F}_0$. Sea $\mathbf{f}_c\ (\mathbf{x})$ **cualquier** miembro de $\mathbf{F}_0$; entonces $\psi\ (\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}_c\ (\mathbf{x})$ porque, para $\mathbf{x} = \mathbf{c}$, $\mathbf{f}_c\ (\mathbf{x})$ tiene el valor $\mathbf{f}_c\ (\mathbf{c})$ y $\psi\ (\mathbf{x})$ el valor $\varphi\ (\mathbf{c}) + 1 = \mathbf{f}_c\ (\mathbf{c}) + 1 \neq \mathbf{f}_c\ (\mathbf{c})$. De aquí que $\mathbf{F}_0$ sea un subconjunto propio de **F**, esto significa

TEOREMA 4. El conjunto F de todas las funciones reales de un único valor $\mathbf{f}\ (\mathbf{x})$ definido por $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$ tiene un cardinal **f** [84] que es diferente tanto de $\varkappa$ como de $\varkappa$ (en tanto **F** tiene un subconjunto del cardinal $\varkappa$).

El lector observará la gran analogía entre las demostraciones del Teorema 4 y del lema en la subsección 2. Mientras que el método diagonal de esta demostración usaba dígitos, es decir, enteros positivos, aquí los enteros son reemplazados por números reales; en lugar de $\mathbf{a}_{ii}$ aquí tenemos $\mathbf{f}_c\ (\mathbf{c})$.

También podemos considerar la misma demostración del Teorema 4 como si fuera una demostración del lema, es decir, de la no-numerabilidad del contínuo, interpretando la presente demostración desde un nuevo ángulo sin modificarla formalmente. Para este propósito consideramos las funciones $\mathbf{f}\ (\mathbf{x})$ como **funciones aritméticas** cuyo argumento **x** varía sobre los enteros positivos y el cual sólo asume valores integrales positivos. Si

$$\mathbf{D} = [\, \mathbf{f}_1\,(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{f}_2\,(\mathbf{x})\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{f}_a\,(\mathbf{x})\,,\ \ldots\,]$$

es **cualquier conjunto numerable** de funciones aritméticas entonces la demostración del Teorema 4 muestra que la función aritmética $\mathrm{X}\ (\mathbf{x}) = \mathbf{f}_x + 1$, donde **x** varía sobre los enteros positivos, no está contenida en **D**. De aquí que el conjunto de todas las funciones aritméticas no es numerable. Por otra parte, fácilmente nos percatamos que los conceptos de función aritmética y de número real en esencia no coinciden; cf. § 7, 5.

En el § 7 veremos que la demostración del Teorema 4 descansa sobre la gran generalidad y arbitrariedad de nuestras funciones, la cual permite la construcción de la más bien "patológica" función $\varphi\ (\mathbf{x})$. En un análisis ordinario apenas podemos usar tales funciones y, por ejemplo, para el cardinal del conjunto de todas las funciones **contínuas** obtendremos un resultado diferente.

---

83. Por ejemplo, si $f_{3/4}\ (x) = x^2 + 2$ tenemos $\varphi\ (3/4) = \mathrm{F}(3/4) = (3/4)^2 + 2$
84. Posteriormente veremos por qué f no ha sido denotado mediante un alef.

EJERCICIOS

1) Dar, mediante funciones racionales, mapeos entre los siguientes continuos (cf. 1).
   a) El conjunto de números reales entre **a** y **b** y el conjunto de los números reales entre **c** y **d** (**a**, **b**, **c**, **d** denotan diferentes números reales);
   b) El conjunto de números reales entre 0 y el número positivo **a** y el conjunto de números reales mayores que el número positivo b.

2) Demostrar la no-numerabilidad del conjunto de números reales cuando se vale de **fracciones duales.**
   a) Directamente mediante una modificación del método diagonal tal como se usó en 2;
   b) Usando el Teorema 5 del § 3.
   (Indicar considerando a a): inserte los dígitos **1** en la fracción diagonal **d** con el fin de excluir una fracción dual **finita).**

3) Demostrar que el conjunto de todos los números reales irracionales y el conjunto de todas las secuencias de números naturales tienen el cardinal $\aleph$.

4) Mostrar que el conjunto de todos los puntos de la circunferencia (o de un arco) de un círculo (elipse, hipérbole) tienen el cardinal $\aleph$. (Mediante un concepto apropiado de curva este enunciado puede generalizarse).

5) ¿A qué modificaciones tiene que someterse la demostración del Teorema 4 si las funciones **f (x)** se definen para **todo x** real en lugar de para $O \leq \mathbf{x} \leq 1$?

6) ¿Cómo puede cambiarse la demostración del Teorema 4 para mostrar que **F** no es equivalente a **cualquier subconjunto** del continuo **C**? (Cf. la nota a pie de pág. del cap. II, § 5, 2 que se refiere a un subconjunto $C_o \subset C$).

(Traducción del inglés de BEATRIZ M. APREDA)

BIBLIOGRAFIA

BACHMANN, F.

1934. Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik mit besonderer Bezienhung auf Dedekind, Frege und Russell. *Forschungen zur Logistik*, etc., Nº 1. Leipzig. 78 págs.

BAER, R.

1929. Zur Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik. *Mat. Z.* 29, 381-396.

BENTLEY, A. F.

1932. *Linguistic analysis of mathematics*. Bloomington Ind., 1932 y Londres, 1934. 315 págs.

BOEHM, K.

1929. Ammerkungen zu einer Arbeit des Herrn N. Oglobin. *Jahresb. D. M. V.* 38, 182-187.

BRIDGMAN, P. W.

1934. A physicist's second reaction to *Mengenlehre*. *Ser Math* 2, 101-117, 224-234.

CANTOR, G.

1874. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *J. F. Math.* 77, 258-262. (Cf. B. MINNIGERODE: *Math Annalen* 4, 497-498, 1871).

— 1879-84. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Math. Annalen*: I. 15, 1-7, 1879, II. 17, 355-358, 1880. III. 20, 113-121, 1882. IV. 21, 51-58, 1883. V. *Ibid.*, 545-591. (Apareció también como libro: Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig, 1883. 47 págs.). VI. 23, 453-488, 1884 (I-V apareción en francés, en parte en forma de extractos, en *Acta Mathematica* 2, 1883).

— 1887-88. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. I. *Ibid.* 91, 81-125, 252-270, 1887. II. *Ibid.* 92, 240-265, 1888.

— 1892. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresb. D. M. V.* 1, 75-78. (En italiano en *Riv. di Mat* 2, 165-167, 1892).

— 1895. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I. *Math. Annalen* 46, 481-512.

— 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Ed. por E. ZERMELO. Berlín. 486 págs.

CARNAP, R.

1927. Eigentliche und uneigentliche Begriffe. *Symposion* I, 355-374.

CASSIRER, E.

1910. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff.* Berlín. Edición inglesa: Chicago, 1923.

DEDEKIND, R.

1930-32. *Gesammelte mathematische Werke.* Ed. por R. FRICKE, E. NOETHER, O. ORE. 3 vols. Braunschweig.

DUBREIL, P. Y DUBREIL - JACOTIN, MARIE - LOUISE

1939. Théorie algébrique des relations d'équivalence. *J. de Math. p. et appl.* (9) 18, 63-95. (Cf. C. R. *Paris* 205, 704-706, 1349-1351, 1937).

FABER, G.

1905. Über die Abzählebarkeit der rationalen Zahlen. *Math. Annalen* 60, 196-203.

FRAENKEL, A. (A)

1935. Zum Diagonalverfahren Cantors, *F. M.* 25, 45-50.

FREGE, G.

1884. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathetische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau. 119 págs. (Reimpreso: Breslau 1934; ed. en inglés-alemán por J. L. AUSTIN, 1950; ed. en italiano por L. GEYMONAT, 1948).

GODFREY, E. W.

1938. Enumeration of the rational points between 0 and 1. *Nat. Math. Magazine* (Louisiana) 12, 163-166.

HANANI, H.

1955. Enumeration of rational numbers. (En hebreo con sumario en inglés). *Riveon Lematematika* (Jerusalén) 9, 23-24

JOHNSTON, L. S.

1948. Denumerability of the rational number system. *Am. Math. Monthly* 55, 65-70. (C. I. NIVEN: *ibid.*, pág. 358).

KREISEL, G.

1950. Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus. *F. M.* **37**, 265-285.

LICHTENSTEIN, L.

1932. La philosophie des mathématiques selon M. Emile Mayerson. *Revue Philosophique* **113**, 169-206.

MEYERSON, E.

1931. *Du cheminement de la pensée.* 3 vols. (Ver, en particular, vol. II, Livre III). París.

NAGEL, E.

1939. The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris* 7, 142-224.

NICOD, J. G. P.

1922. Mathematical logic and the foundations of mathematics. *Encyclop. Britannica*, 12th ed., 31, 874-876.

OGLOBIN, N.

1929. Eine Anwendung der Fareyschen Reihen. *Jahresb. D. M. V.* 38, 49-53.

ORE, O.

1942. Theory of equivalence relations. *Duke Math. J.* 9, 573-627.

PASCH, M.

1882. *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig. Nueva ed. con un suplemento de M. DEHN: *Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung.* Berlin, 1926. 275 págs.

POINCARE, H.

1910. Über transfinite Zahlen. *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik* (Leipzing & Berlín). págs. 43-48.

RUSSELL, B.

1903. *The principles of mathematics.* I. London 2da. ed. con una nueva introducción. Londres 1937 & Nueva York 1938. 534 págs. Reimpreso en 1950. Ed. italiana de 1951.

1919. *Introduction to mathematical philosophy.* Londres & Nueva York. 208 págs. 2da. ed. en 1920. 6ta. impresión 1948. Ed. alemana de 1923; ed. francesa de 1928; ed. española de 1945.

RUST, W. M. Jr.

1934. An operational statement of Cantor's Diagonalverfahren *Scr. Math* **2**, 334-336.

SCHLICK, M.

1925. *Allgemeine Erkenntnislehre.* 2da. ed. Berlín. 375 págs.

SCHNEIDER, T.

1959. Introduction aux nombres transcendants. París. 151 págs. (El original en alemán apareció en 1957).

SCHOLZ, H. y SCHWEITZER, H.

1935. *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion.* (Litografiado). Leipzig. 106 págs.

SMART, H. R.

1945. Frege's logic. *Philos. Review* **54**, 489-505. (Cf. A. CHURCH: *J. S. L.* **10**, 101-103, 1945).

VANDIVER, H. S.

1936. On the ordering of real algebraic numbers by constructive methods. *Annals of Math.* (2) **37**, 7-16.

WEYL, H.

1926-49. ***Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.*** Part. I (*Handbuch der Philos.* IIA). München & Berlín 1926. 64 págs. Reimpreso en 1950. E. hebrea: Jerusalén 1945. ***Philosophy of mathematics and natural science.*** (Ed. inglesa revisada y aumentada de las Partes I y II). Princeton, 1949, 311 págs.

WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B.

1910-13. *Principia Mathematica.* 3 vols. Cambridge, 1910, 1912, 1913. 666 + 772 + 491 págs. 2da. ed.: 1925, 1927, 1927. 674 + 742 + 491 págs., junto con una Introducción a la 2da. ed. y Apéndices A, B, C en el vol. I: 34 + 15 + 9 + 8 págs.

ZERMELO, E.

1908a. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I. *Ibid.*, 261-281. (No ha sido continuada).