



13688

7 SEP 1965

S O B R E

T E O R I A D E L M O V I M I E N T O

D E U N

M I S I L P R O P U L S A D O A R E A C C I O N

T E S I S

RAUL RICARDO HUNZLEB

1965

13.688



BASES PARA LA REALIZACION DEL TRABAJO CORRESPONDIENTE  
A LA TESIS FINAL DE LA CARRERA DEL DOCTORADO EN INGE-  
NIERIA CORRESPONDIENTE AL ALUMNO SEÑOR RAUL RICARDO  
HUNZIKER.-

"TEORIA DEL MOVIMIENTO DE UN MISIL PROPULSADO A REACCION"

- 1) Teoría general de los misiles de masa variable.
- 2) Análisis crítico de las ecuaciones de movimiento generales y de los efectos especiales.
- 3) Efecto del viento. Método de cálculo y nuevas fórmulas.

Eva Perón, 8 de marzo de 1955.-

ES COPIA.-



EVA PERON

SECRETARIA

PABLO FERNANDEZ  
SECRETARIO INTERINO

C O N T E N I D O

PREFACIO ..... pg. II

NOMENCLATURA .....pgs. III - IV

INTRODUCCION.....pg. I

PARTES I : TEORIA GENERAL PARA LOS  
MISILES DE MASA VARIABLE..... pg. 21

1.-Ecuaciones generales de movimiento..pg. 2

2.-Expresiones para el vector  $\dot{r}$ ,  
fuerza de Coriolis J y momento  
de Coriolis.....pg. 13

PORTE II : ANALISIS CRITICO DE LAS ECUACIONES  
DE MOVIMIENTO GENERALES Y DE LOS  
EFECTOS ESPECIALES.....pg. 18

3.-Introducción..... pg. 18

4.-Movimiento del baricentro y  
del centro de reducción.....pg. 19

5.-Ecuaciones del movimiento  
rotacional.....pg. 23

6.-Otros efectos especiales. La re-  
ducción del sistema de fuerzas  
aerodinámicas..... pg. 23

PORTE III: EFECTO DEL VIENTO.....pg. 25

7.-Introducción.....pg. 25

8.-Formulación a proximidad de la e  
cuaciones de movimiento.....pg. 27

9.-Cálculo del movimiento.....pg. 29

10.-Conclusiones.....pg. 42

BIBLIOGRAFIA .....pg. 43

TABLAS .....pg. 44

GRÁFICO .....pg. 46

-----

P R E F A C I O

Desee expresar mi agradecimiento al Profesor Doctor Cledeves Pasqualini, Director de Tesis .-

Desee también agradecer a mi amigo José S. Florio por sus amables observaciones y críticas .-

  
RAUL RICARDO HUNZIKER

Facultad de Ciencias Físicomatemáticas , 12 de  
marzo de 1955 .-

NOMENCLATURA

- $\mathcal{C}$  = Superficie de control frontera del misil.
- $\mathcal{G}$  = Sistema material total del misil interior a  $\mathcal{C}$  en el instante  $t$ .
- $\mathcal{H}, \mathcal{L}$  = Cantidad de movimiento y momento cinetico de  $\mathcal{G}$ .
- $S$  = Solido ficticio equivalente del misil.
- $Q, L$  = Cantidad de movimiento y momento cinetico de  $S$ .
- $R$  = Parte rigida del misil.
- $m(t)$  = Masa instantanea del misil interior a  $\mathcal{C}$ .
- $F, M$  = Resultante y momento del sistema de fuerzas exteriores
- $\mathcal{Z}(t)$  = Terna baricentral instantanea del misil.
- $\mathcal{Z}^*$  = Terna convencional solidaria con la parte rigida  $R$ .
- $\mathcal{Z}_1$  = Terna absoluta fija en la tierra.
- $\mathcal{Z}_2$  = Terna originada en el baricentro supuesto fijo en  $R$  y paralela a  $\mathcal{Z}_1$ .
- $v_s, a_s$  = Velocidad y aceleracion de arrastre de una partícula.
- $v_r, a_r$  = Velocidad y aceleracion relativas a la terna  $\mathcal{Z}(t)$ .
- $V_a, v_a, a_a$  = Velocidad y aceleracion absolutas.
- $\rho_i(t)$  = Densidad de los gases interiores a  $\mathcal{C}$ .
- $\delta v_r$  = Diferencial relativo a  $\mathcal{Z}(t)$ .
- $\Omega$  = Vector velocidad de rotación de  $R$  (y de  $S$ ).
- $j$  = Aceleracion de Coriolis de una partícula.
- $J, M^j$  = Resultante y momento del sistema de fuerzas de Coriolis.
- $\mathcal{H}^r$  = Vector cantidad de movimiento del fluido interior al misil (relativo a  $\mathcal{Z}^*$ ).
- $\eta = \dot{m}$  = Gasto de masa del misil.
- $u$  = Velocidad media del gas a traves de las toberas.
- $q$  = Vector cantidad de movimiento de la masa pasante a traves de las toberas en la unidad de tiempo.
- $h$  = Vector momento cinetico de la masa pasante a traves de las toberas en la unidad de tiempo.
- $T, \mathcal{N}$  = Empuje y momento reactivos.

$G(t)$  = Aceleración tangencial del baricentro C.

$G$  = Peso del misil.

$g$  = Aceleración de la gravedad.

$C(t)$  = Baricentro variable del misil.

$C_1$  = Baricentro del sistema  $S$ .

$T$  = Terna baricentral del sistema material  $S$ .

$L^Z$  = Vector momento cinético, del sistema material  $S$ , (en  $Z(t)$ ).

$L^T$  = Vector momento cinético de  $S$ , en la terna  $T$ .

$A$  = Resultante de las fuerzas aerodinámicas.

$\Pi$  = Momento de las fuerzas aerodinámicas.

$d\mathcal{H}, \delta\mathcal{H}$  = Diferencial de  $\mathcal{H}$  (absoluta y relativa).

$f_p$  = Vector cantidad de movimiento de la masa gastada en la unidad de tiempo.

$q_e$  = Vector de la cantidad de movimiento de la masa de gas pasante por las toberas, por segundo (en movimiento de arrastre).

$q_r$  = Vector cantidad de movimiento de la masa de gas pasante por las toberas, por segundo (en movimiento relativo).

$k_p, k_{pc}^z$  = Vector momento cinético de la masa de combustible gastado por segundo (en movimiento de arrastre).

$h_e, h_{ec}^z$  = Vector momento cinético de la masa de gas pasante por las toberas (en movimiento de arrastre).

$\dot{C}, \ddot{C}$  = Velocidad y aceleración absolutas del baricentro C. (respecto de  $Z$  fijo en tierra).

$V^*, \dot{C}^*, \ddot{C}^*$  = Velocidad y aceleración del baricentro C respecto del rígido (terna  $Z^*$ ).

$V, \dot{V}$  = Velocidad y aceleración del misil. (del origen  $O^*$  de la terna  $Z^*$  del rígido).

$I_{P_f}(t)$  = Tensor central de inercia del sólido ficticio  $S$ .

$\xi, \eta, \zeta$  = Ejes principales del tensor de inercia.

$I_1, I_2, I_3$  = Momentos principales de inercia del sólido  $S$ .

$p, q, r$  = Componentes de la velocidad de rotación  $\Omega$ , sobre  $\xi, \eta, \zeta$ .

$t_0$  = Valor inicial del tiempo (instante en que el misil abandona la guía).

$t_p$  = Tiempo de propulsión.

- $\overline{D}(t)$  = Fuerza de resistencia aerodinámica.  $D(t) = K_D d^2 \rho V^2$ .  
 $K_D$  = Coeficiente de resistencia aerodinámica.  
 $\rho$  = Densidad del aire.  
 $d$  = Diametro del misil.  
 $\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$  = Vector posición del centro de reducción fijo en R.  
 $\overline{P}_1$  = Vector componente de  $\overline{P}$  con la dirección constante de  $\check{z}$   
 $\overline{P}_2$  = Vector componente de  $\overline{P}$  ortogonal a  $\overline{P}_1$ .  
 $\overline{L}$  = Fuerza de sustentación aerodinámica.  
 $K_L$  = Coeficiente de sustentación aerodinámica.  
 $\overline{F}$  = Fuerza resultante de una perturbación en el sistema de fuerzas actuantes.  
 $\overline{M}$  = Cupla aerodinámica relativa a C.  $\overline{M} = K_M d^3 \rho V^2 \delta$   
 $K_M$  = Coeficiente de la cupla aerodinámica.  
 $\overline{H}$  = Momento de amortiguamiento aerodinámico.  $\overline{H} = -K_H \rho d^4 V \dot{\Phi}$   
 $K_H$  = Coeficiente de amortiguamiento aerodinámico.  
 $\overline{P}$  = Cupla de una perturbación en el sistema de fuerzas actuantes  
 $\check{e}$  = Versor actual del misil.  
 $\alpha, \frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \gamma$  = Angulos directores de  $\check{e}$   
 $V_x, v, w$  = Componentes de V segun los ejes de  $\mathcal{C}_2$   
 $\overline{V}_r = \overline{W} - \overline{V}$  = Viento relativo; se supone  $\overline{V}_r \cong -\overline{V}$  por ser  $w \ll V$   
 $\omega_p$  = Velocidad angular propia alrededor de  $\check{e}$   
 $\omega$  = Velocidad angular de  $\check{e}$  respecto de  $\mathcal{C}_2$   
 $A, B$  = Momentos de inercia axial y ecuatorial.  
 $\psi$  = Ángulo de rotación propia del misil alrededor de  $\check{e}$ .  
 $W, \mu, \Delta\mu$  = Velocidades del viento, viento permanente y ráfaga.  
 $\sigma$  = Longitud de onda en cabeceo.  
 $s = s(t)$  = Longitud de trayectoria activa.  
 $\kappa = 2\pi s \sigma^{-1}$  = Longitud reducida de trayectoria activa.  
 $\varphi$  = Ángulo de lanzamiento.  
 $\delta$  = Ángulo de ataque del misil.  
 $\theta, \Phi$  = Angulos del vector V y del vector axial  $\check{e}$  con el versor  $\check{z}$ .

## INTRODUCCION

El problema general de la teoría del movimiento de un misil con propulsión a reacción comporta, por sus características propias, gran analogía pero también importantes diferencias y mayor complicación respecto de los problemas balísticos principal y secundario reunidos.

Tres características principales diferencian el caso del misil tratado en este trabajo. Una es la presencia de fuerzas transversales, más apreciables; en especial la "sustentación" (en cambio, las fuerzas y momentos de Magnus son mucho menores que en el caso balístico, ya que dependen de la rotación propia  $\omega_p$ ). Otra está constituida por el empuje reactivo y sus principales consecuencias: efecto de Coriolis y trayectoria "activa". Por último, la variación de la masa del misil por el gasto de combustible, y el consiguiente corrimiento del baricentro, cuya posición relativa será entonces función del Tiempo, durante el intervalo de empuje reactivo; cualidades que deben ser tenidas en cuenta en el cálculo del movimiento, cuando sobrepasan ciertos límites de admisibilidad que deben ser fijados por la teoría conjuntamente con la experimentación. El importante problema de la elección del centro de reducción para el momento de las fuerzas aerodinámicas es totalmente equivalente al de la balística.

Nuestro problema se diferencia mucho más del caso del movimiento del avión (propulsado a reacción, para mayor analogía). En éste la sustentación es mucho mayor, frente al misil, en que la sustentación es a veces apreciable, aunque pequeña, si está dotado de alas cruciformes (o de mayor simetría n-gonal); y la rotación del avión es insignificante comparada con la del misil que es siempre apreciable y a veces de importancia.

Todas las acciones ejercidas y las características dinámicas en el misil dependen, en diversos grados, de la dicha variación de la masa y corrimiento relativo del baricentro, -

Todas estas circunstancias especiales dan características propias a las dos partes del movimiento: la "trayectoria" en el espacio y el movimiento propio del misil respecto de su trayectoria. -

De éstos últimos se trata en este trabajo. Tanto de la teoría general como de aspectos particulares: la determinación de los elementos principales que definen los movimientos y el análisis de efectos especiales, estudiándose principalmente la influencia del viento. Se dan aquí resultados no conocidos, - En cuanto a la teoría general, se destaca cómo la teoría de Nielsen-Synge, conjuntamente con la clásica de Fowler (aerodinámica de proyectiles rotantes), permite justificar las hipótesis simplificadoras que aquí se

hacen, y las que son usuales, por otra parte, impuestas siempre por las complicaciones teóricas y prácticas. Aquí la adopción de un "sólido" ficticio con el cual representar matemáticamente el movimiento del misil (inhomogéneo) real, queda plenamente justificada con consideraciones básicas, y se determinan los elementos del movimiento.-

Debe entenderse que la teoría se desarrolla dentro de los límites y exigencias de una teoría de previsión, en el sentido de las Ciencias Naturales, sin pretenderse superar las inevitables inconexiones y paradojas de toda teoría de mecánica de fluidos; éstas obedecen por lo general a interdependencias no nítidamente deslindadas de las causas y a sistemas de hipótesis superabundantes; dificultades que exigen buscar fundamento en hipótesis coherentes con la experiencia, y tendiendo a hacer las previsiones matemáticamente con la sólo exigencia de un ajustamiento plausible con los resultados experimentales.-

Se trata aquí de un misil a cohete (con combustible líquido o sólido), cuerpo de revolución, inhomogéneo, con un momento principal de inercia predominante; con masa y baricentro variables; dotado de superficies sustentadoras capaces de producir fuerzas y momentos apreciables.-

Se calcula principalmente, bajo la influencia del viento constante, el movimiento del vector velocidad del centro de reducción y su posición al final de la trayectoria activa. Para ello, se discute la separabilidad de las ecuaciones de movimiento en sistemas independientes correspondientes a los planos de una terna fija en tierra. Sobre este punto ha sido obtenido un resultado más particular (despreciando la "sustentación" y el "amortiguamiento aerodinámico") en un trabajo anterior (1).-

(1) Cfr. Bibliografía [11] .-

P A R T E I

TEORÍA GENERAL PARA LOS MISILES DE MASA VARIABLE

1.- Ecuaciones generales de movimiento.-

Introducción.- Para describir el movimiento de un cohete o misil con propulsión a chorro, que consta de una parte rígida  $R$ , de una masa de combustible (líquido o sólido) y de gases en movimiento en la cámara de combustión y toberas, hay que considerar el comportamiento mecánico de todas aquellas partículas materiales que así lo componen -- que suman la masa variable  $m(t)$  -- y cuyos movimientos relativos -- considerados también / desde un sistema de referencia absoluto -- inciden en el acto de movimiento del misil. Dichas partículas materiales son todas aquéllas que, en cada instante  $t$ , están contenidas en el recinto espacial contenido y limitado por una cierta superficie cerrada  $\mathcal{C}$ , dicha "de control", realizada por la frontera exterior de  $R$  y la sección de salida de las toberas. Este sistema material (inhomogéneo) es lo que consideramos como "misil real". Se trata entonces de determinar totalmente el comportamiento / de tal sistema dinámico.-

En la evolución del sistema dinámico inicial, por la combustión y eyección de los gases, sale del recinto encerrado por  $\mathcal{C}$  una cierta cantidad de materia en función del tiempo (durante el intervalo reactivo o de combustión), que va dejando de pertenecer a nuestro sistema dinámico del "misil real". Se tiene con ello la disminución de la masa  $m(t)$ , que es su característica principal. Tienen lugar entonces para dicho sistema dos características mecánicas: 1º) variación de la masa ("gasto") y

del baricentro de la masa instantánea de combustible (recinto 2 en pag.13), y, con ello, variación del baricentro de la totalidad del conjunto material contenido por  $\mathcal{C}$ , "misil real";

2º) movimiento de gases en la cámara de combustión y toberas, (recinto 3) <sup>(1)</sup>. Ambas características comportan contribuciones importantes a las magnitudes dinámicas fundamentales, cantidad de movimiento y momento cinético.

Llamaremos  $\mathcal{S}$  al sistema formado por todas las partículas materiales que en el instante  $t$  componen el misil (el encerrado por  $\mathcal{C}$  en dicho instante). Evidentemente, en ese instante  $t$ ,  $\mathcal{S}$  coincide con el "misil real" en su totalidad; pero en los instantes siguientes,  $t + dt$ , parte de su materia ha salido de él (a través de  $\mathcal{C}$ ):  $\mathcal{S}$  ha variado en el interiora  $\mathcal{C}$ : de  $\mathcal{S}(t)$  a  $\mathcal{S}(t + dt)$ ; la masa en  $\mathcal{C}$  ha variado de  $m(t)$  a  $m(t + dt)$ .

Llamaremos  $S$  a un sistema dinámico rígido ficticio formado por el conjunto  $\mathcal{S}$ , en un instante arbitrario,  $t$ , fijo, considerado como un cuerpo enteramente rígido (e inhomogéneo), de masa  $m(t)$ , fijo en la estructura rígida  $R$  del misil real, que se mueve con él, y que se lo considera mecánicamente como "equivalente" a él para ese instante. Se lo llama "sólido ficticio" o "equivalente"; y tiene masa instantánea  $m$  igual a la masa  $M(t)$  del misil real en ese instante  $t$ . - <sup>(2)</sup>

La consideración de la superficie  $\mathcal{C}$  y de la materia que contiene en un instante arbitrario (sistema  $\mathcal{S}$ ), y de la hipótesis del sólido  $S$  "equivalente", son las mas plausibles, pues permiten tener en cuenta la totalidad del sistema (instantáneo) constituido por

---

(1) y también movimiento de líquido en el caso de un misil con motor a combustible líquido.

(2) Gantmacher y Levin, [1], lo llaman "cuerpo sólido ficticio". Preferimos llamarle "equivalente", con un sentido que precisaremos más adelante: el de una "equivalencia" dinámica entre el misil real (sistema  $\mathcal{S}$ ) y el sistema ficticio definido  $S$ . En esta primera parte de la teoría seguiremos, en líneas generales, la exposición de Gantmacher y Levin (l.c.) :-

todas las partículas materiales en movimiento relativo, y en su movimiento de arrastre susceptible de ser considerado al identificarlas instantáneamente con S; pudiéndose así tener en cuenta la influencia del movimiento relativo a R de aquellas partes móviles (gaseosa, etc.), que están, simultáneamente, en movimiento (de "arrastre") con R (y con S) en su trayectoria respecto del sistema absoluto. En efecto: el movimiento de cada una de las partículas se considerará siempre como compuesto; una partícula se mueve relativa a S (relativa al cuerpo R del misil), pero el "sólido" S es transportado en su totalidad, en el movimiento respecto de un sistema absoluto (fijo a la Tierra),  $\mathcal{T}_1$ . Por adición se totalizan las magnitudes dinámicas de toda la materia y movimientos de  $\mathcal{S}$ : los relativos a un sistema de referencia  $\mathcal{T}^*$  solidario con R (partes fluidas, baricentro del combustible y del sistema total contenido en  $\mathcal{C}$ , etc.); y los correspondientes al movimiento de  $\mathcal{T}^*$  de R (y de S) respecto de la absoluta  $\mathcal{T}_1$ , teniendo en cuenta que todas las partículas se mueven en el movimiento de arrastre de S. La introducción de S tiene por objeto precisamente el cálculo, referido a él, de las magnitudes fundamentales de  $\mathcal{S}$ . El sólido ficticio S tiene una exacta determinación de sus características mecánicas (baricentro, tensor central de inercia, etc.) lo que no ocurre para el sistema  $\mathcal{S}$ . Se busca referir a aquellas características mecánicas, el acto total de movimiento de  $\mathcal{S}$  (y del misil). Se aplican entonces los teoremas generales de la dinámica para el movimiento absoluto y relativo en  $\mathcal{S}$  y S, debiendo demostrarse la validez del principio de "equivalencia", como equivalencia dinámica de ambos sistemas. - y S. (Teor. pag. 12)

En particular, la sola consideración del S "rígido" permite calcular el movimiento rotacional y magnitudes derivadas. - Con lo que queda caracterizado totalmente el acto de movimiento del misil.

Los teoremas fundamentales y el "sólido equivalente".

Sea  $Q$  el vector cantidad de movimiento del sólido equivalente  $S$ .  
 Y  $\mathcal{H}$  el vector cantidad de movimiento de  $G$  relative al sistema  
 de ejes coordenados galileano fijo en la Tierra,  $\mathcal{T}_1$ . Sea  $F = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$  el  
 vector resultante de las fuerzas externas actuantes en el instan-  
 te  $t$  sobre el misil (es decir, sobre  $G$ ).

En primer lugar, comparemos  $S$  y  $G$ , sus cantidades de movimiento  
 y momentos cinéticos. En el movimiento compuesto de cada partícu-  
 la de  $G$ , sean  $v_e, v_r, v_a, a_e, a_r, a_a$ , las velocidades y aceleraciones  
 de arrastre, relativas y absolutas respectivamente (ternas  $\mathcal{T}^*$  mó-  
 vil-solidaria con  $R$ , y  $\mathcal{T}_1$  absoluta).-

En  $G$  las partículas del rígido  $R$  tienen  $v_r=0$ . La cantidad de mo-  
 vimiento es:  $\mathcal{H} = \sum m v_a$ , (1) y su derivada (sin indicar subín-  
 dices) resulta:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum m a_a = \frac{dQ}{dt} - J + \sum m a_r \quad (1.1)$$

siendo  $Q$  la cantidad de movimiento del sistema  $S$ , ( $Q = \sum m v_e$ )  
 y  $J = \sum m j$  el vector resultante de las fuerzas  $j m$  de Coriolis  
 ya que  $a_a = a_e + j + a_r$ , y  $\frac{dQ}{dt} = \sum m a_e$  .- (1.2)

Designemos con  $v_{r_1}$  la velocidad relativa de la partícula en el ins-  
 tante  $t_1 = t + dt$  y con  $\delta v_r$  el diferencial de velocidad de la partí-  
 cula relative al cuerpo  $R$  del misil, luego:  $\delta v_r = a_r dt \approx v_{r_1} - v_r$ ,

$$\delta \sum m v_r = \sum m a_r dt = \sum m v_{r_1} - \sum m v_r \quad (1.3)$$

El diferencial con respecto al sistema de coordenadas fijo  $\mathcal{T}_1$   
 se designa con la letra  $d$ .

Definamos el vector  $\mathcal{H}^r$  cantidad de movimiento del conjunto de partí-  
 culas de fluido internas al misil (a la superficie  $\mathcal{C}$ ) en el ins-  
 tante  $t$  y relative al mismo, (al sistema  $\mathcal{T}^*$ ). Para un misil con motor  
 a combustible líquido el vector  $\mathcal{H}^r$  es el vector cantidad de movi-  
 miento de las partículas de gas en la cámara de combustión y tobe-

(1) Aquí  $m$  es la masa elemental (de cada partícula).

ras, y de las partículas de líquido fluyentes desde los tanques y tuberías de alimentación de combustible a la cámara de combustión. El diferencial de  $\mathcal{H}^r$  es:  $\delta \mathcal{H}^r \simeq \mathcal{H}_1^r - \mathcal{H}^r$ , (a)

siendo por definición:  $\sum m v_r = \mathcal{H}^r$ , (b) ( 1.4 )

$$\sum m v_{r_1} = \mathcal{H}_1^r + q_r dt \quad (c)$$

La masa  $\sum m$  en la ( 1.4.c ) es la misma  $m(t)$  de (1.4.b): la masa que es interna a  $\mathcal{C}$  en el instante  $t$  (y que ya no será totalmente interna en el  $t_1$ ); sólo  $\mathcal{H}_1^r$  es la cantidad de movimiento de las partículas internas a  $\mathcal{C}$  en el  $t_1 = t + dt$ .

El vector  $q_r dt$  es el vector cantidad de movimiento (en el movimiento relativo) de aquellas partículas de gas en el intervalo de tiempo  $dt$  han pasado a través de la sección de salida de las toberas. El vector  $q_r$  es el vector cantidad de movimiento relativo al misil, de la masa de gas pasante por unidad de tiempo a través de la sección de las toberas. El vector  $q_r$  que tiene la dimensión de una fuerza es llamado equilibrante de las fuerzas "puras" de reacción que forman parte del empuje total  $T$  que consideraremos en detalle mas adelante.

Si  $\mu = \frac{dm}{dt}$  es el gasto de masa fluida y  $u$  es la velocidad media relativa a la tobera, resulta  $q_r = \mu u$ . De las ecuaciones (1.3), (1.4) se obtiene:

$$\sum m a_r = q_r + \frac{\delta \mathcal{H}^r}{dt} \quad (1.5)$$

Sustituyendo en (1.1) la expresión dada por (1.5) para  $\sum m a_r$  y  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$  por  $F$ , se tiene:

$$\frac{dQ}{dt} = F - q_r + J - \frac{\delta \mathcal{H}^r}{dt} \quad (1.6)$$

Esta ecuación expresa el teorema de cantidad en movimiento para el sólido ficticio  $S$ . (2)

Teorema de equivalencia para el momento cinético. - Sean  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_c$  los momentos cinéticos de los sistemas  $\mathcal{G}$  y  $S$  respecto a sus baricentros  $C_1$  y  $C$  en el movimiento absoluto, esto es, referidos al sis-

(2) Quedará en los teoremas siguientes justificada la denominación de "equivalente" que se da a  $S$ .

tema galileano fijo de coordenadas,  $\mathcal{T}_1$ . Considerando el movimiento relativo a ternas  $\mathcal{T}(t)$ ,  $\mathcal{I}(t)$ , originadas en los baricentros  $C$  y  $C_1$ , de  $S$  y  $G$ , designaremos las magnitudes correspondientes colocando  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{I}$ , como superíndices. Las ternas  $\mathcal{T}(t)$ ,  $\mathcal{I}(t)$ , coinciden en el instante arbitrario  $t$  en que coinciden  $S$  y  $G$ , pero no para el  $t+dt$ .

Aplicando el teorema del momento cinético relativo al baricentro del sistema  $G$  vale:

$$\frac{d\mathcal{L}_{C_1}^{\mathcal{T}}}{dt} = M_{C_1} \quad (1.7)$$

donde  $M_{C_1}$  es el momento principal de todas las fuerzas externas actuantes sobre el misil o sea sobre el sistema  $G$  en el instante de tiempo  $t$ . Demostraremos ahora que esta relación (1.7) vale también para el sólido ficticio  $S$ .

Consideremos el momento cinético (en  $\mathcal{T}(t)$ ) relativo a los dos centros de reducción  $C_1, C$ :

$$\mathcal{L}_{C_1}^{\mathcal{T}} = \mathcal{L}_C^{\mathcal{T}} + \overline{C_1 C} \wedge \mathcal{H}_C^{\mathcal{T}} \quad (1.8)$$

Luego, resulta:

$$\frac{d\mathcal{L}_{C_1}^{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{d\mathcal{L}_C^{\mathcal{T}}}{dt} + \frac{d\overline{C_1 C}}{dt} \wedge \mathcal{H}_C^{\mathcal{T}} + \overline{C_1 C} \wedge \frac{d\mathcal{H}_C^{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{d\mathcal{L}_C^{\mathcal{T}}}{dt}, \quad (1.9)$$

ya que en el instante  $t$ ,  $C_1$  coincide con  $C$ , o sea:  $\overline{C_1 C} = 0$ , y además:

$$\frac{d\overline{C_1 C}}{dt} = V_C - V_{C_1} = -\frac{1}{m(t)} \mathcal{H}_C^{\mathcal{T}} \quad (*)$$

Siendo que en el instante  $t$  los puntos  $C_1$  y  $C$  coinciden, es, para las fuerzas exteriores actuantes sobre  $G$ :  $M_{C_1} = M_C$ , y además recordando que por un teorema general sobre el momento cinético es:  $\mathcal{L}_{C_1}^{\mathcal{T}} = \mathcal{L}_{C_1}^{\mathcal{I}}$ , resulta por (1.7) y (1.9):

$$\frac{d\mathcal{L}_C^{\mathcal{T}}}{dt} = M_C, \quad \text{c.q.d.} \quad (1.10)$$

lo que dice que:

"vale el teorema de la derivada del momento cinético para  $G$  tomando dicho momento cinético

(\*) ( $m(t)$  es la masa total en el instante  $t$ ).

de  $S$  con polo de reducción en el baricentro  $C$  del sólido ficticio  $S$  (en lugar del  $C_1$  de  $S$ ), y refiriéndolo a la terna  $\mathcal{C}(t)$  instantánea de origen en  $C$ . -

Entonces la (1.10) expresa la "equivalencia" de  $S$  y el sólido ficticio  $S$ . Evidentemente, para el dicho instante  $t$ :  $\frac{dL_c^z}{dt} = \frac{dL_{C_1}^T}{dt}$ , (con  $\mathcal{C} \neq \mathcal{T}$ ,  $C \neq C_1$ ), que expresa análogamente la "equivalencia" de  $S$  con  $S$ . -

Movimiento del sistema  $S$  y del sólido ficticio  $S$ .

Consideremos el movimiento del misil "real" (el sistema  $S$ ) fundándonos en el teorema anterior, refiriendo dicho movimiento al baricentro  $C$  de  $S$  y a la terna baricentral instantánea  $\mathcal{C}(t)$  con origen en  $C$ . - Una vez mas, el movimiento de cada partícula del sistema  $S$  se considera como compuesto. Pero consideremos, como absoluto el movimiento de cada partícula de  $S$  respecto de la terna  $\mathcal{C}(t)$  originada en  $C$  (y paralela a  $\mathcal{C}_1$  y en traslación respecto de  $\mathcal{C}_1$ ). -

El movimiento del cuerpo  $S$  relativo a estos ejes  $\mathcal{C}(t)$  se considera como movimiento de arrastre, y el de la partícula relativo al cuerpo  $S$  (esto es relativo al cuerpo  $R$  del misil) como relativo.

Luego: 
$$L_c^z = \sum r \wedge m v_a' \quad (a)$$

$$\frac{dL_c^z}{dt} = \sum r \wedge m a_a' \quad (b) \quad (1.10)$$

donde  $r$  es el radio vector de la partícula trazado desde el punto  $C$ .

Siendo la suma  $a_r' + a_e' + j'$  la aceleración absoluta  $a_a'$  de la partícula, resulta en (1.11):

$$\begin{aligned} \sum r \wedge m a_a' &= \frac{dL_c^z}{dt} \\ -\sum r \wedge m j' &= M_c^J \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde  $M_c^J$  es el momento resultante del sistema de fuerzas  $j_m$  de Coriolis. -

Así resulta:

$$\frac{dL_c^z}{dt} = \frac{dL_c^z}{dt} - M_c^J + \sum r \wedge m a_r \quad (1.12)$$

Llamemos ahora  $v_r$  a la velocidad relativa a  $S$  de la partícula

de  $\mathcal{G}$  en el instante  $t_1 = dt + t$ . Luego  $v_{1r} - v_r = a_r \cdot dt$ , y por esto:

$$\sum r \wedge m a_r dt = \sum r \wedge m v_{1r} - \sum r \wedge m v_r \quad (1.13)$$

Determinaremos ahora el movimiento relativo al misil ( $\mathcal{S}$ ) del gas interior al misil (parte del sistema  $\mathcal{G}$ )

Con las definiciones antedichas, indicando con superíndices  $r$  ( $\mathcal{L}^r$ ) las magnitudes correspondientes a esa masa gaseosa (variable): (3)

$$\mathcal{L}_c^r = \sum r \wedge m v_r \quad (1.14)$$

donde  $\mathcal{L}^r$  es el momento cinético del gas interior al misil (a la superficie de control  $\mathcal{C}$ ) en el movimiento relativo en el instante

$t$ . Luego: 
$$\sum r \wedge m v_{r1} = \sum r_1 \wedge m v_{r1} - \sum (r_1 - r) \wedge m v_{r1}$$

donde  $r_1$  es el radio vector, en el instante  $t_1$ , de la partícula de radio vector  $r$  en el instante  $t$ .-

La suma  $\sum r \wedge m v_r$  se extiende solamente a las partículas que están en el interior de la superficie de control  $\mathcal{C}$  del misil en el instante  $t_1$ .

La suma de los componentes  $r_1 \wedge m v_{r1}$  excluidas (que al pasar de  $t$  a  $t_1$  han salido de  $\mathcal{C}$ ), será igual al momento cinético de la masa de gas pasante por unidad de tiempo a través de la sección de las toberas, en el movimiento relativo,  $h_{rc}$ , multiplicado por  $dt$ ,

La suma de las componentes para el gas interior a  $\mathcal{C}$  en  $t_1$  es entonces  $\mathcal{L}_{1c}^r$ . Además la suma  $\sum (r_1 - r) \wedge m v_{r1}$  es nula ya que, por ser  $r_1 - r \cong \delta r = v_r dt$ , es, despreciando infinitésimos,  $v_{r1}$  aproximadamente igual a  $v_r$ .-

Luego: 
$$\sum r \wedge m v_{r1} = \mathcal{L}_{1c}^r + h_{rc} \quad (1.15)$$

donde  $h_{rc}$  es el momento cinético del gas que ha salido en  $dt$ , como se dijo.-

---

(3) La suma  $\sum r \wedge m v_r = \mathcal{L}^r$ , se extiende al interior de la superficie de control,  $\mathcal{C}$ , mas precisamente, al recinto 3 (fig. ) ocupado por los gases, refiriéndose a dicho recinto o volumen fijo ocupado por el gas, y no a una masa fija de gas. Lo mismo se consideró para  $\mathcal{H}^r$  (cantidad de mov. del gas).

Por las ecuaciones (1.13) , (1.14) y (1.15) :

$$\sum r \wedge m a_r = \frac{\delta \mathcal{L}_c^r}{dt} + h_{rc} \quad (1.16)$$

donde  $\delta \mathcal{L}_c^r \approx \mathcal{L}_{rc}^r - \mathcal{L}_c^r$  es el diferencial de  $\mathcal{L}_c^r$  relativo al cuerpo del misil (para dt).-

Sustituyendo en la ecuación (1.12) la expresión (1.16), se obtiene

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d\mathcal{L}_c^z}{dt} + h_{rc} - M_c^j + \frac{\delta \mathcal{L}_c^r}{dt} \quad (1.17)$$

El vector momento cinético del gas saliente de  $\mathcal{C}$  por unidad de tiempo,  $h_{rc}$ , en el movimiento relativo, que tiene la dimensión del momento de una fuerza, se denomina "momento reactivo" y forma parte del momento reactivo total  $\mathcal{N}$  que consideramos en detalle mas adelante al tratar la totalidad de las fuerzas exteriores.

Por las ecuaciones (1.10) y (1.17) se tiene:

$$\frac{d\mathcal{L}_c^z}{dt} = M - h_{rc} + M_c^j - \frac{\delta \mathcal{L}_c^r}{dt} \quad (1.18)$$

Esta ecuación (1.18) determina la derivada con respecto al tiempo del momento cinético del sólido ficticio S en su movimiento relativo a un sistema de ejes  $\mathcal{Z}(t)$  pasante por el centro de inercia C del mismo. Completa el resultado expresado por (1.6) para la derivada de la cantidad de movimiento de S,  $\frac{dQ}{dt}$ . La (1.18) se ha obtenido en base a la validez del teorema o principio de "equivalencia" (1.10).- Las (1.6) y (1.18) son las ecuaciones características de la dinámica del misil que permitirán calcular su movimiento en función de las características dinámicas del sólido ficticio S.

#### Análisis de las fuerzas exteriores. Empuje.

El vector resultante de las fuerzas reactivas "puras" es  $-Q_r$  y su momento principal relativo al polo C es  $-h_{rc}$ , siendo como sabemos  $Q_r$  y  $h_{rc}$  los vectores cantidad de movimiento y momento cinético de la masa de gas pasante por unidad de tiempo a través de la superficie de control  $\mathcal{C}$  del misil. El sistema de fuerzas reactivas que definiremos incluirá ciertas fuerzas externas de modo que

su totalización corresponda a las reacciones medibles con el misil en reposo.

Consideremos el misil vinculado a soportes móviles respecto de  $\mathcal{C}_1$ , de manera que sobre éstos actúen fuerzas de resultante  $-F_s$ . De este modo admitiremos que actúan sobre el misil fuerzas exteriores que se reducen a:

- 1)  $F_s$ ,  $M_{sc}$ , resultante y momento de las reacciones de los soportes sobre el misil
- 2)  $F_p^* = F_p + \mathcal{A}$ ,  $M_{pc}^* = M_{pc} + \Pi$ : resultante y momento de las presiones exteriores sobre  $\mathcal{C}$ ; siendo  $F_p$  y  $M_{pc}$  las correspondientes a las presiones exteriores para el misil en reposo, y  $\mathcal{A}$ ,  $\Pi_c$ , las adicionales correspondientes al estado de movimiento (fuerzas aerodinámicas).
- 3) El peso  $\mathcal{G}$  del misil .-

Estos sistemas de fuerzas exteriores se totalizan y reducen a

$$F = F_s + F_p + \mathcal{A} + \mathcal{G}, \quad M_c = M_{sc} + M_{pc} + \Pi_c$$

Las ecuaciones cardinales de la dinámica del misil son:

$$\frac{dQ}{dt} = F - q_r + J - \frac{\delta \mathcal{H}^r}{dt} \quad (1.6)$$

$$\frac{dL_c^z}{dt} = M_c - h_{rc} + M_c^J - \frac{\delta L_c^r}{dt} \quad (1.18)$$

Si el misil está en reposo respecto de  $\mathcal{C}_1$ , resulta por sus defini-

$$\begin{aligned} \text{niciones: } Q = \dot{Q} = 0, \quad J = 0, \quad F = F_s + F_p + \mathcal{G} \\ L_c^z = \dot{L}_c^z = 0, \quad M_c^J = 0, \quad M_c = M_{sc} + M_{pc} \end{aligned}$$

Por (1.6), (1.18) y admitiendo que la corriente del fluido interior a  $\mathcal{C}$  para el misil estacionario y móvil es idéntica (o sea despreciando el efecto de la aceleración de R sobre el movimiento relativo del gas) se tiene:

$$-F_s = -q_r + F_p - \frac{\delta \mathcal{H}^r}{dt} + \mathcal{G} = T + \mathcal{G} \quad (1.19)$$

$$-M_{sc} = -h_{rc} + M_{pc} - \frac{\delta L_c^r}{dt} = \mathcal{N}_c \quad (1.20)$$

La fuerza de empuje T y momento reactivo  $\mathcal{N}$  se miden sobre los soportes del misil funcionando en reposo.

Las ecuaciones características del movimiento. El teorema general de "equivalencia".

Teniendo en cuenta que si el misil se mueve libremente en el espacio es  $F_s = 0$  ;  $M_{sc} = 0$  , y la definición dada por (1.19) y (1.20) para el "empuje"  $T$  y el "momento reactivo"  $\mathcal{N}$ , medibles con el misil en reposo, resulta que la (1.6) y (1.18) toman la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= T + \mathcal{A} + J + \mathcal{G} & (a) \\ \frac{dL_c^z}{dt} &= \mathcal{N}_c + \Pi_c + M_c^J & (b) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Estas ecuaciones expresan, sintetizando los resultados anteriores, el teorema que puede llamarse "teorema de equivalencia" o de "solidificación":

"Las ecuaciones características del movimiento de un misil propulsado a reacción para un instante de tiempo arbitrario  $t$  pueden escribirse en la forma de las ecuaciones del movimiento de un cuerpo sólido  $S$  de masa  $m(t)$  igual a  $m$  en el instante  $t$ , si se supone que el misil es rígido y sólido en el instante  $t$ , estando aplicadas al cuerpo sólido ficticio  $S$  las siguientes fuerzas:

- " 1) fuerzas reactivas  $T$  ;
- " 2) fuerzas aerodinámicas sobre todo  $\mathcal{C}$  ;
- " 3) fuerzas de Coriolis  $J$  ;
- " 4) fuerzas de la gravedad ".-

Las (1.21) son las ecuaciones características del movimiento de un misil, de masa variable, necesarias y suficientes para determinar completamente su estado de movimiento.-

Como se ve, éstas son las ecuaciones que permiten, aplicadas al sólido ficticio  $S$  al cual formalmente corresponden, calcular el movimiento del misil ("real") en función de las simples características dinámicas de  $\dot{S}$ , que es un sólido. Conocido el tensor central de inercia  $I_{pq}(t)$ , para cada instante  $t$ , es posible expresar el sistema de ecuaciones de movimiento del misil con respecto a un centro de reducción, origen de la terna  $\mathcal{C}^*$  fija en

R. Lo que permite, con la sola referencia a la parte rígida R, calcular su movimiento con las propiedades de S.

2.- Expresiones para el vector , fuerza de Coriolis J y momento de Coriolis .-

En primer lugar comparemos los diferenciales absolutos de la cantidad de movimiento del sistema  $\mathcal{G}$  . y del cuerpo sólido S,  $d\mathcal{H}$  y  $dQ$  .- Para esto dividiremos el recinto ocupado por el misil en tres partes:

Recinto N° 1 ocupado por el cuerpo rígido R .

Recinto N° 2 ocupado en el instante  $t$  por el combustible sólido/líquido .

Recinto N° 3 ocupado en el instante  $t$  por las partículas de gas que son interiores al misil de frontera  $\mathcal{C}$  .

Los componentes del vector cantidad de movimiento, (absoluto), correspondientes a estos recintos fijos se designan con subíndices 1, 2, y 3 respectivamente .-

Para el recinto N° 1 es evidentemente:  $d\mathcal{H}_1 = dQ_1$  (2.22)

Para la masa de combustible (sólido o líquido) en el instante  $t$  es  $\mathcal{H}_2 = Q_2$  ; pero en el instante  $t_1 = t + dt$  el vector  $\mathcal{H}_2$  difiere del  $Q_2$  .-

en el vector cantidad de movimiento de la masa de combustible (sólido o líquido) que se ha quemado en el tiempo  $dt$  .

Para esta diferencia de cantidad de movimiento admitiremos una expresión lineal en  $t$  de la forma  $f_p dt$  , designando con  $f_p$  el "gasto" de cantidad de movimiento del combustible en la unidad de tiempo. Luego, es:  $\mathcal{H}_2 = Q_2 - f_p t$  (2.23), y

su diferencial absoluto:  $d\mathcal{H}_2 = dQ_2 - f_p dt$  .- (2.24).-

Teniendo en cuenta que la parte rígida R gira con velocidad angular  $\Omega$ , el diferencial absoluto  $d\mathcal{H}'$  del vector  $\mathcal{H}'$  (respecto a  $\mathcal{T}_1$ ) es:  $d\mathcal{H}' = \delta\mathcal{H}' + \Omega \wedge \mathcal{H}' dt$ , siendo  $\delta\mathcal{H}'$  su diferencial relativo a una terna solidaria con R.

Consideremos ahora el diferencial de cantidad de movimiento del gas en el recinto N° 3 correspondiente al movimiento de arrastre de R.- Sea  $d\mathcal{H}_3$ .- Este  $d\mathcal{H}_3$  coincide con  $dQ_3$  en el caso en que para cada punto del recinto la densidad  $\rho_i(t)$  del gas en el instante  $t$  y  $t_1$  es la misma. En general, el incremento correspondiente al movimiento de arrastre es igual a

$$dQ_3 = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} v_e d\tau$$

donde la integral se extiende sobre la parte del recinto  $\tau$  que en el instante  $t$  es ocupado por el gas, siendo  $v_e$  la velocidad de arrastre del elemento de volumen  $d\tau$ , y  $\frac{\partial \rho_i}{\partial t}$  es la derivada temporal de la densidad  $\rho_i(t)$  en el elemento de volumen  $d\tau$ . El diferencial absoluto del vector correspondiente a la región N° 3 es pues:

$$d\mathcal{H}_3 = dQ_3 + \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e d\tau + \delta\mathcal{H}^r + \Omega \wedge \mathcal{H}^r dt \quad (2.25)$$

Consideremos todavía el vector cantidad de movimiento en el tiempo  $t_1$  de aquellas partículas que en el intervalo de  $t$  a  $t_1$  han pasado a través de las toberas. Este vector cantidad de movimiento es igual a  $(q_e + q_r) dt$ , donde  $q_e$  es el vector cantidad de movimiento, de la masa pasante por segundo a través de la tobera, correspondiente al movimiento de arrastre, y  $q_r$  en el movimiento relativo.-

Finalmente es:

$$d\mathcal{H} = d\mathcal{H}_1 + d\mathcal{H}_2 + d\mathcal{H}_3 + (q_e + q_r) dt \quad (2.26)$$

obteniéndose por (2.23), (2.24), (2.25):

$$d\mathcal{H} = dQ - (f_p - q_e - q_r) dt + \delta\mathcal{H}^r + \Omega \wedge \mathcal{H}^r dt + \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt v_e d\tau \quad (2.27)$$

Recordemos que las fuerzas exteriores al sistema  $\mathcal{G}$  son el peso  $\mathcal{G}$  del misil y las presiones exteriores sobre la superficie de control  $\mathcal{C}$ , estáticas y aerodinámicas. -

De acuerdo al teorema de cantidad de movimiento aplicado al sistema  $\mathcal{G}$ , es:  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = F = F_p + A + \mathcal{G}$ ; por la ecuación (2.27) resulta:

$$\frac{dQ}{dt} = A + \mathcal{G} - q_r + F_p - \frac{\delta\mathcal{H}^r}{dt} + f_p - q_e - \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e d\tau - \Omega \wedge \mathcal{H}^r \quad (2.28)$$

Siendo  $j = -2\Omega \wedge v_r$ , es:  $J = \iiint \rho j d\tau = -2\Omega \wedge \iiint \rho v_r d\tau = -2\Omega \wedge \mathcal{H}^r$ , - (2.29)

por lo que el último término de (2.28) representa la mitad de la resultante de las fuerzas de Coriolis.

Luego, tomando en cuenta la (2.19) (2.20) (2.29) se obtiene nuevamente la 1ª ecuación cardinal del movimiento del misil:

$$\frac{dQ}{dt} = T + \mathcal{A} + \mathcal{G} + f_p - q_e - \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e d\tau + \frac{1}{2} J \quad (2.50).$$

Por consideraciones análogas y en forma inmediata se obtiene nuevamente la 2ª ecuación cardinal del movimiento del misil:

$$\frac{dL_c^z}{dt} = \mathcal{N}_c + \Pi_c + k_{pc}^z - h_{ec}^z - \iiint_{\tau} r \wedge \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e d\tau - r^2 \wedge \Omega \wedge \mathcal{H}^r \quad (2.31)$$

dónde  $k_{pc}^z$  es el momento cinético del combustible quemado por segundo y donde  $h_{ec}^z$  es el momento cinético del gas que sale de  $\mathcal{C}$  por segundo de tiempo a través de las toberas.- Los momentos cinéticos  $k_{pc}^z$ ,  $h_{ec}^z$  corresponden al movimiento de arrastre del cuerpo R relativo a un sistema  $\mathcal{C}$  de ejes que se mueve junto con el baricentro C del cuerpo S.-

Identificando los miembros a la derecha de las ecuaciones (2.30) y ((2.31), (1.2), se obtienen las expresiones de la fuerza de Coriolis y el momento de Coriolis:

$$J = 2 \left( f_p - q_e - \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e d\tau \right) \quad (2.32)$$

$$M_c^J = k_{pc}^z - h_{ec}^z - \Omega \wedge \mathcal{H}_c^r - \iiint_{\tau} r \wedge \frac{\partial \rho}{\partial t} v_e d\tau \quad (2.33)$$

Si la masa de combustible gastada, por segundo, se designa con  $\eta_1$  y la masa de gas pasante en la unidad de tiempo a través de las toberas con  $\eta_2$ , resulta que:

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (2.34)$$

La cantidad de movimiento  $f_p \cdot dt$  es la de la masa  $\eta_1 \cdot dt$  de combustible que se quema en el intervalo de tiempo  $dt$ .-

Designando con  $C_p$  el centro de inercia de esta masa elemental de combustible y con  $v_{cp}$  la velocidad del punto  $C_p$  en el movimiento de arrastre del cuerpo, resulta:  $f_p = \eta_1 v_{cp} \quad (2.35)$

Se supone que la masa elemental de combustible  $\eta_1 dt$  está situada simétricamente con respecto al eje del misil, el punto  $C_p$  pertenecerá a este eje.

De la misma manera, la masa elemental de gas  $\eta_2 dt$  pasante a través de la sección de las toberas, tenga centro de inercia  $C_e$  de velocidad de arrastre  $v_{ce}$ ; será así:  $q_e = \eta_2 v_{ce}$  (2.36)

Admitiremos que  $C_e$  esté sobre el eje de la tobera.

Se designan con  $r_p$  y  $r_e$  los radios vectores de los puntos  $C_p$  y  $C_e$  trazados desde un polo  $O$  fijo en el cuerpo  $R$  y con  $r$  el radio vector de un punto arbitrario interior al misil.

Por las expresiones que definen la velocidad de los puntos de un cuerpo rígido:

$$\begin{aligned} v_{cp} &= v_0 + \Omega \wedge r_p \\ v_{ce} &= v_0 + \Omega \wedge r_e \\ v_e &= v_0 + \Omega \wedge r_e \end{aligned} \quad (2.37)$$

y las (2.35), (2.36) la (2.32) toma la forma:

$$J = -2\Omega \wedge (\eta_2 r_e - \eta_1 r_p + \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} r dt) \quad (2.38)$$

Comparando esta ecuación con la expresión usual para la fuerza de

Coriolis  $J = -2\Omega \wedge \mathcal{H}^r$ , resulta:  $\mathcal{H}^r = \eta_2 r_e - \eta_1 r_p + \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} r dt$  (2.39)

como expresión para el vector cantidad de movimiento  $\mathcal{H}^r$  del gas interior al misil en su movimiento relativo al misil (estando la integral extendida al recinto  $\tau_3$  total ocupado por el gas), en función de las masas de gas  $\eta_1, \eta_2$  que a traviesan la superficie frontera de esta región, además de la variación temporal de densidad  $\rho_i(t)$  en cada punto.-

Recordemos que en esta ecuación es  $r_p$  el radio vector del centro de inercia  $C_p$  de la masa  $\eta_1$  entrante por segundo y  $r_e$  el radio vector de la masa saliente,  $\eta_2$ .-

En el caso especial que pueda considerarse casi estacionario el movimiento del gas se admite  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ , la que vale exactamente para el

líquido incompresible en una corriente general. Debe ser  $\eta_1 = \eta_2 = \dot{m}$ .

En este caso, con  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  por (2.34); definiendo el vector  $l = \overline{C_e C_p}$ ,

resulta:

$$\mathcal{H}^r = \eta l \quad J = -\Omega \wedge \mathcal{H}^r = -2\dot{m}(\Omega \wedge l) \quad (2.40)$$

para la resultante de las fuerzas de Coriolis.

Considerando además que  $\mathcal{H}^r$  pase por C o sea:  $r=0$  la (2.33) se reduce

$$a : \quad M_C^J = k_{pc}^z - h_{ec}^z \quad (2.41)$$

Consideremos el caso simple del movimiento plano. Siendo  $B(t)$  (1) el momento de inercia del cuerpo  $S$  relativo al eje ecuatorial, pasante por el punto C y perpendicular al plano de movimiento.

Siendo las componentes de velocidad de fluido (relativas a R) normales a  $\tilde{e}$ , en  $p$  y  $e$ :  $r_p \Omega$ ,  $r_e \Omega$  respectivamente,

resulta evidentemente:

$$k_{pc}^z = -\dot{m} r_p^2 \Omega$$

$$h_{ec}^z = -\dot{m} r_e^2 \Omega$$

y por ello:

$$M_C^J = \dot{m} \Omega (r_e^2 - r_p^2) \quad (2.42)$$

para el momento de Coriolis de un misil con motor a líquido o sólido, siendo estacionaria la corriente de fluido. La masa quemada en el intervalo de tiempo  $dt$  es  $\dot{m} dt$  y su momento de inercia respecto a C es el decremento  $dB = \dot{m} r_p^2 dt$  del momento de inercia B del sólido instantáneo S (con corriente interior estacionaria). Luego:  $\dot{m} r_p^2 = \frac{dB(t)}{dt}$ ; resultando:

$$B(t) = m(t) \cdot k^2(t), \quad \dot{B} = \dot{m} k^2 + 2\dot{k} m, \quad M_C^J = \dot{m} (r_e^2(t) - \dot{B}(t)) \Omega \quad (3) \quad (2.43)$$

para el caso de un misil con motor de combustible sólido, o líquido.

Siendo  $\dot{m} < 0$  resulta que  $M_C^J$  es un momento amortiguante. (3)

Dado que el momento amortiguante de las fuerzas aerodinámicas es proporcional a V, el momento de las fuerzas de Coriolis puede ser preponderante al comienzo de la trayectoria activa, si la longitud de guía es pequeña.-

(1) Siendo la masa de los gases muy pequeña frente al resto del misil, se considera que no interviene en el  $B(t)$  del "sólido" S.

(3) Al término  $-\dot{m} \cdot r_p^2 > 0$ , en el momento de Coriolis  $M_C^J$ , le corresponde un momento  $-\dot{m} r_p^2 \Omega$  que tiene el signo de  $\Omega$  y que se resta a la cupla amortiguante (correspondiente al chorro. Efectivamente,

$-\dot{m} r_p^2 = -\dot{B}(t) > 0$ ; esta disminución del momento amortiguante corresponde a la disminución del momento de inercia  $B(t)$  durante el intervalo de propulsión. En el caso de motor a líquido se usa, sin más, (2.42), con  $r(t)$  distancia de C a la cámara de combustión, fija respecto de R.-

## P A R T E II

ANALISIS CRITICO. DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO  
GENERALES, Y DE LOS EFECTOS ESPECIALES.

- 3.- Introducción.- En la parte I se ha demostrado el teorema fundamental de equivalencia que expresa las ecuaciones del movimiento del misil en función de las características dinámicas del sólido ficticio S. Además, se han determinado expresiones para la resultante J y momento  $M^0$  de las fuerzas de Coriolis. Se plantea ahora el problema de referir el sistema de ecuaciones características del movimiento a un centro de reducción  $O^*$  fijo en la parte rígida R del misil. De este modo se determinará un sistema de seis ecuaciones características cuya solución especificará como función del tiempo el acto del movimiento del rígido R relativo a un punto  $O^*$  fijo en él y elegido convencionalmente.
- Si se hace la hipótesis muy plausible de que la variación de C se produce en la dirección del eje de simetría ( $\overline{C-C'}$ ) y que las ternas  $\mathcal{Z}^*$  y principal de inercia de S(t) se mantienen paralelas, la solución correspondiente a las tres ecuaciones de Euler del movimiento rotacional queda referida a la parte rígida R (movimiento de  $\mathcal{Z}^*$ ), caracterizando por los ángulos de Euler la posición instantánea del eje del misil.
- Para el caso mas general no paralelo (aún con  $\overline{C-C'}$  con dirección axial) habría que tener dada la ley de variación relativa a  $\mathcal{Z}^*$  de la terna de ejes principales de inercia.-

4. Movimiento del baricentro y del centro de reducción

Calcularemos el movimiento de un punto  $O^*$  de la parte rígida R, teniendo en cuenta el movimiento del baricentro.

Por el teorema del sólido equivalente resulta

$$m\ddot{C} = \mathcal{A} + \mathcal{G} + \mathcal{T} + \mathcal{J} \quad (4.44)$$

donde  $m$  es la masa del misil en el instante  $t$  y  $\ddot{C}$  es la aceleración del baricentro  $C$  del misil en el instante  $t$ , esto es del cuerpo S.

Durante la combustión el baricentro  $C$  del misil, se desplaza relativamente al cuerpo R, y su movimiento con respecto al sistema inicial fijo de coordenadas  $\mathcal{C}$ , es compuesto: el baricentro se desplaza con respecto a R (movimiento relativo) y se mueve con respecto al sistema fijo de coordenadas (movimiento de arrastre).

Siendo  $V$  y  $\dot{V}$  la velocidad y aceleración de arrastre de  $C$ , es:  $V = V^* + \Omega \wedge (C - O^*)$  si  $O^*$  es el origen de  $\mathcal{C}^*$  solidaria con el misil, y siendo  $V^*$  y  $\dot{V}^*$  las relativas a  $\mathcal{C}^*$ , la velocidad absoluta  $\dot{C}$  y la aceleración absoluta  $\ddot{C}$  del baricentro se determinan por las ecuaciones:

$$\dot{C} = V^* + V^* + \Omega \wedge (C - O^*) \quad (4.45)$$

$$\ddot{C} = \dot{V}^* + \dot{V} + 2\Omega \wedge V^* \quad (4.46)$$

Si en (4.44) es sustituida  $\ddot{C}$  por su valor (4.46), se obtiene la siguiente ecuación para el movimiento del centro  $O^*$  de reducción fijo en R:

$$m\dot{V} = \mathcal{A} + \mathcal{G} + \mathcal{T} + \mathcal{J} - \dot{V}^* m - (2\Omega \wedge V^*) m \quad (4.47)$$

Expresiones para la velocidad  $V^*$  y aceleración  $\dot{V}^*$ , relativas, de C respecto a  $\mathcal{C}^*$ .

Sean  $C$  y  $C'$  las posiciones del centro de inercia del misil en los instantes  $t$  y  $t_1 = t + dt$ ,

Así resulta para los momentos estáticos del misil correspondientes a los instantes  $t$  y  $t + dt$ , relativos al punto  $O^*$ :

$$m r_c = \iiint \rho_i(t) r d\tau, \quad (m + dm) r_{c'} = \iiint \rho_i(t + dt) r d\tau$$

respectivamente, donde  $r_c = \overrightarrow{O^*C}$ ,  $r_{c'} = \overrightarrow{O^*C'} = r_c + \delta r_c$  siendo  $\rho_i$  la densidad local del misil, -

La integración se extiende sobre el volúmen total del misil (re-

cinto interior a la superficie  $C$  )

Restando la primera de la segunda y despreciando términos de segundo orden:

$$dm r_c + m \delta r_c = \eta_1 r_p + \iiint \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dt r d\tau$$

se deduce que:

$$m \mathcal{V}^* = m \frac{\delta r_c}{dt} = \eta_2 r_c - \eta_1 r_p + \iiint \frac{\partial \rho_i}{\partial t} r d\tau \quad (4.48)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.39) de  $\mathcal{H}^i$  resulta:

$$m \mathcal{V}^* = \eta_2 (r_c - r_e) + \mathcal{H}^i \quad (4.49)$$

Derivando la (4.49) se tiene:

$$-\eta_2 \mathcal{V}^* + m \dot{\mathcal{V}}^* = \eta_2 \mathcal{V}^* + \frac{\partial \eta_2}{\partial t} (r_c - r_e) + \frac{\delta \mathcal{H}^i}{dt}$$

con lo que resulta:

$$m \mathcal{V}^* = 2 \eta_2 \mathcal{V}^* + \frac{\partial \eta_2}{\partial t} (r_c - r_e) + \frac{\delta \mathcal{H}^i}{dt} \quad (4.50)$$

En el caso casi estacionario en que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  es  $\eta_2 = \eta_1 = \eta = -\dot{m}$

y las ecuaciones (4.49) y (4.50) se simplifican

$$\mathcal{V}^* = \frac{\eta}{m} (r_c - r_p) = \frac{\eta}{m} \bar{C}_p C, \quad \dot{\mathcal{V}}^* = \frac{2\eta^2}{m^2} (r_c - r_p) = \frac{2\eta^2}{m^2} \bar{C}_p C \quad (4.51)$$

Efecto de la variación del baricentro

Estimaremos ahora el orden de magnitud de  $\mathcal{V}^*$  y  $\dot{\mathcal{V}}^*$  para un misil con motor a combustible sólido de las siguientes características

Con las unidades  $[L] = m$ ,  $[T] = \text{seg}$ ,  $[F] = \text{Kg}$ :

$L = 1.90m.$	$G(0) = 160 \text{ Kg.}$	$m(0) = 16.3 \text{ Kg. m}^1 \text{ seg}^2$	$\dot{m}(0) = -2.86 \text{ Kg m}^1 \text{ seg.}$
$d = 0.21$	$G(t_p) = 128 \text{ Kg.}$	$m(0.55) \cong 14.7 \text{ Kg. m seg}^2$	$\dot{V}(0.55) \cong \frac{6000}{16.2} = 370 \text{ m s}^2$
$r_c(0) = 0$	$r_p(0) = 0.64 \text{ m}$	$T(t) \cong 6000 \text{ Kg.}, 0 \leq t \leq t_p = 1.1 \text{ seg.}, V(0.55) \cong 370 \cdot 0.55 = 200 \text{ m s}$	

Siendo  $\eta = -\dot{m} = 2.86 \text{ Kg m s}^1$  resulta los valores iniciales de

$$\mathcal{V}^*(t) \text{ y } \dot{\mathcal{V}}^*(t), \quad \dot{\mathcal{V}}^*(0) = 0.112 \text{ m s}^1, \quad \mathcal{V}^*(0) = 0.04 \text{ m s}^2$$

cuyo orden de magnitud se mantiene despreciables frente a la velocidad  $V(0.55) \cong 200 \text{ m s}^1$  y aceleración  $\dot{V}(0.55) = 370 \text{ m s}^2$  "medias" en el intervalo activo,  $0 \leq t \leq t_p = 1.1 \text{ seg.}$

En la estimación de  $\dot{V}(0.55)$  y  $V(0.55)$  se ha considerado que el aumento de resistencia aerodinámica es compensado por la disminución de la masa  $m(t)$ .

Los cálculos numéricos realizables a partir de estas ecuaciones muestran que  $\mathcal{V}^*$  y  $\dot{\mathcal{V}}^*$  son despreciables en comparación con las

velocidades  $V$  y aceleraciones  $\dot{V}$  en el intervalo activo de la trayectoria. Luego en la (4.47) el término  $\dot{V}^*$  puede despreciarse en comparación al empuje reactivo  $T$ .

En cambio el término  $(2\Omega \wedge \dot{V}^*)_m$  es generalmente del mismo orden que  $J$ , ya que la distancia  $|r_c - r_p|$  es del mismo orden que la distancia  $|r_e - r_p|$  para  $0 \leq t \leq t_p$ .

Por esto y las (2.40), (4.51) resulta que la ecuación del movimiento (4.47) del centro de reducción  $O$  de la parte rígida  $R$  del misil se simplifica a la forma:

$$m\dot{V}^* = A + G + T - 2\dot{m}[\Omega \wedge (r_e - r_c)] - m\{\dot{\Omega} \wedge (r_c - r_{O^*}) - \Omega \wedge [\Omega \wedge (r_c - r_{O^*})]\} \quad (4.52)$$

La velocidad  $V^*$  se designa velocidad del misil. Por ello  $O^*$  es el centro de reducción. Este deberá elegirse adecuadamente, según se verá luego.-

Puede observarse que en esta ecuación de movimiento del punto  $O^*$  centro de reducción fijo en  $R$  intervienen fuerzas no aerodinámicas que dependen de la rotación  $\Omega$  del misil entorno a  $O^*$ .

Esto implica una mayor complicación respecto del problema balístico secundario.-

En los términos adicionales  $\sqrt{2\dot{m}[\Omega \wedge (r_e - r_c)]}$  como: interviene la posición  $r_c(t)$  del baricentro.-

Si bien la influencia de la variación del baricentro y su velocidad relativa dentro del misil es muy pequeña, como se acaba de ver, la posición misma del baricentro tiene importancia en cuanto a los efectos aerodinámicos si se lo considera como centro de reducción de esas fuerzas.

5.- Ecuaciones del movimiento rotacional

Considerando que el misil es un cuerpo de revolución y que el desplazamiento de C es axial, ocurre que, siendo el eje ecuatorial uno de los principales de inercia para todo instante, se pueden elegir los otros dos ejes arbitrariamente en el plano perpendicular a este eje ecuatorial.

Sean  $\xi, \eta, \zeta$  los ejes principales de inercia del sólido ficticio S con centro en el baricentro instantáneo C; y sean  $p, q, r$  los componentes de  $\Omega$  sobre los ejes de esa terna principal.

Por el teorema de equivalencia, las ecuaciones de movimiento rotacional del misil serán las de S, que, en la forma de Euler son:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{dp}{dt} + (I_3 - I_2) qr &= M_c^\xi \\ I_2 \frac{dq}{dt} + (I_1 - I_3) pr &= M_c^\eta \\ I_3 \frac{dr}{dt} + (I_2 - I_1) pq &= M_c^\zeta \end{aligned} \quad (5.53)$$

siendo  $M_c$  el momento de las fuerzas exteriores reactivas y de Coriolis.

Queda determinada la posición instantánea de la terna principal de S. Y con ello por la hipótesis de paralelismo la posición instantánea de  $\mathcal{O}^*$  y por lo tanto la del eje del misil respecto a  $\mathcal{O}_1^*$ .

6.- Otros efectos especiales

La reducción del sistema de fuerzas aerodinámicas

El acto de movimiento está caracterizado por las ecuaciones (4.52) y las (5.53) de Euler. En las de Euler aparece, como componente del momento  $M_c$ , el momento  $\Pi_c$  de todas las fuerzas aerodinámicas respecto del baricentro instantáneo (C).

Evidentemente, las fuerzas aerodinámicas ( $A^*$ ) y en consecuencia su momento  $\Pi$ , no dependen del baricentro, sino <sup>del acto de movimiento,</sup> de la forma y parámetros de semejanza dinámica del misil. Es evidente también que el momento  $\Pi$  está caracterizado por el centro de reducción, siendo en cambio  $A^*$  independiente de él. Si el

centro de reducción se traslada en  $\vec{r}$ , la cupla varía en  $\vec{r} \wedge \vec{A}$ .

Expresado el sistema de fuerzas aerodinámicas por sus componentes  $A_i, \Pi_i$  sobre la terna fija al cuerpo y con un centro de reducción dado, sea  $O$ , la teoría clásica<sup>(1)</sup> y la actual<sup>(2)</sup> consideran estos componentes como funciones lineales de los parámetros del movimiento, con coeficientes que, salvo factores, son los "coeficientes aerodinámicos" del sistema. Entonces, si se pasa de un centro de reducción  $C$  a otro  $O'$  ( $\vec{r} = \vec{OO}'$ ), cambian los coeficientes.

Se han dado fórmulas<sup>(3)</sup> para determinar el sistema de coeficientes para un centro  $C'$  si se conocen los correspondientes a otro  $C$  y en función de éstos.

Fowler (l.c.) usó en su teoría aerodinámica como centro de reducción el baricentro ó centro de masa del proyectil, lo que produce en el desarrollo de la teoría contradicciones y dificultades (que tienen su origen en los fundamentos mismos, como se advirtió antes (pags. 1, 21)). La crítica de Synge y Nielsen introduce un centro de reducción definido geoméricamente el "centroide" que, según demuestra, elimina las paradojas de la teoría de Fowler.

En la dicha crítica, Synge y Nielsen concluyen en que (para proyectiles): "Si sólo se consideran proyectiles con centro de masa "muy próximo" al centroide, es posible que las objeciones teóricas "sean de pequeña importancia práctica".

Este es el caso balístico, y el centro de reducción, si es el baricentro  $C$ , permanece fijo relativamente al proyectil. Pero en nuestro caso del misil con  $C$  variable (relativo), se tiene un centro de reducción  $C$  instantáneo. Entonces, dados los coeficientes para una posición  $C(t)$ , se calculan los correspondientes a otra  $C(t+dt)$  con las fórmulas de McShane, poniendo en ellas  $\vec{r} = \vec{CC}' = \vec{r}(t)$ .

(1) Fowler, Gallop, Lock, Richmond, [2]

(2) Nielsen-Synge, [4]

(3) McShane, Kelley and Reno, [5]

Entonces, se concluye en que:

Considerando misiles simétricos en que el corrimiento  $\overline{CC'}$  del centro de masa  $C(t)$  sea "pequeño" respecto del centroide en el intervalo reactivo  $t_p - t_o$ , es plausible admitir:

- 1°) Para tener en cuenta el centro de reducción baricentral variable  $C(t)$  instantáneo es aplicable el método expuesto, con  $\overline{CC'} = \vec{r}(t)$ . - En particular para  $\vec{r}(t) = \overline{CO^*}$  ( $O^*$ : centroide)
- 2°) Es válida la consideración de un centro de reducción  $C$  fijo, tomado como valor medio de las posiciones del baricentro  $C(t)$  en el intervalo reactivo  $t_p - t_o$ . (1)

Efecto de la "perturbación" de los sistemas de fuerzas exterior.

Llamaremos aquí "perturbación" a todo defecto en las condiciones (hipotéticas) consideradas "normales".

Las principales son:

- 1° El empuje  $T$  no colineal con el eje ( $\vec{e}$ ) del misil (con lo que, supuesto  $C(t)$  sobre el eje, no pasa por  $C$ ).

Dos efectos:

- a) componente de  $T$  transversal a  $\vec{e}$
- b) cupla transversal a  $\vec{e}$

Estas dos magnitudes, cuando ocurren, son variables por el corrimiento del baricentro.

- 2°) Distorsión de las superficies de estabilización aerodinámica.

- 3°) Efecto del ráfaga. Normalmente este efecto es menor en comparación con los anteriores, como puede observarse comparando con éstos (2) los resultados que obtengo más adelante.

(1) Rosser, Newton y Gross (l.c. [6]), calculan con un  $C$  "valor medio" sin justificar el procedimiento, y debido a las dificultades que comportarían los cálculos en el caso del  $C(t)$  instantáneo.

(2) Rosser, Newton, Gross (l.c. [6])

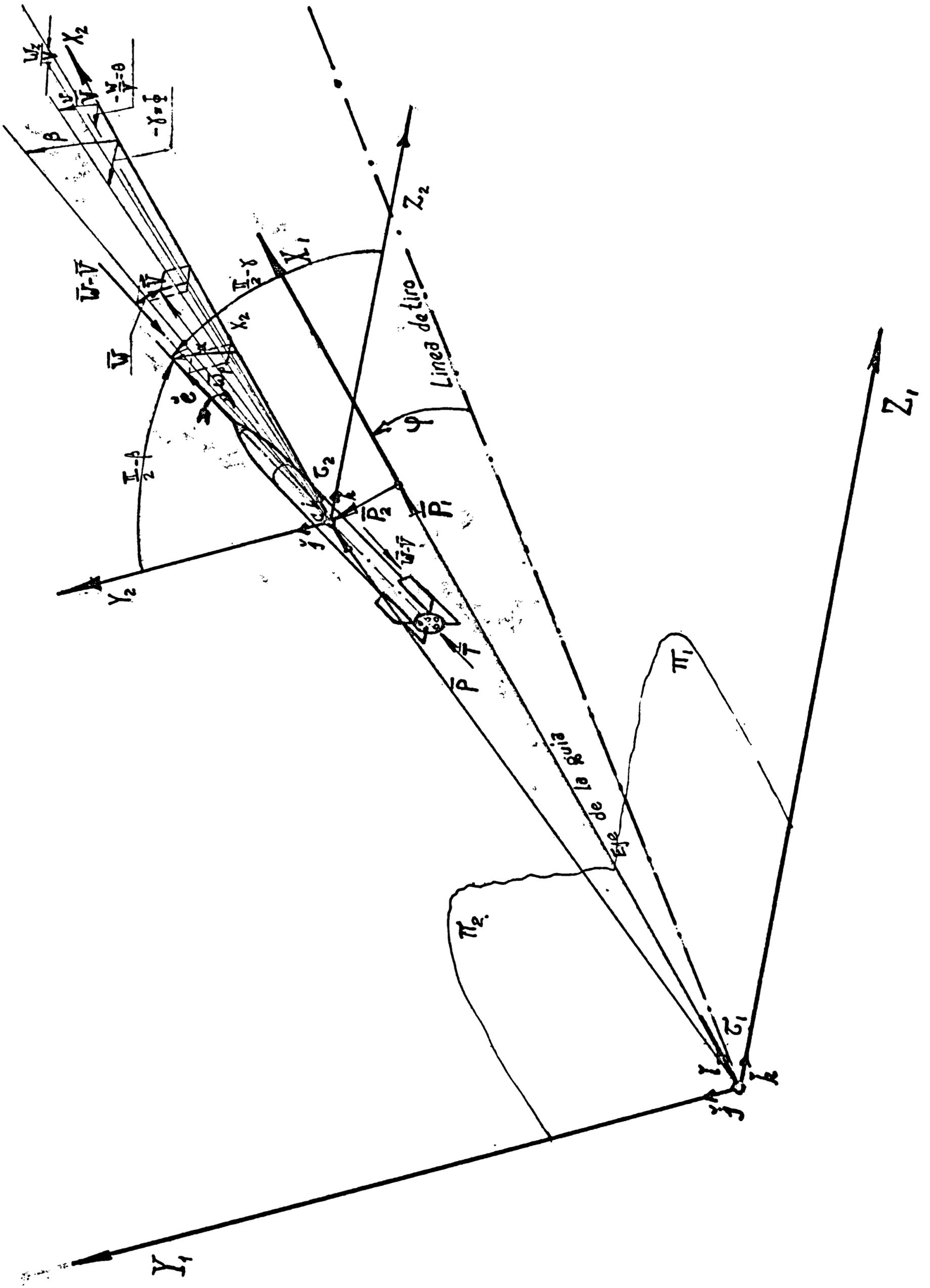
EFEECTO DEL VIENTO

7.-Introducción.- Se determinará aquí una solución de las ecuaciones para el vector velocidad  $V$  (del centro de reducción), considerando la perturbación producida por el viento.- Es de especial interés calcular  $V$  al fin de la trayectoria activa, pues este  $V$  forma parte de las condiciones iniciales de la trayectoria libre posterior (1).

Se harán ciertas simplificaciones justificadas por los valores relativos de las magnitudes que intervienen, que permitan obtener una descripción simple y a la vez general del movimiento. Las ecuaciones del movimiento en su generalidad máxima, incluyendo el sistema completo de fuerzas aerodinámicas, fuerzas de Coriolis, densidad y temperatura variables, corrimiento del centro de gravedad, dependencia del centro de reducción, excentricidad del empuje, y en general perturbaciones del sistema de fuerzas exteriores, son de insuperable complicación para ser tratadas simultáneamente; sobre todo por la natural interdependencia de casi todas ellas. Se apoya en la base misma de la teoría la necesidad de las hipótesis usuales: en general en la conexión entre el sistema de fuerzas aerodinámicas y el movimiento; conexión que no puede deducirse lógicamente en forma completa.

---

(1) Esta solución contribuye a establecer normas de diseño que tengan en cuenta ponderativamente los diversos efectos perturbantes. El caso del viento lateral tiene importancia, en la práctica para los misiles a cohete del tipo tierra-tierra, aire-aire y aire-tierra, no teledirigidos ni con trayectoria programada.



8.- Formulación aproximada de las ecuaciones de movimiento.-

Se hacen las siguientes hipótesis que permiten calcular "aproximadamente" el efecto del viento:

- 1) El baricentro C se considera fijo en R y en una posición media. Se adopta aquí C como centro de reducción para las ecuaciones del movimiento y para el momento del sistema de fuerzas aerodinámicas.
  - 2) El tensor de inercia  $I_{pq}$  es un tensor de valores medios y por ello independiente del tiempo t.
  - 3) En el sistema <sup>(2)</sup> de fuerzas aerodinámicas, se consideran nulos:
    - a) Fuerzas y momentos "de Magnus": todas aquellas <sup>(3)</sup> fuerzas y momentos que se anulan cuando  $\omega_p = 0$ , (se considera que  $\omega_p$  es muy pequeño).-
    - b) Fuerza transversal debida a la rotación transversal (es pequeña frente a la fuerza transversal debida a velocidad transversal)
  - 4) El sistema de fuerzas de Coriolis se considera nulo frente a las fuerzas transversales aerodinámicas.
  - 5) Momento amortiguante de Coriolis, se considera nulo frente a la transversal debido a  $\omega$  (pag.17)
  - 6) Siendo  $g \ll G$ , se "separa" el efecto de gravedad, por lo que aquí haremos  $g = 0$ .
  - 7) Se hace una hipótesis general de la balística: el versor axial del misil se mantiene muy próximo a la tangente a la trayectoria. Por (2) y cuando  $\theta(t) \ll \pi$  se supone  $G(t) \approx \frac{T(t) - D(t)}{m(t)} - G_0 \text{cte}$
  - 8) Siendo normalmente  $15 < \frac{L}{\lambda}$  se considera:  $A \ll B$ .
- Así, por (4.52), la ecuación de movimiento:
- $$\frac{d^2 \bar{P}}{dt^2} = \frac{L(t)}{m(t)} + \bar{G}(t) + \frac{F(t)}{m(t)} \quad (1)$$
- del baricentro C, fijo en R respecto a  $\zeta$ , y por (1.21 b):

(2) Consideramos aquí el mismo de Nielsen y Synge [B.4]  
 (3) Estos efectos llamados de Magnus son: 1) fuerza transversal de Magnus debida a velocidad transversal, 2) fuerza transv. de Magnus debida a la rotación, 3) Cupla transv. de Magnus debida a la veloc. transv., 4) Cupla transv. de Magnus debida a  $\omega$  5) momento reductor de  $\omega_p$  debido a  $\omega_p$ .

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{dt} = \bar{\mathbb{K}}(t) + \bar{\mathbb{K}}(t) + \bar{\mathcal{Q}}(t) \quad (2)$$

ecuación del movimiento alrededor de C.

El vector posición de C es  $\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$  suma del vector  $\bar{P}_1$  que tiene la dirección constante de  $\bar{G}_0$  y del vector  $\bar{P}_2$  ortogonal a  $\bar{P}_1$ .

Se elige una terna terrestre derecha  $\mathcal{C}_1$ , con origen en la boca de la guía de lanzamiento, con su eje X de versor  $\bar{i}$  en la dirección de tiro que es la de  $\bar{G}_0$ , y su eje Y en el plano vertical  $\mathcal{M}_2$  y orientado hacia arriba; y otra  $\mathcal{C}_2$  derecha, de centro en  $\bar{P}$  y versores  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  constantes y congruentes por ~~la~~ traslación con los de  $\mathcal{C}_1$ ,

Siendo el cohete un cuerpo de revolución, el versor director  $\bar{e}$  de su eje de simetría queda definido por los ángulos  $\alpha, \frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \gamma$ , directores respecto a  $\mathcal{C}_2$ ; como es sabido,  $\alpha, \beta, \gamma$  serán pequeños y será suficiente en aproximación de primer orden suponer:

$$\bar{e} = \bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k} \quad (3)$$

luego  $\bar{G}(t) = G_0 (\bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k})$  despreciando  $\beta^2$  y  $\gamma^2$  queda:

$$G(t) \cong G_0$$

Análogamente  $\bar{V} = \dot{\bar{P}}_1 + \dot{\bar{P}}_2 = V_x \bar{i} + v \bar{j} + w \bar{k} \quad (4)$

y despreciando  $v^2$  y  $w^2$  frente a  $V_x^2$ , es  $V^2 \cong V_x^2 = G_0 t$

Siendo por definición  $\bar{L}$  normal a  $\bar{V}_r$  <sup>(supuesto  $V_r^2 = V^2$ )</sup> y contenido en el plano definido por  $\bar{V}$  y  $\bar{e}$ , resulta, suprimiendo por despreciable frente a  $G_0 m(t)$  su componente según X, que:  $\bar{L} = K_L \rho d^2 V^2 \bar{\delta}$  con  $\bar{\delta} = (\beta - \frac{v}{V}) \bar{j} + (\gamma - \frac{w}{V}) \bar{k} \quad (5)$

La cupla aerodinámica es  $\bar{\mathbb{M}} = \bar{\mathbb{K}} \bar{\delta} \wedge \bar{e} = K_M d^3 \rho V^2 \left[ \bar{j} (\gamma - \frac{w}{V}) - \bar{k} (\beta - \frac{v}{V}) \right] \quad (6)$

despreciando los productos  $\beta (\gamma - \frac{w}{V}), \gamma (\beta - \frac{v}{V})$

y la reactiva  $\bar{\mathbb{R}}$  será aquí la debida a una igual inclinación axial  $\bar{E}$  de las toberas con secciones de salida simétricamente distribuidas respecto a  $\bar{e}$ ; con lo que  $\bar{\mathbb{R}} = \bar{e} T E r = K_R (\bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k}) \cong K_R \bar{i} \quad (7)$

si se considera nula la eventual excentricidad del empuje  $\bar{T}$  respecto a C.

Las componentes del momento cinético  $\bar{\Gamma}$  respecto a C son, como es sabido,  $\Gamma_k = I_{ik} \Omega^i \quad (i, k = 1, 2, 3)$

luego por ser  $\bar{\Omega} = \bar{\omega} + \bar{\omega}_p$  y el cohete simétrico, resulta  $\bar{\Gamma} = A \bar{\omega}_p + B \bar{\omega}$

El vector rotación propia alrededor de  $\bar{e}$  será también  $\bar{\omega}_p = \omega_p (\bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k}) \quad (8)$

y el vector rotación  $\bar{\omega}$  de  $\bar{e}$ , alrededor del polo C es

$$\bar{\omega} = \bar{e} \wedge \dot{\bar{e}} \cong -\bar{j} \dot{\gamma} + \bar{k} \dot{\beta} \quad (9)$$

Luego:  $\vec{r} = A\omega_p \vec{i} + [A\omega_p\beta - B\dot{\sigma}] \vec{j} + [A\omega_p\sigma + B\dot{\beta}] \vec{k}$  (10)

Resulta así por (1)(3)(4)(5), (2), (6), (7), (8), (9), (10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = G_0 + \frac{F_x}{m(t)} \quad (a) \\ \dot{v} = G_0\beta + \frac{K_H d^2 g V^2}{m(t)} (\beta - \frac{v}{V}) + \frac{F_y}{m(t)} \quad (b) \\ \dot{w} = G_0\sigma + \frac{K_H d^2 g V^2}{m(t)} (\sigma - \frac{w}{V}) + \frac{F_z}{m(t)} \quad (c) \\ \dot{\omega}_p = \frac{P_x(t)}{A} + \frac{P_y}{A} \quad (d) \\ \ddot{\beta} = -\frac{A}{B} \omega_p \dot{\sigma} - \frac{K_H}{B} \sigma - \frac{K_H d^3 g V^2}{B} (\beta - \frac{v}{V}) + \frac{P_y}{B} - \frac{K_H d^4 g V}{B} \dot{\beta} \quad (e) \\ \ddot{\sigma} = -\frac{A}{B} \omega_p \dot{\beta} + \frac{K_H}{B} \beta - \frac{K_H d^3 g V^2}{B} (\sigma - \frac{w}{V}) + \frac{P_z}{B} - \frac{K_H d^4 g V}{B} \dot{\sigma} \quad (f) \end{array} \right. \quad (11)$$

cuya solución relativa a las condiciones iniciales  $V_0, v_0, w_0, \beta_0, \dot{\beta}_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0, \omega_{p0}$  caracterizará el acto de movimiento del misil dado por:  $V(t), v(t), w(t), \beta(t), \dot{\beta}(t), \sigma(t)$  y también, por ser:

la posición  $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$  del baricentro C y la  $\beta(t), \sigma(t)$  de su eje de simetría  $\vec{e}$  alrededor del cual habrá girado el ángulo

$$\Psi(t) = \int_{t_0}^t \omega_p(t) dt$$

No siendo el cohete estabilizado giroscópicamente sino por aletas, corresponde un valor máximo de  $\omega_p(t) \geq \omega_p(t)$  y por ello el de  $\tau$  <sup>sea</sup> muy pequeño y suficiente para "simetrizar" alrededor de  $\vec{i}$  la trayectoria de tipo "helicoidal" que realizará C.

Además es generalmente  $A \ll B$ , y por ello puede reemplazarse (e) y (f) por las

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} &= -\frac{K_H g d^3 V^2}{B} (\beta - \frac{v}{V}) + \frac{P_y}{B} - \frac{K_H g d^4 V}{B} \dot{\beta} \quad (e') \\ \ddot{\sigma} &= -\frac{K_H g d^3 V^2}{B} (\sigma - \frac{w}{V}) + \frac{P_z}{B} - \frac{K_H g d^4 V}{B} \dot{\sigma} \quad (f') \end{aligned}$$

que valen aproximadamente.

El sistema (a), (b), (c), (d), (e'), (f') es separado y equivale a tres sistemas independientes que pueden extraerse de él y que caracterizarán las proyecciones del movimiento sobre cada plano de  $\Sigma_1$ .

9. CALCULO DEL MOVIMIENTO: El movimiento plano sobre  $\Pi_1$  se calcula con el sistema (a) (c) y (f') coincidente con el (a) (b) (e') correspondiente a  $\Pi_2$  al cambiar  $\sigma$  por  $\beta$ .

Reducido así el problema al cálculo de un movimiento plano, consideremos la distribución simple, denominada "homogénea", para la velocidad del viento dada por  $\vec{W} = \bar{\mu} + \Delta\bar{\mu} = cte.$ , siendo  $\bar{\mu} = cte., \Delta\bar{\mu} = cte.,$

con:  $\vec{W} = W_z \vec{k}$  para el viento lateral,  
 $\vec{W} = W_y \vec{j}$  para viento ascendente.

///

Pasando a coordenadas polares y haciendo:  
 en (f'),  $\gamma = -\dot{\phi}$  (ó  $\beta = -\dot{\phi} \cos(\epsilon')$ ); para conservar el sentido dextrógiro  
 positivo sobre  $\pi$ , se expresan las (a) y (c) (o las (a) y (b)) en forma  
 equivalente, quedando para  $\pi_1$  ó  $\pi_2$ :

$$\begin{cases} \dot{V} = G_0 & (a) \\ V\dot{\theta} = G_0(\phi - \theta) + \frac{K_L d^2 \rho V^2}{m(t)} (\phi - \theta - \frac{W}{V}) & (12) \quad (b) \\ \ddot{\phi} = -\frac{K_M d^3 \rho V^2}{B} (\phi - \theta - \frac{W}{V}) - \frac{K_H d^4 \rho V}{B} \dot{\phi} & (c) \end{cases}$$

ya que la reducción  $\frac{W}{V}$  en el "ángulo de ataque"  
 $\alpha = \phi - \theta$  realizada por el viento relativo  $\bar{V}$  equivale a introducir las  
 perturbaciones  $-K_L d^2 \rho W V$  y  $+K_M d^3 \rho W V$  en (12b) y (12c) respecti-  
 vamente.-

A este esquema simple de la distribución de viento corresponderán  
 en la solución  $\theta(t)$  del (12) las desviaciones angulares  
 $\theta_{\Delta\mu}(t)$  y  $\theta_{\mu}(t)$  del vector velocidad  $\bar{V}$  respecto al eje X, llama-  
 das "dispersión y desviación por viento  $\bar{W}$ "; "lateral" si  $\bar{W} = W_2 \hat{k}$   
 "ascendente" si  $\bar{W} = W_1 \hat{j}$ . - Es de interés fundamental el valor  
 de las desviaciones al fin de la propulsión, ya que caracterizan  
 una de las condiciones iniciales de la trayectoria posterior.

Para un cuerpo esbelto agudo con cola cruciforme de  
 muy pequeño alargamiento puede admitirse según el análisis<sup>(3)(4)</sup> y las  
 experiencias<sup>(5)</sup> que  $K_L$  y  $K_M$  son independientes del número de  
 Mach, también en el intervalo transónico, lo que facilita el cál-  
 culo del movimiento.

Toda solución particular de este sistema relativa a  
 las condiciones iniciales  $V(t_0) = V_0$ ,  $\theta(t_0) = 0$ ,  $\phi(t_0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(t_0) = 0$ ,  
 específica como función del tiempo t la proyección del movimiento  
 sobre el plano  $\pi$ , definido por  $\bar{W}$  y el eje X, de un cohete que se  
 ha acelerado en la guía durante un intervalo  $[0, t_0]$  saliendo ali-  
 neado con velocidad  $\bar{V}(t_0) = V_0 \hat{i}$  y momento cinético de componentes  
 nulas según  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , atravesando una región de viento constante  
 $\bar{W}$  ortogonal a X.

Definiendo (12.0) por  $V$  y siendo  $\delta = \phi - \theta$   
 resulta: 
$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= G_0 \frac{\delta}{V} + \frac{K_L d^2 \rho V^2}{mV} (\delta - \frac{W}{V}) = (G_0 + \frac{K_L d^2 \rho V^2}{m}) \frac{\delta}{V} - \frac{K_L d^2 \rho W}{m} \\ \ddot{\theta} &= (G_0 + \frac{K_L d^2 \rho V^2}{m}) [\frac{\dot{\delta}}{V} - \frac{\alpha V}{V^2}] + 2 \frac{K_L d^2 \rho V \dot{\delta}}{m} \end{aligned} \quad (13)$$

Sustituyendo la (13) y la (12.0) en la (12.0) se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = \ddot{\theta} + \ddot{\delta} &= \left( \frac{\dot{\delta} G_0}{V} - \frac{\delta \dot{V} G_0}{V^2} + \frac{K_L d^2 \rho V \dot{\delta}}{m} + \frac{K_L d^2 \rho \delta \dot{V}}{m} \right) + \ddot{\delta} = \\ &= -\frac{K_M d^3 \rho V^2 \delta}{B} - \frac{K_M d^3 \rho V W}{B} - \frac{K_H \rho d^4 V}{B} (\dot{\delta} + \dot{\theta}) = \\ &= -\frac{K_M d^3 \rho V^2 \alpha}{B} - \frac{K_M d^3 \rho V W}{B} - \frac{K_H \rho d^4 V}{B} \left[ \dot{\delta} + (G_0 + \frac{K_L d^2 \rho V^2}{m}) \frac{\delta}{V} - \frac{K_L d^2 \rho W}{m} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Siendo por la (12 a)  $\dot{V} = G_0$  y  $\frac{d}{dt}(\frac{V^2}{2}) = G_0 V = G_0 \frac{dS(t)}{dt}$  (15)

es  $V^2 = 2G_0(S + S_0)$  (16) con  $S_0 = S_0 + S_e = \frac{V_0^2}{2G}$  (16b)

donde  $\rho_0$  es el largo de la guía o rampa de lanzamiento y  $\rho_e$  es el largo de guía equivalente a la velocidad  $V_A$  del avión.

Para  $S=0$   $V_0^2 = 2G_0\rho_0$   $V_p = V_0 + V_A$   $S_0 = \frac{V_p^2}{2G}$  (17)

Si se introduce el cambio de variable  $t=t(s)=$

y se designa  $\frac{d\delta(s)}{ds} = \delta'(s)$   $\frac{d^2\delta}{ds^2} = \delta''(s)$

resulta  $\frac{d}{dt} = V \frac{d}{ds}$  [18] ,  $\frac{d^2}{dt^2} = V^2 \frac{d^2}{ds^2} + V \left( \frac{dV}{ds} \right) \frac{d}{ds}$  [19]

y por (15) (16) (18) (19) la (14) se reduce a:

$$\delta'' + \delta' \left( \frac{1}{s+S_0} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \right) + \delta \left( \frac{\epsilon_1}{2(s+S_0)} - \frac{1}{4(s+S_0)^2} + \epsilon_3 + \frac{\epsilon_2}{2(s+S_0)} + \epsilon_2 \epsilon_1 \right) = \frac{W[\epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_3]}{\sqrt{G_0(s+S_0)}}$$

siendo  $\epsilon_1 = \frac{K_L \rho d^2}{m}$  ,  $\epsilon_2 = \frac{K_H \rho d^4}{B}$  ,  $\epsilon_3 = \frac{K_M \rho d^3}{B}$  (20)

(que se consideran valores medios constantes en  $t_0 < t < t_p$ ) (21)

Haciendo  $s+S_0 = X_1$  queda:

$$\delta'' + \delta' \left( \frac{1}{X_1} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \right) + \delta \left( \frac{\epsilon_1}{2X_1} - \frac{1}{4X_1^2} + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_1 \right) = \frac{W[\epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_3]}{\sqrt{G_0} \sqrt{X_1}} - \frac{W\epsilon_4}{\sqrt{X_1}}$$

La parte homogénea es de la forma:

$$\partial_2 y'' + \left( \partial_1 + \frac{b_1}{X_1} \right) y' + \left( \partial_0 + \frac{c_0}{X_1} + \frac{c_0}{X_1^2} \right) = 0$$

del tipo de Fuchs regular en el punto singular regular  $X_1 = 0$ , que es un polo de los coeficientes.

La ecuación característica  $\partial_2 r^2 + (b_1 - \partial_2) r + c_0 = 0$  tiene

raíces  $r = \pm \frac{1}{2}$  que difieren en un entero

La ecuación es del primer tipo de Fuchs en  $X_1 = 0$  y las soluciones fundamentales corresponden a  $r_i = -\frac{1}{2}$ ; siendo de la forma:

$$y_j(X_1) = \frac{\varphi_j(X_1)}{\sqrt{X_1}} \quad (j = 1, 2)$$

con  $\varphi_j(X_1)$  regulares en  $X_1=0$

Las soluciones fundamentales son:

$$\varphi_1(X_1) = \frac{e^{-\nu X_1} \operatorname{sen} \lambda X_1}{\sqrt{X_1}}$$

$$\varphi_2(X_1) = \frac{e^{-\nu X_1} \operatorname{cos} \lambda X_1}{\sqrt{X_1}}$$

siendo  $\nu$  y  $\lambda$  números reales a determinar.

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\delta(x_1) = c_1 \delta_1(x_1) + c_2 \delta_2(x_1) = c_1 \left[ x_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu x_1} \operatorname{sen} \lambda x_1 \right] + c_2 \left[ x_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu x_1} \operatorname{cos} \lambda x_1 \right] \quad (22)$$

Fijemos la solución fundamental  $\delta_1(x_1)$ , lo que equivale a determinar  $\nu$  y  $\lambda$ . Reemplazando  $x_1(x)$  en la ecuación diferencial

resulta:

$$\begin{aligned} & \nu^2 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cos} \lambda x_1 + 2\nu\lambda x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \lambda x_1 - \lambda^2 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cos} \lambda x_1 - \\ & - \nu \epsilon_1 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cos} \lambda x_1 - \lambda \epsilon_1 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \lambda x_1 - \nu \epsilon_2 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cos} \lambda x_1 - \\ & - \epsilon_2 \lambda x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \lambda x_1 + \epsilon_3 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cos} \lambda x_1 + \\ & + \epsilon_2 \epsilon_1 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cos} \lambda x_1 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Eliminando los dos términos en  $\operatorname{sen} \lambda x_1$  con una adecuada elección de  $\nu$  la ecuación anterior puede resolverse para  $\lambda$ .

Queda:

$$\nu = \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} \quad (24)$$

La ecuación (23) queda:

$$\lambda = +\sqrt{\epsilon_3 - \left[ \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{\epsilon_2}{2} \right]^2} \quad (25)$$

La constante  $\epsilon_3 = \frac{+K_H \rho d^3}{B}$  es positiva para un misil estáticamente estable. Observando  $\lambda$ , se vé que para los di-

seños normales, que son los estáticamente estables y tales que

$$\nu \ll \lambda, \text{ se cumple: } \epsilon_3 \gg \left[ \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{\epsilon_2}{2} \right]^2 \quad (26)$$

como exige la condición de ser  $\lambda$  real.

Para un misil con estabilidad estática indiferente o

inestable la solución  $\delta(x_1)$ , haciéndose  $\lambda$  imaginario,

deja de existir.-

La misma discusión para  $\delta(x_1) = x_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu x_1} \operatorname{sen} \lambda x_1$

Calcularemos una solución particular  $\delta_p(x)$  de la ecuación inhomogénea a fin de expresar luego la general.

Aplicando el método de variación de las constantes

$$\delta_g(x) = \{c_1 + C_1(x)\} \delta_1(x) + \{c_2 + C_2(x)\} \delta_2(x) = \delta(x) + \delta_p(x)$$

resulta:

$$\delta_p(x) = C_1(x) \delta_1(x) + C_2(x) \delta_2(x)$$

calculándose

$$C_1(x) = -\int \frac{\delta_2 f(x)}{\delta_1 \delta_2' - \delta_1' \delta_2} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{\delta_1 f(x)}{\delta_1 \delta_2' - \delta_1' \delta_2} dx, \quad f(x) = \frac{w \epsilon_3}{\sqrt{x}}$$

resulta

$$\delta_p(x) = \frac{w \epsilon_3}{\sqrt{x}} \frac{1}{\nu^2 + \lambda^2}$$

siendo  $\epsilon_4 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_3}{\sqrt{G_0}}$  por (17) y (18) que :

$$\delta_p(\lambda_1) = \frac{W}{\sqrt{G_0}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad (27)$$

que es solución particular pues verifica la ecuación inhomogénea.

Luego 
$$\delta_g(x_1) = \frac{W}{\sqrt{G_0}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{e^{-\nu x_1}}{\sqrt{\lambda_1}} [C_1 \text{sen } \lambda x_1 + C_2 \text{cos } \lambda x_1] \quad (28)$$

Determinemos las constantes  $C_1, C_2$  mediante los valores iniciales de  $\theta(s_0+s), \dot{\theta}(s_0+s), \phi(s_0+s), \dot{\phi}(s_0+s)$  a la salida de la guía, en que  $s$  vale cero.

Las condiciones iniciales son:

$$\text{Para } s=0 \quad \begin{cases} \phi(s_0) = \phi_0 = 0 & \text{a)} \\ \dot{\phi}(s_0) = \dot{\phi}_0 = 0 & \text{b)} \\ \theta(s_0) = \theta_0 = 0 & \text{c)} \\ \delta(s_0) = \delta_0 = 0 & \text{d)} \end{cases} \quad (29)$$

De las (12 b) y (16)

$$\dot{\theta} = \left\{ \frac{G_0}{V} \delta + \frac{\kappa_L d^2 p V}{m} \left( \delta - \frac{W}{V} \right) \right\} = \frac{G_0}{V} \delta + \epsilon_1 \nu \delta - \epsilon_1 W$$

$$\theta'(x_1) = \left\{ \frac{\delta}{2(s+s_0)^2} + \epsilon_1 \delta - \epsilon_1 \frac{W}{V} \right\} \quad (30)$$

Resulta así que:  $\theta'(s_0) = -\epsilon_1 \frac{W}{V_P} = -\epsilon_1 \frac{W}{2G S_0}$

$$\delta'(s_0) = \phi'(s_0) - \theta'(s_0) = \epsilon_1 \frac{W}{V_P} = \frac{\epsilon_1 W}{\sqrt{2G_0 S_0}} \quad (31)$$

Con (28) y su derivada y con las condiciones iniciales (29 d) y (31), resulta un sistema de ecuaciones lineales:

$$C_1 \text{sen } \lambda s_0 + C_2 \text{cos } \lambda s_0 = -W \frac{e^{\nu s_0}}{\sqrt{2G_0}} \quad (32)$$

$$C_1 \left[ -\nu \text{sen } \lambda s_0 - \frac{1}{2} S_0^{-1} \text{sen } \lambda s_0 + \lambda \text{cos } \lambda s_0 \right] + C_2 \left[ -\nu \text{cos } \lambda s_0 - \frac{1}{2} S_0^{-1} \text{cos } \lambda s_0 - \lambda \text{sen } \lambda s_0 \right] = \frac{W}{\sqrt{2G_0}} \left( \epsilon_1 + \frac{S_0^{-1}}{2} \right) e^{\nu s_0}$$

cuya solución es el par de constantes buscadas:

$$C_1 = \frac{e^{\nu s_0} W}{\lambda \sqrt{2G_0}} \left\{ \left( \epsilon_1 - \nu \right) \text{cos } \lambda s_0 + \lambda \text{sen } \lambda s_0 \right\} \quad (33)$$

$$C_2 = \frac{-e^{v s_0} W}{\lambda \sqrt{2G_0}} \{ (\xi_1 - v) \operatorname{sen} \lambda s_0 + \lambda \cos \lambda s_0 \} \quad (34)$$

Para calcular  $\theta(x_1)$  : Resulta por las (30) y por ser  $v = \sqrt{2Gx_1}$

$$\theta'(x_1) = \left[ \frac{1}{2x_1} + \xi_1 \right] \delta - \frac{\xi_1 W}{v} = \left[ \frac{1}{2x_1} + \xi_1 \right] \delta - \frac{\xi_1 W}{\sqrt{2G} \sqrt{x_1}}$$

por la (28) se tiene:

$$\theta(x_1) = \left\{ \left[ \frac{1}{2x_1} + \xi_1 \right] \frac{e^{-v x_1}}{\sqrt{x_1}} \left[ C_1 \operatorname{sen} \lambda x_1 + C_2 \cos \lambda x_2 \right] + \frac{W}{2\sqrt{2G}} x_1^{-3/2} \right\} \quad (35)$$

Interesa calcular el ángulo de desviación  $\theta(s)$  al final de la trayectoria activa, en  $S = S_p$  :

$$\theta(s_0 + S_p) - \theta(s_0) = \int_{s_0}^{s_0 + S_p} \theta'(x_1) dx_1 = \int_0^{S_p} \theta'(s_0 + s) ds$$

siendo la variable  $x_1 = (s_0 + s)$ , y como  $\theta(s_0) = 0$

$$\begin{aligned} \theta(s_0 + S_p) = 2v \left\{ C_1 \int_0^{S_p} e^{-v(s+s_0)} (s+s_0)^{-1/2} \operatorname{sen} \lambda(s+s_0) ds + C_2 \int_0^{S_p} e^{-v(s+s_0)} (s+s_0)^{-1/2} \cos \lambda(s+s_0) ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ C_1 \int_0^{S_p} e^{-v(s_0+s)} (s_0+s)^{-3/2} \operatorname{sen} \lambda(s_0+s) ds + C_2 \int_0^{S_p} e^{-v(s_0+s)} (s_0+s)^{-3/2} \cos \lambda(s_0+s) ds \right\} - \right. \\ \left. - \frac{W}{\sqrt{2G}} \left[ \frac{1}{\sqrt{s_0+s}} - \frac{1}{\sqrt{s_0}} \right] \right\} \quad (36) \end{aligned}$$

Llamemos en (36)

$$I_1(S_p) = \int_0^{S_p} e^{-v(s_0+s)} (s+s_0)^{-1/2} \operatorname{sen} \lambda(s_0+s) ds \quad a)$$

$$I_2(S_p) = \int_0^{S_p} e^{-v(s_0+s)} (s+s_0)^{-1/2} \cos \lambda(s_0+s) ds \quad b)$$

$$I_3(S_p) = \int_0^{S_p} e^{-v(s_0+s)} (s+s_0)^{-3/2} \operatorname{sen} \lambda(s_0+s) ds \quad c)$$

$$I_4(S_p) = \int_0^{S_p} e^{-v(s_0+s)} (s+s_0)^{-3/2} \cos \lambda(s_0+s) ds \quad d)$$

(37)

Se calculan por parte  $I_3(S_p)$  e  $I_4(S_p)$ , considerando en la fórmula  $\int u dv = uv - \int v du$  que es  $u = e^{-v(s_0+s)} (s+s_0)^{-3/2}$ ; se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas,  $I_3, I_4$ , y resolviéndolo se las expresa en función de las  $I_1(S_p)$  e  $I_2(S_p)$ .

La (36) :

$$\theta(s_0+s_p) = 2\nu \{C_1 I_1 + C_2 I_2\} + \frac{1}{2} \{C_1 I_3 + C_2 I_4\} - \frac{W}{\sqrt{2G}} \left[ \frac{1}{\sqrt{s+s_0}} - \frac{1}{\sqrt{s_0}} \right]$$

queda :

$$\theta(s_0+s_p) = \frac{e^{-\nu(s_0+s_p)}}{\sqrt{s_0+s_p}} \left\{ C_1 \operatorname{sen} \lambda(s_0+s_p) + C_2 \operatorname{cos} \lambda(s_0+s_p) \right\} + I_1(\nu C_1 - \lambda C_2) + I_2(\nu C_2 + \lambda C_1) - \frac{W}{\sqrt{2G}} \left[ \frac{1}{\sqrt{s_p+s_0}} - \frac{1}{\sqrt{s_0}} \right]$$

que es la solución. Luego le daremos forma más conveniente (41) -

CALCULO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS I<sub>1</sub> E I<sub>2</sub> :

$$A) \quad I_1(s) = \int_0^s e^{-\nu(s_0+s)} \frac{\operatorname{sen} \lambda(s+s_0)}{\sqrt{s+s_0}} ds$$

haciendo el cambio de variable  $(s+s_0) = \frac{u^2}{\lambda}$ , y llamando, como se hará en lo sucesivo,  $\nu = -\frac{\nu}{\lambda}$ , queda :

$$I_1(s) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda s_0}}^{\sqrt{\lambda(s+s_0)}} e^{\nu u^2} \operatorname{sen} u^2 du$$

Y, análogamente :

$$I_2(s) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s \frac{e^{-\nu(s+s_0)}}{\sqrt{s+s_0}} \operatorname{cos} \lambda(s+s_0) ds = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda s_0}}^{\sqrt{\lambda(s+s_0)}} e^{\nu u^2} \operatorname{cos} u^2 du$$

Entonces, las funciones de  $(s_0+s)$  definidas por las integrales  $I_1$ ,  $I_2$ , quedan expresadas en la forma :

$$I_2(s) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left[ \int_0^\alpha e^{\nu u^2} \operatorname{cos} u^2 du - \int_0^{\alpha_0} e^{\nu u^2} \operatorname{cos} u^2 du \right] \quad (I)$$

$$I_1(s) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left[ \int_0^\alpha e^{\nu u^2} \operatorname{sen} u^2 du - \int_0^{\alpha_0} e^{\nu u^2} \operatorname{sen} u^2 du \right]$$

donde los límites de integración son las variables  $\alpha(s) = \sqrt{\lambda(s+s_0)}$   $\alpha_0 = \sqrt{\lambda s_0}$ . Las integrales sumandos, funciones de  $\alpha$ ,  $(\alpha_0)$ , y de  $\nu$

las indicaremos :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha, v) &= \int_0^{\alpha, \alpha_0} e^{vu^2} \cos u^2 du \\ \mathcal{S}(\alpha, v) &= \int_0^{\alpha, \alpha_0} e^{vu^2} \operatorname{sen} u^2 du \end{aligned} \quad ; \quad (II)$$

éstas se reducen, para  $v=0$ , a las funciones de Fresnel

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha, 0) &= C(\alpha) = \int_0^{\alpha, \alpha_0} \cos u^2 du \\ \mathcal{S}(\alpha, 0) &= S(\alpha) = \int_0^{\alpha, \alpha_0} \operatorname{sen} u^2 du \end{aligned}$$

donde el argumento  $\alpha, (\alpha_0)$  es para nuestro caso función de  $s$ , ( $S_0$ ).

Haciendo un cambio de variables  $u = p\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , ( $p = u\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ )

$$C(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{p=\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos \frac{\pi}{2} p^2 dp = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}})$$

$$S(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{p=\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} p^2 dp = \sqrt{\frac{\pi}{2}} S(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}})$$

que usaremos para calcular las (II).-

Para ello, formemos primero con las  $\mathcal{C}(\alpha, v), \mathcal{S}(\alpha, v)$  un número complejo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{C}(\alpha, v) + i\mathcal{S}(\alpha, v) = \int_0^{\alpha} e^{vu^2} \cos u^2 du + i \int_0^{\alpha} e^{vu^2} \operatorname{sen} u^2 du \\ &= \int_0^{\alpha} e^{vu^2} e^{iu^2} du = \int_0^{\alpha} e^{vu^2 + iu^2} du \end{aligned}$$

donde las partes real e imaginaria quedarán determinadas calculando la integral de  $e^{vu^2 + iu^2}$ , función del extremo  $u = \alpha$  y de  $v$ , definida sobre la variable real  $u$ . Para determinar su forma pasemos al campo complejo, definiendo un número complejo / con las dos variables reales  $u, v$ .-

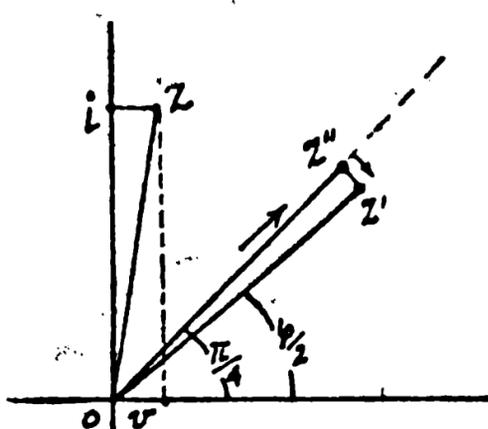
Sea el número complejo  $v+i = \rho e^{i\varphi} = \sqrt{v^2+1} e^{i\varphi} \approx e^{i\varphi}$  si  $v \ll 1$ ; es  $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{v} \approx \frac{\pi}{2} - v$  (a menos de términos de 3<sup>er</sup> orden en  $v$ ). Separemos el complejo  $(vu^2 + iu^2)$  en el producto  $(v+i)u^2$ .

Definamos una nueva variable de integración, ahora compleja, en función de  $u$  y  $v$ :  $z = u e^{i\frac{\varphi}{2}}$

(A menos de términos de 2<sup>o</sup> orden en  $v$ .)

(<sup>o</sup>) Lo supondremos siempre en lo sucesivo, lo que es admisible para todo el cálculo y la teoría, ya que  $v = -\frac{v}{\lambda}$  y  $v \ll \lambda$ . (Cfr. pp. 32).-

Para un  $\varphi$  dado esta variable  $z$  se moverá sobre el segmento ( $z' - 0$ ), siendo  $|z'| = u = \alpha$ , si es  $0 \leq u \leq \alpha$  el intervalo de la integral sobre la variable real  $u$ .  $\varphi/2$  es el definido por  $\varphi = \text{arc tg } 1/v$ . Es, entonces:



$$Z = \int_0^\alpha e^{(v+i)u^2} du = \int_0^{\alpha = ue^{i\varphi/2}} e^{(e^{i\varphi}) \cdot z^2 e^{-i\varphi}} \cdot \frac{dz}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi/2} \int_0^{\alpha = ue^{i\varphi/2}} e^{z^2} dz$$

Siendo esta función, lo mismo que el integrando, regular en todo punto del plano  $Z$  a distancia finita, puede ser calculada sobre cualquier arco de integración comprendido entre el origen  $O$  y el punto

$$z' = \alpha e^{i\varphi/2},$$

variando  $u$  entre  $0$  y  $\alpha$ . - Integraremos sobre el camino  $(O z'' z')$ : segmento  $\overline{Oz''} + \widehat{z''z'}$ , (con  $\widehat{z''z'}$  arco de círculo con centro en  $O$ ). Como  $v \ll 1$ ,  $\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\pi}{4}$  y el punto  $z'$  está muy próximo al  $z'' = \alpha e^{i\pi/4}$ . - La integral se escribe entonces

$$Z = e^{-i\varphi/2} \int_{\overline{Oz'}} e^{z^2} dz = e^{-i\varphi/2} \int_{\overline{Oz''}} + e^{-i\varphi/2} \int_{\widehat{z''z'}}$$

Sobre el segmento  $\overline{Oz''}$ :  $z = \rho e^{i\pi/4} = u e^{i\pi/4}$ , ( $0 < u < \alpha$ ).

Sobre el arco de círculo  $\widehat{z''z'}$ :  $z = \alpha e^{i\theta}$  ( $\frac{\varphi}{2} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ). -

$$Z = e^{-i\varphi/2} \left[ e^{i\pi/4} \int_0^{\alpha} e^{iu^2} du + i\alpha \int_{\pi/4}^{\theta=\varphi/2} e^{z^2} e^{i\theta} d\theta \right]$$

Si se hace  $u = p \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  en la primera integral es:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{p=\alpha\sqrt{2/\pi}} \cos \frac{\pi}{2} p^2 dp \quad (\text{Fresnel, de argumento } u \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}});$$

$$\int_0^{u=\alpha} e^{iu^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ C\left(\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + i S\left(\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \right],$$

donde  $C\left(\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right), S\left(\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$  son las funciones de Fresnel de argumento  $p = \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ . -

La segunda integral : Como  $\frac{\psi}{2} \approx \frac{\pi}{4}$  y el arco  $\widehat{Z''Z'}$  es pequeño, es igual a :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\psi}{2}} e^{z^2} e^{i\theta} d\theta = e^{i\frac{\psi}{2}} e^{(v+i)\alpha^2} \left( \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \approx -\frac{v}{2} e^{i\frac{\psi}{2}} e^{(v+i)\alpha^2}$$

habiéndose tenido en cuenta que  $\frac{\psi}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{v}{2}$  ( $\psi = \text{arc tg } \frac{1}{v} \approx \frac{\pi}{2} - v$ ).

Reuniendo ambos resultados,  $Z(\alpha, v)$  vale :

$$Z = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ C(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) + iS(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) \right] - \frac{i\alpha v}{2} e^{(v+i)\alpha^2};$$

donde puede ponerse  $e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2})} \approx 1 - i(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}) \approx 1 + i\frac{v}{2}$ , (a menos de términos de segundo orden) ; y queda, por último :

$$Z(u, v) = \int_0^\alpha e^{vu^2 + iu^2} du = C(\alpha, v) + iS(\alpha, v)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + i\frac{v}{2} \right) \left[ C(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) + iS(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) \right] - \frac{i\alpha v}{2} e^{(v+i)u^2}$$

De donde, descomponiendo las partes real e imaginaria, se obtienen las (II) :

$$C(\alpha, v) = \int_0^\alpha e^{vu^2} \cos u^2 du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ C(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - \frac{v}{2} S(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) \right] + \frac{\alpha v}{2} e^{v\alpha^2} \text{sen } \alpha^2$$

$$S(\alpha, v) = \int_0^\alpha e^{vu^2} \text{sen } u^2 du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ S(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) + \frac{v}{2} C(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) \right] - \frac{\alpha v}{2} e^{v\alpha^2} \text{cos } \alpha^2$$

Reemplazando en las I :

$$I_2(s) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left[ \int_0^{\alpha=\sqrt{\lambda(s_0+s)}} e^{vu^2} \cos u^2 du - \int_0^{\alpha_0=\sqrt{\lambda s_0}} e^{vu^2} \cos u^2 du \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ C(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - C(\alpha_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - \frac{v}{2} (S(\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - S(\alpha_0\sqrt{\frac{2}{\pi}})) \right] + \frac{\alpha v}{2} e^{v\alpha^2} \text{sen } \alpha^2 - \frac{\alpha_0 v}{2} e^{v\alpha_0^2} \text{sen } \alpha_0^2 \quad (39)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left[ C(\sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - C(\sqrt{x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - \frac{v}{2} (S(\sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - S(\sqrt{x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}})) \right] + \frac{\sqrt{x} v}{2} e^{vx} \text{sen } x - \frac{\sqrt{x_0} v}{2} e^{vx_0} \text{sen } x_0$$

donde en las integrales  $\int_0^{\alpha=\sqrt{\lambda(s_0+s)}}$ ,  $\int_0^{\alpha_0=\sqrt{\lambda s_0}}$ , se ha puesto  $u^2 = x$  ; o sea  $x = \alpha^2 = \lambda(s_0 + s)$ ,  $x_0 = \alpha_0^2 = \lambda s_0$  .-

Análogamente :

$$I_1(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left[ S(\sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - S(\sqrt{x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}) + \frac{\sigma}{2} (C(\sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}) - C(\sqrt{x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}})) \right] - \frac{\sqrt{x}v}{2} e^{vx} \cos x + \frac{\sqrt{x_0}v}{2} e^{vx_0} \cos x_0 \quad (39')$$

Estas integrales  $I_1(s)$ ,  $I_2(s)$ , particularizadas para  $s = s_p$  ( ó  $x = x_p$  ) las indicaremos simplemente  $I_1$ ,  $I_2$ ; y reemplazadas en (37) permiten calcular  $\theta(s_p)$ , ( ó bien  $\theta(x_p)$  en la [41] ), para el extremo  $s_0 + s_p$  de la trayectoria activa .-

Discusión de la solución .-

De la (28) resulta que  $\delta(\lambda_1)$  es una función periódica en la coordenada  $\lambda_1$ ; ese período se denominará "longitud de onda en cabeceo"; vale

$$\sigma^* = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (40)$$

Por la definición de  $\lambda$  (25), resulta que para los misiles "normales, en que se satisface la desigualdad fuerte (26), es

$$\sigma^* \cong \frac{2\pi}{\sqrt{\xi_3}} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{K_M \rho d^3}}$$

aproximadamente igual a la longitud característica  $\sigma$  del movimiento, según la fórmula usual, [ 6 ], correspondiente al estudio del movimiento despreciando sustentación y amortiguamiento aerodinámico. Consideremos la nueva variable ( de dimensión cero

$$x(t) = \frac{2\pi \lambda_1(t)}{\sigma^*} = \frac{2\pi [s(t) + s_0]}{\sigma^*} \quad ;$$

para el tiempo de propulsión  $t_p$  corresponde

$$x(t_p) = x_p = \frac{2\pi (s_p + s_0)}{\sigma^*} \quad ,$$

y por esto  $x_p = \lambda (s_0 + s_p)$  ,  $x_0 = \lambda s_0$ .

Por otra parte, definamos el parámetro  $b^*$  por:  $\sqrt[4]{b} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{G_0}}$

Sacando factores comunes en (37), ésta queda expresada en función de la variable  $x$  :

$$\theta(x_p) = W \sqrt[4]{b^*} \left\{ \frac{e^{-\frac{\nu}{\lambda}(x_p - x_0)}}{\sqrt{x_p}} \left[ C_1' \operatorname{sen} x_p + C_2' \cos x_p \right] - e^{-\frac{\nu}{\lambda} x_0} \left[ I_1 \left( \frac{\nu}{\sqrt{\lambda}} C_1' - \sqrt{\lambda} C_2' \right) + I_2 \left( \frac{\nu}{\sqrt{\lambda}} C_2' + \sqrt{\lambda} C_1' \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{\sqrt{x_p}} \right] \right] \right\} \quad (41)$$

siendo los coeficientes

$$C_1' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(\epsilon_1 - \nu)}{\lambda} \cos x_0 + \operatorname{sen} x_0 \right]$$

$$C_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(\epsilon_1 - \nu)}{\lambda} \operatorname{sen} x_0 + \cos x_0 \right] \quad (42)$$

constantes de dimensión cero caracterizadas por :  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \delta,$  que son las características mecánicas y aerodinámicas fundamentales del misil.-

La (41) puede expresarse abreviadamente en la forma

$$\theta(x_p) = W \sqrt[4]{b^*} \mathcal{K}(x_0, x_p, \nu, \epsilon_1) = W \sqrt[4]{b^*} \left\{ \mathcal{H}(x_0, x_p, \nu, \epsilon_1, \lambda) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{\sqrt{x_p}} \right] \right\}$$

Siendo  $\nu = \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2}$ , consideremos el caso  $\nu = 0$ . Para todo misil es  $K_L > 0$ ,  $K_H > 0$ , esto es:  $\epsilon_1 > 0$ ,  $\epsilon_2 > 0$ ; por lo cual la condición  $\nu = 0$  implica :  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 0$ . - En este caso el parámetro  $\sqrt[4]{b^*} = \sqrt{\frac{\lambda}{G}}$  se reduce al  $\sqrt[4]{b} = \frac{\sqrt{\epsilon_3}}{\sqrt{G}}$ , y la solución (41) se reduce a la :

$$\theta = W \sqrt[4]{b} \mathcal{K}[x_0, x_p, \epsilon_3] = W \sqrt[4]{b} \left\{ \mathcal{H}(x_0, x_p, \epsilon_3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{\sqrt{x_p}} \right] \right\} \quad (43)$$

con :

$$\mathcal{K}(x_0, x_p) = -\frac{\operatorname{sen} x_0}{\sqrt{2}} \left\{ \left( \frac{\operatorname{sen} x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{\operatorname{sen} x_p}{\sqrt{x_p}} \right) + \sqrt{2\pi} \left[ C \left( \sqrt{\frac{2x_p}{\pi}} \right) - C \left( \sqrt{\frac{2x_0}{\pi}} \right) \right] \right\} - \frac{\cos x_0}{\sqrt{2}} \left\{ \left( \frac{\cos x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{\cos x_p}{\sqrt{x_p}} \right) + \sqrt{2\pi} \left[ S \left( \sqrt{\frac{2x_0}{\pi}} \right) - S \left( \sqrt{\frac{2x_p}{\pi}} \right) \right] \right\} \quad [B11]$$

coincidente con la ya obtenida en una Nota anterior, solución que es un caso particular de (41), el correspondiente a la ausencia de amortiguamiento aerodinámico y fuerza de sustentación aquí considerados.-

Comparación de los momentos amortiguantes

Teniendo  $\mathcal{H}^r$  la dirección de la componente axial  $\omega$  del vector velocidad angular  $\Omega$ , el momento de Coriolis  $M_C^J$  es un vector transversal al misil.

Estimaremos aquí el momento de Coriolis  $M_C^J$  frente al momento amortiguante aerodinámico  $H_c$  suponiendo por simplicidad un movimiento plano de velocidad de rotación  $\dot{\phi}$  alrededor del eje ecuatorial ba ricentral.

Consideremos el misil descrito en pag. 20 :

Siendo  $H = -K_H \rho d^4 V \dot{\phi} = C_H \dot{\phi}$ , el coeficiente correspondiente en este caso es  $K_H \cong 40$ . Siendo  $k(t)$  el radio de giro ecuatorial instantáneo el momento de inercia es:  $B(t) = m(t)k^2(t)$ ,  $\dot{B}(t) = \dot{m}k^2 + m \cdot 2k\dot{k}$   
 Según la (2.43):  $M_C^J = \dot{m}\dot{\phi}(r_e^2 - \frac{dB}{dt}) = \dot{m}\dot{\phi}(r_e^2 - \dot{m}k^2 - m2k\dot{k}) \cong \dot{m}\dot{\phi}(r_e^2(t) - k^2(t)) = C^J \dot{\phi}$   
 despreciando  $\dot{k}(t)$ .

Sea  $k(0) = 0,70$  m,  $r_e(0) = 1.00$  m,  $\dot{m}(0) = -2.86$  kgm<sup>1</sup>.seg  
 resulta así  $C^J = -2.86(1-0.7^2) \cong 1,40$  kgmseg en  $M^J = C^J \cdot \dot{\phi}$

Si el misil sale de una guía de 4 m de longitud, la abandona con velocidad  $V(t_p) = \sqrt{2 G A} = \sqrt{2 \cdot 370 \cdot 4} = 55$  m/s

$$C_H = -K_H \rho d^4 \cdot V = -40 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0.20^4 \cdot 55 = -0.44 \text{ kgmseg.}$$

En este caso pues el momento amortiguante de las fuerzas de Coriolis es preponderante, por la guía relativamente pequeña y el valor grande de  $\dot{m}(t)$  correspondiente a un tiempo de propulsión  $t_p = 1,16$  .seg.

Al mismo misil lanzado desde un avión con velocidad  $V_A = 220$  m/s<sup>1</sup> y guía de longitud  $p = 1$  m corresponde una velocidad absoluta  $V = 220 + \sqrt{2 \cdot 370 \cdot 1} = 250$  m/s

$$C_H = -40 \frac{1}{8} \cdot 0.20^4 \cdot 250 = 2 \text{ Kgmseg.}$$

En este caso el amortiguamiento aerodinámico inicial es mayor que el de Coriolis y para la mitad de trayectoria activa con  $t_m = 0.55$  .seg. en que  $V = 220 + 370 \cdot 0.55 = 425$  m/s es supersónica puede estimarse  $C_H \cong -40 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0.20^4 \cdot 425 = 7,7$  kgs.seg. netamente mayor que el de Coriolis (5.5 veces)

En el caso de un misil destinado a alcanzar una gran altura (casos del misil de sondeo y del antiaéreo) el tiempo de propulsión es mucho mayor y el momento de Coriolis mucho menor que el aerodinámico en casi toda la trayectoria. -Consideremos el misil supersónico llamado "Wasserfall" (12) que puede alcanzar una altura de 18 km y una velocidad final de 750 m/s. Sus datos son: Largo : 7.5 m, diámetro: 0,90 m, empuje: 8000 kg, peso inicial: 3500 Kg tiempo de propulsión: 45 seg.,  $r_e : 3,5$  m aprox.,  $K : 2.8$  m aprox. su velocidad de ascenso es aprox.  $V(t) 1,25 t$ ,  $G_p = 1500$  kg  $m \cong 4,5$  Siendo  $M^J = C^J \dot{\phi} (20.0 \text{ kgmseg.}) \cdot \dot{\phi}$ , y estimando  $K_H \cong 30$  resulta que para  $t = 1$  seg. es  $C_H \cong C^J$ ; para  $V = 100$  m/s resulta :

$$C_H = 300 \gg 20,0 = C^J \text{ .-}$$

10.- Conclusiones .-

1) Comparando la (43) con la (41), se vé que el término  $\left[ \frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{\sqrt{x_p}} \right]$  aparece en ambas. El equivalente de H de (43), en (41), es  $\mathcal{H}$ , que contiene el factor exponencial  $e^{-\frac{\gamma}{\lambda}(x_p - x_0)}$  de "amortiguamiento" sobre la trayectoria (análogo al del ángulo de ataque  $\delta$  (28)). Siendo  $\gamma = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$ , resulta que la sustentación tiene un efecto amortiguante análogo al que corresponde a  $\epsilon_2$  y en general del mismo orden de magnitud.

2) Considerando la (41) y la representación gráfica de la función  $K(x_0, x)$  y por

$$\sqrt[4]{b} = \sqrt{\frac{K_M \rho d}{B}} \frac{1}{\sqrt{G_0}}$$

resulta:

a) La dispersión y la desviación son crecientes con la longitud reducida  $x$  de la trayectoria activa.

b) La dispersión y la desviación son directamente proporcionales a la velocidad  $\Delta\mu$  de la ráfaga, a la velocidad  $\mu$  del viento permanente, y a

$$\sqrt{\frac{K_M}{B}}$$

3) En el caso de lanzamiento desde un avión con velocidad  $V_A$ ,  $V_P = V_0 + V_A$ , la "longitud efectiva" de guía para el cohete es

$$S_0 = \frac{V_P^2}{2G} \quad , \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\pi V_P^2}{G \sigma} \quad ;$$

así, la desviación y dispersión por viento resultan generalmente muy pequeñas.-

*Handwritten signature*

B I B L I O G R A F I A

- 1) GANTMAKHER, F.R.; LEVIN, L.M. - "Ob Uravn niakh Dvizheni Rakety" (Ecuaciones del movimiento de un cohete) "Pisla dnaya Matematika i Mekhanika". Vol XI, N° 3, 1947. Traducción al inglés en N.A.C.A., T.M.1255, 1950.
- 2) FOWLER, R.H., GALLOP E.G., LOCK, C.N.H., RICHMOND, H.W., The aerodynamics of a spinning shell, Phil.Trans.Roy.Soc.London (A) 221, 295-387 (1920)
- 3) FOWLER, R.H., LOCK C.N.H. The aerodynamics of a spinning shell, Part II, Phil.Trans.Roy.Soc.London (A) 222, 227-249 (1921)
- 4) NIELSEN, K.L. & SYNGE, J.L. "On the motion of a spinning shell". Quarterly of applied Mathematics" Vol.IV, N° 3, October 1946.
- 5) McSHANE, E.J., KELLEY, J.L., RENO, F.V. Exterior Ballistics, University of Denver, 1953
- 6) ROSER, J.B.; NEWTON, R.R.; GROSS, G.L. - "Mathematical Theory of Rocket Flight". Mac Graw Hill. New York, 1947.
- 7) SPREITER, J.R. - "Aerodynamic Properties of Slender Wing-Body Combinations at Subsonic, Transonic & Supersonic Speeds". "N.A.C.A.", T.N.1662. 1948.
- 8) SPREITER, J.R. "Aerodynamic Properties of Cruciform Wing-Body Combinations at Subsonic, Transonic & Supersonic Speeds". N.A.C.A." T.N.1897. 1949.
- 9) WALCHNER, O.; WEBER, E.; KEHL, A. - "Windkesselmessungen an Henachel-Gerät "Zitterrochen" bei Unter und Überschallgeschwindigkeiten". Bericht 44/H/13. Institut für Hochgeschwindigkeitsfragen A.V.A. Göttingen, 10.7.1944.
- 10) JAHNKE, E.; EMDE, F. - "Funktionentafeln. 1933.
- 11) HUNZIKER, R.R. "Efecto del viento en la trayectoria de un cohete". Revista de la Facultad de Ciencias Físicoma temáticas". Tomo I, pag.54 a 67. 1954.
- 12) HARLAN, N., & McCONNELL, G. "A summary of German guided missiles". Summary Report, Report N° F-SU1106-ND. Headquarters Air Materiel Command, Wright Field Dayton, Ohio, 1946.

TABLA DE LA FUNCION  $C(\alpha, \nu) = \int_0^\alpha e^{\nu u^2} \cos u^2 du$

$\alpha \backslash \nu$	- 0	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	-0,05
0,	0,	0,	0,	0	0,	0,
0,2	0,1755	0,1754	0,1754	0,1754	0,1754	0,1754
0,4	0,3964	0,3961	0,396	0,3958	0,3955	0,3953
0,6	0,5926	0,5925	0,5911	0,5905	0,5896	0,5891
0,8	0,7685	0,7675	0,7653	0,7640	0,7625	0,7610
1,	0,9046	0,9014	0,8997	0,8969	0,8944	0,8924
1,25	0,9775	0,9742	0,9711	0,9678	0,9650	0,9636
1,4	0,9502	0,9472	0,9445	0,9422	0,9400	0,9381
1,6	0,8255	0,8253	0,8254	0,8259	0,8264	0,8272
1,9	0,5394	0,5481	0,5562	0,5641	0,5715	0,5792
2,17	0,4012	0,4148	0,4275	0,4393	0,4501	0,4604
2,50	0,6118	0,6138	0,6160	0,6183	0,6204	0,6225
2,803	0,8032	0,7931	0,7853	0,7792	0,7744	0,7711
3,31	0,4764	0,4943	0,5095	0,5293	0,5319	0,5401
3,54	0,6213	0,6235	0,6261	0,6285	0,6310	0,6334
3,76	0,7591	0,7457	0,7370	0,7314	0,7285	0,7281
3,9	0,6022	0,6868	0,6850	0,6843	0,6858	0,6879
4,15	0,5064	0,5272	0,5420	0,5529	0,5606	0,5660
4,3	0,5833	0,5922	0,5986	0,6039	0,6080	0,6112
4,51	0,7363	0,7218	0,7135	0,7095	0,7094	0,7118
4,75	0,5719	0,5855	0,5954	0,6021	0,6068	0,6105
4,95	0,5655	0,5797	0,5890	0,5948	0,5984	0,6007
5,2	0,7163	0,7008	0,6953	0,6936	0,6961	0,7011
5,5	0,5418	0,5637	0,5755	0,5814	0,5838	0,5845
5,8	0,6961	0,6828	0,6792	0,6808	0,7071	0,6915
6,01	0,5433	0,5681	0,5795	0,5834	0,5592	0,5943
6,26	0,7055	0,6875	0,6833	0,6861	0,7155	0,6993
6,48	0,5739	0,5917	0,5999	0,6031	0,5891	0,6064
6,8	0,6844	0,6713	0,6705	0,6746	0,6961	0,6831

TABLA DE LA FUNCION  $\mathcal{S}(\alpha, v) = \int_0^\alpha e^{vu^2} \text{sen } u^2 du$

$\alpha \backslash v$	0	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	-0,05
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,2	0,0040	0,0041	0,0042	0,0044	0,0045	0,0046
0,4	0,0213	0,0213	0,0213	0,0213	0,0212	0,0212
0,6	0,0707	0,0706	0,0702	0,0702	0,0702	0,0697
0,8	0,1557	0,1650	0,1643	0,1636	0,1628	0,1620
1,	0,3103	0,3084	0,3066	0,3046	0,3027	0,3004
1,25	0,5491	0,5442	0,5393	0,5344	0,5294	0,5245
1,4	0,6925	0,6851	0,6779	0,6707	0,6636	0,6568
1,6	0,8462	0,8355	0,8255	0,8153	0,8056	0,7963
1,9	0,8677	0,8568	0,8487	0,8366	0,8275	0,8188
2,17	0,6400	0,6458	0,6439	0,6429	0,6399	0,6379
2,50	0,4324	0,4409	0,4482	0,4542	0,4590	0,4627
2,803	0,6159	0,6118	0,6078	0,6025	0,5997	0,5958
3,31	0,6333	0,6309	0,6285	0,6261	0,6238	0,6213
3,54	0,4864	0,4997	0,5076	0,5135	0,5168	0,5182
3,76	0,6220	0,6182	0,6145	0,6106	0,6068	0,6031
3,9	0,7373	0,7192	0,7051	0,6943	0,6863	0,6800
4,15	0,6302	0,6276	0,6251	0,6224	0,6200	0,6174
4,3	0,5189	0,5328	0,5408	0,5448	0,5455	0,5442
4,51	0,6235	0,6199	0,6162	0,6125	0,6087	0,6051
4,75	0,7165	0,6977	0,6853	0,6776	0,6727	0,6698
4,95	0,5468	0,5596	0,5658	0,5674	0,5657	0,5622
5,2	0,6571	0,6471	0,6400	0,6318	0,6312	0,6281
5,5	0,5922	0,5977	0,5987	0,5973	0,5944	0,5908
5,8	0,6778	0,6617	0,6529	0,6482	0,6622	0,6442
6,01	0,6275	0,6248	0,6221	0,6194	0,6166	0,6140
6,26	0,6255	0,6220	0,6185	0,6150	0,6113	0,6079
6,45	0,6835	0,6652	0,6575	0,6548	0,6701	0,6545
6,8	0,6723	0,6554	0,6482	0,6458	0,6563	0,6445

*Handwritten signature*

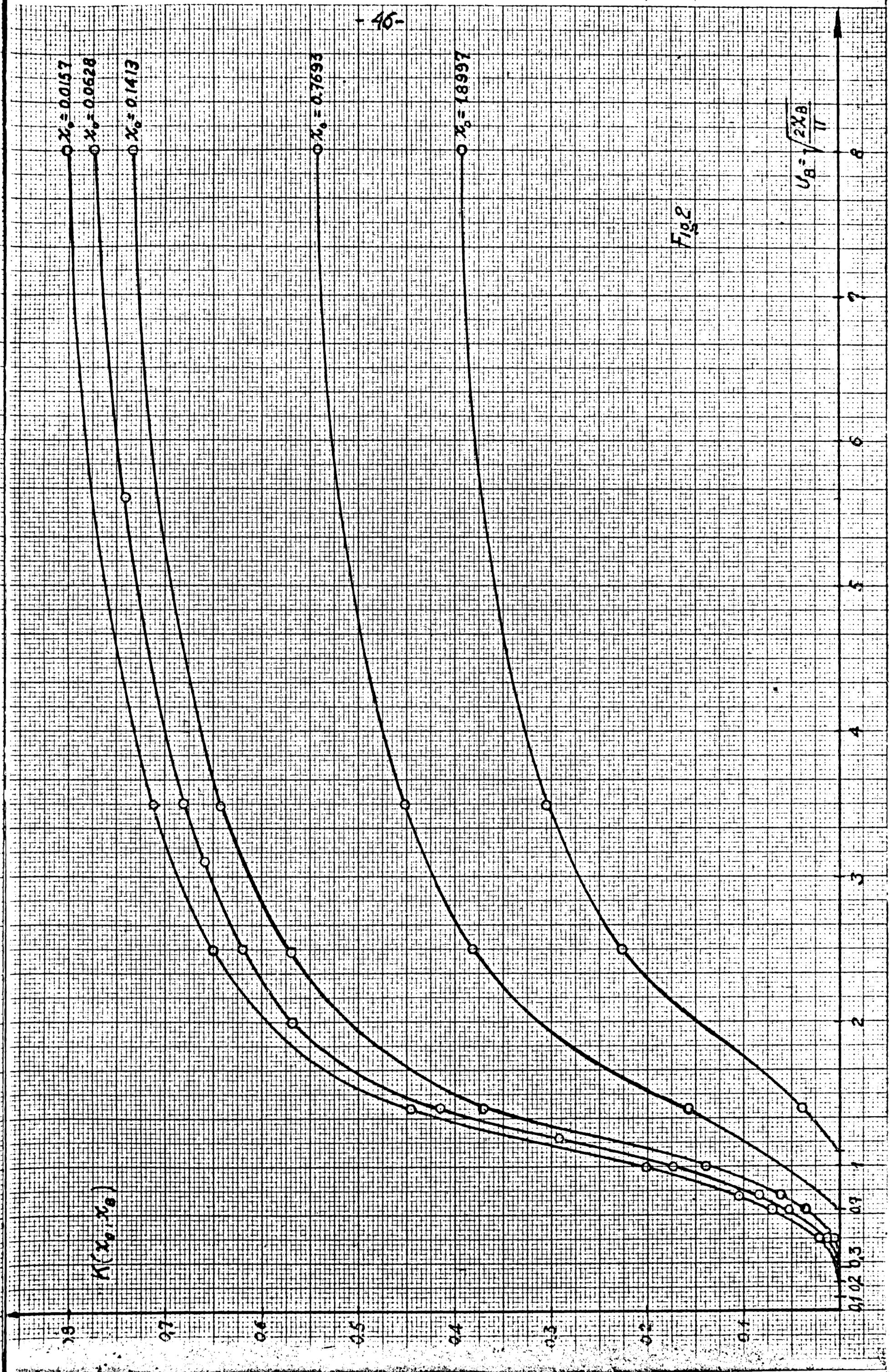


Fig. 2

$$U_B = \sqrt{\frac{2x_B}{\pi}}$$

$N(x_0, x_0)$

0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8



