LA CONSISTENCIA DE LA LOGICA INTUICIONISTA

Por Carlos Alberto Lungarzo

(PRIMERA PARTE)

1. Intuicionismo y lógica.

Por "intuicionismo lógico" se entiende una cierta tendencia filosófica que, si bien reivindica una forma de intuición intelectual como método de conocimiento, no debe ser incluida como subcorriente de ninguna de las escuelas gnoseológicas tradicionales, a las que se designa como "intuicionistas" (scheleriana, bergsoniana, husserliana, etc.). El carácter heterodoxo de este neo-intuicionismo proviene de varios rasgos distintivos que ningún estudioso de la filosofía tradicional, atribuiría a la "intuición" en sentido clásico (sea racional, mística, emotiva, etc.) ya que sempre fueron considerados como totalmente incompatibles con ella.

En efecto, este intuicionismo se interesa particularmente por la **lógica** y la **matemática** y no en sentido despectivo ni destructivo, sino todo lo contrario. Además, emplea sistemáticamente el análisis lógico, la estructuración según axiomas, el método de los lenguajes formalizados, y otros artificios filosóficamente neutrales, que lo colocan en el mismo plano que a las demás escuelas filosóficas a las cuales se atribuye sin ningún fundamento el monopolio de la lógica matemática (escuelas analitistas, empiristas, neopositivistas, formalistas, etc.). Acerca de la grotesca confusión entre epistemología y positivismo pueden verse algunos no menos grotescos libros aparecidos en los últimos años en Buenos Aires.

El intuicionismo, fundado por Brouwer y Heyting, entre otros, y generado por influencias varias del intuicionismo racionalista clásico, pero, especialmente, desarrollado en estrecho contacto con la lógica matemática, parte de una concepción gnoseológica y epistemológica, acerca de la naturaleza del tiempo, del espacio, de los entes matemáticos, etc. De allí surge una filosofía matemática, con ideas bien definidas y originales sobre cuestiones tales como la definición, la demostración, la constructividad, etc. Finalmente, para formalizar de manera adecuada esas nociones matemáticas, los intuicionistas construyen un sistema lógico (o, mejor dicho, una familia de sistemas lógicos, que varían solamente en los postulados y las reglas de deducción), en el que se deducen los teoremas y las reglas que reflejan las afirmaciones válidas, y los modos de argumentación aceptados por ellos, análogamente a como la lógica clásica refleja en sus teoremas y reglas, las afirmaciones y los modos de argumentación que usamos en el lenguaje vulgar y científico.

Los neointuicionistas admiten algunos de los resultados cosmológicos kantianos, por ejemplo, la aprioridad del tiempo, tesis que resulta de importancia para la aritmética, ya que la operación de contar, asociada con el concepto de número natural, es un proceso de "sucesividad" que se da, por supuesto, con el correr del tiempo. Además, coinciden con Kant en el carácter **a priori** de las leyes matemáticas, que no deben entenderse, sin embargo, como principios inmutables, sino como hipótesis acerca de **hechos mentales**; justamente, en su a prioridad está la diferencia respecto de las leyes naturales.

Si las verdades matemáticas no son meros resultados convencionales (formalismo) ni expresiones verificables en la práctica, como pretenden ciertas corrientes filosóficas, deben ser el resultado de una aprehensión especial, que los fundadores del intuicionismo lógico asemejan a la intuición kantiana. Pero como (en el mejor de los casos), la intuición tiene un campo de efectividad limitado, la matemática intuicionista debe excluir ciertos terrenos de la matemática moderna, a la cual aquélla no es aplicable: teoría de conjuntos infinitos, ciertas ramas del análisis funcional, etc.

El intuicionismo proclama, al igual que el formalismo, la prioridad de la matemática respecto de la lógica. Así como para los formalistas, la simbología matemática es un sistema específico de signos, de los cuales debe darse sólo el **modus operandi**, asimismo, para los intuicionistas, la matemática es un sistema de conceptos también específico, que no tiene por qué depender de la lógica.

Para que un concepto sea analizable, un formalista exigiría sólo que esté correctamente definido, y que existan reglas de carácter finito para demostrar propiedades acerca de él. Un intuicionista que requiere **"verlo"** mediante su intuición especial, exigirá que el concepto esté definido o sus propiedades estén demostradas mediante métodos **constructivos.** La constructividad es una exigencia fundamental del intuicionista, y como es mucho más estricta que las pretensiones de corrección formal de otras escuelas lógicas, resulta que el conjunto de afirmaciones aceptadas por él es más estrecho que el que admiten como válidas las demás tendencias lógicas. Si en un determinado sistema de lógica o de matemática, se prueban ciertos teoremas (cumpliendo estrictamente las condiciones de corrección exigidas por el sistema) es muy probable, sin embargo, que no todos ellos hayan sido demostrados por procedimientos constructivos, y así, mientras el formalista y el logicista los aceptan a todos, el intuicionista sólo aceptará a algunos y rechazará a los que repute como deducidos de manera "no constructiva".

Esto implica que la lógica formal intuicionista (que tiene la misma estructura básica que la formalista o logicista, ya que el intuicionismo moderno NO es enemigo de la deducción) está diseñada de manera que en ella no puedan afirmarse teoremas que responden a "verdades lógicas" cuyo uso dé lugar a procedimientos no constructivos. Por ejemplo, en un sistema formal intuicionista, no deberá poder probarse la fórmula que, una vez interpretada, diga:

"o A o bien, la negación de A"

porque esta afirmación (principio de tercero excluido) da lugar a la justificación de procesos no constructivos. De acuerdo con ella, por sustitución, sería lícito afirmar:

"o (el número de moléculas del Universo es mil elevado al millón), o no". aunque sabemos que no hay proceso constructivo alguno para verificarla.

Asimismo, las reglas derivadas que permiten inferencias indirectas (como el principio de reducción al absurdo, la regla de transposición, la interdefinibilidad de los conectivos, etc.) quedarán proscriptas del sistema, autorizándose solamente la figuración de modos de razonamiento directos.

Heyting fue el primero en proponer un sistema de lógica intuicionista, cuyas bases primitivas y axiomas eran más complejos que los de **Principia Mathematica,** pero obviamente mucho más débiles en cuanto a deducibilidad. En general, un sistema formal, sea de lógica (proposicional, cuantificacional, aplicada, etc.) sea de teoría de conjuntos, de funciones recursivas, etc., podrá ser caracterizado como intuicionista si la familia de teoremas clásicos excluidos de él es la que corresponde a pruebas indirectas y métodos no constructivos. (En análisis funcional, por ejemplo, deberá axcluirse el teorema de existencia de conjuntos no medibles y en topología, el teorema de Tijonov sobre producto de espacios compactos).

Nosotros utilizaremos tres sistemas de lógica intuicionista (uno correspondiente a la rama proposicional, otro a la cuantificacional y otro a la aritmética, incluidos sucesivamente uno en otro), los cuales se obtendrán de otros tantos sistemas clásicos mediante el sencillo expediente de omitir la regla que permite simplificar la doble negación.

Además de formalizar parte de las concepciones intuicionistas, que justificaban la menor potencia de su sistema, la lógica de Heyting parecía plausible por otros motivos: por ejemplo, por el menor riesgo que presentaba a la existencia de contradicciones, ya que una menor riqueza deductiva suponía entrañar una mayor consistencia. Cuando en 1931, Kurt Gödel demostró en una corta, brillante y genial memoria, la existencia de proposiciones formalmente indecidibles en los **Principia Mathematica** y sistemas conexos, todo el público científico interpretó el resultado como un golpe de gracia para el formalismo y un pasajero respiro para el intuicionismo.

Sin embargo, la expectativa duró poco: la creencia en una mayor invulnerabilidad de la lógica intuicionista respecto de las contradicciones, fue desvirtuada por el mismo autor en otro artículo publicado al año siguiente, en el cual, mediante procedimientos metalógicos que los intuicionistas no habrían podido objetar, mostró que, SI UNA AFIRMACION CONTRADICTORIA FUERA DEDUCIBLE EN UN CIERTO SISTEMA DE LOGICA CLASICA, ENTONCES TAMBIEN LO SERIA EN EL CORRESPONDIENTE SISTEMA DE LOGICA INTUICIONISTA.

De esto se sigue que, aunque la lógica intuicionista es, por así decir, MENOS COMPLETA que la clásica, en cambio (¡oh, mala suerte!) no es MENOS CONTRADICTORIA que ésta.

En esta memoria vamos a ofrecer una versión de ese proceso de reducción de la lógica clásica a la intuicionista, tema de gran importancia en la literatura lógico epistemológica actual, cuyo tratamiento en lengua castellana no es frecuente, ni siquiera a título de divulgación. Usaremos un sistema lógico proposicional-cuantificacional-aritmético, que cumple con los requisitos hilbertianos, excepto, (por comodidad) el de independencia de axiomas y reglas, lo cual no altera en absoluto la validez de los resultados de metateoremas como los que vamos a presentar.

En lo que sigue, vamos a admitir ciertos procedimientos usuales en el metalenguaje, en particular, la substitución de variables libres por fórmulas, el uso de definiciones y demostraciones por inducción (no transfinita) el intercambio de expresiones definidas por sus definientes, y, a fin de no alargar demasiado la extensión de este trabajo, sobreentenderemos la definición de ciertos conceptos metateóricos como "demostración", "clase de fórmulas", "hipótesis", etc. Todos los elementos que sean específicos de nuestro sistema, serán caracterizado en su momento.

2. Estructura de los sistemas formales.

Describiremos seis sistemas formales, "incluidos" unos dentro de otros (aunque existen elementos incomparables, como el sistema proposicional clásico y el sistema aritmético intuicionista), de tal modo que podemos presentarlos todos a la vez, señalando detalladamente su estructuración en niveles. El primer nivel estará formado por el vocabulario primitivo, cuyos componentes, los signos, alineados en sucesiones finitas, compondrán expresiones. Los axiomas y reglas podrán pensarse como esquemas, excepto en los casos en que sea obvia la omisión de cuantificadores, o en que figuren directamente constantes indeterminadas y no variables. Por razones de ductilidad, la distinción entre uso y mención, no será respetada puntillosamente, apareciendo algunas expresiones en rol autonómico.

Tres de los sistemas son clásicos; uno de ellos, el más amplio, consistirá de todos los elementos listados más abajo. Suprimiendo las expresiones que contienen signos de lógica de predicados y de aritmética se tendrá el sistema de lógica proposicional; omitiendo sólo el conjunto de símbolos y expresiones aritméticas, se obtendrá el llamado sistema "funcional" (o "cuantificacional" o "de predicados").

2.1. SIMBOLOS PRIMITIVOS

2.1.A De lógica proposicional:

Constantes arbitrarias para fórmulas: A, B, C, D, ...
(eventualmente subindicadas).
Constantes para conectivos:
"no" $-$; "y" $.$; "o" $\vee$; "si... entonces" $\supset$

2.1.B De lógica cuantificacional:

Variables para términos: x, y, z, ...
(eventualmente subindicadas).
Cuantificadores: (E...) (existe un..., tal que)
(...) (para todo...)

2.1.C De lógica aritmética:

Constante numérica: 0 (cero)
Constantes numéricas arbitrarias: a, b, c, ...
(eventualmente subindicadas).
Constante relacional: = ("igual a")
Constante operacional: (sucesor)

2.2. REGLAS DE FORMACION

2.2.A De la lógica proposicional:

(Formación de fórmulas)

i) A, B, C, ... son fórmulas
ii) Si X e Y son fórmulas, también lo son
$-X$, $X . Y$, XvY, $X \supset Y$.
iii) Cláusula extremal.

2.2.B De la lógica cuantificacional:

(Formación de fórmulas)

i) Si x es una variable y A (x) es una fórmula que contiene a **x libre,** entonces, son fórmulas:
(Ex) A (x) , (x) A (x).
ii) Cláusula extremal.

2.2.C De la lógica aritmética:

(Formación de términos)

i) 0 es un término.
ii) Si es un término, entonces a' es un término.
iii) Cláusula extremal.
(Formación de fórmulas)
iv) Si x e y son términos, entonces x=y es fórmula.
v) Cláusula extremal, excepto las definidas en 2.2.A y 2.2.B.

2.3. DEFINICIONES

2.3.A De la lógica proposicional:

i) $X \equiv Y$ def. $(X \supset Y \,.\, (Y \supset X)$

2.3.C De la lógica aritmética:

i) $a + 0 = a$
$a \,.\, (b') = (ab + a)$
(definición inductiva de "suma")

ii) $a \,.\, 0 = 0$
$a + b' = (a + b)'$
(definición inductiva de "producto").

iii) $a < b$ df. $(Ex) \; (-(x = 0) \; . \; (a + x = b) \;)$

2.4. AXIOMAS

2.4.A De la lógica proposicional:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(AvB) \equiv (BvA)$
3. $(A.B) \equiv (B.A)$
4. $(\,(A \supset C) \,.\, (B \supset C)\,) \supset (\,(AvB) \supset C)$
5. $(A \supset B) \supset (\,(AvC) \supset (BvC)\,)$

2.4.B De la lógica cuantificacional:

6. $A\,(y) \supset (Ex)\; A\,(x)$
7. $(x)\; A\,(x) \supset A\,(y)$

"de manera que se verifiquen las restricciones de variables".

2.4.C De la lógica aritmética:

8. $(a = b) \equiv (b = a)$
9. $(\,(a = b) \,.\, (b = c)\,) \supset (a = c)$
10. $(a = b) \equiv (a' = b')$
11. $0 < a'$
12. $[\, A\,(0) \,.\, [\, A\,(a) \supset A\,(a')\,]\,] \supset A\,(b)$

2.5. REGLAS DE DEDUCCION (caso A: proposicional).

1. $\dfrac{A \,.\, B}{A} \qquad \dfrac{A \,.\, B}{B}$

2. $\dfrac{A \qquad B}{A \,.\, B}$

3. $\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}$

4. $\dfrac{A \qquad A \supset B}{B}$

5. $\dfrac{\text{De } A \text{ se deduce } B.(-B)}{-A}$ (descarga de A)

(&) $\dfrac{-(-A)}{A}$

2.5.B Caso cuantificacional:

6. $\dfrac{\text{De } A \text{ se deduce } B}{A \supset B}$ (descarga de A)

7. (x no figura libre en B) $\dfrac{B \supset A(x)}{B \supset (x)\, A(x)}$

8. (x no figura libre en B) $\dfrac{A(x) \supset B}{(\,(Ex)\, A(x)\,) \supset B}$

2.5.C Caso aritmético

9. $\dfrac{A(x) \quad (x \equiv y)}{A(y)}$

$$\frac{A(0)\,;\ (\,A(x) \supset A(x')\,)}{(x)\ A(x)}$$

("Principio" de inducción matemática)

NOTA: La expresión "A (x)" o "A (0)", etc., es una fórmula, porque, por la cláusula 2.2.A, i, las letras "A", "B", etc. son fórmulas. El hecho de que aparezca un término entre paréntesis es una mera notación para indicar que la fórmula es función de ese término.

La totalidad de niveles aquí descriptos (la morfología y parte de la teoría), más los teoremas y reglas derivadas potencialmente contenidos en ellos, constituyen el sistema de lógica aritmética clásica (o, mejor dicho, **uno**, de los infinitos sistemas de lógica aritmética clásica, que son equivalentes entre sí). Lo llamaremos "SLAC".

Omitiendo los apartados 1.C, 2.C, 3.C, 4.C y 5.C se obtiene el correspondiente sistema de lógica cuantificacional clásica: SLCC.

Prescindiendo de los elementos designados con C y B en nuestras descripciones, nos queda el sistema de lógica proposicional clásica: SLPC.

Como se ve, se considera a SLPC como subsistema de los otros dos, y a SLCC como subsistema de SLAC. A su vez, quitando la regla marcada (&) a cada uno de estos tres sistemas se obtienen los correspondientes intuicionistas: SLAI, SLCI, SLPI. De la definición, se ve trivialmente que cualquiera de los sistemas intuicionistas es interpretable en su correspondiente clásico de manera ortodoxa (la interpretación es la inyección canónica). En lo que sigue, demostraremos que también existe una **interpretación inversa,** que, si bien no establece la equivalencia desde el punto de vista de la completidad, la establece con respecto a la consistencia.

Los teoremas demostrados por GODEL (para decirlo con palabras de él mismo)

> "...muestran que la aritmética y la teoría de números intuicionistas, son sólo en apariencia más estrechas que las clásicas; en efecto, incluyen íntegra la aritmética clásica, con la sola diferencia de una interpretación algo distinta".

3. Algunos resultados.

En SLAC y SLAI se puede demostrar una familia de teoremas y reglas derivadas, algunas de las cuales serán importantes para nuestros resultados centrales. Por ejemplo:

1. $A \supset (-(-A))$
2. $-(-((-(-A)) \supset A))$
3. $\dfrac{-(-(A \supset B)}{(-(-A)) \supset (-(-B))}$
4. $-(-(-A)) \supset (-A)$
5. $\dfrac{-(-(A \supset B)) \quad -(-(B \supset C))}{-(-(A \supset C)}$

En cambio, los siguientes teoremas no valen en SLAI:

6. (&) $(A \vee B \equiv -((-A) . (-B))$
7. (&) $(A \supset B) \equiv -(A . (-B))$
8. (&) $-(-A) \equiv A$

Las restantes fórmulas son asertables en ambas SLAC y SLAI:

9. $\dfrac{(A \supset B) ; (B \supset C)}{(A \supset C)}$

10. $-(-(A \,.\, B)) \equiv (-(-A)) \,.\, (-(-B))$

11. $$\frac{A \supset -B}{B \supset -A}$$

13. $-(-(A \supset B)) \equiv -(A \,.\, (-B))$

14. $-(A \supset -(-B)) \equiv -(A \,.\, (-B))$

15. $(A \vee -A) \supset (-(-A) \supset A)$

17. $$\frac{(A(x) \supset B(x))}{((x)\, A(x)) \supset ((x)\, B(x))}$$

18. $(a = b) \vee (-(a = b))$

Con excepción de 6, 7 y 8, los teoremas y metateoremas entre 1 y 15, son válidos en SLPC y SLPI, no sólo en SLAC y SLAI. 16 y 17 son válidos también en SLCC y SLCI, pero no en SLPC y SLPI. 18 vale únicamente en SLAC y SLAI.

Todos estos teoremas y metateoremas, son relativamente obvios como para necesitar una justificación detallada, pero será un ejercicio interesante demostrarlos para asegurarse de que se deduce en nuestros sistemas.

El teorema 4 expresa la eliminabilidad de la doble negación cuando ella está aplicada a una fórmula negada ("negación de A"). Esa eliminabilidad no vale para una fórmula cualquiera, dentro de la lógica intuicionista, ya que requiere el empleo de la regla (&). En general, si se toma una fórmula A y se la niega, obteniendo "$-A$", para esta última, valdrán intuicionísticamente los teoremas que valen clásicamente para A. (Por ejemplo, $-(-A \,.\, -B)$ es equivalente a $(-(-A) \vee -(-B))$ en ambos casos, pero $-(-A \,.\, -B)$ es equivalente a $(A \vee B)$ sólo clásicamente, como se desprende de la demostración de 6. En general, la expresión (&) indicará las reglas o teoremas que no valen intuicionísticamente).

El metateorema 9 es una regla de deducción que utiliza el carácter transitivo de la implicación. 11 y 12 son contraposiciones parciales, que valen en sistemas clásicos e intuicionistas. En cambio, la equivalencia "$(A \supset B) \equiv (-B \supset -A)$" no vale más que clásicamente, ya que formaliza uno de los métodos de razonamiento por absurdo.

Merece algún comentario, el teorema aritmético 18, para cuya prueba deben demostrarse previamente las siguientes fórmulas:

19. $(a < b) \vee (a = b) \vee (b < a)$

20. $(0 < a) \vee (0 = a)$

A su vez, el primero se demuestra usando el segundo, y aplicando inducción sobre b, ya que, para el caso base, por la simetría de la igualdad, se puede transformar a la última fórmula en una subfórmula de la primera, e introducir luego la disyunción. Como "a < b" implica "a < b'" el paso inductivo resulta de aplicar reiteradamente propiedades del condicional, y axiomas de SLP (C o I, indistintamente).

Puede parecer chocante que 18 sea un flagrante caso de sustitución de la expresión "A v −A", que no es intuicionísticamente válida. Sin embargo, debe recordarse que la exclusión de una fórmula tal como teorema, en lógica intuicionista, obedece a la intromisión de métodos no constructivos que trae aparejada. El caso particular "a = b v −(a = b)" no incurre en este problema, ya que sólo afirma la exclusión de tercero en el caso de la igualdad entre números naturales y, en ese nivel de análisis, dicha exclusión es perfectamente constructiva. En un cómputo mediante funciones recursivas, siempre puede calcularse si dos números a y b son o no iguales y, de suyo, el problema tiene una solución bien determinable. La situación no es la misma que si dijéramos: "La raíz cuadrada de 5 tiene veinte unos seguidos en **algún** lugar de su expansión decimal, o no".

4. Metateoremas principales.

En lo sucesivo, "W" designará una clase de fórmulas de alguno de los sistemas expuestos; lo mismo "U", "V" y dichas letras subindicadas, si es necesario. La definición de "ser deducible de una clase W" aplicada a una fórmula, es la usual. Los siguientes, son teoremas de GLIVENKO, demostrados en una memoria sobre la lógica de Brouwer, en 1929.

METATEOREMA 1. (Glivenko)

HIPOTESIS: (a) B se deduce de W en SLPC.
(b) −B se deduce de −W, U en SLPC.

TESIS: (a) −(−B) se deduce de −(−W) en SLPI.
(b) −B se deduce de −W, −(−U) en SLPI.

NOTA: Por "−W" deberá entenderse la clase de las fórmulas que son negaciones de fórmulas de W.

DEMOSTRACION: Por la hipótesis (a), B se deduce de W, es decir: Existe una sucesión finita de fórmulas de longitud n + 1, tal que:

A1, A2, ..., An, B

y, cada Ai tiene alguna de las siguientes propiedades (por definición de deducción):

Ai es un axioma ó
Ai es un elemento (premisa hipótesis) de W ó
Ai es resultado de aplicar alguna regla a fórmulas anteriores en la sucesión. (Aquí no hay restricción alguna por estar en SLPC).

Debemos demostrar que existe una sucesión

B1, B2, ..., Bm, −(−B)

tal que cada Bi es un axioma, o un elemento de −(−W), o el resultado de aplicar una regla, que no sea (&), a fórmulas anteriores.

La demostración se hará por inducción en n (indirectamente, por tanto, en la longitud de la demostración clásica de B).

CASO BASE: $n = 0$. La sucesión de SLPC se reduce a B

Pero se tiene además que $B \supset -(-B)$ (variante de 3.1)

En conclusión $-(-B)$ (por variante de 4 en 2.5)

La siguiente sucesión considerada en SLPI

(!) $B \supset -(-B), B, -(-B)$ es la sucesión

$B1, \ldots, Bm, -(-B)$

Como la sucesión Ai tenía un solo elemento, B, éste no puede ser derivado de anteriores; por lo tanto, puede ser un axioma. En este caso, (!) está en las condiciones de la sucesión Bi.

Si B es directamente un elemento de W, entonces $-(-B)$ es, por definición, un elemento de $-(-W)$, y, por consiguiente: "$-(-B)$ se deduce trivialmente de $-(-W)$", sin ninguna sucesión (no nula).

En ambos casos, $-(-B)$ se deduce de $-(-W)$ cuando $n = 0$.

PASO INDUCTIVO: Apliquemos recursión de valores sobre n. Supongamos el metateorema probado para toda sucesión de "longitud" n, menor o igual que un cierto k. Entonces, supongamos que A1, ..., Ak, B está en las condiciones de la hipótesis.

Los casos en que B es axioma o elemento de W no revisten especial novedad respecto de lo analizado anteriormente.

1º) Supongamos que B es consecuencia de dos fórmulas anteriores Ai y Aj, mediante el uso de la regla 2. O sea, B es "Ai . Aj".

A1, ..., Ai y A1, ..., Aj

que son secciones de la sucesión inicial constituyen demostraciones de Ai y Aj, respectivamente, en SLPC. Por hipótesis inductiva, como i, j son menores o iguales que k, resulta:

$B1, \ldots, -(-Ai)$ y $C1, \ldots, -(-Aj)$

son demostraciones de $-(-Ai)$ $-(-Aj)$, respectivamente en SLPI.

La sucesión

$B1, \ldots, -(-(Ai)), C1, \ldots, -(-Aj), (-(-Ai) . -(-Aj))$

está en las condiciones de la tesis: los Bi y Ci por hipótesis inductiva, y $-(-Ai)$ y $-(-Aj)$ por haberse obtenido de anteriores por reglas de SLPI, y $-(-(Ai)) . -(-Aj)$ por haberse obtenido de $-(-Ai)$ y $-(-Aj)$ mediante la regla 2, que es intuicionísticamente válida. Aplicando 10 y substituyendo equivalentes, se tiene la tesis.

2º) Los casos de reglas 1 y 3 se estudian análogamente.

3º) Supongamos que B es consecuencia de Ai y Aj (ídem anterior) mediante la regla 4. Entonces Aj es "$Ai \supset B$"

$$A1, \ldots, Ai \text{ y } A1, \ldots, A_{j-1}, (Ai \supset B)$$

son las demostraciones de Ai y Aj en SLPC. Como su longitud no es mayor que k, puede aplicarse la hipótesis inductiva.

$$B1, \ldots, -(-(Ai)) \quad \text{y } C1, \ldots, -(-(Ai \supset B)$$

ambas en las condiciones de la tesis. La siguiente, es una demostración intuicionística de $-(-B)$, usando una variante de la regla

$$\frac{-(-A) \quad -(-(A \supset B))}{-(-B)}$$

$$B1, \ldots, -(-Ai), C1, \ldots, -(-(Ai \supset B), \quad -(-B)$$

4º) Supongamos que B es consecuencia de Ai a través de (&) o sea que Ai es $-(-B)$.

$$A1, \ldots, -(-B)$$

es la demostración clásica de $-(-B)$, pero, por hipótesis inductiva, esto implica que existe una sucesión en las condiciones de la tesis:

$$B1, \ldots, -(-(-(-B)))$$

Aplicando 3.4 a $\quad -(-(-(-B))) \supset (-(-B))$ resulta:

$$B1, \ldots, -(-(-(-B))), -(-(-(-B))) \supset -(-B), -(-B)$$

que es la tesis.

5º) Los demás se tratan análogamente.

QED, la primera parte (TESIS a).

Análogamente se prueba la tesis b, a partir de la hipótesis b. Pero, en uso del teorema anterior, puede simplificarse el procedimiento. Si $-B$ se deduce de $-W$, U en SLPC, pensando $-W$, U como la **unión** de las clases $-W$ y U, entonces $-(-(-B))$ se deduce de $-(-((-W \text{ unión } (U)))$ en SLPI, por la parte ya demostrada. Como $-(-(-W \text{ unión } U))$ es $(-(-(-W)))$ unión $(-(-U))$ y las fórmulas de $-(-(-W))$, son equivalentes a las fórmulas de $-W$, por 3.4, resulta que $(-B)$ se deduce de $(-W, -(-U))$, QED.

METATEOREMA 2. (GLIVENKO) Llamando "SLCCº" y "SLCIº" a SLCC y SLCI, respectivamente, menos la regla 7, se tiene:

EL METATEOREMA 1 VALE EN SLCIº, CON LAS HIPOTESIS TOMADAS DE SLCCº.

Demostración: El caso base es igual al del metateorema 1.

Para estudiar el paso inductivo, utilicemos los teoremas previamente demostrados en 3. En efecto:

(1) De $-(-(A(x) \supset A')$ se deduce $-(-A(x)) \supset -(-A')$
De $-(-A(x)) \supset -(-A')$ se deduce $(Ex)-(-A(x)) \supset -(-A')$
De $(Ex) -(-A(x)) \supset -(-A')$ se deduce $-(-((Ex) -(-A(x)) \supset -(-A')))$

(2) Es teorema: $-(-(Ex)\ A(x) \supset (Ex)\ -(-A(x)))$

(3) Es teorema: $- -(- -A' \supset A')$
De (1), (2) y (3) resulta:

De $- -(A(x) \supset A')$ se deduce $- -((Ex)\ A(x) \supset A')$.

METATEOREMA 3. Excluyendo de SLAC y de SLAI las reglas 9 y 10, el metateorema 2, vale en ambos, en lugar de SLCCº y de SLCIº. (La demostración es inmediata).

METATEOREMA 4. **Hipótesis:** A es una fórmula proposicional, conteniendo sólo "$-$" y "." (eventualmente repetidas). A es teorema en SLPC.

Tesis. A es teorema en SLPI.

Demostración. Supongamos que A tiene la estructura $A1 . \ldots . An$ en donde cada Ai es o una variable proposicional, o la negación de una fórmula Bj.

Si Ai es una variable proposicional, entonces, por regla 1, resulta que Ai es teorema, absurdo porque el sistema no sería consistente, en el sentido de Post.

Por consiguiente, Ai es "$-Bj$". Pero $-Bj$ es teorema por regla 1, si A lo era, o, lo que es lo mismo, $-Bj$ se deduce de -0, 0 (en donde 0 es la clase vacía).

Por metateorema 1, b resulta que:

$-Bj$ se deduce de -0, $- -0$ en SLPI, o sea, es teorema.

Por consiguiente, para todo i, Ai es teorema en SLPI. Luego, aplicando reiteradamente la regla 2, resulta:

$A1 . \ldots . An$ es teorema (o sea A es teorema).

Definiremos al operador "º" de Kleene, aplicado a fórmulas.

a) Sea A una fórmula atómica, i.e., sin conectivas cuantificadores. Entonces, Aº es A.

b) $(A . B)^{\circ}$ es $(A^{\circ} . B^{\circ})$

c) $(A \supset B)^{\circ}$ es $(A^{\circ} \supset B^{\circ})$

d) $(-A)^{\circ}$ es $-(A)^{\circ}$

e) $(A \vee B)^{\circ}$ es $-(-(A)^{\circ} . -(B)^{\circ})$

f) $((x)\ A(x))^{\circ}$ es $(x)\ ((A(x))^{\circ}$

g) $((Ex)\ A(x))^{\circ}$ es $-(x) -((A(x))^{\circ})$

(Continuará)