



Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional de La Plata

TRABAJO DE INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN

# Recuperación del retículo a partir de sus perturbaciones aleatorias

*Luciano Scazzola*

dirigido por  
Dr. Jorge Antezana

Febrero 2023

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>Notaciones</b>	<b>7</b>
<b>Preliminares</b>	<b>8</b>
Retículos en $\mathbb{R}^d$	8
Análisis de Fourier	9
El espacio de Schwartz y las distribuciones temperadas	9
La transformada de Fourier	9
Fórmula de Poisson	10
Teorema de Bochner-Herglotz	11
Regularidad de medidas	14
Un poquito de proba	14
Notación y algunas definiciones	14
Algunos resultados útiles	15
La distribución normal	16
<b>El Teorema Principal</b>	<b>18</b>
Estructurado vs. aleatorio	19
<b>Ley Fuerte Uniforme</b>	<b>25</b>
Primer enfoque	26
Segundo enfoque	31
Desigualdades maximales	31
<b>Sucesiones de Wiener</b>	<b>37</b>
Afinidad entre medidas	39
<b>Ley Uniforme Chueca</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>
<b>Apéndice</b>	
Densidad en la bola	53
Desigualdad Valor Medio	55
Particiones de la unidad	56
Código en R	57
Otras distribuciones	58

# Capítulo 1

## Introducción

Dado un retículo  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^d$ , consideremos el conjunto aleatorio  $W$  que se obtiene al desplazar a cada punto en  $\mathcal{L}$  con un vector aleatorio. Nos preguntamos lo siguiente: dada una realización de  $W$ , ¿es posible determinar (con probabilidad uno) cuál es el retículo del que partimos originalmente?.

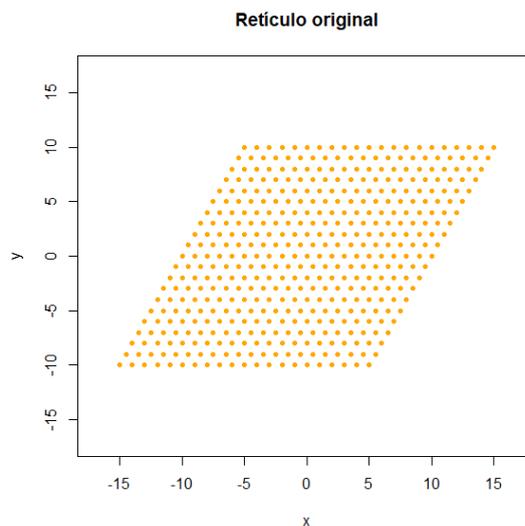
Veamos un ejemplo. Tomamos en dimensión  $d = 2$  el retículo

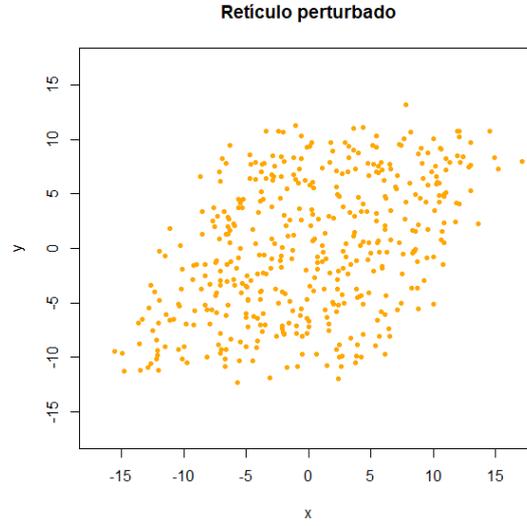
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

y a cada punto lo perturbamos con una normal bivariada de media  $(0, 0)$  y matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hacemos una simulación y vemos cómo nos quedan  $\mathcal{L}$  y  $W$  (ver código en el apéndice).





Si no tuviéramos el retículo original, ¿cómo lo recuperamos?

Este problema de recuperar el retículo original a partir del perturbado es el planteado en [1]. Bajo algunas hipótesis sobre la distribución de los vectores aleatorios, se logra recuperar, casi seguramente, el retículo original. Para esto, se consideran ciertas variables aleatorias, dadas por promedios de funciones exponenciales, que solo tienen la información de dónde se localiza el conjunto  $W$ . El objetivo de este trabajo es estudiar y entender con el mayor detalle posible este problema, y las herramientas necesarias para resolverlo: principalmente teoría de probabilidades y análisis de Fourier.

Cabe mencionar que en [8] se estudia una generalización para este problema a conjuntos discretos cuasi-periódicos, como *cuasicristales*, usando herramientas de *teoría de difracción*. Además, se analizan resultados bajo hipótesis más débiles sobre la independencia de los vectores aleatorios. De este paper adaptamos una idea para nuestro caso del retículo, en una demostración que haremos en el último capítulo.

Perturbaciones aleatorias de estructuras discretas han sido estudiadas por diferentes autores desde distintos puntos de vista. Por ejemplo, un problema de interés en física estadística es estudiar las propiedades estadísticas del conjunto perturbado. Matemáticamente, perturbar aleatoriamente un retículo es un ejemplo de un *proceso puntual súper-homogéneo*. Esto es, conjuntos aleatorios de puntos donde la varianza del número de puntos en un dominio crece más lento que su volumen. Este concepto fue introducido en [20]. En [21] se consideran perturbaciones aleatorias Gaussianas de un retículo como un modelo de juguete para el problema de estudiar el conjunto de ceros de una función analítica cuyos coeficientes de Taylor son variables aleatorias complejas independientes, con distribución Gaussiana.

Usaremos la notación  $e(t) = e^{2\pi it}$  y  $m_d$  denotará la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ . Además sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno usual de  $\mathbb{R}^d$  y  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq R\}$ . Concretamente, en nuestro problema, se asume que los vectores aleatorios  $\{\xi_n\}_{n \in \mathcal{L}}$  son i.i.d con distribución  $\xi$ , a la que se le pide un buen decaimiento de su esperanza. Nuestro conjunto aleatorio  $W$  es

$$W = \{n + \xi_n : n \in \mathcal{L}\}.$$

Si  $\mathcal{D}$  es el dominio fundamental del retículo  $\mathcal{L}$ , y  $\mathcal{L}^*$  denota su retículo dual, el resultado central del trabajo es que existe un evento de medida cero, fuera del cual

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{w \in W \cap B_R} e(\langle w, \lambda \rangle) = \begin{cases} \mathbb{E} \left( e(\langle \xi, \lambda \rangle) \right) \cdot (m_d(\mathcal{D}))^{-1} & \text{si } \lambda \in \mathcal{L}^* \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \mathcal{L}^* \end{cases}$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  (¡a la vez!). Si  $\mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) \neq 0$  para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  entonces se consigue recuperar el retículo.

¿Cómo demostraremos este límite casi seguro? Lo primero será ver que, casi seguramente, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{w \in W \cap B_R} \overline{e(\langle w, \lambda \rangle)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)}.$$

Luego, a este último límite lo separamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) \cdot \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Estudiaremos ambos términos por separado. El primer término del miembro de la derecha es lo que denominaremos la *parte estructurada*

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)}.$$

Usando adecuadamente la fórmula de Poisson obtendremos que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} = \begin{cases} (m_d(\mathcal{D}))^{-1} & \text{si } \lambda \in \mathcal{L}^* \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \mathcal{L}^* \end{cases}$$

El segundo término es la *parte aleatoria*

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) \right].$$

El resultado queda demostrado si probamos que casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) \right] = 0.$$

A este límite lo llamaremos **Ley Uniforme Chueca**. Enfatizamos una vez más que el conjunto excepcional de medida cero debe ser común para todos los  $\lambda$ , lo cual constituye una de las mayores dificultades técnicas para obtener el resultado.

## Organización de la tesis

Luego de introducir unas notaciones y preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo, en el capítulo 4 enunciamos nuestro Teorema Principal y cómo nos lleva el mismo a responder la pregunta originalmente planteada. Luego desarrollamos todo lo necesario para demostrarlo, siguiendo el esquema que ya anticipamos, excepto por la *Ley Uniforme de Grandes Números* que necesitamos, la *Ley Uniforme Chueca*, a la que le dedicaremos el resto del trabajo.

En el capítulo 5 introducimos las leyes Uniformes de Grandes Números y probamos, por dos enfoques distintos, cada uno interesante en sí mismo, una Ley Uniforme más simple que la que necesitamos. Concretamente: *Casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$* :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) \right] = 0.$$

Vemos que estos caminos no nos sirven para llegar a la Ley que nos interesa, lo cual en cierto modo motiva el desarrollo de lo que sigue. Sin embargo, en el segundo camino se utilizan las leyes Clásicas de Grandes Números (Kolmogorov y Khintchine), que serán necesarias en el capítulo 7.

En el capítulo 6 estudiamos las sucesiones de Wiener y sus medidas espectrales. El resultado central de este capítulo es: *Sean  $u$  y  $v$  dos sucesiones de Wiener, y sean  $\mu_u$  y  $\mu_v$  sus medidas espectrales, respectivamente. Supongamos que  $\mu_u$  y  $\mu_v$  son mutuamente singulares, entonces*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{v(n)} = 0.$$

En el capítulo 7 usamos lo desarrollado en el capítulo 6 y las leyes Clásicas de Grandes Números para demostrar la Ley Uniforme Chueca, lo que nos permite completar la demostración del resultado central y así concluir nuestro trabajo.

## Capítulo 2

# Notaciones

Lista de algunas notaciones:

- $m_d$ : medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ .
- i.i.d: independientes e idénticamente distribuidos.
- $e(t) = e^{2it}$ .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ : producto interno usual en  $\mathbb{R}^d$ .
- $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq R\}$ .
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
- $\|x\|_1 = x_1 + \dots + x_d$ , para  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ .
- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ , para  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ .
- $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{|f(x)|\}$ , para  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ .
- $\mathcal{L}^*$ : retículo dual de  $\mathcal{L}$ .
- $N_\Lambda(R) = \#\{\Lambda \cap B_R\}$ , para un conjunto discreto  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  cualquiera.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ : espacio de Schwartz de las funciones de rápido decaimiento.
- $\widehat{f}$ : transformada de Fourier de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .
- $\widehat{\varphi}$ : transformada de Fourier de  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .
- $\widehat{\mu}$ : transformada de Fourier de medida  $\mu$ .

# Capítulo 3

## Preliminares

Introducimos los preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo. Damos demostraciones de algunos resultados, y en otros casos, un poco más clásicos, los enunciamos sin demostración, con las referencias adecuadas.

### 3.1. Retículos en $\mathbb{R}^d$

Un conjunto  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^d$  es un **retículo** si existen  $d$  vectores linealmente independientes  $b_1, b_2, \dots, b_d$  tales que

$$\mathcal{L} = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_d := \left\{ \sum_{i=1}^d m_i b_i : m_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Esto es lo mismo que decir que  $\mathcal{L}$  es  $B\mathbb{Z}^d$ , con  $B$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $b_i$ . De este modo,  $B$  resulta una matriz real inversible (y todos los retículos son de esa forma).

El **dominio fundamental** del retículo  $\mathcal{L}$  se define del siguiente modo:

$$\mathcal{D} := \left\{ \sum_{i=1}^d \alpha_i b_i : \alpha_i \in [0, 1) \right\} = B[0, 1)^d.$$

El volumen de  $\mathcal{D}$  (su medida de Lebesgue) es igual a  $|\det(B)|$ , que resulta ser independiente de la base elegida. Este dominio fundamental se puede definir más en general como cualquier conjunto tal que sus traslaciones por vectores en el retículo formen una partición de  $\mathbb{R}^d$ .

Dado un retículo  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{R}^d$ , su **retículo dual**  $\mathcal{L}^*$  se define del siguiente modo:

$$\mathcal{L}^* := \{m \in \mathbb{R}^d : \forall n \in \mathcal{L}, \langle n, m \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Se puede probar que si  $\mathcal{L} = B\mathbb{Z}^d$ , entonces  $\mathcal{L}^* = (B^{-1})^* \mathbb{Z}^d$ . En particular,  $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}$ . El dominio fundamental de  $\mathcal{L}^*$  es  $\mathcal{D}^* = (B^{-1})^*[0, 1)^d$ .

También se puede definir a  $\mathcal{L}$  como un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^d$  de manera que el cociente  $\mathbb{R}^d/\mathcal{L}$  resulta compacto con la topología cociente. Desde este punto de vista, un dominio fundamental es un sistema de representantes del cociente medible Borel. Por otra parte, el retículo dual se puede definir como el anulador de  $\mathcal{L}$ . En principio, dicho anulador es un retículo del grupo dual de  $\mathbb{R}^d$ . Dado que existe una identificación natural entre  $\mathbb{R}^d$  y su dual via la función exponencial, el retículo dual se piensa usualmente como otro retículo del mismo  $\mathbb{R}^d$ . Para más detalles sobre este enfoque, se puede consultar [11].

## 3.2. Análisis de Fourier

### 3.2.1. El espacio de Schwartz y las distribuciones temperadas

Dados  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{N}_0^d$  y  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  (a valores complejos), sean

$$x^\gamma := x_1^{\gamma_1} \dots x_d^{\gamma_d},$$

$$D^\gamma f := \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial y_1^{\gamma_1} \dots \partial y_d^{\gamma_d}}.$$

Con estas notaciones, consideremos, para  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ , la seminorma  $\|f\|_{\alpha, \beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$ .

Sea  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  el **espacio de Schwartz** de las funciones (a valores complejos) de rápido decrecimiento en  $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty\}, \text{ para cualesquiera } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Por desigualdad triangular

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \|P(x_1, \dots, x_d) D^\beta f\|_\infty < \infty\},$$

para cualquier  $\beta \in \mathbb{N}_0^d$  y cualquier polinomio  $P$ . En particular, si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  entonces

$$\| \|x\|_2^{2k} f(x) \|_\infty < \infty,$$

para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ .

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  es un espacio topológico con la topología inducida por las seminormas  $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$ . Si tenemos un operador lineal  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ , resulta continuo con respecto a la topología de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  si existen seminormas  $\|\cdot\|_{\alpha_1, \beta_1}, \dots, \|\cdot\|_{\alpha_k, \beta_k}$  tal que para todo  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$|Tf| \leq C \cdot (\|f\|_{\alpha_1, \beta_1} + \dots + \|f\|_{\alpha_k, \beta_k}).$$

Al ser una familia numerable el conjunto de seminormas que definen la topología, el espacio resulta metrizable, es decir, un *espacio de Frechet*.

El espacio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  de las **distribuciones temperadas** es el dual (topológico) de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , es decir

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es lineal y continuo}\}.$$

Una medida positiva de Borel finita  $\mu$  en  $\mathbb{R}^d$  induce una distribución temperada  $T_\mu$ , dada por

$$T_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x).$$

Además, si  $f$  es continua y acotada en  $\mathbb{R}^d$  (o pertenece a algún espacio  $L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ) tenemos la distribución temperada  $T_f$ , dada por

$$T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \cdot f(x) dx.$$

### 3.2.2. La transformada de Fourier

Para análisis de Fourier en grupos clásicos y también en grupos localmente compactos abelianos, se pueden consultar los libros [12], [13] y [14].

**Definición 3.1.** La **transformada de Fourier** de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  es la función  $\hat{f}$  dada por

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

También anotaremos  $\mathcal{F}(f)$  a  $\widehat{f}$ . De la definición es inmediato que

- $\mathcal{F}\left(f(\cdot)\overline{e(\langle \cdot, h \rangle)}\right)(y) = \mathcal{F}(f)(y + h)$ .
- $\mathcal{F}(f(\delta \cdot))(y) = \frac{1}{\delta^d} \mathcal{F}(f)(y/\delta)$ , si  $\delta > 0$ .

**Teorema 3.2.** *La transformada  $\widehat{f}$  pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Más aún,  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  es un homeomorfismo.*

La definición de transformada de Fourier se puede extender al espacio de las distribuciones temperadas del siguiente modo.

**Definición 3.3.** *La transformada de Fourier de  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  es  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  (o  $\mathcal{F}(\varphi)$ ) dada por*

$$\widehat{\varphi}(f) := \varphi(\widehat{f}).$$

*La transformada de Fourier de una medida positiva de Borel finita  $\mu$  en  $\mathbb{R}^d$  es*

$$\widehat{\mu}(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle x, y \rangle)} d\mu(x), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

**Observación 3.4.**  *$\widehat{\mu}$  así definida resulta ser continua y acotada en  $\mathbb{R}^d$ .*

Recordemos que toda medida finita define una distribución temperada por integración. Luego, surge naturalmente la pregunta de si ambas definiciones son compatibles. La siguiente observación responde afirmativamente esta pregunta.

**Observación 3.5.**  *$\widehat{T}_\mu = T_{\widehat{\mu}}$ . En efecto*

$$\begin{aligned} \widehat{T}_\mu(f) &= T_\mu(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(w) d\mu(w) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \overline{e(\langle x, w \rangle)} dx d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle x, w \rangle)} d\mu(w) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \widehat{\mu}(x) dx = T_{\widehat{\mu}}(f), \end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema de Fubini para cambiar el orden de integración.

### 3.2.3. Fórmula de Poisson

El siguiente es quizás uno de los resultados más importantes dentro de la teoría de Fourier, junto con el principio de incertidumbre (ver por ejemplo [13]).

**Proposición 3.6** (Fórmula de Poisson). *Sea  $\mathcal{L}$  un retículo en  $\mathbb{R}^d$  y  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Para cada  $x$  en el dominio fundamental  $\mathcal{D}$  se tiene*

$$\sum_{n \in \mathcal{L}} f(x + n) = \frac{1}{m_d(\mathcal{D})} \sum_{m \in \mathcal{L}^*} \widehat{f}(m) e(\langle x, m \rangle).$$

En particular, si  $x = 0$ :

$$\sum_{n \in \mathcal{L}} f(n) = \frac{1}{m_d(\mathcal{D})} \sum_{m \in \mathcal{L}^*} \widehat{f}(m). \quad (1)$$

Si para un conjunto discreto  $\Lambda$ , pensamos en la medida dada por

$$\delta_\Lambda := \sum_{n \in \Lambda} \delta_n,$$

entonces la fórmula de Poisson se puede escribir como

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\delta_\Lambda = \frac{1}{m_d(\mathcal{D})} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} d\delta_{\mathcal{L}^*}.$$

Esto, si extendemos la definición de la distribución  $T_\mu$  a estas medidas (de crecimiento polinomial), es

$$T_{\delta_\Lambda}(f) = \frac{1}{m_d(\mathcal{D})} T_{\delta_{\mathcal{L}^*}}(\widehat{f}).$$

### 3.2.4. Teorema de Bochner-Herglotz

Una matriz compleja  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$  es **positiva** si  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{C}^d$ . En otras palabras, si  $x = (x_1, \dots, x_d)$  entonces

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} x_i \overline{x_j} \geq 0.$$

Si  $X$  es un conjunto cualquiera, una función  $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  se llama **núcleo** en  $X$ . Un núcleo se dice **definido positivo** si para todo subconjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  la matriz  $A = (a_{ij})$ , donde  $a_{ij} = K(x_i, x_j)$ , es positiva. Dicho de otro modo, si para todo  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  y todo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  se tiene

$$\sum_{i,j=1}^n K(x_i, x_j) \lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0.$$

**Observación 3.7.** Si  $K$  es definido positivo entonces

- $K(x, x) \geq 0$ : tomando  $n = 1$  y  $\lambda_1 = 1$  en la definición.
- $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$  ( $K$  es hermitiano): tomando primero  $n = 2$  y  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , y mirando parte imaginaria; y luego  $n = 2$  y  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i$ , y mirando parte real.

El siguiente resultado nos da una forma de construir núcleos definidos positivos. Para enunciarlo, recordemos que una medida positiva finita  $\mu$  en  $\mathbb{R}^d$  está **soportada** en un medible  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$  si

$$\mu(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{A}) = 0.$$

En este caso:

$$\widehat{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} e(\langle x, y \rangle) d\mu(x) = \int_{\mathcal{A}} e(\langle x, y \rangle) d\mu(x), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

**Proposición 3.8.** Si  $\mu$  es una medida positiva de Borel finita soportada en  $[0, 1]^d$ , entonces el núcleo  $K : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $K(m, n) = \widehat{\mu}(m - n)$  es definido positivo.

*Demostración.* Sea  $K_t(m, n) = \overline{e(\langle m - n, t \rangle)}$ ,  $t \in [0, 1]^d$  y  $m, n \in \mathbb{Z}^d$ . Si  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^d$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\sum_{1 \leq i, j \leq k} \overline{e(\langle n_i - n_j, t \rangle)} \lambda_i \overline{\lambda_j} = \left| \sum_{i=1}^k e(\langle n_i, t \rangle) \lambda_i \right|^2 \geq 0.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq k} \widehat{\mu}(n_i - n_j) \lambda_i \overline{\lambda_j} &= \sum_{1 \leq i, j \leq k} \left( \int_{[0,1]^d} \overline{e(\langle n_i - n_j, x \rangle)} d\mu(x) \lambda_i \overline{\lambda_j} \right) \\ &= \int_{[0,1]^d} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq k} \overline{e(\langle n_i - n_j, x \rangle)} \lambda_i \overline{\lambda_j} \right) d\mu(x) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Si  $K : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  es un núcleo en un retículo  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^d$ , entonces  $K$  se denomina **núcleo de Toeplitz** si para cualesquiera  $m, n, l \in \mathcal{L}$  se tiene  $K(m + l, n + l) = K(m, n)$ .

**Teorema 3.9** (Bochner-Herglotz en  $\mathbb{Z}^d$ ). Sea  $K : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$  un núcleo de Toeplitz. Entonces  $K$  es definido positivo si y solo si  $K(m, n) = \widehat{\mu}(m - n)$  para cierta  $\mu$  medida positiva de Borel finita soportada en  $[0, 1]^d$  (tal medida además es única).

*Demostración.* Una implicación ya la probamos en la Proposición 3.8. Lo que nos resta ver es que todo núcleo de Toeplitz definido positivo tiene la estructura deseada. Esto lo haremos siguiendo la demostración del libro [4].

Si  $K : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$  es un núcleo de Toeplitz, entonces  $K(m, n) = S(m - n)$ , para una función  $S : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ . Supongamos que  $S(0) = 1$ . Ahora, sea  $t \in [0, 1]^d$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Consideremos los  $N^d$  números complejos (no necesariamente distintos) dados por

$$\overline{e(\langle m, t \rangle)}, \quad m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d,$$

tal que  $1 \leq m_i \leq N$  para cada  $i$ . Como  $K$  es definido positivo tenemos que

$$\sum_{\substack{1 \leq m_i \leq N \\ 1 \leq n_i \leq N}} S(m - n) \overline{e(\langle m - n, t \rangle)} \geq 0. \quad (2)$$

Notemos que, en la sumatoria,  $m - n = r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{Z}^d$ , con  $-(N - 1) \leq r_i \leq N - 1$ , si y solo si  $m_i - n_i = r_i$ , para cada  $i$ . Esto se da si  $1 \leq n_i \leq N$  y  $1 \leq n_i + r_i \leq N$ , es decir,  $\max\{1 - r_i, 1\} \leq n_i \leq \min\{N - r_i, N\}$ . La cantidad de veces que sucede esto es  $N - |r_i|$ . Esto nos dice que la desigualdad (2) se puede reescribir como

$$\sum_{-(N-1) \leq r_i \leq N-1} (N - |r_1|) \dots (N - |r_d|) S(r) \overline{e(\langle r, t \rangle)} \geq 0.$$

Dividiendo todo por  $N^d$  tenemos

$$P_{N^d}(t) := \sum_{-(N-1) \leq r_i \leq N-1} \left(1 - \frac{|r_1|}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{|r_d|}{N}\right) S(r) \overline{e(\langle r, t \rangle)} \geq 0.$$

$P_{N^d}$  es una función continua y positiva en  $[0, 1]^d$ . Luego, definimos la medida positiva de Borel finita soportada en  $[0, 1]^d$  dada por

$$\mu_{N^d} := \int P_{N^d}(t) dm_d(t).$$

Esta medida resulta ser de probabilidad. En efecto:

$$\begin{aligned} \mu_{N^d}([0, 1]^d) &= \int_{[0, 1]^d} P_{N^d}(t) dm_d(t) \\ &= \sum_{-(N-1) \leq r_i \leq N-1} \left(1 - \frac{|r_1|}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{|r_d|}{N}\right) S(r) \int_{[0, 1]^d} \overline{e(\langle r, t \rangle)} dm_d(t) \\ &= \sum_{-(N-1) \leq r_i \leq N-1} \left(1 - \frac{|r_1|}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{|r_d|}{N}\right) S(r) \prod_{k=1}^d \left( \int_{[0, 1]} \overline{e(r_k \cdot t_k)} dm_1(t_k) \right). \end{aligned}$$

Esta última productoria es igual a 1 si  $r = 0$ , y a 0, en caso contrario. Entonces

$$\mu_{N^d}([0, 1]^d) = \left(1 - \frac{0}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{0}{N}\right) S(0) \cdot 1 = S(0) = 1.$$

Por el Teorema de Helly (o Bourbaki-Alaoglu) (ver por ejemplo [18]), existe una medida positiva de Borel finita  $\mu$  que está soportada en  $[0, 1]^d$  y una subsucesión  $\mu_{N_k^d}$  tal que:

$$\int_{[0, 1]^d} f(t) d\mu_{N_k^d}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]^d} f(t) d\mu(t),$$

para cada  $f$  continua en  $[0, 1]^d$ . En particular, si  $f(t) = \overline{e(\langle m, t \rangle)}$ , obtenemos

$$\widehat{\mu_{N_k^d}}(m) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \widehat{\mu}(m),$$

para cada  $m \in \mathbb{Z}^d$ . Pero

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_{N_k^d}}(m) &= \int_{[0,1]^d} \overline{e(\langle m, t \rangle)} P_{N_k^d}(t) dm_d(t) \quad \left( \text{si } \nu = \int f d\tilde{\nu} \text{ entonces } \int g d\nu = \int gf d\tilde{\nu} \right) \\ &= \int_{[0,1]^d} \left[ \overline{e(\langle m, t \rangle)} \sum_{-(N_k-1) \leq r_i \leq N_k-1} \left(1 - \frac{|r_1|}{N_k}\right) \dots \left(1 - \frac{|r_d|}{N_k}\right) S(r) \overline{e(\langle r, t \rangle)} \right] dm_d(t) \\ &= \left(1 - \frac{|m_1|}{N_k}\right) \dots \left(1 - \frac{|m_d|}{N_k}\right) S(m) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S(m).\end{aligned}$$

Entonces  $\widehat{\mu}(m) = S(m)$ , como queríamos ver.

Para reducir todo al caso  $S(0) = 1$ , notemos que como  $K$  es definido positivo, tenemos que  $K(n, n) = S(0) \geq 0$ . Si  $S(0) > 0$ ,  $S(0) \neq 1$ , consideramos  $\tilde{K}(m, n) = K(m, n)/S(0)$ . Este nuevo núcleo cumple las hipótesis del Teorema y, además,  $\tilde{K}(n, n) = 1$ . La medida  $\mu$  asociada a este núcleo por el caso anterior, la cambiamos por  $\nu := S(0) \cdot \mu$ , que cumple para  $K$ .

Si  $S(0) = 0$ , veamos que  $K \equiv 0$  y, por lo tanto, la medida nula funciona. En efecto, como  $K$  es definido positivo y  $S(0) = 0$ , obtenemos

$$\operatorname{Re}(S(n)\lambda_1\overline{\lambda_2}) \geq 0,$$

para cualesquiera  $n \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  (tomamos  $n = 2$  en la definición de definido positivo y los términos que no se anulan, son uno el conjugado del otro). Con  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , obtenemos  $\operatorname{Re}(S(n)) \geq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^d$ ; con  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = 1$ , obtenemos  $\operatorname{Re}(iS(n)) = -\operatorname{Im}(S(n)) \geq 0$ , es decir  $\operatorname{Im}(S(n)) \leq 0$ , que junto a  $S(n) = \overline{S(-n)}$  nos dice que  $\operatorname{Im}(S(n)) = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Por último, tomamos  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = i$ , que nos lleva a  $\operatorname{Re}(S(n)) \leq 0$ , y estamos.

La unicidad es consecuencia de la unicidad de la transformada de Fourier para medidas (ver por ejemplo, página 17 de [12]).  $\square$

Sea  $\mathcal{L} = B\mathbb{Z}^d$  un retículo en  $\mathbb{R}^d$  y  $\tilde{K}$  un núcleo de Toeplitz definido positivo en  $\mathcal{L}$ . A partir de  $\tilde{K}$  se puede definir un núcleo de Toeplitz definido positivo en  $\mathbb{Z}^d$  del siguiente modo:

$$K(m, n) := \tilde{K}(Bm, Bn).$$

Usando el teorema anterior para  $K$ , obtenemos una medida positiva de Borel finita  $\mu$ , soportada en  $[0, 1]^d$ , tal que  $\widehat{\mu}(m - n) = K(m, n)$ . Sea  $\mathcal{D}^* = (B^{-1})^*[0, 1]^d$ . A partir de  $\mu$  se puede definir una medida  $\nu$  soportada en  $\mathcal{D}^*$  a partir de la identidad:

$$\nu(\mathcal{A}) := \mu(B^*(\mathcal{A})), \quad \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d \text{ boreliano.}$$

La medida  $\nu$  no es otra cosa que la denominada *pushforward* de la medida  $\mu$  por medio de la función, en este caso lineal,  $x \mapsto (B^*)^{-1}x$ . A partir de la definición de transformada de Fourier de una medida, se deduce que si  $\tilde{m} = Bm$  para cierto  $m \in \mathbb{Z}^d$ , entonces

$$\widehat{\nu}(\tilde{m}) = \widehat{\mu}(m).$$

En efecto, por el Teorema de Cambio de Variables (ver [5]) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle \tilde{m}, x \rangle)} d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle \tilde{m}, (B^{-1})^*x \rangle)} d\mu(x),$$

por lo que

$$\widehat{\nu}(\tilde{m}) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle \tilde{m}, x \rangle)} d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle Bm, (B^{-1})^*x \rangle)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle m, x \rangle)} d\mu(x) = \widehat{\mu}(m).$$

Luego, si  $\tilde{m} = Bm$  y  $\tilde{n} = Bn$ , se sigue que

$$\tilde{K}(\tilde{m}, \tilde{n}) = K(m, n) = \widehat{\mu}(m - n) = \widehat{\nu}(\tilde{m} - \tilde{n}).$$

De este modo, hemos probado la siguiente versión un poco más general del Teorema de Bochner Herglotz.

**Corolario 3.10** (Bochner-Herglotz en retículos). *Sea  $\tilde{K} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  un núcleo de Toeplitz. Entonces  $\tilde{K}$  es definido positivo si y solo si  $\tilde{K}(\tilde{m}, \tilde{n}) = \widehat{\nu}(\tilde{m} - \tilde{n})$  para cierta  $\nu$  medida positiva de Borel finita soportada en  $\mathcal{D}^*$  (tal medida además es única).*

### 3.2.5. Regularidad de medidas

**Definición 3.11.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\Sigma$  una  $\sigma$ -álgebra en  $X$ . Una medida  $\mu$  en  $(X, \tau)$  se dice

- *regular interior* si

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ es compacto y medible}\},$$

para cada  $A \in \Sigma$ .

- *regular exterior* si

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subseteq G, G \text{ es abierto y medible}\},$$

para cada  $A \in \Sigma$ .

- *regular* si es tanto regular interior como regular exterior.

La medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$  y cualquier medida de probabilidad sobre los borelianos de un espacio métrico compacto son ejemplos de medidas regulares (ver [5]).

## 3.3. Un poquito de proba

### 3.3.1. Notación y algunas definiciones

**Definición 3.12.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Un **vector aleatorio** es una función  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  Borel-medible. En el caso  $d = 1$  hablamos de una **variable aleatoria real**. Si  $\tilde{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es Borel-medible, es una **variable aleatoria compleja**.

**Definición 3.13.** Si  $X$  es una variable aleatoria (real o compleja), su **esperanza** o **media** se define como

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P},$$

siempre y cuando  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ .

**Definición 3.14.** Dadas dos variables aleatorias  $X, Y$  con esperanza finita, su **covarianza** es

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)][\overline{Y - \mathbb{E}(Y)}]\right) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\overline{Y}).$$

Además, la **varianza** de  $X$  es

$$\text{Var}(X) := \text{Cov}(X, X) = \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2) = \mathbb{E}(|X|^2) - |\mathbb{E}(X)|^2.$$

**Definición 3.15.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y sea  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vector aleatorio. La **distribución**  $\tilde{\mathbb{P}}$  de  $\xi$  es el pushforward de la medida  $\mathbb{P}$  por medio de  $\xi$ , es decir,  $\tilde{\mathbb{P}}$  es la medida de probabilidad en  $\mathbb{R}^d$  dada por

$$\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{A}) := \mathbb{P}(\xi^{-1}(\mathcal{A})), \quad \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d \text{ boreliano.}$$

Generalmente usaremos la notación  $\mathbb{P}(\xi \in \mathcal{A})$  en lugar de  $\mathbb{P}(\xi^{-1}(\mathcal{A}))$ .

**Definición 3.16.** Sea  $\xi$  un vector aleatorio. La **función característica** de su distribución es

$$\varphi_{\xi}(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle \xi, \lambda \rangle}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

**Observación 3.17.** Notemos que la función característica de una distribución no es otra cosa que su transformada de Fourier. En efecto, con las notaciones de antes

$$\widehat{\mathbb{P}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle x, \lambda \rangle)} d\tilde{\mathbb{P}} = \int_{\Omega} \overline{e(\langle \xi(\omega), \lambda \rangle)} d\mathbb{P} = \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) = \varphi_{\xi}(\lambda),$$

donde nuevamente hemos usado el Teorema de Cambio de Variables.

**Definición 3.18.** Una sucesión de variables aleatorias  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  converge **casi seguramente** a una variable aleatoria  $Y$  si existe un evento  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega),$$

para cada  $\omega \notin \mathcal{A}$ . Esto lo notamos

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cs} Y.$$

Más en general, diremos que algo ocurre casi seguramente si ocurre fuera de un conjunto de medida nula.

### 3.3.2. Algunos resultados útiles

Para estos resultados clásicos de teoría de probabilidades, ver por ejemplo [7].

**Teorema 3.19** (Desigualdad de Markov). Sea  $X$  una variable aleatoria real, tal que  $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $a > 0$ :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^n)}{a^n}.$$

Tomando la variable  $(X - \mathbb{E}(X))^2$ , se deduce como caso particular la desigualdad de Chebyshev.

**Teorema 3.20** (Desigualdad de Chebyshev). Sea  $X$  una variable aleatoria real, con

$$\mathbb{E}(X), \text{Var}(X) < \infty.$$

Dado  $a > 0$ :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

**Definición 3.21.** Dada una sucesión de eventos  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , el evento

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

es que ocurran infinitos  $E_n$ .

**Lema 3.22** (Borel-Cantelli). Si  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de eventos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) < \infty,$$

entonces  $\mathbb{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = 0$ .

### 3.3.3. La distribución normal

**Definición 3.23.** Una variable aleatoria real  $X$  tiene distribución **normal estándar**, que notamos  $X \sim N(0, 1)$ , si

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx,$$

para cada  $A \subseteq \mathbb{R}$  Lebesgue-medible. Más en general, si  $a \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ , una variable aleatoria real  $X$  tiene **distribución normal**  $N(a, \sigma^2)$ , o **Gaussiana** ( $X \sim N(a, \sigma^2)$ ) si

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx,$$

para cada  $A \subseteq \mathbb{R}$  Lebesgue-medible. La media de  $X$  es  $a$  y la varianza es  $\sigma^2$ .

Veamos la expresión para la función característica de esta distribución. Si  $X \sim N(a, \sigma^2)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces

$$\begin{aligned} \varphi_X(\lambda) &= \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle X, \lambda \rangle)} \right) = \int_{\Omega} \overline{e(\langle X, \lambda \rangle)} d\mathbb{P} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e(\langle x, \lambda \rangle)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx = e^{-2\pi i a \lambda - 2(\sigma\pi\lambda)^2}. \end{aligned}$$

**Definición 3.24.** Un vector aleatorio  $\xi$  tiene distribución **normal estándar  $d$ -dimensional** si

$$\mathbb{P}(\xi \in A) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx,$$

para cada  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  Lebesgue-medible. Más en general, un vector aleatorio  $\xi$  tiene distribución **normal  $d$ -dimensional** (o **multivariada**) o **Gaussiana** si

$$\mathbb{P}(\xi \in A) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d \sqrt{\det K}} \int_A e^{-\langle K^{-1}(x-a), x-a \rangle/2} dx$$

para cada  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  Lebesgue-medible, donde  $K$  es una matriz positiva e inversible. El vector  $a$  es la media de  $\xi$  y el operador  $K$  es el **operador de covarianzas**. Si  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d)$ , entonces  $a = (\mathbb{E}(\xi^1), \dots, \mathbb{E}(\xi^d))$ , y la entrada  $(i, j)$  de  $K$  es  $\text{Cov}(\xi^i, \xi^j)$ .

Una definición equivalente es que el vector aleatorio  $\xi$  tiene distribución Gaussiana si cualquier combinación lineal de sus componentes

$$Y := a_1 \cdot \xi^1 + a_2 \cdot \xi^2 + \dots + a_d \cdot \xi^d,$$

con  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ , tiene distribución normal (en  $\mathbb{R}$ ).

Veamos la expresión para la función característica de esta distribución. Si  $\xi$  es un vector con distribución Gaussiana y  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(\lambda) &= \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) = \int_{\Omega} \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e(\langle x, \lambda \rangle)} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d \sqrt{\det K}} e^{-\langle K^{-1}(x-a), x-a \rangle/2} dx \\ &= e^{-2\pi i \langle a, \lambda \rangle - 2\pi^2 \langle K\lambda, \lambda \rangle}. \end{aligned}$$

En particular,  $\varphi_{\xi}(\lambda)$  es no nula para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Además, la norma dos de esta distribución tiene todos los *momentos* finitos:

$$\mathbb{E} (\|\xi\|_2^{2k}) = \int_{\Omega} \|\xi\|_2^{2k} d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_2^{2k} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d \sqrt{\det K}} e^{-\langle K^{-1}(x-a), x-a \rangle / 2} dx < \infty,$$

para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ . Usando la nomenclatura anterior, la función de distribución de la Gaussiana pertenece al espacio de Schwartz de funciones de rápido decrecimiento.

Para una definición más en general de medidas Gaussianas y una exposición completa de estos temas, ver [19].

# Capítulo 4

## El Teorema Principal

Enunciemos, antes que nada, el Teorema Principal de nuestro trabajo, el cual nos permitirá hacer la reconstrucción de nuestro retículo original. Así como hicimos en la introducción y en los preliminares, usaremos a lo largo del trabajo la notación

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{2\pi i \mathbf{t}}.$$

**Teorema 4.1** (Teorema Principal). *Sea  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^d$  un retículo, con  $\mathcal{D}$  su dominio fundamental, tal que  $m_d(\mathcal{D}) = 1$ . Consideremos  $\{\xi_n\}_{n \in \mathcal{L}}$  una sucesión de vectores aleatorios en  $\mathbb{R}^d$  i.i.d, con distribución de probabilidad  $\xi$ , siendo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  el espacio de probabilidad donde están definidos. Sea  $W := \{n + \xi_n : n \in \mathcal{L}\}$  y  $M_R(\lambda) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por*

$$M_R(\lambda) := \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{w \in W \cap B_R} \overline{e(\langle w, \lambda \rangle)},$$

para cada  $R > 0$  y cada  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Supongamos además que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\mathbb{E}(\|\xi\|_2^{d+\varepsilon}) < \infty. \quad (3)$$

Entonces, casi seguramente, tenemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_R(\lambda) = \begin{cases} \varphi_\xi(\lambda) & \text{si } \lambda \in \mathcal{L}^* \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \mathcal{L}^* \end{cases} \quad (4)$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ , donde  $\varphi_\xi(\lambda) = \mathbb{E}(\overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)})$ .

En este capítulo desarrollaremos todas las partes que se necesitan para demostrar este Teorema, excepto por una central que es una *Ley Uniforme de Grandes Números*, a la que llamaremos **Ley Uniforme Chueca**. Dejaremos todo listo para poder dedicarle los demás capítulos a esta Ley, y así completar la demostración del Teorema.

**Observación 4.2.** *Bajo nuestras hipótesis, para todo  $R$ ,  $M_R(\lambda)$  involucra finitos términos casi seguramente (lo veremos en la observación 4.6). Es decir, casi seguramente esta variable aleatoria está bien definida.*

**Observación 4.3.** *Si uno fija un  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  puede preguntarse si el límite (4) funciona casi seguramente para ese  $\lambda$ . Pero lo que buscamos es ir más allá: el Teorema dice que existe un evento de medida cero, fuera del cual el límite es este ípara todos los  $\lambda$ -s a la vez!*

Ahora: ¿cómo recuperamos el retículo a partir del Teorema? Si nuestra distribución de probabilidad  $\xi$  es tal que  $\varphi_\xi(\lambda) \neq 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  (por ejemplo, si  $\xi$  es Gaussiana), el Teorema principal nos dice que, para cada  $\omega$  fuera del conjunto de medida nula, tenemos

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{R}^d : \lim_{R \rightarrow \infty} M_R(\lambda)(\omega) \neq 0 \right\} = \mathcal{L}^*.$$

Dada una realización de nuestro conjunto aleatorio  $W$ , recuperamos al dual  $\mathcal{L}^*$  de esta manera, y nuestro retículo original  $\mathcal{L}$  se recupera tomando dual nuevamente:  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^*)^*$ .

**Observación 4.4.** Hagamos algunos comentarios sobre las hipótesis de nuestro Teorema principal.

- No se asume que  $\xi$  tenga media 0. Esto significa que también podemos recuperar a nuestro retículo  $\mathcal{L}$  a partir de un conjunto aleatorio de la forma

$$\widetilde{W} := \{n + c + \xi_n : n \in \mathcal{L}\},$$

con  $\{\xi_n\}_{n \in \mathcal{L}}$  vectores aleatorios i.i.d y  $c \in \mathbb{R}^d$  un vector arbitrario (no aleatorio). Lo único que cambia es que en nuestro Teorema principal, el resultado del límite queda multiplicado por  $e^{-\langle \lambda, c \rangle}$ .

- La hipótesis  $m_d(\mathcal{D}) = 1$  no es fundamental. Si uno no normaliza, lo único que sucede es que en nuestro Teorema principal, el resultado del límite queda multiplicado por  $(m_d(\mathcal{D}))^{-1}$ . En particular, si  $m_d(\mathcal{D}) = 1$ , también  $m_d(\mathcal{D}^*) = 1$ .
- La hipótesis (3) la usaremos en el lema 4.5. Notemos que en particular esta nos garantiza también que  $\mathbb{E}(\|\xi\|_2) < \infty$ . En efecto, podemos usar la desigualdad  $\|\xi\|_2 \leq \|\xi\|_2^{d+\varepsilon} + 1$  para obtener  $\mathbb{E}(\|\xi\|_2) \leq \mathbb{E}(\|\xi\|_2^{d+\varepsilon}) + 1 < \infty$ .

## 4.1. Estructurado vs. aleatorio

Lo primero que necesitamos para demostrar nuestro Teorema es el siguiente resultado casi seguro, que nos permitirá separar lo *estructurado* de lo *aleatorio*.

**Lema 4.5.** *Casi seguramente tenemos*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^d} \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 > R\} = 0,$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^d} \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} = 0.$$

*Demostración.* Sea  $\delta := \varepsilon/2(d+\varepsilon) \in (0, 1)$  con el mismo  $\varepsilon \in (0, 1)$  que en la condición (3). Tenemos

$$(d + \varepsilon)(1 - \delta) = (d + \varepsilon) \left( \frac{2(d + \varepsilon) - \varepsilon}{2(d + \varepsilon)} \right) = d + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la desigualdad de Markov

$$\mathbb{P}(\|\xi_n\|_2 \geq \|n\|_2^{1-\delta}) \leq \frac{\mathbb{E}(\|\xi_n\|_2^{d+\varepsilon})}{\|n\|_2^{(d+\varepsilon)(1-\delta)}} = \frac{\mathbb{E}(\|\xi_n\|_2^{d+\varepsilon})}{\|n\|_2^{d+\varepsilon/2}}$$

para todo  $n \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ . Entonces

$$\sum_{n \in \mathcal{L} \setminus \{0\}} \mathbb{P}(\|\xi_n\|_2 \geq \|n\|_2^{1-\delta}) \leq \mathbb{E}(\|\xi\|_2^{d+\varepsilon}) \sum_{n \in \mathcal{L} \setminus \{0\}} \frac{1}{\|n\|_2^{d+\varepsilon/2}} < \infty.$$

Por el lema de Borel-Cantelli, la variable aleatoria

$$X := \#\{n \in \mathcal{L} : \|\xi_n\|_2 \geq \|n\|_2^{1-\delta}\} \text{ es finita casi seguramente.} \quad (5)$$

Por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} & \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 > R\} \\ & \leq \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 > R, \|\xi_n\|_2 < \|n\|_2^{1-\delta}\} + X \\ & \stackrel{(\Delta)}{\leq} \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n\|_2 + \|n\|_2^{1-\delta} > R\} + X. \end{aligned}$$

Ahora, si  $\|n\|_2 \leq R - R^{1-\delta} \leq R$ , entonces  $\|n\|_2 + \|n\|_2^{1-\delta} \leq \|n\|_2 + R^{1-\delta} \leq R$ . De esto se sigue que

$$\#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n\|_2 + \|n\|_2^{1-\delta} > R\} \leq N_{\mathcal{L}}(R) - N_{\mathcal{L}}(R - R^{1-\delta}).$$

Ahora veamos que esto último lo podemos acotar por  $\tilde{C}R^{d-\delta}$ , para una constante  $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{L}) > 0$ . En efecto: por (28) tenemos

$$N_{\mathcal{L}}(R) \leq CR^{d-1} + m_d(B_R) = CR^{d-1} + m_d(B_1)R^d$$

y también

$$-N_{\mathcal{L}}(R - R^{1-\delta}) \leq C(R - R^{1-\delta})^{d-1} - m_d(B_{R-R^{1-\delta}}) = C(R - R^{1-\delta})^{d-1} - m_d(B_1)(R - R^{1-\delta})^d.$$

Sumando ambos términos, obtenemos

$$N_{\mathcal{L}}(R) - N_{\mathcal{L}}(R - R^{1-\delta}) \leq CR^{d-1} + C(R - R^{1-\delta})^{d-1} + m_d(B_1)(R^d - (R - R^{1-\delta})^d).$$

Como  $\delta < 1$ , lo que nos interesa acotar es

$$R^d - (R - R^{1-\delta})^d = -\sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} R^k (R^{1-\delta})^{d-k} (-1)^{d-k} = -\sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} R^{d-d\delta+k\delta} (-1)^{d-k}.$$

Como el exponente  $d - d\delta + k\delta$  es menor o igual a  $d - \delta$  y los demás factores solo dependen de  $d$ , estamos.

Juntando esto con lo anterior obtenemos

$$\#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 > R\} \leq \tilde{C}R^{d-\delta} + X,$$

que nos da la primera igualdad que queríamos.

Para la segunda igualdad notemos que

$$\begin{aligned} & \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} \leq \\ & \#\{n \in \mathcal{L} : R + R^{1-\delta/2} \geq \|n\|_2 > R\} + \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R + R^{1-\delta/2}, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\}. \end{aligned}$$

Usando nuevamente (28) y haciendo una cuenta similar a la anterior se obtiene la cota

$$\#\{n \in \mathcal{L} : R + R^{1-\delta/2} \geq \|n\|_2 > R\} \leq \tilde{C}R^{d-\delta/2}.$$

En este caso hay que desarrollar  $(R + R^{1-\delta/2})^{d-1}$  y  $(R + R^{1-\delta/2})^d - R^d$ , notando que en ambos casos los exponentes en  $R$  quedan menores o iguales que  $d - \delta/2$ .

Veamos por último que

$$\#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R + R^{1-\delta/2}, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} \leq X, \quad (6)$$

a partir de  $R$  suficientemente grande. En efecto, sea  $R \geq 2^{2(1-\delta)/\delta}$ , y  $n \in \mathcal{L}$  tal que simultáneamente  $\|n\|_2 > R + R^{1-\delta/2}$  y  $\|\xi_n\|_2 < \|n\|_2^{1-\delta}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|n + \xi_n\|_2 & \geq \|n\|_2 - \|\xi_n\|_2 > \|n\|_2 - \|n\|_2^{1-\delta} > R + R^{1-\delta/2} - \left(R + R^{1-\delta/2}\right)^{1-\delta} \\ & > R + R^{1-\delta/2} - (2R)^{1-\delta} \geq R + 2^{1-\delta}R^{1-\delta} - (2R)^{1-\delta} = R. \end{aligned}$$

Esto culmina la demostración.  $\square$

Si extendemos la notación  $N_{\mathcal{L}}(R) := \#(\mathcal{L} \cap B_R)$  para el número de puntos en el retículo  $\mathcal{L}$  que están en la bola centrada en el origen de radio  $R \geq 1$  a un conjunto discreto  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  cualquiera como  $N_{\Lambda}(R) := \#(\Lambda \cap B_R)$ , lo que acabamos de probar es equivalente (por (29)) a que, casi seguramente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_{\mathcal{L}}(R)}{N_W(R)} = 1, \quad (7)$$

puesto que

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{L}}(R) &= \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} + \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 > R\} \\ N_W(R) &= \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} + \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\}, \end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_{\mathcal{L}}(R)}{m_d(B_R)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_W(R)}{m_d(B_R)}$$

casi seguramente.

Esto que acabamos de notar no depende de la hipótesis de normalización  $m_d(\mathcal{D}) = 1$ , luego si desconocemos el volumen  $m_d(\mathcal{D})$ , lo recuperamos casi seguramente por medio del límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_W(R)}{m_d(B_R)} = \frac{1}{m_d(\mathcal{D})}.$$

Si estamos en dimensión  $d = 1$ , conocer  $m_d(\mathcal{D})$  es recuperar el retículo.

**Observación 4.6.** *El límite casi seguro (7) implica, en particular, que  $N_W(R)$  es finito casi seguramente. Esto último también se puede obtener juntando (5) con (6): casi seguramente*

$$\begin{aligned} N_W(R) &= \#\{n \in \mathcal{L} : \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} \\ &= \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R + R^{1-\delta/2}, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} + \\ &\quad \#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R + R^{1-\delta/2}, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\} < \infty, \end{aligned}$$

a partir de  $R$  suficientemente grande y, por lo tanto, para todo  $R$ .

Ahora bien, usando el lema 4.5 obtenemos

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left| M_R(\lambda) - \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} \right| = \\ &\frac{1}{m_d(B_R)} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left| \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \\ \|n + \xi_n\|_2 \leq R}} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} - \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} \right| \leq \\ &\frac{\#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 > R\}}{m_d(B_R)} + \frac{\#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\}}{m_d(B_R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

casi seguramente. Luego el límite de nuestro Teorema Principal es igual casi seguramente a

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \varphi_{\xi}(\lambda) \cdot \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_{\xi}(\lambda) \right] \right). \end{aligned}$$

El primer término del miembro de la derecha es nuestra parte *estructurada*

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)}.$$

Probemos la siguiente

**Proposición 4.7.** *Se tiene que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in \mathcal{L}^* \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \mathcal{L}^* \end{cases} \quad (8)$$

**Observación 4.8.** *Recordemos que*

$$\mathcal{L}^* := \{m \in \mathbb{R}^d : \forall n \in \mathcal{L}, \langle n, m \rangle \in \mathbb{Z}\},$$

con lo cual, si  $\lambda \in \mathcal{L}^*$ , tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} 1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_{\mathcal{L}}(R)}{m_d(B_R)} = 1.$$

Este es el comportamiento asintótico de  $N_{\mathcal{L}}(R)$  asumiendo  $m_d(\mathcal{D}) = 1$  (ver (29)). Entonces para demostrar (8) lo que nos falta estudiar es el caso  $\lambda \notin \mathcal{L}^*$ . Para eso primero un lema.

**Lema 4.9.** *Sea  $\Gamma$  un conjunto discreto de puntos de  $\mathbb{R}^d$ , de modo que  $0 \notin \Gamma$  y existen constantes  $C > 0$  y  $r > 0$  tales que para todo  $R > 0$ :*

$$\#\{\gamma \in \Gamma : \|\gamma\|_2 \leq R\} \leq C \cdot R^r. \quad (9)$$

Entonces, para cada función  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  se tiene que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(R\gamma) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

*Demostración.* Sea  $\delta > 0$  tal que  $\Gamma \cap B_\delta = \emptyset$ . Como  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , entonces

$$\left\| \|R\gamma\|_2^{2r+2} f(R\gamma) \right\| \leq \left\| \|x\|_2^{2r+2} f(x) \right\|_\infty < \infty,$$

para cada  $R > 0$  y cada  $\gamma \in \Gamma$ . Luego

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(R\gamma)| &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{\|R\gamma\|_2^{2r+2}} \cdot \left\| \|x\|_2^{2r+2} f(x) \right\|_\infty \\ &= \left\| \|x\|_2^{2r+2} f(x) \right\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n\delta \leq \|\gamma\|_2 < (n+1)\delta} \frac{1}{\|R\gamma\|_2^{2r+2}} \\ &\leq \left\| \|x\|_2^{2r+2} f(x) \right\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n\delta \leq \|\gamma\|_2 < (n+1)\delta} \frac{1}{R^{2r+2}(\delta n)^{2r+2}} \\ &\leq \left\| \|x\|_2^{2r+2} f(x) \right\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\delta(n+1))^r}{R^{2r+2}(\delta n)^{2r+2}} \\ &= \left\| \|x\|_2^{2r+2} f(x) \right\|_\infty \frac{C}{R^{2r+2}\delta^{r+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \frac{1}{n^{r+2}} \\ &= \frac{\tilde{C}}{R^{2r+2}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Ahora sí, con el comportamiento asintótico de  $N_{\mathcal{L}}(R)$  y la fórmula de Poisson (1), encaramos el caso que nos falta.

*Demostración del caso  $\lambda \notin \mathcal{L}^*$  en el límite (8).* En efecto, dado  $\delta > 0$  sea  $\varphi_\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  una función decreciente (como función de  $\|\cdot\|_2$ ) a valores reales tal que  $\varphi_\delta(x) = 1$ , si  $\|x\|_2 \leq 1$  y  $\varphi_\delta(x) = 0$ , si  $\|x\|_2 \geq 1 + \delta$ . Dado  $n \in \mathcal{L}$  y  $R > 0$  se sigue que  $\varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) = 1$ , si  $\|n\|_2 \leq R$  y  $\varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) = 0$ , si  $\|n\|_2 \geq (1 + \delta)R$ . Entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right| \leq \\ & \left| \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} - \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L}} \varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right| + \left| \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L}} \varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right| = \\ & \left| \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \\ R < \|n\|_2 < (1+\delta)R}} \varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right| + \left| \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L}} \varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right|. \end{aligned}$$

Para el primer término:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \\ R < \|n\|_2 < (1+\delta)R}} \varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right| \leq \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \\ R < \|n\|_2 < (1+\delta)R}} \left| \varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) \right| \left| \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \right| \leq \\ & \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \\ R < \|n\|_2 < (1+\delta)R}} 1 \leq \frac{1}{m_d(B_R)} (N_{\mathcal{L}}((1 + \delta)R) - N_{\mathcal{L}}(R)) = \\ & \frac{N_{\mathcal{L}}((1 + \delta)R) \cdot m_d(B_{(1+\delta)R})}{m_d(B_R) \cdot m_d(B_{(1+\delta)R})} - \frac{N_{\mathcal{L}}(R)}{m_d(B_R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (1 + \delta)^d - 1. \end{aligned}$$

Para el segundo término, usamos la fórmula de Poisson (recordar que asumimos  $m_d(\mathcal{D}) = 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L}} \varphi_\delta\left(\frac{n}{R}\right) \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} &= \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{m \in \mathcal{L}^*} \mathcal{F}\left(\varphi_\delta\left(\frac{\cdot}{R}\right) \overline{e(\langle \cdot, \lambda \rangle)}\right)(m) \\ &= \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{m \in \mathcal{L}^*} \mathcal{F}\left(\varphi_\delta\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right)(m + \lambda) \\ &= \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{m \in \mathcal{L}^*} R^d \widehat{\varphi}_\delta(R(m + \lambda)) \\ &= \frac{1}{m_d(B_1)} \sum_{m \in \mathcal{L}^*} \widehat{\varphi}_\delta(R(m + \lambda)). \end{aligned}$$

Tomando como caso particular del lema 4.9  $\Gamma = \mathcal{L}^* + \lambda$  (que no tiene al 0 pues  $\lambda \notin \mathcal{L}^*$ ) y  $f = \widehat{\varphi}_\delta$  obtenemos que esta última sumatoria se va a 0 cuando  $R$  tiende a  $\infty$  (la cota (9) se verifica tomando  $r = d$ , por (28)). Queda así demostrado nuestro límite (8).  $\square$

Nos falta estudiar el límite de nuestra *parte aleatoria*

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right]$$

para demostrar nuestro Teorema Principal. Es la *Ley Uniforme Chueca*, que resulta central en nuestro trabajo. Es el siguiente Teorema.

**Teorema** (Ley Uniforme Chueca). *Casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  se tiene*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right] = 0.$$

De esta Ley nos ocuparemos en lo que resta del trabajo. En este punto la asumimos y volvemos a escribir cómo se deduce nuestro Teorema Principal, para que nos quede la prueba compactada.

*Demostración del Teorema 4.1.* Usando el lema 4.5 obtenemos

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left| M_R(\lambda) - \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} \right| = \\ & \frac{1}{m_d(B_R)} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left| \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \\ \|n + \xi_n\|_2 \leq R}} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} - \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} \right| \leq \\ & \frac{\#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 \leq R, \|n + \xi_n\|_2 > R\}}{m_d(B_R)} + \frac{\#\{n \in \mathcal{L} : \|n\|_2 > R, \|n + \xi_n\|_2 \leq R\}}{m_d(B_R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

casi seguramente. Luego el límite a estudiar es

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)},$$

que, combinando (8) con la Ley Uniforme Chueca, resulta:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n + \xi_n, \lambda \rangle)} = \begin{cases} \varphi_\xi(\lambda) & \text{si } \lambda \in \mathcal{L}^* \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \mathcal{L}^* \end{cases}$$

casi seguramente. Esto termina la demostración.  $\square$

## Capítulo 5

# Ley Fuerte Uniforme

¿Qué es una Ley Uniforme de Grandes Números? Como su nombre lo sugiere, es una Ley más fuerte que las leyes Clásicas de Grandes Números, que en lugar de aplicarse a una sucesión fija de variables aleatorias, funciona *uniformemente* sobre familias de variables aleatorias.

Por un lado, las leyes Uniformes son de interés teórico en sí mismas, y representan un punto de entrada a una gran área de la teoría de probabilidades y estadística conocida como *teoría de procesos empíricos*. Por otro lado, estas leyes juegan un papel esencial en escenarios más aplicados, como en el comportamiento de diferentes tipos de estimadores estadísticos.

Como mencionamos en el capítulo anterior, la Ley Fuerte Uniforme que nosotros necesitamos, a la que llamaremos *Ley Uniforme Chueca*, es la siguiente

**Teorema** (Ley Uniforme Chueca). *Casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  se tiene*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right] = 0. \quad (10)$$

¿Qué significa el *casi seguramente* en este caso? El Teorema dice que existe un evento de medida cero, fuera del cual el límite es este ¡para todos los  $\lambda$ -s a la vez!. Mientras que una ley Clásica sería estudiar el límite, para un  $\lambda$  fijo, de los promedios de las variables  $\overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right]$ , lo que queremos es mover el  $\lambda$  sobre todo  $\mathbb{R}^d$ , y así obtener las familias de variables aleatorias a las cuales aplicará la ley en cuestión *uniformemente*.

En el capítulo que sigue desarrollaremos unas herramientas que nos permitirán luego probar esta Ley. Pero antes de hacer eso veremos en este capítulo dos formas de probar, solo usando teoría de probabilidades, una Ley Uniforme más simple. Luego trataremos de convencernos que no funcionan estos caminos para llegar a (10). La Ley más simple en cuestión es

**Teorema 5.1.** *Casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  se tiene*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right] = 0. \quad (11)$$

Esta Ley (11), por (29), es equivalente a probar

**Teorema 5.2.** *Sea  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de vectores aleatorios en  $\mathbb{R}^d$  i.i.d., que cumplen la hipótesis (3) (alcanza con pedir  $\mathbb{E}(\|\xi\|_2) < \infty$ ). Entonces casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  se tiene*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] = 0.$$

Esto nos indica que nos podemos abstraer del retículo para enfocarnos en esta Ley Uniforme *simplificada*. Mostraremos dos caminos para atacar esta Ley. Luego veremos que ninguno de los dos funciona para probar la Ley chueca.

## 5.1. Primer enfoque

El primer enfoque lo hacemos con vectores aleatorios  $X_i$  acotados. Seguimos, bajo algunas modificaciones, ideas de [16]. Nuestro objetivo es, dado un  $\delta > 0$  y un  $N > 0$  fijos, obtener una cota para

$$\mathbb{P} \left( \sup_{\lambda \in B_N} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n [e(\langle X_i, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle X_i, \lambda \rangle))] \right| > \delta \right),$$

con  $n$  suficientemente grande. A partir de esto, obtendremos nuestra primera Ley Uniforme. Es de interés que para esto no pasaremos por las leyes clásicas de Grandes Números.

Usando lo que en [16] llaman el *proceso de simetrización* demostraremos el siguiente Teorema. Para eso necesitamos recordar que una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de **Rademacher** si

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

**Teorema 5.3.** *Sea  $F$  una familia de funciones medibles de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}$ , y sean  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  vectores aleatorios en  $\mathbb{R}^d$  i.i.d, tal que  $\mathbb{E}(f(X_1)) < \infty$  para cada  $f \in F$ , y además*

$$\sup_{f \in F} \{\text{Var}(f(X_1))\} < \infty.$$

Para cada  $i$ , sea  $h_i : F \rightarrow \mathbb{R}$  una función cualquiera. Entonces, si  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{4n}{x^2} \sup_{f \in F} \{\text{Var}(f(X_1))\} \right) \mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i)) \right| > x \right) \\ & \leq 2 \cdot \mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i)) - h_i(f)] \right| > \frac{x}{4} \right), \end{aligned}$$

donde  $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$  son variables aleatorias independientes de Rademacher.

Antes de pasar a la prueba, nos interesa en particular el siguiente

**Corolario 5.4.** *Bajo las condiciones del teorema anterior, consideremos  $x = n\varepsilon$ , para  $\varepsilon > 0$ . Si  $v^2 := \sup_{f \in F} \{\text{Var}(f(X_1))\}$  y  $n \geq 8v^2/\varepsilon^2$ , entonces*

$$\mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i)) \right| > \varepsilon \right) \leq 4 \cdot \mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i) \right| > \frac{n\varepsilon}{4} \right). \quad (12)$$

*Demostración.* Si tomamos  $h_i(f) = -\mathbb{E}(f(X_i))$ , para cada  $i$ , entonces para cada  $x \geq \sqrt{8}\sqrt{nv}$  (que es equivalente a  $n \geq 8v^2/\varepsilon^2$ ) se tiene

$$1 - \frac{4n}{x^2} \sup_{f \in F} \{\text{Var}(f(X_1))\} \geq \frac{1}{2},$$

por lo que

$$\mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i)) \right| > x \right) \leq 4 \cdot \mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(X_i) \right| > \frac{x}{4} \right).$$

□

Ahora sí la demostración del Teorema.

*Demostración del Teorema 5.3.* Sea  $Z_i(f)$  la variable aleatoria  $f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))$ . Tomemos para cada  $i$  y para cada  $f$ ,  $W_i(f)$  una copia independiente de  $Z_i(f)$ . Fijemos  $x > 0$ . Sean

$$\beta := \inf_{f \in F} \left\{ \mathbb{P}_Z \left( \left| \sum_{i=1}^n Z_i(f) \right| < \frac{x}{2} \right) \right\}$$

$$A := \left\{ \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n Z_i(f) \right| > x \right\}.$$

Tomemos  $\omega \in A$ . Luego, existe  $f_0 \in F$  tal que  $|\sum_{i=1}^n Z_i(f_0)(\omega)| > x$ . La desigualdad triangular nos dice que si  $|\sum_{i=1}^n W_i(f_0)(\tilde{\omega})| < x/2$ , entonces  $|\sum_{i=1}^n Z_i(f_0)(\omega) - W_i(f_0)(\tilde{\omega})| > \frac{x}{2}$ . Se sigue que

$$\beta \leq \mathbb{P}_W \left( \left| \sum_{i=1}^n W_i(f_0) \right| < \frac{x}{2} \right) \leq \mathbb{P}_W \left( \left| \sum_{i=1}^n W_i(f_0) - Z_i(f_0)(\omega) \right| > \frac{x}{2} \right)$$

$$\leq \mathbb{P}_W \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n W_i(f) - Z_i(f)(\omega) \right| > \frac{x}{2} \right),$$

donde  $\mathbb{P}_W$  es notación para calcular la probabilidad con respecto a las variables  $W_i$ , pensando a las  $Z_i$  fijas. Como ambos extremos de la desigualdad no dependen de  $f_0$ , la misma vale en todo  $A$ . Integrando con respecto a  $\mathbb{P}_Z$  en  $A$  obtenemos:

$$\beta \cdot \mathbb{P}_Z \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n Z_i(f) \right| > x \right) = \int_A \beta \, d\mathbb{P}_Z(\omega)$$

$$\leq \int_A \mathbb{P}_W \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n W_i(f) - Z_i(f)(\omega) \right| > \frac{x}{2} \right) \, d\mathbb{P}_Z(\omega)$$

$$\leq \int_\Omega \mathbb{P}_W \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n W_i(f) - Z_i(f)(\omega) \right| > \frac{x}{2} \right) \, d\mathbb{P}_Z(\omega)$$

$$= \mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n W_i(f) - Z_i(f) \right| > \frac{x}{2} \right).$$

En el último paso estamos usando la Ley de Esperanza Total (ver [7]) con variables indicadoras.

Para cada  $f$  y cada  $i$ ,  $Z_i(f) - W_i(f)$  tiene la misma distribución que  $W_i(f) - Z_i(f)$ . Entonces, para cualquier elección de signos  $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , tenemos que  $\sum_{i=1}^n Z_i(f) - W_i(f)$  tiene la misma distribución que  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(Z_i(f) - W_i(f))$ . Por lo tanto:

$$\mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n W_i(f) - Z_i(f) \right| > \frac{x}{2} \right) = \mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [W_i(f) - Z_i(f)] \right| > \frac{x}{2} \mid \{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n} \right).$$

Ahora bien, por la desigualdad triangular tenemos que

$$\left\{ \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [W_i(f) - Z_i(f)] \right| > \frac{x}{2} \right\} \subseteq$$

$$\left\{ \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [W_i(f) - h_i(f)] \right| > \frac{x}{4} \right\} \cup \left\{ \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [Z_i(f) - h_i(f)] \right| > \frac{x}{4} \right\}.$$

Entonces, como las  $Z_i$  tienen la misma distribución que las  $W_i$ :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [W_i(f) - Z_i(f)] \right| > \frac{x}{2} \mid \{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n} \right) \leq$$

$$2 \cdot \mathbb{P}_Z \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [Z_i(f) - h_i(f)] \right| > \frac{x}{4} \mid \{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n} \right) =$$

$$2 \cdot \mathbb{P} \left( \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [Z_i(f) - h_i(f)] \right| > \frac{x}{4} \right).$$

Finalmente, para estimar  $\beta$ , usamos la desigualdad de Chebyshev. Para  $\tilde{f} \in F$ :

$$\mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n Z_i(\tilde{f}) \right| \geq \frac{x}{2} \right) \leq \frac{\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n Z_i(\tilde{f}) \right)}{\left( \frac{x}{2} \right)^2} = \frac{4n}{x^2} \text{Var}(Z_1(\tilde{f})) = \frac{4n}{x^2} \text{Var}(\tilde{f}(X_1)),$$

que nos da la cota  $\beta \geq 1 - \frac{4n}{x^2} \sup_{f \in F} \{\text{Var}(f(X_1))\}$ .  $\square$

La idea de lo que sigue es reemplazar una familia  $F$ , que puede ser infinita, por un conjunto finito que la aproxime en algún sentido. La noción detrás de esto es la de los *números de cubrimiento*.

**Definición 5.5.** Sea  $(Y, \tilde{d})$  un espacio métrico y  $F \subseteq Y$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $N(\varepsilon, F, \tilde{d})$  el mínimo número (si existe alguno) de bolas de radio  $\varepsilon$  con respecto a la métrica  $\tilde{d}$  que se necesitan para cubrir  $F$ . Esto es, el mínimo cardinal del conjunto  $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq Y$  con la propiedad de que para cada  $f \in F$ , existe  $1 \leq i \leq m$  tal que  $\tilde{d}(f, y_i) \leq \varepsilon$ . Cualquier conjunto con esta propiedad es un  $\varepsilon$ -*cubrimiento*.

Dados  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  y  $M > 0$ , llamemos  $f_{M,\lambda}$  a la función  $e(\langle \cdot, \lambda \rangle)$  con dominio  $B_M$  en dimensión  $d$ . Sea  $F_{M,N} := \{f_{M,\lambda} : \lambda \in B_N\}$ , y pensemos en la definición anterior con el espacio métrico  $Y_M$  de las funciones acotadas a valores complejos con dominio  $B_M$ , con la distancia  $d_\infty$  inducida por la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Veamos que  $N(\varepsilon, F_{M,N}, d_\infty)$  es finito. En efecto

$$\begin{aligned} |(f_{M,\lambda} - f_{M,\mu})(x)| &= |e(\langle x, \mu \rangle) \cdot (e(\langle x, \lambda - \mu \rangle) - 1)| \\ &= |e(\langle x, \lambda - \mu \rangle) - 1| \leq 2\pi |\langle x, \lambda - \mu \rangle| \leq 2\pi M \|\lambda - \mu\|_2, \end{aligned}$$

donde hemos usado Cauchy-Schwarz en la última desigualdad. Tomando  $\|\lambda - \mu\|_2 \leq \varepsilon/(2\pi M)$ , obtenemos  $\|f_{M,\lambda} - f_{M,\mu}\|_\infty \leq \varepsilon$ . Por compacidad de la bola  $B_M$ , podemos cubrir nuestra familia  $F_{M,N}$  con un número finito de elementos, es decir  $N(\varepsilon, F_{M,N}, d_\infty)$  es finito. Por ejemplo en dimensión 1, se consigue la cota  $N(\varepsilon, F_{M,N}, d_\infty) \leq \left\lceil \frac{2N}{\varepsilon/2\pi M} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{4\pi MN}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ .

Una desigualdad que además necesitamos es

**Teorema 5.6.** Sean  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  y  $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$  variables aleatorias independientes de Rademacher. Entonces

$$\mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \right| > x \right) \leq 4 \cdot e^{-x^2/(8\|z\|_2^2)}, \quad (13)$$

siendo  $\|z\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 = \|a\|_2^2 + \|b\|_2^2$ , con  $a_i := \text{Re}(z_i)$  y  $b_i := \text{Im}(z_i)$ .

*Demostración.* Por desigualdad triangular,

$$\left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \right| > x \right\} \subseteq \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \right| > \frac{x}{2} \right\} \cup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i \right| > \frac{x}{2} \right\}.$$

Además, la desigualdad de Hoeffding (ver [15]) nos dice

$$\mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \right| > \frac{x}{2} \right) \leq 2 \cdot e^{-(x/2)^2/(2\|a\|_2^2)},$$

y lo propio para el otro término. Obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \right| > x \right) &\leq \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \right| > \frac{x}{2} \right) + \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i \right| > \frac{x}{2} \right) \\ &\leq 2 \cdot e^{-(x/2)^2/(2\|a\|_2^2)} + 2 \cdot e^{-(x/2)^2/(2\|b\|_2^2)} \\ &\leq 2 \cdot e^{-(x/2)^2/(2\|z\|_2^2)} + 2 \cdot e^{-(x/2)^2/(2\|z\|_2^2)} \\ &= 4 \cdot e^{-x^2/(8\|z\|_2^2)}. \end{aligned}$$

$\square$

Ahora sí, la cota que buscábamos:

**Teorema 5.7.** Sean  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  vectores aleatorios i.i.d en  $\mathbb{R}^d$ , tal que  $\|X_i\|_2 \leq M$ , para cada  $i$ . Si  $\delta > 0$  y  $n > 128/\delta^2$  entonces

$$\mathbb{P} \left( \sup_{\lambda \in B_N} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n [e(\langle X_i, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle X_i, \lambda \rangle))] \right| > \delta \right) \leq 16 \cdot N(\delta/8, F_{M,N}, d_\infty) e^{-n\delta^2/512}. \quad (14)$$

*Demostración.* Consideremos la familia  $F_{M,N}$  como antes. Sea

$$A := \left\{ \sup_{\lambda \in B_N} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_{M,\lambda}(X_i) \right| > \frac{n\delta}{4} \right\},$$

con  $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$  variables aleatorias independientes de Rademacher. Tenemos que

$$\mathbb{P}(A) = \int_{\Omega} \mathbb{P}_{\varepsilon} \left( \sup_{\lambda \in B_N} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_{M,\lambda}(X_i(\omega)) \right| > \frac{n\delta}{4} \right) d\mathbb{P}_{X_1} \dots d\mathbb{P}_{X_n}(\omega).$$

Sea  $G$  un  $\delta/8$ -cubrimiento de  $F_{M,N}$  con la  $d_\infty$ . Tenemos que

$$\#G = N(\delta/8, F_{M,N}, d_\infty).$$

Dado  $\lambda \in B_N$ , existe  $g_\lambda \in G$  (fijamos alguna para cada  $\lambda$ ) tal que

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [f_{M,\lambda}(X_i) - g_\lambda(X_i)] \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_{M,\lambda}(X_i) - g_\lambda(X_i)| \leq \frac{1}{n} \cdot n \cdot \|f_{M,\lambda} - g_\lambda\|_\infty \leq \frac{\delta}{8},$$

que es lo mismo que

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [f_{M,\lambda}(X_i) - g_\lambda(X_i)] \right| \leq \frac{n\delta}{8}.$$

Fijada una realización de las  $X_i$  y de las  $\varepsilon_i$ , si ocurre  $A$ , existe  $\lambda_0$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_{M,\lambda_0}(X_i) \right| > \frac{n\delta}{4}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{n\delta}{4} &< \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_{M,\lambda_0}(X_i) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [f_{M,\lambda_0}(X_i) - g_{\lambda_0}(X_i)] \right| + \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_{\lambda_0}(X_i) \right| \\ &\leq \frac{n\delta}{8} + \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_{\lambda_0}(X_i) \right|. \end{aligned}$$

Luego

$$\sup_{\lambda \in B_N} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_\lambda(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8},$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P} \left( \sup_{\lambda \in B_N} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_{M,\lambda}(X_i) \right| > \frac{n\delta}{4} \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{\lambda \in B_N} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_\lambda(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \bigcup_{g \in G} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right\} \right) \\ &\leq \sum_{g \in G} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right). \end{aligned}$$

Las funciones en  $G$  son acotadas, y en particular las podemos tomar acotadas por 1. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \|g(X_i(\omega))\|_2^2 \leq n, \text{ para todo } \omega \in \Omega, \text{ toda } g \in G.$$

Aplicando (13):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right) &= \int_{\Omega} \mathbb{P}_{\varepsilon} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X_i(\omega)) \right| > \frac{n\delta}{8} \right) d\mathbb{P}_{X_1} \dots d\mathbb{P}_{X_n}(\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} 4 \cdot e^{-n^2\delta^2/(512n)} d\mathbb{P}_{X_1} \dots d\mathbb{P}_{X_n}(\omega) \\ &= 4 \cdot e^{-n\delta^2/512}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{g \in G} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right) \leq \sum_{g \in G} 4 \cdot e^{-n\delta^2/512} \leq 4 \cdot N(\delta/8, F_{M,N}, d_{\infty}) e^{-n\delta^2/512}.$$

Finalmente, notando que

$$|e(\langle X_1, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle X_1, \lambda \rangle))| \leq |e(\langle X_1, \lambda \rangle)| + |\mathbb{E}(e(\langle X_1, \lambda \rangle))| \leq 1 + \mathbb{E}(|e(\langle X_1, \lambda \rangle)|) = 2,$$

para cada  $\lambda$ , obtenemos que

$$\text{Var}(e(\langle X_1, \lambda \rangle)) = \mathbb{E}(|e(\langle X_1, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle X_1, \lambda \rangle))|^2) \leq 4,$$

y entonces la desigualdad (12) nos da el resultado.  $\square$

Sale entonces con esto nuestra primera Ley Uniforme para variables acotadas, sin pasar directamente por las Leyes clásicas de Grandes Números.

**Corolario 5.8.** *Sea  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de vectores aleatorios en  $\mathbb{R}^d$  i.i.d, tal que  $\|\xi_n\|_2 \leq M$ , para cada  $n$ . Entonces casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  se tiene*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] = 0.$$

*Demostración.* Sea  $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$  fijos. Consideremos para cada  $R \in \mathbb{N}$  el evento

$$E_R := \left\{ \sup_{\lambda \in B_N} \frac{1}{R} \left| \sum_{n=1}^R [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] \right| > \delta \right\}.$$

Usando (14) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{R \geq 1} \mathbb{P}(E_R) &= \sum_{R=1}^{[128/\delta^2]} \mathbb{P}(E_R) + \sum_{R > 128/\delta^2} \mathbb{P}(E_R) \\ &\leq \sum_{R=1}^{[128/\delta^2]} \mathbb{P}(E_R) + \sum_{R > 128/\delta^2} 16 \cdot N(\delta/8, F_{M,N}, d_{\infty}) e^{-R\delta^2/512} < \infty. \end{aligned}$$

Por el lema de Borel-Cantelli se sigue que  $\mathbb{P} \left( \limsup_{R \rightarrow \infty} E_R \right) = 0$ . Como el  $\delta$  es arbitrario, resulta que casi seguramente, para todo  $\lambda \in B_N$  se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] = 0.$$

Como  $N \in \mathbb{N}$  también es arbitrario, se extiende la convergencia casi segura a todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .  $\square$

En este punto, se podría pensar en extender lo que acabamos de hacer para variables acotadas, a variables gaussianas o con un decaimiento similar, pero como ya probaremos esto con el segundo enfoque, no nos concentramos en eso y, en cambio, vamos directamente a ver por qué no funciona este camino para nuestra Ley Chueca.

Veamos entonces que el mismo esquema de la demostración del Teorema 5.7 no nos sirve para probar la Ley Uniforme Chueca. Por simplicidad, supongamos que estamos en dimensión uno. En tal caso, la cota que necesitamos para nuestras aplicaciones sería

$$\mathbb{P} \left( \sup_{\lambda \in [-N, N]} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n e(\langle i, \lambda \rangle) [e(\langle X_i, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle X_i, \lambda \rangle))] \right| > \delta \right).$$

¿Por qué no funciona el mismo camino? Si vamos agregando este factor  $e(\langle i, \lambda \rangle)$  adecuadamente en la demostración, los primeros pasos se siguen de la misma forma (valiéndonos de que su módulo es 1), hasta que en el paso

$$\mathbb{P} \left( \sup_{\lambda \in [-N, N]} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_\lambda(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right) = \mathbb{P} \left( \bigcup_{g \in G} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right\} \right),$$

el mismo argumento no nos sirve para

$$\mathbb{P} \left( \sup_{\lambda \in [-N, N]} \left| \sum_{i=1}^n e(\langle i, \lambda \rangle) \varepsilon_i g_\lambda(X_i) \right| > \frac{n\delta}{8} \right),$$

pues ahora la cantidad de funciones  $e(\langle i, \lambda \rangle) \cdot g_\lambda(X_i)$  deja de ser finita, recorriendo  $\lambda$  el intervalo  $[-N, N]$ . Perdimos.

## 5.2. Segundo enfoque

Otra alternativa es usar las Leyes clásicas de Grandes Números, de Kolmogorov y de Khintchine, a partir de las cuales se puede obtener una Ley uniforme para un subconjunto denso numerable de  $\mathbb{R}^d$ . Luego, utilizando la regularidad de las funciones exponenciales, veremos cómo se puede pasar de dicho conjunto denso a todo  $\mathbb{R}^d$  (concretamente, adaptaremos la idea de acotar los gradientes de la prueba del *Claim 2* en [1]).

Comencemos recordando algunas estimaciones de funciones maximales, las cuales constituyen un primer paso clásico a la hora de establecer convergencias en casi todo punto.

### 5.2.1. Desigualdades maximales

Un camino estándar para probar una versión de la Ley Fuerte de Grandes Números consiste en demostrar una desigualdad maximal como la que veremos a continuación.

**Teorema 5.9** (Desigualdad de Hájek-Renyi). *Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias reales independientes tal que  $\mathbb{E}(X_k), \text{Var}(X_k) < \infty$ , para todo  $1 \leq k \leq n$ . Sea  $T_k := \sum_{i=1}^k (X_i - \mathbb{E}(X_i))$ . Si  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$  son constantes positivas, tenemos para todo  $t > 0$ :*

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} c_k |T_k| > t \right\} \right) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^n c_k^2 \text{Var}(X_k). \quad (15)$$

Tomando  $c_i = 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , en la desigualdad, obtenemos como caso particular la famosa *desigualdad de Kolmogorov*.

**Teorema 5.10** (Desigualdad de Kolmogorov). Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias reales independientes tal que  $\mathbb{E}(X_k), \text{Var}(X_k) < \infty$ , para todo  $1 \leq k \leq n$ . Sea  $T_k := \sum_{i=1}^k (X_i - \mathbb{E}(X_i))$ .

Para todo  $t > 0$ :

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |T_k| > t \right\} \right) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k).$$

*Demostración del Teorema 5.9.* Sea  $T_0 := 0$  y  $c_0 := c_1$ . Definamos los eventos:

$$A_0 := \bigcap_{k=0}^n \{c_k |T_k| \leq t\}$$

$$A_k := \bigcap_{j=0}^{k-1} \{c_j |T_j| \leq t\} \cap \{c_k |T_k| > t\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Notemos que si  $A_k$  ocurre,  $1 \leq k \leq n$ , entonces  $c_k^2 T_k^2 > t^2$ , lo que nos dice que:

$$t^2 \cdot \mathbb{P} \left( \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} c_k |T_k| > t \right\} \right) = t^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 | A_k) \mathbb{P}(A_k).$$

Luego, para probar (15), alcanza con ver que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 | A_k) \mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^n c_k^2 \text{Var}(X_k).$$

Como  $T_k = T_{k-1} + (X_k - \mathbb{E}(X_k))$ , resulta

$$T_k^2 - T_{k-1}^2 = 2 \cdot T_{k-1} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) + (X_k - \mathbb{E}(X_k))^2.$$

Ahora, sea  $B_0 := \Omega$  (nuestro espacio muestral) y para  $1 \leq k \leq n$

$$B_k := \bigcap_{i=1}^k A_i^c.$$

Como  $A_i \subseteq A_j^c$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , podemos escribir  $A_k = B_{k-1} \setminus B_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Esto nos dice que

$$\mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 | A_k) \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 I_{A_k}) = \mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 I_{B_{k-1}}) - \mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 I_{B_k}).$$

Además  $X_k$  es independiente de  $I_{B_{k-1}}$  y de  $T_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 | A_k) \mathbb{P}(A_k) &= \sum_{k=1}^n [\mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 I_{B_{k-1}}) - \mathbb{E}(c_k^2 T_k^2 I_{B_k})] = \sum_{k=1}^n c_k^2 \mathbb{E}(T_k^2 I_{B_{k-1}}) - \sum_{k=1}^n c_k^2 \mathbb{E}(T_k^2 I_{B_k}) \\ &= c_1^2 \mathbb{E}(T_1^2) + \sum_{k=2}^n c_k^2 \mathbb{E}(T_k^2 I_{B_{k-1}}) - \sum_{k=2}^n c_{k-1}^2 \mathbb{E}(T_{k-1}^2 I_{B_{k-1}}) - c_n^2 \mathbb{E}(T_n^2 I_{B_n}) \\ &\leq c_1^2 \mathbb{E}(T_1^2) + \sum_{k=2}^n c_k^2 \mathbb{E}((T_k^2 - T_{k-1}^2) I_{B_{k-1}}) - c_n^2 \mathbb{E}(T_n^2 I_{B_n}) \\ &\leq c_1^2 \mathbb{E}(T_1^2) + \sum_{k=2}^n c_k^2 \mathbb{E}([2 \cdot T_{k-1} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) + (X_k - \mathbb{E}(X_k))^2] I_{B_{k-1}}) \\ &= c_1^2 \mathbb{E}(T_1^2) + \sum_{k=2}^n c_k^2 \mathbb{E}(2T_{k-1} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) I_{B_{k-1}}) + \sum_{k=2}^n c_k^2 \mathbb{E}((X_k - \mathbb{E}(X_k))^2 I_{B_{k-1}}) \\ &= c_1^2 \text{Var}(X_1) + 0 + \sum_{k=2}^n c_k^2 \text{Var}(X_k) \mathbb{E}(I_{B_{k-1}}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n c_k^2 \text{Var}(X_k), \end{aligned}$$

como queríamos ver.  $\square$

Dadas  $X_1, \dots, X_M, \dots, X_N$  variables aleatorias independientes tales que  $\mathbb{E}(X_k), \text{Var}(X_k) < \infty$ ,  $1 \leq k \leq N$ , podemos tomar  $Y_1 = \dots = Y_{M-1} = 0$ ,

$$Y_M = \sum_{i=1}^M (X_i - \mathbb{E}(X_i)),$$

y para  $M+1 \leq j \leq N$  definimos  $Y_j = X_j - \mathbb{E}(X_j)$ . Luego, a partir de la desigualdad anterior, tomando  $c_k := 1/k$  y  $M \leq k \leq N$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left\{ \max_{M \leq k \leq N} \frac{1}{k} |T_k| > t \right\} \right) &\leq \frac{1}{t^2} \sum_{k=M}^N \left( \frac{1}{k} \right)^2 \text{Var}(Y_k) = \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{M^2} \text{Var}(Y_M) + \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k^2} \text{Var}(X_k) \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \text{Var}(X_i) + \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k^2} \text{Var}(X_k) \right), \end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ , donde

$$T_k = \sum_{i=1}^k (Y_i - \mathbb{E}(Y_i)) = \sum_{i=M}^k (Y_i - \mathbb{E}(Y_i)) = \sum_{i=1}^k (X_i - \mathbb{E}(X_i)), \quad M \leq k \leq N.$$

Con esto ya podemos dar la demostración de la Ley de Kolmogorov.

**Teorema 5.11** (Ley Fuerte de Grandes Números de Kolmogorov). *Sea  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias reales independientes tal que  $\mathbb{E}(X_k), \text{Var}(X_k) < \infty$ , para todo  $k$ . Entonces*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < \infty \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [X_k - \mathbb{E}(X_k)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cs} 0.$$

*Demostración.* Sea  $D_k := \sum_{n \geq k} \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_n)$ ,  $k \geq 1$ . Si  $D_1 < \infty$ , entonces  $D_k$  es decreciente en  $k$  y

$\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = 0$ . Notemos que para todo  $M \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^M \text{Var}(X_k) &= \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^M k^2 (D_k - D_{k+1}) \\ &= \frac{1}{M^2} \left( D_1 + \sum_{k=2}^M (k^2 - (k-1)^2) D_k - M^2 D_{M+1} \right) \\ &= \frac{1}{M^2} \left( D_1 + \sum_{k=2}^M (2k-1) D_k - M^2 D_{M+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^M (2k-1) D_k = \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^{N_0} (2k-1) D_k + \frac{1}{M^2} \sum_{k=N_0+1}^M (2k-1) D_k \\ &\leq \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^{N_0} (2k-1) D_k + \frac{1}{M^2} (M - N_0)(2M-1) D_{N_0+1} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

para  $N_0$  suficientemente grande y  $M \rightarrow \infty$ . Ahora, si  $N > M$  y  $\delta > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left\{ \max_{M \leq k \leq N} \frac{1}{k} \left| \sum_{n=1}^k [X_n - \mathbb{E}(X_n)] \right| > \delta \right\} \right) &= \mathbb{P} \left( \left\{ \max_{M \leq k \leq N} \frac{1}{k} |T_k| > \delta \right\} \right) \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \text{Var}(X_i) + \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k^2} \text{Var}(X_k) \right) \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \text{Var}(X_i) + D_{M+1} \right). \end{aligned}$$

Entonces, si  $M$  está fijo y hacemos tender  $N \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \sup_{M \leq k} \frac{1}{k} \left| \sum_{n=1}^k [X_n - \mathbb{E}(X_n)] \right| > \delta \right\} \right) \leq \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \text{Var}(X_i) + D_{M+1} \right) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

□

**Corolario 5.12.** *Sea  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias complejas independientes tal que  $\mathbb{E}(Y_k) = 0$ , para todo  $k$ . Supongamos además que existe cierta constante  $C$  tal que  $|Y_k| \leq C$ , para todo  $k$ . Entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

*casi seguramente.*

*Demostración.* Notar que  $\mathbb{E}(\text{Re}(Y_k)) = \text{Re}(\mathbb{E}(Y_k)) = 0$  y  $\text{Var}(\text{Re}(Y_k)) = \mathbb{E}(\text{Re}(Y_k)^2) \leq C^2$ . Hacemos lo mismo con la parte imaginaria y aplicamos el Teorema 5.11 a ambas a la vez, para obtener el resultado. □

Con el Teorema 5.11 se puede probar (ver [9]) esta otra versión de la Ley Fuerte de Grandes Números:

**Teorema 5.13** (Ley Fuerte de Grandes Números de Khintchine). *Sea  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias reales i.i.d tal que  $\mathbb{E}(X_1) = \mu < \infty$ . Entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu, \text{ casi seguramente.}$$

Ahora sí, la demostración de la Ley Uniforme (11) en cuestión. Como anticipamos, la idea de la demostración es la del *Claim 2* en [1]. La misma la volveremos a usar más adelante.

*Demostración del Teorema 5.2.* Dado  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  fijo, consideramos la sucesión de variables aleatorias

$$A_\lambda(n) = e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)), n \in \mathbb{N}.$$

Por el corolario 5.12 (tomando por ejemplo  $C = 2$ ), tenemos que

$$\frac{1}{R} \sum_{n=1}^R A_\lambda(n) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \text{ casi seguramente.} \quad (16)$$

Ahora para cada  $R \in \mathbb{N}$  sea

$$F_R(\lambda) := \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R A_\lambda(n).$$

Pensemos a  $F_R(\lambda)$  como función de  $\lambda$  y veamos que

$$\sup_{R \geq 1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \|\nabla F_R(\lambda)\|_2 < \infty,$$

casi seguramente. Usemos la notación  $x = (x^1, \dots, x^d)$  para  $x \in \mathbb{R}^d$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla F_R(\lambda) &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R \nabla A_\lambda(n) \\ \nabla A_\lambda(n) &= (2\pi i (\xi_n^1 e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}[\xi_n^1 e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)]), \dots, 2\pi i (\xi_n^d e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}[\xi_n^d e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)])) \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))}{\partial \lambda^j} &= \frac{\partial \int_{\Omega} e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) d\mathbb{P}}{\partial \lambda^j} = \int_{\Omega} \frac{\partial e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)}{\partial \lambda^j} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} 2\pi i \xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) d\mathbb{P} = 2\pi i \mathbb{E}[\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)] . \end{aligned}$$

Acotemos  $\|\nabla A_{\lambda}(n)\|_1$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla A_{\lambda}(n)\|_1 &= 2\pi \sum_{j=1}^d |\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))| \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{j=1}^d |\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)| + \sum_{j=1}^d |\mathbb{E}(\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))| \right) \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{j=1}^d |\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)| + \sum_{j=1}^d \mathbb{E}(|\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)|) \right) \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{j=1}^d |\xi_n^j| + \sum_{j=1}^d \mathbb{E}(|\xi_n^j|) \right) = 2\pi (\|\xi_n\|_1 + \mathbb{E}(\|\xi_n\|_1)) . \end{aligned}$$

Usando ahora que  $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$  y que  $\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{d} \|\cdot\|_2$  (Cauchy-Schwarz), resulta:

$$\begin{aligned} \|\nabla F_R(\lambda)\|_2 &\leq \|\nabla F_R(\lambda)\|_1 \leq \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R \|\nabla A_{\lambda}(n)\|_1 \\ &\leq \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R [2\pi (\|\xi_n\|_1 + \mathbb{E}(\|\xi_n\|_1))] \\ &\leq \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R \left[ 2\pi \left( \sqrt{d} \|\xi_n\|_2 + \mathbb{E}(\sqrt{d} \|\xi_n\|_2) \right) \right] \\ &= \frac{2\pi\sqrt{d}}{R} \sum_{n=1}^R [\|\xi_n\|_2 + \mathbb{E}(\|\xi_n\|_2)] . \end{aligned}$$

Aplicando la Ley Fuerte de Grandes Números (5.13) obtenemos que, casi seguramente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R [\|\xi_n\|_2 + \mathbb{E}(\|\xi_n\|_2)] = 2 \mathbb{E}(\|\xi\|_2) .$$

Como toda sucesión convergente es acotada concluimos que, casi seguramente

$$\sup_{R \geq 1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \|\nabla F_R(\lambda)\|_2 < \infty .$$

Sea  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  un denso numerable. Como unión numerable de eventos de probabilidad cero es un evento de probabilidad cero, podemos concluir por (16) que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_R(\lambda) = 0 \tag{17}$$

casi seguramente para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Veamos ahora que esta igualdad se extiende casi seguramente a todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Si  $\lambda \notin \Lambda$ , tomemos una sucesión  $\{\lambda_p\} \subseteq \Lambda$  que tienda a  $\lambda$  con  $p \rightarrow \infty$ . Tenemos casi seguramente (usando la desigualdad triangular y la desigualdad (30)) que

$$|F_R(\lambda)| \leq |F_R(\lambda_p)| + |F_R(\lambda) - F_R(\lambda_p)| \leq |F_R(\lambda_p)| + M \|\lambda - \lambda_p\|_2 ,$$

donde  $M := \sup_{R \geq 1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \|\nabla F_R(\lambda)\|_2 < \infty$ . Si hacemos tender  $R \rightarrow \infty$  y luego  $p \rightarrow \infty$  obtenemos que (17) se cumple casi seguramente para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

□

¿Qué sucede si intentamos replicar la misma estrategia de demostración para

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right]?$$

Podemos reemplazar  $m_d(B_R)$  por  $N_{\mathcal{L}}(R)$ , pero no podemos obviar el hecho de estar sumando sobre el retículo, para darle sentido al factor  $e(\langle n, \lambda \rangle)$ . Definimos

$$A_\lambda(n) = e(\langle n, \lambda \rangle) [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] , n \in \mathcal{L} .$$

La convergencia (16) camina de la misma manera. Ahora para cada  $R > 0$  consideramos

$$F_R(\lambda) = \frac{1}{N_{\mathcal{L}}(R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} A_\lambda(n) .$$

Resulta en este caso

$$\nabla F_R(\lambda) = \frac{1}{N_{\mathcal{L}}(R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \nabla A_\lambda(n) ,$$

y la  $j$ -ésima entrada de  $\nabla A_\lambda(n)$  es

$$e(\langle n, \lambda \rangle) 2\pi i \cdot n^j [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] + e(\langle n, \lambda \rangle) 2\pi i (\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}[\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)]) = e(\langle n, \lambda \rangle) 2\pi i (n^j [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] + \xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}[\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)]) .$$

Entonces

$$\|\nabla A_\lambda(n)\|_1 = 2\pi \sum_{j=1}^d |n^j [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] + \xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))| .$$

Ya sabemos acotar

$$\sum_{j=1}^d |\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(\xi_n^j e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))| ,$$

pero el problema está en el término

$$\sum_{j=1}^d n^j [e(\langle \xi_n, \lambda \rangle) - \mathbb{E}(e(\langle \xi_n, \lambda \rangle))] ,$$

que, mirando  $\|\nabla F_R(\lambda)\|_1$ , nos lleva a querer acotar

$$\frac{1}{N_{\mathcal{L}}(R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \|n\|_1 .$$

Este término diverge y perdimos otra vez.

## Capítulo 6

# Sucesiones de Wiener

Motivados por lo dicho y hecho en el capítulo anterior, en este vamos a desarrollar un par de herramientas (consideradas en [1]) que nos permitirán finalmente probar, en el siguiente capítulo, la Ley Uniforme Chueca. Las herramientas en cuestión son las denominadas *sucesiones de Wiener* y la noción de *afinidad entre medidas*.

Sea  $u : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  una sucesión indexada por el retículo  $\mathcal{L}$ .

**Definición 6.1.** Una sucesión  $u : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  es de **Wiener** si para todo  $k \in \mathcal{L}$  existe el límite:

$$\gamma_u(k) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{u(n+k)}.$$

En particular, para  $k = 0$ , existe el límite

$$\gamma_u(0) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} |u(n)|^2. \quad (18)$$

A esta sucesión  $\gamma_u : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  la llamamos **sucesión de correlación** de la sucesión de Wiener  $u$ .

Por ejemplo, la sucesión  $u$  constantemente 1 y  $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $v(n) = e(\langle n, \lambda \rangle)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ , son ambas sucesiones de Wiener, con  $\gamma_u(k) = 1$ ,  $\gamma_v(k) = e(\langle k, \lambda \rangle)$ , para cada  $k \in \mathcal{L}$  (ambas salen directo por (29)).

Mostraremos a continuación que toda sucesión de Wiener  $u$  da lugar a una medida positiva y finita de Borel en el dominio fundamental  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathcal{L}^*$ , que llamaremos  $\mu_u$ . Para eso necesitamos probar el siguiente.

**Lema 6.2.** Sea  $u$  una sucesión de Wiener, y sean  $k_j, k_l \in \mathcal{L}$  cualesquiera. Vale que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{u(n+k_l-k_j)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n-k_l) \overline{u(n-k_j)}.$$

*Demostración.* Llamemos  $f(n) := u(n) \overline{u(n+k_l-k_j)}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} (f(n) - f(n-k_l)) = \\ & \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus (B_R - k_l))} f(n) - \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{m \in \mathcal{L} \cap ((B_R - k_l) \setminus B_R)} f(m). \end{aligned}$$

Estos dos términos se van a 0 cuando  $R \rightarrow \infty$ . Hagamos la cuenta para el primero (la otra es similar). La condición  $n \notin B_R - k_l$  nos dice que  $|n+k_l| > R$ . Entonces los  $n$  del primer término cumplen:

$$R < |n+k_l| \leq |n| + |k_l|,$$

y por esto,  $R - |k_l| < |n| \leq R$ :  $n \in B_R \setminus B_{R-|k_l|}$ . Por Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus (B_{R-k_l}))} f(n) \right| &\stackrel{C.S.}{\leq} \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus (B_{R-k_l}))} |u(n)|^2} \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus (B_{R-k_l}))} |u(n+k_l-k_j)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus B_{R-|k_l|})} |u(n)|^2} \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus B_{R-|k_l|})} |u(n+k_l-k_j)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus B_{R-|k_l|})} |u(n)|^2} \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_{R+|k_l|+|k_j|} \setminus B_{R-|k_l|-|k_j-k_l|})} |u(n)|^2} \\ &\leq \sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_{R+|k_l|+|k_j|} \setminus B_{R-|k_l|-|k_j-k_l|})} |u(n)|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, la existencia del límite (18), nos dice que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{m_d(B_{R+|a|})} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_{R+|a|}} |u(n)|^2 - \frac{1}{m_d(B_{R-|b|})} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_{R-|b|}} |u(n)|^2 \right) &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_{R+|a|}} |u(n)|^2 - \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_{R-|b|}} |u(n)|^2 \right) &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_{R+|a|} \setminus B_{R-|b|})} |u(n)|^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Juntando estas cosas, concluimos:

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap (B_R \setminus (B_{R-k_l}))} f(n) \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

y nuestra proposición queda probada.  $\square$

Ahora con esto, tenemos que, si  $u$  es de Wiener:

$$\begin{aligned} \gamma_u(k_l - k_j) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{u(n+k_l-k_j)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n-k_l) \overline{u(n-k_j)}. \end{aligned}$$

Entonces para cualesquiera  $c_0, \dots, c_m \in \mathbb{C}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq l, j \leq m} c_l \overline{c_j} \gamma_u(k_l - k_j) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \left( \sum_{0 \leq l, j \leq m} c_l \overline{c_j} u(n-k_l) \overline{u(n-k_j)} \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \left| \sum_{l=0}^m c_l u(n-k_l) \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema de Bochner-Herglotz aplicado al núcleo  $\tilde{K}(k_l, k_j) = \gamma_u(k_l - k_j)$ , obtenemos la existencia de una única medida de Borel positiva y finita  $\mu_u$  soportada en el dominio fundamental  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathcal{L}^*$  tal que  $\widehat{\mu}_u(k) = \gamma_u(k)$  para todo  $k \in \mathcal{L}$ . Nos referiremos a  $\mu_u$  como la *medida espectral* de la sucesión de Wiener  $u$ .

Si bien solo trabajaremos con medidas espectrales concretas dadas por sucesiones de Wiener particulares, la existencia en general de estas medidas le da contexto a lo que estamos desarrollando.

**Observación 6.3.** La medida espectral asociada a la sucesión  $u$  constantemente 1 es  $\mu_u = \delta_0$ , pues  $\gamma_u(k) = 1$  y

$$\widehat{\delta}_0(k) = \int_{\mathcal{D}^*} \overline{e(\langle x, k \rangle)} d\delta_0(x) = \overline{e(\langle 0, k \rangle)} = 1.$$

La medida espectral asociada a la sucesión  $\{e(\langle \lambda, n \rangle)\}_{n \in \mathcal{L}}$  es  $\mu_v = \delta_{x_0}$ , siendo  $x_0$  un elemento en  $(\mathcal{L}^* + \lambda) \cap \mathcal{D}^*$ , pues  $\gamma_v(k) = \overline{e(\langle \lambda, k \rangle)}$  y

$$\widehat{\delta}_{x_0}(k) = \int_{\mathcal{D}^*} \overline{e(\langle x, k \rangle)} d\delta_{x_0}(x) = \overline{e(\langle x_0, k \rangle)} = \overline{e(\langle \lambda, k \rangle)},$$

donde la última igualdad es porque si  $x_0 - \lambda \in \mathcal{L}^*$ , resulta  $\langle k, x_0 - \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ , y por lo tanto  $-2\pi \langle k, \lambda \rangle = -2\pi \langle k, x_0 \rangle + 2\tilde{k}\pi$ , para  $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ .

El lema que sigue será clave en la demostración de nuestra Ley Uniforme Chueca. Recordemos que dos medidas positivas  $\mu$  y  $\nu$  en un espacio medible son *mutuamente singulares* si existe una partición del espacio por dos medibles  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  tal que  $\mu(\mathcal{B}) = \nu(\mathcal{A}) = 0$ .

**Lema 6.4.** Sean  $u$  y  $v$  dos sucesiones de Wiener, y sean  $\mu_u$  y  $\mu_v$  sus medidas espectrales, respectivamente. Supongamos que  $\mu_u$  y  $\mu_v$  son mutuamente singulares, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{v(n)} = 0.$$

La demostración de este lema la haremos en la siguiente sección, luego de introducir unas nociones y resultados necesarios para la misma. Pero antes de eso una pequeña observación.

**Observación 6.5.** Juntando el lema 6.4 con la observación 6.3 obtenemos una demostración alternativa del límite (8) en el caso  $\lambda \notin \mathcal{L}^*$ . En efecto, como la medida espectral de  $\{e(\langle n, \lambda \rangle)\}_{n \in \mathcal{L}}$  es  $\delta_x$ , siendo  $x \in (\mathcal{L}^* + \lambda) \cap \mathcal{D}^*$ , la condición  $\lambda \notin \mathcal{L}^*$  nos dice que  $x \neq 0$ . Luego, podemos aplicar el lema 6.4 y obtener

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} = 0, \text{ si } \lambda \notin \mathcal{L}^*.$$

## 6.1. Afinidad entre medidas

Sean  $\mu$  y  $\sigma$  dos medidas de Borel positivas y finitas soportadas en  $\mathcal{D}^*$ . Recordemos que  $\mu$  es *absolutamente continua* con respecto a  $\sigma$  si  $\sigma(\mathcal{A}) = 0$  implica  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ , para cada  $\mathcal{A}$  medible. Esto lo notamos  $\mu \ll \sigma$ . En este caso, el Teorema de Radon-Nikodym nos garantiza la existencia de una  $f$  medible no negativa tal que

$$\mu = \int f d\sigma.$$

A  $f$  la denotamos por  $\frac{d\mu}{d\sigma}$ .

**Definición 6.6.** Sean  $\mu$  y  $\nu$  dos medidas de Borel positivas y finitas soportadas en  $\mathcal{D}^*$ , y sea  $\sigma$  otra medida de Borel positiva finita tal que  $\mu \ll \sigma$  y  $\nu \ll \sigma$ . La **afinidad** entre  $\mu$  y  $\nu$  (o la integral de Hellinger) se define como

$$\rho(\mu, \nu) := \int_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{d\mu}{d\sigma} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma.$$

Siempre podemos tomar a  $\sigma$  como  $\mu + \nu$ . Veamos ahora que esta noción está bien definida.

**Proposición 6.7.** La afinidad  $\rho(\mu, \nu)$  no depende de la medida de referencia  $\sigma$ .

*Demostración.* Recordemos que si  $\mu = \int f d\sigma$  entonces  $\int g d\mu = \int gf d\sigma$ . Con esto en mente, se desprende que si  $\mu \ll \tilde{\sigma} \ll \sigma$ , entonces

$$\frac{d\mu}{d\tilde{\sigma}} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} = \frac{d\mu}{d\sigma} \quad \sigma\text{-casi todo punto,}$$

y que, como  $\tilde{\sigma} = \int \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} d\sigma$ , resulta

$$\int f d\tilde{\sigma} = \int f \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} d\sigma.$$

Luego, notando que si  $\mu \ll \sigma$  y  $\nu \ll \sigma$  entonces  $\mu \ll \mu + \nu \ll \sigma$  y  $\nu \ll \mu + \nu \ll \sigma$ , obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{d\mu}{d\sigma} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma = \\ & \int_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{d\mu}{d(\mu + \nu)} \right)^{1/2} \left( \frac{d(\mu + \nu)}{d\sigma} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu}{d(\mu + \nu)} \right)^{1/2} \left( \frac{d(\mu + \nu)}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma = \\ & \int_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{d\mu}{d(\mu + \nu)} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu}{d(\mu + \nu)} \right)^{1/2} d(\mu + \nu). \end{aligned}$$

□

Por otra parte, también necesitaremos el siguiente resultado.

**Proposición 6.8.**  $\rho(\mu, \nu) = 0$  si y solo si  $\mu$  y  $\nu$  son mutuamente singulares.

*Demostración.* En efecto,  $\rho(\mu, \nu) = 0$  si y solo si

$$\frac{d\mu}{d\sigma} \cdot \frac{d\nu}{d\sigma} = 0 \quad \sigma\text{-casi todo punto.}$$

Si  $\mathcal{A} := \{x : f(x) = 0\}$  y  $\mathcal{B} := \{x : g(x) = 0, f(x) \neq 0\}$ , obtenemos una partición (le agregamos a alguno el conjunto de  $\sigma$  medida 0 que falte) tal que  $\mu(\mathcal{A}) = \nu(\mathcal{B}) = 0$ . □

Recordemos ahora que una familia de medidas positivas  $\{\sigma_t\}_{t>0}$  soportadas en  $\mathcal{D}^*$  converge débil-estrella a una medida  $\sigma$  soportada en  $\mathcal{D}^*$  si para toda función continua y acotada  $f : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene

$$\int_{\mathcal{D}^*} f d\sigma_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}^*} f d\sigma. \quad (19)$$

A esta convergencia la notamos  $\sigma_t \xrightarrow{w^*} \sigma$ .

**Teorema 6.9.** Sean  $\{\mu_t\}$  y  $\{\nu_t\}$  dos familias de medidas positivas de Borel finitas soportadas en  $\mathcal{D}^*$  tal que  $\mu_t \xrightarrow{w^*} \mu$  y  $\nu_t \xrightarrow{w^*} \nu$ , para ciertas medidas positivas de Borel finitas  $\mu$  y  $\nu$ . Entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\mu_t, \nu_t) \leq \rho(\mu, \nu).$$

*Demostración.* Sea  $\sigma$  una medida de referencia tal que  $\mu \ll \sigma$  y  $\nu \ll \sigma$ . Dado  $\varepsilon \in (0, 1)$  consideremos

$$A := \left\{ x \in \mathcal{D}^* : \frac{d\mu}{d\sigma}(x) = 0 \right\}, \quad B := \left\{ x \in \mathcal{D}^* : \frac{d\nu}{d\sigma}(x) = 0 \right\} \setminus A$$

y

$$V_j = V_j(\varepsilon) := \left\{ x \in \mathcal{D}^* : (1 + \varepsilon)^{j-1} \frac{d\mu}{d\sigma}(x) \leq \frac{d\nu}{d\sigma}(x) < (1 + \varepsilon)^j \frac{d\mu}{d\sigma}(x) \right\} \setminus (A \cup B),$$

para cada  $j \in \mathbb{Z}$ . Integrando con respecto a  $\sigma$  tenemos:

$$\int_{V_j} (1 + \varepsilon)^{j-1} \frac{d\mu}{d\sigma} d\sigma \leq \int_{V_j} \frac{d\nu}{d\sigma} d\sigma \leq \int_{V_j} (1 + \varepsilon)^j \frac{d\mu}{d\sigma} d\sigma \quad (20)$$

$$(1 + \varepsilon)^{j-1} \mu(V_j) \leq \nu(V_j) \leq (1 + \varepsilon)^j \mu(V_j). \quad (21)$$

La familia  $\{A, B, \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}\}$  es una partición de  $\mathcal{D}^*$ . Como  $\mu(\mathcal{D}^*) < \infty$ , podemos encontrar un  $N = N(\varepsilon)$  tal que

$$\sum_{|j| \geq N} \mu(V_j) \leq \varepsilon^2.$$

Si  $C := \bigcup_{|j| \geq N} V_j$ , la familia

$$\{U_1, \dots, U_{2N+2}\} := \{A, B, C, V_{-N+1}, \dots, V_{N-1}\} \quad (22)$$

es una partición de  $\mathcal{D}^*$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \mu(U_1) &= \mu(A) = 0, \\ \nu(U_2) &= \nu(B) = 0, \\ \mu(U_3) &= \mu(C) \leq \sum_{|j| \geq N} \mu(V_j) \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Luego, por la regularidad exterior de  $\mu$  y de  $\nu$ , podemos tomar una familia de abiertos  $\{O_j\}_{j=1}^{2N+2}$  tal que  $U_j \subseteq O_j$  para cada  $j$  y

$$\begin{aligned} \mu(O_1), \nu(O_2), \mu(O_3) &\leq \varepsilon, \\ \mu(O_j) &\leq (1 + \varepsilon)^{1/2} \mu(U_j), \text{ para } j \geq 4, \\ \nu(O_j) &\leq (1 + \varepsilon)^{1/2} \nu(U_j), \text{ para } j \geq 4. \end{aligned}$$

Sea ahora  $\{f_j\}_{j=1}^{2N+2}$  una partición de la unidad asociada al cubrimiento abierto  $O_j$  de  $\mathcal{D}^*$  (ver C.4). Para cada  $j \geq 4$  tenemos que

$$\int_{\mathcal{D}^*} f_j \, d\mu = \int_{O_j} f_j \, d\mu \leq \int_{f_j \leq 1} \mu(O_j) \leq (1 + \varepsilon)^{1/2} \mu(U_j)$$

y, de la misma forma,

$$\int_{\mathcal{D}^*} f_j \, d\nu \leq \nu(O_j) \leq (1 + \varepsilon)^{1/2} \nu(U_j).$$

Además, para  $j = 1, 2, 3$  tenemos

$$\left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j \, d\mu \right) \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j \, d\nu \right) \leq \mu(O_j) \nu(O_j) \leq \varepsilon \max\{\mu(\mathcal{D}^*), \nu(\mathcal{D}^*)\}.$$

Sea  $\sigma_t := \mu_t + \nu_t$ , para cada  $t$ . Acotemos la afinidad entre  $\mu_t$  y  $\nu_t$  usando Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \rho(\mu_t, \nu_t) &= \int_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{d\mu_t}{d\sigma_t} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu_t}{d\sigma_t} \right)^{1/2} d\sigma_t \\ &= \sum_{j=1}^{2N+2} \int_{\mathcal{D}^*} f_j \left( \frac{d\mu_t}{d\sigma_t} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu_t}{d\sigma_t} \right)^{1/2} d\sigma_t \quad \left( \sum f_j = 1 \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{2N+2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j \frac{d\mu_t}{d\sigma_t} d\sigma_t \right)^{1/2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j \frac{d\nu_t}{d\sigma_t} d\sigma_t \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^{2N+2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j \, d\mu_t \right)^{1/2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j \, d\nu_t \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\mu_t, \nu_t) &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2N+2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j d\mu_t \right)^{1/2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j d\nu_t \right)^{1/2} \\
&= \sum_{j=1}^{2N+2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j d\mu \right)^{1/2} \left( \int_{\mathcal{D}^*} f_j d\nu \right)^{1/2} \quad (\mu_t \xrightarrow{w^*} \mu \text{ y } \nu_t \xrightarrow{w^*} \nu) \\
&\leq \sum_{j=1}^3 (\varepsilon \max\{\mu(\mathcal{D}^*), \nu(\mathcal{D}^*)\})^{1/2} + \\
&\quad \sum_{j=4}^{2N+2} \left( (1+\varepsilon)^{1/2} \mu(U_j) \right)^{1/2} \left( (1+\varepsilon)^{1/2} \nu(U_j) \right)^{1/2} \\
&= 3 (\varepsilon \max\{\mu(\mathcal{D}^*), \nu(\mathcal{D}^*)\})^{1/2} + (1+\varepsilon)^{1/2} \sum_{j=4}^{2N+2} (\mu(U_j) \nu(U_j))^{1/2}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=4}^{2N+2} (\mu(U_j) \nu(U_j))^{1/2} &\stackrel{(22)}{=} \sum_{j=-N+1}^{N-1} (\mu(V_j) \nu(V_j))^{1/2} \\
&\stackrel{(21)}{\leq} \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+\varepsilon)^{j/2} \mu(V_j).
\end{aligned}$$

Por definición de  $V_j$ :

$$\int_{V_j} \left( \frac{d\mu}{d\sigma} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma \geq \int_{V_j} \left( \frac{d\mu}{d\sigma} \right)^{1/2} (1+\varepsilon)^{(j-1)/2} \left( \frac{d\mu}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma = (1+\varepsilon)^{(j-1)/2} \mu(V_j);$$

entonces

$$(1+\varepsilon)^{1/2} \rho(\mu, \nu) \geq (1+\varepsilon)^{1/2} \sum_{j=-N+1}^{N-1} \left\{ \int_{V_j} \left( \frac{d\mu}{d\sigma} \right)^{1/2} \left( \frac{d\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma \right\} \geq \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+\varepsilon)^{j/2} \mu(V_j).$$

Finalmente, juntando todo obtenemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\mu_t, \nu_t) \leq 3 (\varepsilon \max\{\mu(\mathcal{D}^*), \nu(\mathcal{D}^*)\})^{1/2} + (1+\varepsilon) \rho(\mu, \nu)$$

y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  tenemos el resultado probado.  $\square$

Ahora sí, tenemos todo lo necesario para demostrar el lema 6.4, que se deduce como caso especial de la siguiente desigualdad.

**Lema 6.10.** Sean  $u$  y  $v$  dos sucesiones de Wiener, y sean  $\mu_u$  y  $\mu_v$  sus medidas espectrales. Entonces

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{v(n)} \right| \leq \rho(\mu_u, \mu_v).$$

*Demostración.* Para cada  $R \geq 1$ , sea  $\mu_u^R$  la medida soportada en  $\mathcal{D}^*$  dada por

$$\mu_u^R := \frac{1}{m_d(B_R)} \int \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) e^{i \langle n, x \rangle} \right|^2 dm_d(x).$$

Veamos que  $\mu_u^R \xrightarrow{w^*} \mu_u$ . Lo hacemos estudiando sus coeficientes de Fourier. Para cada  $k \in \mathcal{L}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu_u^R}(k) &= \frac{1}{m_d(B_R)} \int_{\mathcal{D}^*} \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{e(\langle n, x \rangle)} \right|^2 \overline{e(\langle k, x \rangle)} dm_d(x) \\ &= \frac{1}{m_d(B_R)} \int_{\mathcal{D}^*} \left( \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{u(n)} e(\langle n, x \rangle) \right) \left( \sum_{n' \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n') \overline{e(\langle n' + k, x \rangle)} \right) dm_d(x) \\ &= \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n, n' \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{u(n)} u(n') \left( \int_{\mathcal{D}^*} e(\langle x, n - n' - k \rangle) dm_d(x) \right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{\mathcal{D}^*} e(\langle x, l \rangle) dm_d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases} \quad (23)$$

En efecto, si  $\mathcal{D}^* = B[0, 1)^d$ , entonces

$$\int_{\mathcal{D}^*} f dm_d = \int_{B[0, 1)^d} f dm_d = \int_{[0, 1)^d} (f \circ B) |\det(B)| dm_d = \int_{[0, 1)^d} f \circ B dm_d,$$

pues  $|\det(B)| = 1$ . Luego, si  $l = A\tilde{n} \in \mathcal{L}$ ,  $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_d) \in \mathbb{Z}^d$  se tiene ( $A^* = B^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}^*} e(\langle x, l \rangle) dm_d(x) &= \int_{[0, 1)^d} e(\langle Bx, A\tilde{n} \rangle) dm_d(x) \\ &= \int_{[0, 1)^d} e(\langle x, \tilde{n} \rangle) dm_d(x) \\ &= \prod_{k=1}^d \left( \int_{[0, 1)} e(\langle x_i, \tilde{n}_i \rangle) dm_1(x_i) \right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{n} = 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{n} \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que

$$\widehat{\mu_u^R}(k) = \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n' \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{u(n' + k)} u(n').$$

Como  $u$  es una sucesión de Wiener, se sigue

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \widehat{\mu_u^R}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{u(n + k)} = \widehat{\mu_u}(k),$$

para cada  $k \in \mathcal{L}$ . Esta convergencia puntual de los coeficientes de Fourier implica que  $\mu_u^R \xrightarrow{w^*} \mu_u$ . La idea de la demostración de este último hecho es usar que, por Stone-Weierstrass, las combinaciones lineales (complejas) de las funciones en  $\mathcal{D}^*$   $e(\langle k, \cdot \rangle)$  aproximan a cualquier  $f : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$  continua y acotada. Se hace la cuenta:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}^*} f d\mu_u^R &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}^*} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N d\mu_u^R = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}^*} P_N d\mu_u^R = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}^*} P_N d\mu_u &= \int_{\mathcal{D}^*} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N d\mu_u = \int_{\mathcal{D}^*} f d\mu_u, \end{aligned}$$

siendo  $P_N$  una sucesión que aproxima a  $f$ .

Ahora de la misma forma, para cada  $R \geq 1$ , definimos  $\mu_v^R$  la medida soportada en  $\mathcal{D}^*$  dada por

$$\mu_v^R := \frac{1}{m_d(B_R)} \int \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} v(n) \overline{e(\langle n, x \rangle)} \right|^2 dm_d(x)$$

y obtenemos  $\mu_v^R \xrightarrow{w^*} \mu_v$ . Con esto, el Teorema 6.9 nos dice que

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \rho(\mu_u^R, \mu_v^R) \leq \rho(\mu_u, \mu_v).$$

Usando la medida de Lebesgue  $m_d$  para calcular la afinidad entre  $\mu_u^R$  y  $\mu_v^R$ , y aplicando desigualdad triangular, concluimos que

$$\begin{aligned} \rho(\mu_u^R, \mu_v^R) &= \frac{1}{m_d(B_R)} \int_{\mathcal{D}^*} \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{e(\langle n, x \rangle)} \right| \left| \sum_{n' \in \mathcal{L} \cap B_R} v(n') \overline{e(\langle n', x \rangle)} \right| dm_d(x) \\ &= \frac{1}{m_d(B_R)} \int_{\mathcal{D}^*} \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{e(\langle n, x \rangle)} \right| \left| \overline{\sum_{n' \in \mathcal{L} \cap B_R} v(n') e(\langle n', x \rangle)} \right| dm_d(x) \\ &\geq \frac{1}{m_d(B_R)} \left| \sum_{n, n' \in \mathcal{L} \cap B_R} \int_{\mathcal{D}^*} u(n) \overline{v(n')} e(\langle x, n' - n \rangle) dm_d(x) \right| \\ &= \frac{1}{m_d(B_R)} \left| \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} u(n) \overline{v(n)} \right|, \end{aligned}$$

y el lema queda probado. □

## Capítulo 7

# Ley Uniforme Chueca

Ahora con las sucesiones de Wiener y el lema 6.4 a mano, encaramos la prueba de nuestra *Ley Uniforme Chueca*. Recordemos que su enunciado era:

**Teorema 7.1** (Ley Uniforme Chueca). *Casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  se tiene*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} \left[ \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right] = 0.$$

Sea  $A_\lambda(n) := \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda)$ . Necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 7.2.** *Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ , la sucesión  $\{A_\lambda(n)\}_{n \in \mathcal{L}}$  es, casi seguramente, una sucesión de Wiener con sucesión de correlación dada por*

$$\gamma_{A_\lambda}(k) = \begin{cases} \mathbb{E} \left( \left| \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right|^2 \right) & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \in \mathcal{L} \setminus \{0\} \end{cases} \quad (24)$$

**Observación 7.3.** *Para probar este lema, en el paper [1] se usa el Teorema Ergódico de Birkhoff. En realidad, con esta herramienta, se prueba algo más general: puede reemplazarse la hipótesis de independencia de las  $\{\xi_n\}_{n \in \mathcal{L}}$  por otra relacionada con la teoría ergódica, la de ser “mixing”. En este trabajo preferimos quedarnos en el terreno de la teoría de probabilidades y por eso no seguimos esa dirección. Lo que hacemos en cambio es adaptar la demostración de las ecuaciones (4.5) y (4.6) del paper [8] para nuestro caso del retículo.*

*Demostración del lema 7.2.* Aplicando alguna de las dos Leyes clásicas de Grandes Números (Kolmogorov o Khintchine) tenemos que, casi seguramente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{\mathcal{L}}(R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} |A_\lambda(n)|^2 = \mathbb{E} (|A_\lambda(0)|^2),$$

que es el caso  $k = 0$  en (24) (usando (29)). Probaremos ahora que si  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  acotado, casi seguramente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \cap B_R \\ m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}}} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)} = 0. \quad (25)$$

Tomando luego  $K = \{k\}$  en (25), con  $k \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ , obtenemos el otro caso.

La no independencia de las variables que estamos promediando en (25) hace que no podamos aplicar directamente las leyes clásicas de Grandes Números. Lo que haremos será agruparlas de

cierto modo que sí nos permita hacer uso de estas leyes. Empezamos así: el retículo  $\mathcal{L}$  es uniformemente discreto, es decir, existe  $r > 0$  tal que  $\|n - m\|_2 \geq r$ , para cualesquiera  $n, m \in \mathcal{L}$ . Consideremos

$$D := \left[ -\frac{r}{2\sqrt{d}}, \frac{r}{2\sqrt{d}} \right)^d.$$

Si  $x, y \in D$  entonces  $\|x - y\|_2 < r$ . Además, para cada entero positivo  $N$ , sea

$$A_N^i := \bigcup_{k \in \frac{Nr}{\sqrt{d}}\mathbb{Z}^d} \left( D + \frac{r}{\sqrt{d}} \cdot i + k \right),$$

con  $i \in \{0, \dots, N-1\}^d$ . Con notación de suma de conjuntos lo podemos escribir

$$A_N^i = D + \frac{r}{\sqrt{d}} \cdot (i + N\mathbb{Z}^d).$$

Es fácil ver que los conjuntos  $\{A_N^i : i \in \{0, \dots, N-1\}^d\}$  forman una partición de  $\mathbb{R}^d$ . Fijemos uno de estos  $i$ . Como  $r$  es la constante de separación, si  $n \neq n'$  y  $n, n' \in A_N^i \cap \mathcal{L}$  tenemos que  $\|n - n'\|_2 > (N-1)r/\sqrt{d}$ . Tomando  $N$  tal que

$$K \subseteq B_{(N-1)r/\sqrt{d}},$$

resulta que  $n' \notin (K+n) \setminus \{n\}$ . Más aún, si al  $N$  le pedimos un poco más:

$$K \subseteq B_{(N-1)r/(2\sqrt{d})},$$

obtenemos que  $(K+n) \cap (K+n') = \emptyset$ . Entonces, para este último  $N$  suficientemente grande, las variables aleatorias

$$\left\{ Y_n := \sum_{m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)} \right\}_{n \in \mathcal{L} \cap A_N^i}$$

son independientes. Además tenemos que estas variables son acotadas:

$$|Y_n| \leq \sum_{m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}} |A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)}| \leq 4 \cdot \#(\mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}) \leq C,$$

donde la constante  $C$  no depende de  $n$ , puesto que  $K$  es acotado y  $\mathcal{L}$  es uniformemente discreto; y que tienen media 0:

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}} \mathbb{E} \left( A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)} \right) = \sum_{m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}} \mathbb{E} (A_\lambda(n)) \overline{\mathbb{E}(A_\lambda(m))} = 0.$$

Ahora bien, como

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \cap B_R \\ m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}}} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)} = \sum_i \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \cap B_R \cap A_N^i \\ m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}}} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)},$$

probemos, para cada  $i$ , que casi seguramente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \cap B_R \cap A_N^i \\ m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}}} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)} = 0,$$

lo que nos permitirá concluir (25). Lo haremos viendo que, casi seguramente, para toda sucesión  $\{R_k\}_{k \geq 1}$  que tiende a  $\infty$ , existe una subsucesión  $\{R_{k_l}\}_{l \geq 1}$  tal que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_{R_{k_l}})} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \cap B_{R_{k_l}} \cap A_N^i \\ m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}}} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)} = 0. \quad (26)$$

Para esto escribamos

$$\frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{L} \cap B_R \cap A_N^i \\ m \in \mathcal{L} \cap (K+n) \setminus \{n\}}} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(m)} = \frac{n_{R,N,i}}{m_d(B_R)} \cdot \frac{1}{n_{R,N,i}} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R \cap A_N^i} Y_n,$$

con  $n_{R,N,i} := \#(\mathcal{L} \cap B_R \cap A_N^i)$ . Notemos que, por el límite (29), para todo  $R \geq 1$ :

$$\frac{n_{R,N,i}}{m_d(B_R)} \leq \frac{N_{\mathcal{L}}(R)}{m_d(B_R)} \leq \text{constante}.$$

Entonces, si  $\{R_k\}_{k \geq 1}$  es una sucesión que tiende a  $\infty$ , existe una subsucesión  $\{R_{k_l}\}_{l \geq 1}$  tal que  $n_{R_{k_l},N,i}/m_d(B_{R_{k_l}})$  converge. Si converge a 0, usamos desigualdad triangular para obtener (26):

$$\begin{aligned} \left| \frac{n_{R_{k_l},N,i}}{m_d(B_{R_{k_l}})} \cdot \frac{1}{n_{R_{k_l},N,i}} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_{R_{k_l}} \cap A_N^i} Y_n \right| &\leq \frac{n_{R_{k_l},N,i}}{m_d(B_{R_{k_l}})} \cdot \frac{1}{n_{R_{k_l},N,i}} \sum_{n \in X \cap B_{R_{k_l}} \cap A_N^i} |Y_n| \\ &\leq \frac{n_{R_{k_l},N,i}}{m_d(B_{R_{k_l}})} \cdot \frac{C}{n_{R_{k_l},N,i}} \cdot n_{R_{k_l},N,i} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Si, en cambio,  $\lim_{l \rightarrow \infty} n_{R_{k_l},N,i}/m_d(B_{R_{k_l}}) > 0$ , en particular tenemos que  $\lim_{l \rightarrow \infty} n_{R_{k_l},N,i} = \infty$ . En este caso (26) se obtiene aplicando el corolario 5.12 con las variables  $Y_n$ .  $\square$

Hacemos un lema más y pasamos ya a la prueba del Teorema 7.1. Si  $k \in \mathcal{L}$  está fijo, queremos obtener el límite (24) casi seguramente para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  (ya lo tenemos para un subconjunto numerable). Para esto, seguiremos la línea de la demostración del Teorema 5.2 bajo el segundo enfoque. Consideremos la función aleatoria  $F_{R,k} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$F_{R,k}(\lambda) := \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(n+k)}.$$

Usaremos el control sobre los gradientes de esta función. Concretamente:

**Lema 7.4.** *Para todo  $k \in \mathcal{L}$ :*

$$\sup_{R \geq 1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \|\nabla F_{R,k}(\lambda)\|_2 < \infty,$$

*casi seguramente.*

*Demostración.* Recordemos la notación  $x = (x^1, \dots, x^d)$  para  $x \in \mathbb{R}^d$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla F_{R,k}(\lambda) &= \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \nabla \left( A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(n+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \nabla A_\lambda(n) \overline{A_\lambda(n+k)} + \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} A_\lambda(n) \nabla \overline{A_\lambda(n+k)}, \end{aligned}$$

con

$$\nabla A_\lambda(n) = \left( -2\pi i \left( \xi_n^1 e^{\langle \xi_n, \lambda \rangle} - \mathbb{E} \left[ \xi_n^1 e^{\langle \xi_n, \lambda \rangle} \right] \right), \dots, -2\pi i \left( \xi_n^d e^{\langle \xi_n, \lambda \rangle} - \mathbb{E} \left[ \xi_n^d e^{\langle \xi_n, \lambda \rangle} \right] \right) \right).$$

Acotemos  $\|\nabla A_\lambda(n)\|_1$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla A_\lambda(n)\|_1 &= 2\pi \sum_{j=1}^d \left| \xi_n^j \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} - \mathbb{E} \left( \xi_n^j \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} \right) \right| \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{j=1}^d \left| \xi_n^j \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} \right| + \sum_{j=1}^d \left| \mathbb{E} \left( \xi_n^j \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} \right) \right| \right) \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{j=1}^d \left| \xi_n^j \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} \right| + \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left( \left| \xi_n^j \overline{e(\langle \xi_n, \lambda \rangle)} \right| \right) \right) \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{j=1}^d |\xi_n^j| + \sum_{j=1}^d \mathbb{E} (|\xi_n^j|) \right) = 2\pi (\|\xi_n\|_1 + \mathbb{E}(\|\xi_n\|_1)). \end{aligned}$$

Como  $|A_\lambda(n)| \leq 2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|\nabla F_{R,k}(\lambda)\|_1 &\leq \frac{2}{m_d(B_R)} \left( \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} 2\pi (\|\xi_n\|_1 + \mathbb{E}(\|\xi_n\|_1)) + \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} 2\pi (\|\xi_{n+k}\|_1 + \mathbb{E}(\|\xi_{n+k}\|_1)) \right) \\ &= \frac{4\pi}{m_d(B_R)} \left( \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} \|\xi_n\|_1 + \|\xi_{n+k}\|_1 + 2\mathbb{E}(\|\xi_n\|_1) \right). \end{aligned}$$

Usando ahora que  $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$  y que  $\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{d} \|\cdot\|_2$  (Cauchy-Schwarz), resulta:

$$\begin{aligned} \|\nabla F_{R,k}(\lambda)\|_2 &\leq \|\nabla F_{R,k}(\lambda)\|_1 \leq \frac{4\pi}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} (\|\xi_n\|_1 + \|\xi_{n+k}\|_1 + 2\mathbb{E}(\|\xi_n\|_1)) \\ &\leq \frac{4\pi \sqrt{d}}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} (\|\xi_n\|_2 + \|\xi_{n+k}\|_2 + 2\mathbb{E}(\|\xi_n\|_2)). \end{aligned}$$

Por la hipótesis sobre la esperanza de  $\|\xi_n\|_2$ , podemos aplicar la Ley Fuerte de Khintchine (Teorema 5.13) y la comparación entre  $m_d(B_R)$  y  $N_{\mathcal{L}}(R)$  (límite (29)) que nos dice que, casi seguramente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} (\|\xi_n\|_2 + \|\xi_{n+k}\|_2 + 2\mathbb{E}(\|\xi_n\|_2)) = 4\mathbb{E}(\|\xi\|_2).$$

Como toda sucesión convergente es acotada, concluimos que, casi seguramente

$$\sup_{R \geq 1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \|\nabla F_{R,k}(\lambda)\|_2 < \infty.$$

□

Ya tenemos toda la maquinaria necesaria para demostrar nuestra *Ley Uniforme Chueca*.

*Demostración del Teorema 7.1.* Sea  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  un denso numerable, y fijemos  $k \in \mathcal{L}$ . Como unión numerable de eventos de probabilidad cero es un evento de probabilidad cero, podemos concluir por el lema 7.2 que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_{R,k}(\lambda) = \gamma_{A_\lambda}(k) \quad (27)$$

casi seguramente para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Veamos ahora que esta igualdad se extiende casi seguramente a todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Si  $\lambda \notin \Lambda$ , tomemos una sucesión  $\{\lambda_p\} \subseteq \Lambda$  que tienda a  $\lambda$  con  $p \rightarrow \infty$ . Usemos la notación  $\gamma(\lambda) := \gamma_{A_\lambda}(k)$ . Por el lema 7.4, tenemos casi seguramente (usando la desigualdad triangular y la desigualdad (30)) que

$$\begin{aligned} |F_{R,k}(\lambda) - \gamma(\lambda)| &\leq |\gamma(\lambda_p) - \gamma(\lambda)| + |F_{R,k}(\lambda_p) - \gamma(\lambda_p)| + |F_{R,k}(\lambda) - F_{R,k}(\lambda_p)| \\ &\leq |\gamma(\lambda_p) - \gamma(\lambda)| + |F_{R,k}(\lambda_p) - \gamma(\lambda_p)| + M_k \|\lambda - \lambda_p\|_2, \end{aligned}$$

donde  $M_k := \sup_{R \geq 1} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \|\nabla F_{R,k}(\lambda)\|_2 < \infty$ . Como la función  $\lambda \mapsto \gamma(\lambda)$  es continua (por serlo  $A(\xi, \lambda) := \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda)$ , como función de  $\lambda$ , en el caso  $k = 0$ ), si hacemos tender  $R \rightarrow \infty$  y luego  $p \rightarrow \infty$  obtenemos que (27) se cumple casi seguramente para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Ahora bien, como el número de puntos del retículo es numerable, casi seguramente  $\{A_\lambda(n)\}_{n \in \mathcal{L}}$  es una sucesión de Wiener para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . La sucesión de correlación de  $A_\lambda$  es  $\gamma_{A_\lambda}$ . La correspondiente medida espectral es

$$\mu_{A_\lambda}(C) = \mathbb{E} \left( \left| \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right|^2 \right) m_d(C)$$

en  $\mathcal{D}^*$ , puesto que

$$\widehat{\mu_{A_\lambda}}(k) = \int_{\mathcal{D}^*} \overline{e(\langle k, x \rangle)} d\mu_{A_\lambda}(x) = \mathbb{E} \left( \left| \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} - \varphi_\xi(\lambda) \right|^2 \right) \int_{\mathcal{D}^*} \overline{e(\langle k, x \rangle)} dm_d(x) = \gamma_{A_\lambda},$$

donde en el último paso la cuenta es la que ya hicimos en (23).

Recordemos de la observación 6.3 que la sucesión  $\{e(\langle \lambda, n \rangle)\}_{n \in \mathcal{L}}$  también es una sucesión de Wiener. Su medida espectral es  $\mu_v = \delta_x$ , siendo  $x$  un elemento en  $(\mathcal{L}^* + \lambda) \cap \mathcal{D}^*$ . Esta medida espectral  $\mu_v$  es singular con respecto a la medida de Lebesgue. Aplicamos entonces el lema 6.4 y concluimos que, casi seguramente, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m_d(B_R)} \sum_{n \in \mathcal{L} \cap B_R} A_\lambda(n) \overline{e(\langle n, \lambda \rangle)} = 0.$$

□

# Capítulo 8

## Bibliografía

- [1] Oren Yakir, *Recovering the lattice from its random perturbations*.
- [2] M. Baake, R. Moody, P. Pleasants, *Diffraction from visible lattice points and  $k$ th power free integers*, *Discrete Math.*, Vol. 221, 2000.
- [3] Jorge Antezana, *Temas de Análisis de Fourier*, notas del curso.
- [4] M. Cotlar, *Teoremas espectrales, modelos funcionales y dilataciones de operadores en espacios de Hilbert*, *Cursos de Matemática*, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Instituto Argentino de Matemática, 1991.
- [5] Bogachev, Vladimir I. (2007), *Measure Theory*, Berlin: Springer Verlag.
- [6] L. Korolov, Y. Sinai, *Theory of probability and random processes*, Springer, Berlín, 2007.
- [7] Rick Durrett, *Probability: Theory and examples, Version 5 January 11, 2019*.
- [8] Mircea Petrache, Rodolfo Viera, *Almost sure recovery in quasi-periodic structures*, 2022.
- [9] P. K. Sen, J. M. Singer, *Large Sample Methods in Statistics, an introduction with applications*.
- [10] M. Baake and U. Grimm, *Aperiodic Order, vol. 1: A mathematical invitation, first ed., Encyclopedia of Math. and its Appl., vol. 149, Cambridge Univ. Press, 2013*.
- [11] Senechal, Marjorie. *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+286 pp.
- [12] Walter Rudin, *Fourier analysis on groups*, 1962.
- [13] Grafakos, Loukas. *Classical Fourier analysis. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 249*. Springer, New York, 2014. xviii+638 pp.
- [14] Deitmar, Anton. *A first course in harmonic analysis. Second edition. Universitext*. Springer-Verlag, New York, 2005. xii+192 pp.
- [15] W.Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, *Journal of the American Statistical Association*, 58, 13-30, 1963.
- [16] Shahar Mendelson, *A few notes on Statistical Learning Theory*.
- [17] Demetrio Stojanoff, *Un curso de Topología*, 2018.
- [18] Demetrio Stojanoff, *Un curso de Análisis Funcional*, 2015.
- [19] Vladimir I. Bogachev, *Gaussian Measures, Mathematical surveys and Monographs, Volume 62*.

- 
- [20] F. Stillinger, S.Torquato, *Local density fluctuations, hyperuniformity, and order metrics*, Phys. Rev. E, Vol. 68, 2003.
- [21] M. Sodin, B.Tsirelson, *Random complex zeroes. I. Asymptotic normality*, Israel J. Math., Vol. 144, 2004.



# Apéndice A

## Densidad en la bola

Notemos  $N_{\mathcal{L}}(R) := \#(\mathcal{L} \cap B_R)$  al número de puntos de un retículo  $\mathcal{L}$  que están en la bola centrada en el origen de radio  $R \geq 1$ , y supongamos que  $m_d(\mathcal{D}) = 1$ . Veamos cómo crece  $N_{\mathcal{L}}(R)$  con  $R$ .

**Proposición A.1.** *Existe una constante  $C = C(\mathcal{L}) > 0$  que verifica*

$$|N_{\mathcal{L}}(R) - m_d(B_R)| \leq CR^{d-1} \quad (28)$$

para todo  $R \geq 1$ .

*Demostración.* Las traslaciones del dominio fundamental de  $\mathcal{L}$  por vectores en  $\mathcal{L}$  forman un teselado de  $\mathbb{R}^d$ . Sea  $V$  el volumen total de estas traslaciones que se intersecan de forma no vacía con  $B_R$ , y sea  $v$  el volumen total de las que están contenidas en  $B_R$ . Entonces  $v \leq m_d(B_R)$ ,  $N_{\mathcal{L}}(R) \leq V$ . Se sigue que  $|N_{\mathcal{L}}(R) - m_d(B_R)| \leq V - v$ , y esto a su vez es menor o igual que el volumen total de las traslaciones del dominio fundamental que se intersecan de forma no vacía con el borde de  $B_R$ . Si  $D$  es el diámetro del dominio fundamental, este volumen es a lo sumo

$$m_d(B_{R+D}) - m_d(B_{R-D}) \leq 2^d m_d(B_1) DR^{d-1}, \text{ cuando } R \geq D,$$

y a lo sumo

$$m_d(B_{R+D}) < 2^d m_d(B_D), \text{ cuando } R < D.$$

La segunda desigualdad sale usando que  $m_d(B_R) = m_d(B_1)R^d$ , y la primera se deduce así:

$$\begin{aligned} m_d(B_{R+D}) - m_d(B_{R-D}) &= m_d(B_1)(R+D)^d - m_d(B_1)(R-D)^d \\ &= m_d(B_1) \left( (R+D)^d - (R-D)^d \right) \\ &= m_d(B_1) \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} R^{d-k} (D^k - (-D)^k) \\ &= 2m_d(B_1) \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impar}}}^d \binom{d}{k} R^{d-k} D^k \\ &\stackrel{(R \geq D)}{\leq} 2m_d(B_1) \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impar}}}^d \binom{d}{k} R^{d-1} D \\ &= 2m_d(B_1) DR^{d-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impar}}}^d \binom{d}{k} = 2m_d(B_1) DR^{d-1} 2^{d-1}. \end{aligned}$$

Basta tomar  $C(\mathcal{L}) := 2^d m_d(B_1)D + 2^d m_d(B_D)$ .

□

Como corolario obtenemos el crecimiento asintótico de  $N_{\mathcal{L}}(R)$  buscado.

**Corolario A.2.** *Se tiene*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_{\mathcal{L}}(R)}{m_d(B_R)} = 1. \quad (29)$$

*Demostración.* Por la proposición anterior, tenemos las cotas

$$m_d(B_R) - CR^{d-1} \leq N_{\mathcal{L}}(R) \leq m_d(B_R) + CR^{d-1},$$

de donde se deduce el resultado. □

**Observación A.3.** *Si no asumimos  $m_d(\mathcal{D}) = 1$ , en general se obtiene la cota*

$$|N_{\mathcal{L}}(R)m_d(\mathcal{D}) - m_d(B_R)| \leq CR^{d-1},$$

de donde sale

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_{\mathcal{L}}(R)}{m_d(B_R)} = \frac{1}{m_d(\mathcal{D})}.$$

## Apéndice B

# Desigualdad Valor Medio

**Lema B.1.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  un abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Sean  $x, y \in A$  tales que el segmento que une  $x$  con  $y$  está contenido en  $A$ . Entonces

$$f(x) - f(y) = \nabla f(c) \cdot (x - y),$$

para algún  $c$  en el segmento que une  $x$  con  $y$ .

*Demostración.* Sea  $g(t) := f((1-t)x + ty)$ . Esta función de una variable es continua en  $[0, 1]$  y derivable en  $(0, 1)$ , por lo que podemos aplicarle el Teorema del Valor Medio para obtener

$$g(1) - g(0) = g'(\tilde{c}),$$

para algún  $\tilde{c} \in (0, 1)$ . Pero como  $g(1) = f(y)$  y  $g(0) = f(x)$ , obtenemos

$$f(y) - f(x) = \nabla f((1 - \tilde{c})x + \tilde{c}y) \cdot (y - x).$$

□

**Corolario B.2.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  un abierto convexo y  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función con derivadas parciales continuas y acotadas en  $A$ . Entonces

$$|F(x) - F(y)| \leq \sup_{\lambda \in A} \|\nabla F(\lambda)\|_2 \|x - y\|_2, \quad (30)$$

para cualesquiera  $x, y \in A$ .

*Demostración.* Por el Lema anterior aplicado a  $\operatorname{Re}(f)$  y a  $\operatorname{Im}(f)$  obtenemos

$$F(x) - F(y) = \nabla F(c) \cdot (x - y),$$

que, por Cauchy-Schwarz y la hipótesis de derivadas acotadas, nos da la cota

$$|F(x) - F(y)| = \|\nabla F(c)\|_2 \cdot \|x - y\|_2 \leq \sup_{\lambda \in A} \|\nabla F(\lambda)\|_2 \|x - y\|_2.$$

□

## Apéndice C

# Particiones de la unidad

**Definición C.1.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una **partición de la unidad** asociada a un cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  de  $X$  es una familia de funciones  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  de  $X$  en  $[0, 1]$  continuas, tales que

- Para cada  $i \in \mathbb{I}$ :  $\text{sop}(f_i) \subseteq U_i$ .
- La suma de todas las  $f_i$  da la función constante 1.

**Definición C.2.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.  $X$  es **normal** si los puntos son cerrados y, además, para todo par  $F_1, F_2 \subseteq X$  de subconjuntos cerrados y disjuntos, existen abiertos  $U$  y  $V$  tales que

- $F_1 \subseteq U$
- $F_2 \subseteq V$
- $U \cap V = \emptyset$ .

**Definición C.3.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una familia de subconjuntos de  $X$  es **localmente finita** si para cada  $x \in X$ , existe un entorno de  $x$  que se corta solo con finitos elementos de la familia.

**Teorema C.4** (página 124 en [17]). Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico normal y sea  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  un cubrimiento abierto y localmente finito de  $X$ . Entonces existe una partición de la unidad asociada a  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ .

## Apéndice D

# Código en R

El código para la simulación hecha en el ejemplo de la introducción en el lenguaje de programación R es

```
library(MASS)
menor = -10
mayor = 10
paso = 1

x = c(1,0.5)
y = c(0, 1)
retOrig <- data.frame(x,y)
for(i in menor:mayor)
  for(j in menor:mayor)
    retOrig[nrow(retOrig)+1,] <- c(i*x[1]+j*x[2], i*y[1]+j*y[2])
retOrig <- retOrig[-c(1,2),]
plot(retOrig, pch = 20, col = "orange", main = "Retículo original",
xlim = c(-17,17), ylim = c(-17,17))

ene = ((mayor-menor)/paso + 1)^2
bivariate_data <- as.data.frame(mvrnorm(n=ene, mu=c(0, 0),
Sigma=matrix(c(1.5, 0, 0, 2), ncol=2)))
retPert <- retOrig+bivariate_data #retículo perturbado
plot(retPert, pch = 20, col = "orange", main = "Retículo perturbado",
xlim = c(-17,17), ylim = c(-17,17))
```

## Apéndice E

# Otras distribuciones

Otros ejemplos de distribuciones que cumplen las hipótesis de nuestro Teorema Principal vienen de considerar  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ , con  $\xi_i \in \mathbb{R}$  variables aleatorias i.i.d. La función característica de  $\xi$  resulta ser

$$\varphi_\xi(\lambda) = \mathbb{E} \left( \overline{e(\langle \xi, \lambda \rangle)} \right) = \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^d \overline{e(\xi_i \cdot \lambda_i)} \right) = \prod_{i=1}^d \mathbb{E} \left( \overline{e(\xi_i \cdot \lambda_i)} \right) = \prod_{i=1}^d \varphi_{\xi_i}(\lambda_i) = \prod_{i=1}^d \varphi_{\xi_i}(\lambda_i),$$

con  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ . Si  $\varphi_{\xi_1}$  nunca se anula, entonces  $\varphi_\xi$  tampoco se anula. Además, si la distribución de las  $\xi_i$  es tal que  $\mathbb{E}(\xi_i^{2d}) < \infty$ , nuevamente usando la independencia, obtenemos:

$$\mathbb{E}(\|\xi\|_2^{2d}) = \mathbb{E}((\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^d) = \sum_{k_1 + \dots + k_d = d} \frac{d!}{k_1! \dots k_d!} \mathbb{E}(\xi_1^{2k_1}) \dots \mathbb{E}(\xi_d^{2k_d}) < \infty,$$

que nos garantiza la otra hipótesis que necesitamos.

Ejemplos para las  $\xi_i$ :

- Chi-cuadrado.
- Laplace.
- Gamma.
- Exponencial.

Consultar sobre estas distribuciones en [7].