



Facultad de Ciencias
**Astronómicas
y Geofísicas**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Tesis de grado para obtener la Licenciatura en
Astronomía

**Estudio de la formación de fases mixtas y
estructuras en el interior de estrellas de neutrones**

Martin Oscar Canullan Pascual

Directora: Milva Gabriela Orsaria

Co-Director: Mauro Mariani

La Plata, Argentina

2023

Resumen

Las estrellas de neutrones son objetos compactos cuya materia se encuentra en condiciones extremas de presión y gravedad. Estos objetos alcanzan densidades que superan varias veces las de un núcleo atómico, causando que sus constituyentes se encuentren en un estado de la materia imposible de reproducir en laboratorios terrestres. Sin embargo, del estudio del diagrama de fases de la cromodinámica cuántica se espera que en el interior de las estrellas de neutrones haya una transición de fase entre materia hadrónica y materia de quarks pura, dando lugar a estrellas híbridas.

La naturaleza de dicha transición de fase depende de la tensión superficial en la interfaz hadrón-quark, aún incierta. Estudios teóricos sugieren que por debajo de cierto valor crítico de la tensión superficial, podría formarse una fase mixta compuesta por hadrones y quarks, que puede ser descrita con la construcción de Gibbs. En este escenario, en el que la transición no es abrupta y la presión de dicha fase crece monotónicamente con la densidad, podrían existir estructuras geométricas dentro de esta región de transición, variando desde gotas, pasando por sogas hasta lajas, en orden creciente de densidad.

El objetivo principal de esta tesis es el estudio teórico de la estructura y composición de las estrellas de neutrones, modelándolas como estrellas híbridas. Para ello, se planea construir la ecuación de estado híbrida, incluyendo la formación de una fase mixta y estructuras geométricas. Luego, a partir de las ecuaciones de equilibrio hidrostático, obtener la relación masa-radio para los modelos y así poder comparar nuestros resultados con las observaciones existentes.

Para modelar dicha ecuación de estado híbrida con fase mixta, usaremos dos modelos para los núcleos externo e interno de la estrella, donde se concentra gran parte de su masa. Para el primero, usamos el *modelo de Walecka no lineal*, que es una teoría relativista de campo medio. Para el segundo, empleamos el *modelo de bolsa del MIT* con correcciones debidas a la constante de acoplamiento fuerte.

Se obtuvieron fases mixtas extensas en las que predominan gotas y lajas. Si bien en el marco de nuestro modelo, el efecto de la tensión superficial no produce cambios significativos en la ecuación de estado, comprobamos que un aumento en esta cantidad implica configuraciones estelares de masas levemente menores. Nuestros resultados no satisfacen todas las restricciones de estrellas de neutrones conocidas hasta el momento. Sin embargo, sugieren que los púlsares masivos, como J0348+0432 y J0740+6620, podrían ser estrellas híbridas conteniendo una fase mixta de quarks y hadrones con estructuras geométricas. Además, para ciertas combinaciones de parámetros, la aparición de un núcleo de quarks puro podría desestabilizar este tipo de configuraciones estelares.

Abstract

Neutron stars are compact objects whose matter is under extreme conditions of pressure and gravity. These objects reach densities several times the atomic nuclear density, causing their constituents to be in a matter state that is impossible to reproduce in terrestrial laboratories. However, studying the phases diagram of quantum chromodynamics, it is expected that inside neutron stars there occur a phase transition between hadronic matter and pure quark matter, giving rise to hybrid stars.

The nature of this phase transition depends on the surface tension at the hadron-quark interface, which is still uncertain. Theoretical studies suggest that below a certain surface tension critical value, a mixed phase composed of hadrons and quarks could exist, which can be described using Gibbs' construction. In this scenario, where the transition is not abrupt and the pressure of this phase increases monotonically with density, geometric structures could appear within this transition region, ranging from droplets, passing through rods into slabs, in the increasing of density.

The main objective of this thesis is the theoretical study of structure and composition of neutron stars, modelling them as hybrid stars. To achieve this, we plan to construct the hybrid equation of state, including the formation of a mixed phase and geometric structures. Then, using the hydrostatic equilibrium equations, we will obtain the mass-radius relationship for our objects, which can be compared with existing observations.

To model this hybrid equation of state with mixed phase, we will use two models for the outer and inner cores of the star, where most of its mass is concentrated. For the first one, we use the *nonlinear Walecka model*, which is a relativistic mean field theory. For the second one, we use the *MIT Bag model* with corrections due to the strong coupling constant.

Extensive mixed phases were obtained in which drops and slabs predominate. Moreover, while in the framework of our model the effect of surface tension does not produce significant effects in the equation of state, we verified that an increase in this quantity implies stellar configurations with slightly lower masses. Our results do not satisfy all the constraints of known neutron stars to date. However, they suggest that massive pulsars, such as J0348+0432 and J0740+6620, could be hybrid stars containing a mixed phase of quarks and hadrons with geometric structures. Additionally, for some combinations of parameters, the appearance of a pure quark core could destabilise this type of stellar configuration.

Índice general

1. Introducción	1
2. Materia de quarks en estrellas de neutrones: estrellas híbridas	15
2.1. Ecuación de estado para materia de quarks con corrección de la constante de acoplamiento fuerte	16
2.2. Meta-estabilidad de la materia de quarks	21
2.3. Ecuación de estado para materia hadrónica	23
2.4. Construcción de la fase mixta	26
2.5. Estructuras geométricas dentro de la fase mixta, y modificaciones a la energía	30
3. Ecuaciones de estructura estelar en el marco de la relatividad general	33
3.1. Motivación	33
3.2. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	36
4. Resultados	41
5. Conclusiones y perspectivas	51

Índice de figuras

1.1. Tabla del modelo estándar de la física de partículas.	2
1.2. Esquema de los nucleones	3
1.3. Clasificación de partículas en un Diagrama de Venn	4
1.4. Diagrama de las fases de la QCD	5
1.5. Interior esquemático de una estrella de Neutrones	7
1.6. Esquema de la Tensión superficial	7
1.7. Fase de Pasta	9
1.8. Esquema del nacimiento de una estrella de neutrones	10
2.1. Mapa de estabilidad	22
2.2. Constante de acoplamiento fuerte	23
2.3. Transición de fase abrupta	28
2.4. Transiciones de fase en una estrella híbrida	29
4.1. EdEs híbridas	43
4.2. Velocidad del sonido	44
4.3. Energías superficiales y coulombianas a distintas densidades	46
4.4. Tamaño de las estructuras en la aproximación de Wigner-Seitz . . .	47
4.5. Población de partículas	48
4.6. Relación masa-radio para las EdEs estudiadas	49

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo está destinado a describir el objeto de estudio de esta Tesis de Licenciatura, las *estrellas de neutrones* (ENs), y motivar los objetivos del trabajo. Además, esperamos que quien lea, pueda, al menos en cierta medida, visualizar, dimensionar, y, ojalá, disfrutar de uno de los preciados fenómenos de la naturaleza, tan distante como maravilloso, tan peculiar como intrigante. Sin lugar a dudas el descubrimiento y estudio de estos objetos ha contribuido a la búsqueda incansable, tal vez finita, del entendimiento que la ciencia y quienes la practican necesitan brindar.

Las ENs son los personajes principales de este trabajo. Son llamadas así pues originalmente, a principios del Siglo XX, se pensaba que podían existir objetos compactos conformados íntegramente por neutrones [Baade et al., 1934, Landau, 1932]. Estas partículas se asumían como elementales, es decir, sin estructura ni componentes más pequeñas. Sin embargo, en el siglo XX, nació una nueva rama de la física, la cuál pretendía explicar el comportamiento a pequeña escala, la que rige la dinámica de los átomos y sus componentes. A esta teoría se la conoce como *física cuántica*. Hoy, luego de muchos avances, bajo el modelo estándar de la física de partículas (Fig. 1.1), los neutrones pueden pensarse como excitaciones de campos cuánticos¹ continuos que permean todo el espacio [Zee, 2010].

De acuerdo al modelo estándar, los neutrones y los protones, partículas que componen las ENs, están constituidos a su vez por tres partículas elementales llamadas *quarks*. Existen seis tipos de quarks, pero tres serán de especial interés en este trabajo: quark arriba (*up*), quark abajo (*down*) y quark extraño (*strange*). Estos seis quarks que integran el modelo estándar forman parte de un grupo más grande de partículas elementales; junto con los *leptones*, constituyen los denomi-

¹Esta palabra puede causar *incertidumbre*, y es lo que toda persona naturalmente debería sentir. En este punto, es recomendable tomarla simplemente como un adjetivo que pretende indicar la teoría física involucrada.

Modelo Estándar de Partículas Elementales

tres generaciones de materia (fermiones)			interacciones/portadores de fuerza (bosones)		
	I	II	III		
masa	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$
carga	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H higgs
QUARKS	$\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 96 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0	
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	d down	s strange	b bottom	γ foton	
LEPTONES	$\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 91.19 \text{ GeV}/c^2$	
	-1	-1	-1	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
	$< 1.0 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 18.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 80.39 \text{ GeV}/c^2$	
	0	0	0	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	± 1	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	

Figura 1.1: Tabla del modelo estándar de la física de partículas. Los fermiones del lado izquierdo (quarks y leptones) y bosones del derecho. Como se verá más adelante, en esta tesis, se trabajará solamente con los fermiones más livianos, quarks u , d , s , electrones y muones, propios del escenario astrofísico abordado. Figura adaptada de https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model

nados *fermiones*. Dentro de los leptones se encuentra el famoso electrón (además del muón, tau, y los neutrinos asociados a estos tres), partícula que posee carga eléctrica, así como también el muón y tau. Los fermiones se caracterizan por tener espín semi-entero (i.e., $1/2$, $3/2$). El espín no es otra cosa que una propiedad cuántica, que representa, en sentido figurativo, cuantas *vuelatas* (esto representa una idea que elude completamente la complejidad de la teoría, pero permite entender cualitativamente la idea del espín evitando formalidades matemáticas) tienen que dar, para volver al mismo estado. Por ejemplo, si una partícula posee espín $1/2$, necesita dar dos vueltas o un giro de 720° para volver a su estado original [Falomir, 2015]. Además, estas partículas respetan el *Principio de exclusión de Pauli*: dentro de un mismo sistema, no puede haber dos fermiones en el mismo estado cuántico [Pauli, 1925, Pauli, 1994]; luego ahondaremos más en este enunciado.

Por otro lado, existe otro grupo de partículas, los *bosones*, a los que se reconoce como partículas mediadoras y tienen espín entero (i.e., 0, 1 ó 2). En esencia, en este contexto, la palabra *mediadores* refiere a que en una interacción entre partículas estos intervienen de alguna forma. Por ejemplo: dos electrones interactúan repulsivamente a través del intercambio de *fotones*. En cambio, si la interacción

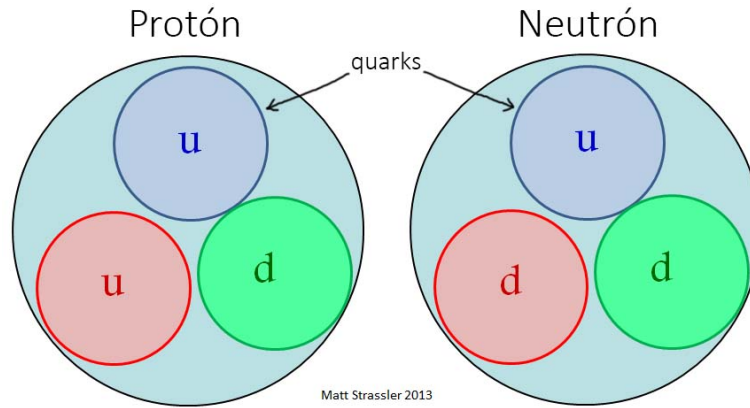


Figura 1.2: Protón y neutrón, esquematizados en el marco de la QCD, formados por tres quarks. Figura tomada de <https://cienciadesofa.com/2018/04/que-aspecto-tienen-las-particulas.html>

fuera entre un electrón y su antipartícula, el *positrón*², se atraerían, y se aniquilarían, pudiendo crear otros bosones. En particular, el *bosón de Higgs* es el causante de que las partículas posean masa [Higgs, 1964]. Algunos bosones, como el *W* y el *Z*, interactúan fuertemente con el campo de Higgs. Otros, en cambio, como el fotón y los gluones, no se acoplan con dicho campo. Los fotones son esencialmente los componentes de la luz, que se detectan con alguna herramienta (CCD) o con un par de ojos, por ejemplo. Los gluones son los mediadores de la fuerza fuerte entre quarks [Peskin, 2018]. A diferencia del fotón, estos pueden interactuar con sus pares (otros gluones) volviendo la Cromodinámica Cuántica (la teoría de la *fuerza fuerte*, QCD, por sus siglas en inglés) una teoría muy difícil de abordar matemáticamente, al menos si se busca partir de sus fundamentos. La QCD es, entonces, la teoría que describe cómo se comportan e intercatúan los quarks y gluones. Los quarks poseen una fracción de carga eléctrica (i.e., $\pm 1/3$; $\pm 2/3$), pero además poseen *carga de color*; los gluones no tienen carga eléctrica y sólo poseen carga de color. A diferencia del caso electromagnético en el que sólo hay un tipo de carga, la carga eléctrica convencional, en la QCD hay tres cargas de color/anticolor: rojo/anti-rojo, verde/anti-verde y azul/anti-azul. Debido a la previamente mencionada complejidad matemática de la QCD, en esta tesis se trabajará con un modelo fenomenológico para describir la materia de quarks dentro de las ENs. Los modelos fenomenológicos representan algunas propiedades fundamentales de la QCD con un abordaje matemático más sencillo y practicable. Además, los hadrones que componen las ENs son partículas formadas por quarks, ya sea por tres quarks (*bariones*) o un par quark-antiquark (*mesones*). Los protones y neutrones, por tanto, se encuentran dentro de la categoría de bariones, pero

²Toda partícula tiene asociada una antipartícula con igual masa pero con cargas físicas opuestas, no solo la carga eléctrica.

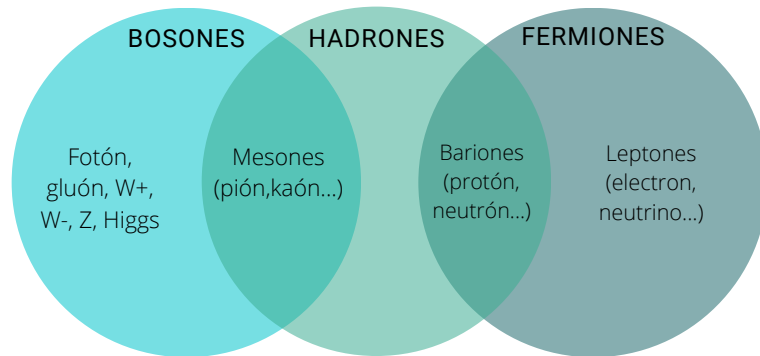


Figura 1.3: Clasificación de partículas en un Diagrama de Venn. Además de quarks y leptones, los otros protagonistas de esta tesis serán los bariones; en particular, protones y neutrones.

a su vez reciben un nombre particular, *nucleones*. La interacción fundamental que mantiene unidos a los quarks para formar los mencionados hadrones, mediada por el intercambio de gluones, es usualmente *fuera de color*. Y la que forma núcleos atómicos, mediados por mesones se la conoce como *fuera nuclear*. Hasta aquí se han introducido muchas partículas y sus clasificaciones, que se pueden representar de manera ilustrativa y resumida en diagramas de Venn, como en la Fig. 1.3.

Cabe mencionar en esta instancia que los hadrones no tienen carga de color. Los protones, por ejemplo, pueden estar compuestos por un quark *up* azul (carga eléctrica $2/3$), un quark *up* rojo (carga eléctrica $2/3$) y un quark *down* verde (carga eléctrica $-1/3$), como se muestra en la Fig. 1.2. Para los mesones es distinto, se necesita un quark y un antiquark con su anti-color correspondiente. Esta propiedad de la QCD lo que hace es confinar a los quarks en una región, es decir produce el *confinamiento*: los quarks no se observan con su carga de color desnuda, sueltos y libres, en la naturaleza.

Otra propiedad de la QCD es la libertad asintótica: cuando estamos a altas temperaturas o densidades, las interacciones entre quarks y gluones disminuyen y estos se mueven más libremente. En lo formal, este tipo de régimen permite un tratamiento perturbativo de la QCD; esto es, podemos operar mediante un desarrollo matemático analítico y tener una idea cuantitativa más clara de cómo es la materia en dichos contextos extremos [Peskin, 2018]. En el denominado *diagrama de fases de la QCD* se puede esquematizar e indicar las diferentes fases en la que se puede encontrar la materia para diferentes temperaturas y densidades.

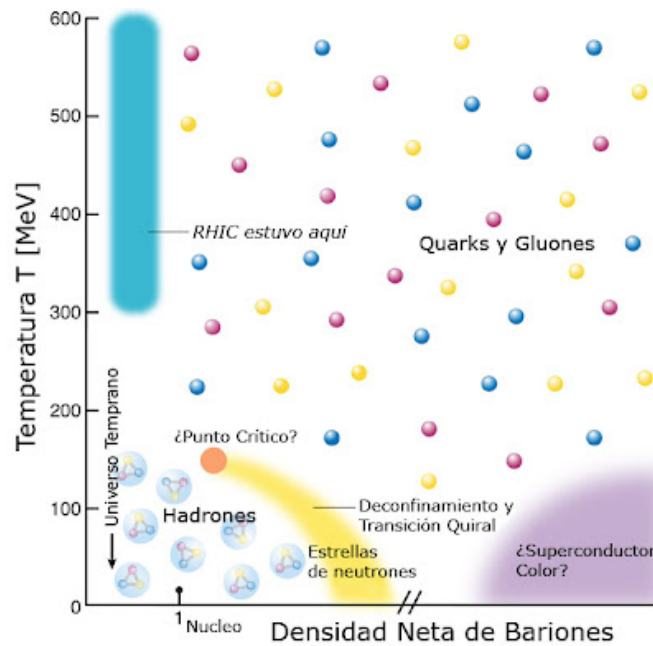


Figura 1.4: Diagrama de las fases de la QCD: comportamiento de la materia para diferentes rangos de temperaturas y densidades. Figura adaptada de <http://universoalavista.blogspot.com/2010/03/tomando-la-temperatura-de-la-materia.html>

En el diagrama de fases de la QCD presentado en la Fig. 1.4 se muestra que a bajas temperaturas y bajas densidades estamos en el régimen en el que se forma la materia hadrónica que hemos mencionado. Si aumentamos notablemente la temperatura y densidad, el confinamiento de los quarks dentro de los hadrones deja de existir y se forma lo que se llama plasma de quark y gluones [Nefediev et al., 2009]. Este plasma es una especie de sopa cuántica, donde rige la libertad asintótica. A altas densidades y bajas temperaturas se cree que los quarks se empiezan a agrupar de a pares, dando lugar a un superfluido de color; esto es, un fluido cuántico que tiene una muy baja viscosidad [Tanimoto et al., 2020]. Si estamos a altas temperaturas y bajas densidades, obtenemos el régimen en el que los físicos hacen colisionar partículas. Sí, hacen chocar *pelotitas*, pero con un abordaje tecnológico bestial en el Gran Colisionador de Hadrones, que es el acelerador de partículas más grande y de mayor energía que existe, ubicado debajo de la frontera entre Francia y Suiza. Fuera de la diversión que puede implicar ser un físico experimental y trabajar con semejante artefacto, ellos, junto a otros científicos de la colaboración, proveen información de vital importancia para los modelos teóricos utilizados dentro de la astrofísica y la cosmología. Cabe mencionar que la física del diagrama de fases de la QCD a bajas densidades y temperaturas es conocida con un buen grado de precisión. Lo mismo ocurre en el régimen de libertad asintótica, en el extremo opuesto, en el que los cálculos de la QCD se pueden realizar en forma perturbativa. Lo que se desconoce es lo que

ocurre entre estos dos regímenes, y en este punto entran en juego las posibilidades que nos brindan las ENs para entender estos estados de la materia. Es decir, las ENs funcionan como laboratorios naturales (crear un laboratorio terrestre que logre estas condiciones físicas está fuera de nuestro alcance hoy en día). Como se puede observar en la Fig. 1.4, las ENs se encuentran en un rango de temperaturas casi nulo, lo cual parece carecer de sentido ya que sus temperaturas superficiales llegan a los millones de grados Kelvin [Tsuruta, 2016]. Sin embargo, respecto a la temperatura característica del sistema, llamada *Temperatura de Fermi*, la temperatura de estos objetos es prácticamente irrelevante para su modelado teórico. Es entonces aceptable asumir que la temperatura es cero en estas estrellas. Además, la densidad en las ENs supera la densidad de saturación nuclear $n_0 \sim 0,16 \text{ fm}^{-3}$ [Horowitz et al., 2020]; resulta difícil imaginar lo densos que son estos objetos, tanto que una cucharadita de su superficie pesa lo mismo que toda una montaña.

Si se observa con más atención la Fig. 1.4, las ENs se encuentran en una región intermedia donde puede existir tanto materia hadrónica como materia de quarks desconfiados. Es un límite difuso...¿Qué está pasando? Pareciera haber un cambio en el estado de la materia en la región del diagrama de fases en que se encuentran las ENs; región del diagrama en la que además justamente se desconoce con precisión el comportamiento de la materia. Este supuesto cambio de estado se denomina *transición de fase*, tal como sucede cuando el hielo se convierte en agua. Pero... la cuestión no es nada sencilla. Las energías que predominan en este régimen permiten la existencia no sólo de quarks arriba u y abajo d , sino también del quark extraño, s . Es decir, la materia hadrónica que compone la estrella, a medida que nos acercamos al núcleo, se *desarmaría* en materia de quarks. La Fig. 1.5 muestra la estructura esquemática de capas de una EN, desde su atmósfera hasta su núcleo interno ultra denso.

Los interrogantes que se plantean entonces son los siguientes: ¿ocurre una transición de fase en el núcleo de las ENs? De ocurrir, ¿cuál es su naturaleza? ¿esta transición es abrupta o existe un régimen donde encontramos una mezcla de dos estados, una transición gradual de una fase hadrónica a una de quarks? La respuesta es aún incierta. En particular, la respuesta a la última de estas preguntas dependerá de la tensión superficial entre ambas fases, es decir, de la tendencia a minimizar lo máximo posible el área de una superficie en equilibrio. Esta tensión es producida por las fuerzas cohesivas entre partículas, es decir, la diferencia de fuerzas aplicadas sobre las partículas de la interfaz entre los dos estados de la materia hecha por las partículas de sus alrededores (ver Fig. 1.6).

La mencionada transición gradual está mejor estudiada entre las cortezas exterior e interna de las ENs [Caplan et al., 2017, Alcain et al., 2014]; como en el

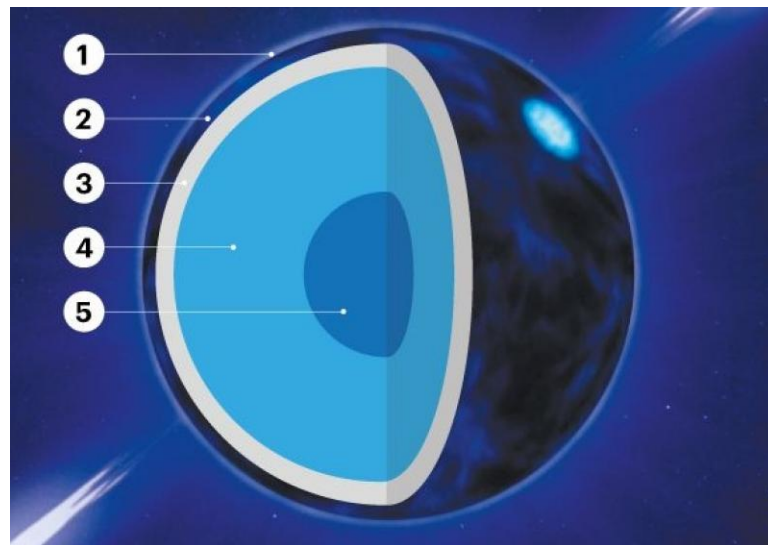


Figura 1.5: Interior esquemático de una estrella de Neutrones. (1) Atmósfera compuesta principalmente de helio e hidrógeno; (2) Corteza exterior compuesta de núcleos atómicos y electrones libres; (3) Corteza interna donde hay neutrones y electrones libres y se presentan núcleos atómicos más pesados; (4) Núcleo externo, líquido cuántico rico en neutrones, materia hadrónica; (5) Núcleo interno ultra denso, ¿materia de quarks desconfinaada?. Imagen obtenida de <https://www.investigacionyciencia.es/>

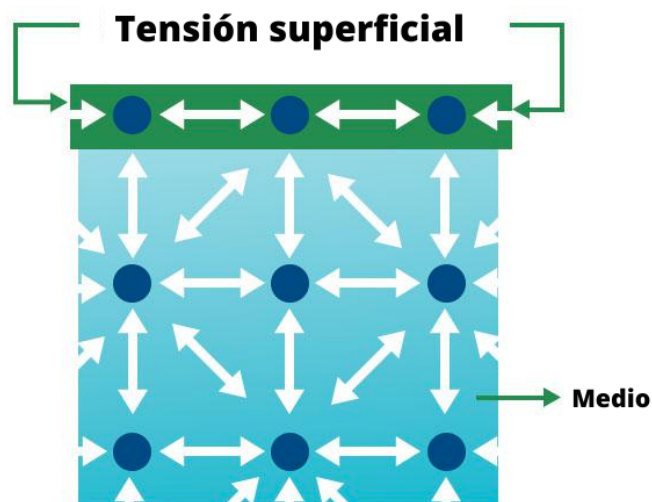


Figura 1.6: Esquema de la Tensión superficial. Ejemplo de la acción de fuerzas entre partículas en un medio y sobre la interfaz. Imagen adaptada de <https://www.geeksforgeeks.org/surface-tension/>

núcleo de las ENs la materia hadrónica podría sufrir una transición de fase a la materia de quarks, se estima que podría suceder algo parecido a lo que ocurre en la corteza, existiendo una fase mixta hadrón-quark en el núcleo de la estrella. A las ENs donde coexisten diferentes estados de la materia se las denomina *estrellas híbridas* (EHs), teorizadas en trabajos pioneros [Itoh, 1970, Baym et al., 1976, Brecher et al., 1976, Chapline, 1976, Keister et al., 1976]. En este trabajo se estudiará el caso en el que sucede una transición de fase mixta, y en el marco de este escenario, se hará foco en las posibles estructuras geométricas que podrían formarse allí. Estas formaciones geométricas surgen para minimizar la energía del sistema, producto de la competencia entre las fuerzas Coulombianas (interacción entre partículas cargadas eléctricamente, mediadas por el fotón) y los efectos de superficie de las mismas [Voskresensky et al., 2003]. Las posibles geometrías de estas estructuras microscópicas se muestran esquemáticamente en la Fig. 1.7. En esta figura se puede ver cómo los quarks libres quedan encerrados en esferas, a las que llamamos *gotas*, inmersas en un mar de hadrones y un fondo leptónico, de electrones y muones. Luego se forman unos cilindros, las *sogas*, y por último *lajas*. Cuando la proporción entre fases se invierte, tenemos un fondo de quarks y las mismas estructuras, pero hadrónicas (los cilindros serán, *tubos*, las esferas *burbujas*). Esta región de transición de la materia densa, se la llama *fase de pasta*, por la similitud de estas estructuras con ñoquis, spaghettis y lasagna. En los próximos capítulos se verá su influencia en las ENs, al incluirlas en la fase mixta que puede formarse en el interior de estos objetos.

Ahora que se tiene una idea sobre la posible composición de las ENs, puede surgir una pregunta ¿cómo nacen, se forman, y evolucionan estos objetos? La respuesta tiene que ver con el hecho de que algunas estrellas viven mucho más que otras, y cómo, al final de su vida, luego de la fase de *equilibrio hidrostático* se desencadena uno de las tres posibles finales: enanas blancas, agujeros negros o ENs [Shapiro et al., 2008]. En particular, el nacimiento de las ENs ocurre para estrellas cuyas masas tienen, originalmente, entre 8 y 20-30 veces la masa del Sol ³, M_{\odot} . El proceso que mantiene a la estrella en equilibrio es el regido entre la presión de la luz que sale de la estrella y la acción de la gravedad generada por su inmensa masa, que atrae todo hacia el centro de la misma. Esta fase dura al menos unos millones de años⁴. Estas estrellas masivas se diferencian de estrellas como el Sol, que son mucho mas frecuentes y viven hasta 10.000 veces más [Wikipedia, 2022b].

Durante su vida, una estrella es capaz de fusionar átomos más livianos como

³Que, sólo por diversión, es: 10.000.000.000.000.000.000.000.000 (10^{28}) veces la masa de una persona.

⁴Se traduce en aproximadamente 80.000 generaciones de una familia humana, que se puede contar como lo que tarda un caracol en dar 21.000 vueltas a la Tierra.

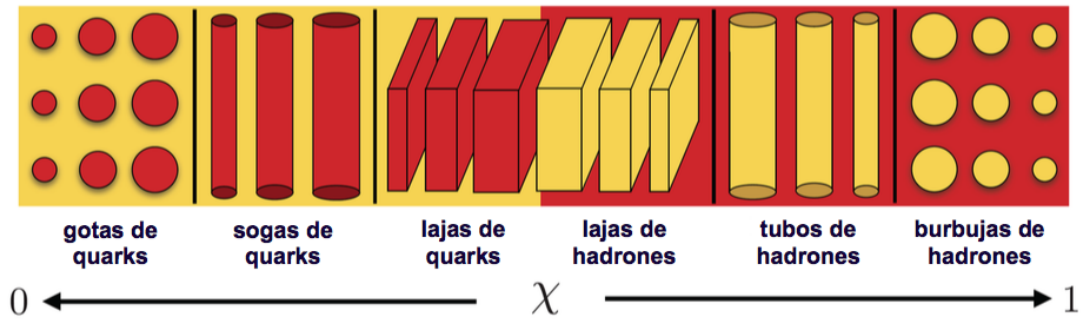


Figura 1.7: Fase de Pasta: esquema de la geometría de las estructuras microscópicas que podrían surgir en la fase mixta. De izquierda a derecha encontramos: gotas, sogas, lajas, tubos y burbujas.

el Hidrógeno y Helio en elementos más pesados como el Carbono y Oxígeno, pero las que están dentro del rango de masas mencionado anteriormente o aún mayor, siguen quemando combustible en estructuras de capas hasta llegar al Hierro, pasando por la fase final de supergigante roja⁵. En esta etapa, la estrella ya no puede extraer energía fusionando átomos. Cuando esto sucede el núcleo de la estrella no puede aguantar su propio peso ni el de la masa que tiene por encima, por lo que colapsa (ver esquema en Fig. 1.8 (a)). Durante la contracción gravitatoria final se producen una serie de reacciones que fabrican multitud de átomos más pesados que el Hierro mediante procesos de captura de neutrones y de protones. Luego, una onda de choque se propaga por las capas exteriores, las cuales salen rebotando hacia el exterior, como se esquematiza en la Fig. 1.8 (b). Dichas capas reciben, además, un excedente de energía de las reacciones nucleares producidas en el último estertor de la estrella, buena parte de ésta en forma de neutrinos. La conjunción de esos dos efectos da lugar a el famoso evento llamado *supernova* [Wikipedia, 2023]. De esta forma, luego de un evento supernova tipo II, Ib o Ic, queda como remanente compacto una EN, como se ilustra en la Fig. 1.8 (c).

En esta instancia uno podría dudar de si el relato anterior acerca de la posible composición exótica de estos remanentes compactos es siquiera real, contrastable o producto de la imaginación de un estudiante. Por suerte, es un momento en la historia del estudio de las ENs en la que con múltiples observaciones astronómicas se esta avanzando en la restricción y refinamiento de los modelos teóricos. Surgen entonces dos preguntas: ¿Qué proponen estos modelos astrofísicos de las ENs? ¿qué dicen las observaciones? La respuesta a la primera es que en general se plantea a las ENs como un gas de fermiones en interacción. Como mencionamos, debido al *Principio de exclusión de Pauli*, estos no pueden estar en el mismo

⁵Fase de la vida de una estrella masiva, cuando es muy luminosa, poco densa y muy grande.

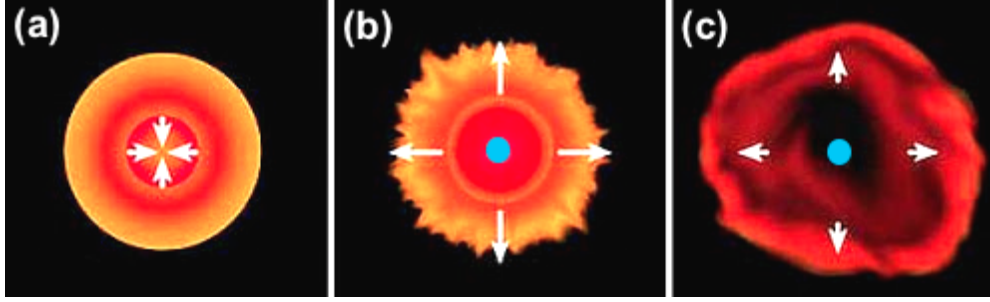


Figura 1.8: Esquema del nacimiento de una estrella de neutrones y remanente del evento supernova. a) Implosión del núcleo de la súpergigante roja. b) Explosión supernova y presencia del objeto compacto remanente en el centro de la explosión, una proto-estrella de neutrones. c) Remanente de la supernova luego de la explosión, junto con el remanente compacto central ya frío, la estrella de neutrones. Fuente: https://chandra.harvard.edu/xray_sources/supernovas.html

estado cuántico. Esto es de vital importancia ya que implica que en los estados de alta densidad de la materia, como sucede en las ENs, se genere la llamada *presión de degeneración de los neutrones*. Esta presión frena el colapso gravitatorio de la ENs, garantizando un equilibrio estable. Es decir si no existiera un mecanismo que contrarreste la acción que ejerce la fuerza gravitatoria sobre la EN, ésta colapsaría bajo su propia gravedad y, por lo tanto, no existiría. Este mecanismo lo proveen principalmente neutrones⁶ (y, posiblemente, los quarks más cerca del núcleo interno [Dar et al., 2015]), que al no poder ocupar el mismo lugar con la misma velocidad que sus vecinos, adquieren velocidades cada vez más altas, generando una presión; este fenómeno, junto con la fuerza fuerte actuando de manera repulsiva, mantiene a la estrella en equilibrio.

Desde el punto de vista del modelado teórico de dicho escenario, usando la mecánica estadística cuántica se determina una ecuación de estado (EdE), una relación entre la presión y la densidad de energía de este gas. Esta EdE, en conjunto con las ecuaciones Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) [Oppenheimer et al., 1939], las ecuaciones de equilibrio hidrostático estelar (en el contexto de la Relatividad General, una de las exitosas teorías de Albert Einstein) y de conservación de la masa⁷ se pueden obtener la dependencia de la masa, presión y densidad de energía como función del radio.

Por otro lado, para comenzar a responder la pregunta acerca de que dicen las observaciones sobre las EN, es de especial interés astrofísico el diagrama masa-radio de estas estrellas. Lo ideal sería, a través de una única EdE, obtener una curva masa-radio, donde cada punto de la curva representa un estrella, que pase por todas las restricciones observacionales de las ENs, y de esta manera explicar

⁶Estos neutrones se crean a partir de interacciones entre electrones y protones en el proceso llamado decaimiento beta inverso o captura electrónica [Langanke et al., 2021].

⁷Todas estas ecuaciones serán presentadas en detalle en los Capítulos 2 y 3 de esta tesis.

la existencia de estos objetos desde sus constituyentes mas fundamentales.

Desde un punto de vista observacional, es interesante mencionar que el descubrimiento de las ENs fue una serendipia; en un principio, se las clasificó como radiopúlsares⁸, ya que emiten ondas de radio de una manera particular: si bien esta emisión es continua, se detecta como si fuese pulsada, de manera periódica. Esto sucede ya que el eje magnético, que marca la dirección en la cual es colimada gran parte de la radiación, y el eje de rotación de las ENs, no están alineados, produciendo un *efecto faro* en la llegada de estos haces de luz a la Tierra [Goldreich et al., 1969]. Como por lo general las ENs presentan altas velocidades de rotación, los períodos suelen ser del orden de décimas de segundo e inclusive algunos llegan al orden de los milisegundos⁹. Además, las ENs emiten en rayos X y/o rayos Gamma (luz altamente energética), por ejemplo, a través de procesos no térmicos, como los de acreción de materia, brindada por una estrella compañera¹⁰ [Tan, 2021]. Por otra parte, ENs jóvenes emiten rayos X en forma térmica con temperaturas superficiales del orden de $10^6 - 10^7$ °K. Actualmente se conocen ~ 2000 púlsares y existen unas ~ 40 ENs de las que se conocen muy bien sus masas a través de sus parámetros orbitales [Orsaria et al., 2019].

Más allá de dicha cantidad de observaciones ya establecidas desde hace algunas décadas, la detección reciente de los púlsares PSR J1614-2230 [Demorest et al., 2010] y PSR J0348+0432 [Antoniadis et al., 2013], con una gran precisión en la determinación de sus masas ($M \sim 2M_{\odot}$), inició una nueva era en el campo de investigación de las ENs. El alto valor obtenido para las masas de estos objetos no se había detectado nunca antes y obligó a reformular los modelos que existían. Desde entonces, han surgido numerosas mediciones y detecciones relacionadas con las ENs. El trabajo de [Arzoumanian et al., 2018] mejoró la medición de masa de PSR J1614-2230 y, más recientemente, se detectó un nuevo púlsar de gran masa, PSR J0740+6620 [Cromartie et al., 2020], también corregido posteriormente por [Fonseca et al., 2021]. Además, en lo que significó el comienzo de la astronomía multimensajera con ENs, los observatorios de ondas gravitacionales¹¹ (OGs) LIGO/Virgo han confirmado dos eventos de fusión de ENs, GW170817 [Abbott et al., 2017] y GW190425 [Abbott et al., 2020]. En particular, para el evento GW170817 también se detectó su contraparte electromagnéti-

⁸En realidad primero fueron clasificados como LGM, del inglés *little green men*, pensando que estaban recibiendo señales de vida inteligente fuera de la Tierra.

⁹Un milisegundo (ms) equivale a 0.001 segundos (s). Notar la diferencia con la Tierra que tarda 24 *horas* $\equiv 24 \cdot 3600s = 86400s$ en dar una vuelta.

¹⁰Una estrella le cede su propia masa a otra, y ésta comprime el material en un disco a su alrededor, que se calienta y emite luz.

¹¹Éstas son perturbaciones de la métrica que se propagan en un espacio plano. La métrica es la herramienta que permite medir distancias en un espacio no necesariamente plano. Un espacio curvado podría ser la superficie de una esfera, en la que la menor distancia entre dos puntos (sobre la esfera) no es una recta, sino una curva.

ca, esto es la luz que detectamos del mismo evento, GRB170817A y AT2017gfo [Abbott et al., 2017, Abbott et al., 2017]. Estas observaciones han restringido no sólo la masa y el radio de las ENs, sino también su deformabilidad de marea adimensional¹², Λ ; se estimó que la deformabilidad de marea adimensional de un objeto de $1,4 M_{\odot}$ está en el rango de 70-580 [Abbott et al., 2018]. Además, el análisis del objeto resultante de este evento permitió establecer una cota superior para la masa máxima de estos objetos, $\sim 2,3M_{\odot}$ [Rezzolla et al., 2018, Shibata et al., 2019]. Este escenario de las ondas gravitacionales, es uno de los más prometedores para lograr comprender el comportamiento de la EdE de la materia densa. Particularmente, el estudio de oscilaciones no radiales en estrellas de neutrones podrían responder a la incógnita respecto a la presencia o no de materia de quarks en las estrellas de neutrones [Ranea-Sandoval et al., 2018, Rodríguez et al., 2021]. Por último, la puesta en marcha del detector NICER también ha proporcionado observaciones particularmente relevantes en los tres últimos años; esta colaboración ha medido la masa y el radio de los púlsares PSR J0030+0451 [Miller et al., 2019, Riley et al., 2019] y, en una observación conjunta con el telescopio XMM-Newton, PSR J0740+6620 [Miller et al., 2021, Riley et al., 2021]. Estas restricciones, masas y radios observados de distintas ENs, permiten a los astrofísicos poner a prueba las EdE con las que modelan a estos objetos. Así, usando diferentes modelos para las EdE en las ecuaciones TOV y obteniendo la relación masa-radio como mencionamos anteriormente, podemos comprobar si los modelos teóricos satisfacen las cotas observacionales existentes. Se espera que en los próximos años haya más observaciones y se mejore la precisión de las medidas, tanto con nuevas tecnologías en la detección de ondas gravitacionales, como con el telescopio NICER para establecer nuevas restricciones y determinar la EdE de la materia densa que compone las ENs. Las nuevas preguntas que surjan a partir de estos avances, con suerte motivarán el camino hacia un futuro donde el conocimiento sea global y no un privilegio.

En este punto es importante mencionar que hasta aquí hemos intentado dar un panorama microscópico y macroscópico al abordaje de nuestro objeto de interés: la microfísica, descrita en los primeros párrafos de este capítulo, y la macrofísica, que va desde moléculas complejas hasta distantes galaxias, pero que en esta tesis se relaciona con las propiedades globales de las ENs, como la masa o el radio. Ambas ramas fueron desarrolladas con un alto nivel de complejidad durante el siglo XX. Como ya se puede advertir, en esta tesis utilizamos conocimiento de la *teoría cuántica de campos* y la *relatividad general*. Son las teorías más exitosas de la historia de la ciencia en cuanto a la increíble precisión de sus predicciones

¹²Esto es un parámetro crítico, asociado a la distribución de masa del objeto y que caracteriza la señal previa a una fusión.

y además, en algunos aspectos, imposibles de imaginar, siendo que las personas estamos acostumbradas a la física restringida por los sentidos. La interpretación de ambas teorías en la búsqueda de los principios que rigen el Universo, se convierte en un reto fascinante, alimentando la creatividad de géneros como el de la ciencia ficción, que más de una vez se disfrutaron.

Planteado el objeto de estudio y el contexto actual, el objetivo general de este trabajo de tesis es el estudio teórico de la composición y estructura de las ENs, modelándolas como EHs. En este proceso, se busca adquirir el conocimiento y manejo de modelos teóricos de EdE híbridas, combinando teorías que describan la materia en los núcleos externo e interno de las ENs. En particular, se construirá una fase mixta dentro de las ENs, con la consecuente formación de estructuras geométricas producto de la combinación de los efectos de la fuerza coulombiana y de superficie en la interfaz hadrón-quark. Esto implicará realizar desarrollos de códigos numéricos y el aprendizaje del manejo del código de las ecuaciones TOV para obtener modelos de EHs, las correspondientes relaciones masa-radio, sus implicancias y su validez y/o refutabilidad. Más específicamente:

- Se modelará la materia de quarks con tres sabores *up*, *down* y *strange* analizando los efectos de la inclusión de la constante de acoplamiento fuerte entre los quarks y la masa del quark extraño.
- Para construir la fase mixta hadrón-quark, se usará una EdE hadrónica desarrollada por el grupo de trabajo.
- Se incorporarán las ecuaciones correspondientes a las estructuras geométricas en la fase mixta de la EdE híbrida.
- Una vez obtenidas las EdEs híbridas con fase mixta y pasta hadrón-quark, se construirán familias de EHs en equilibrio resolviendo las ecuaciones de equilibrio hidrostático en el marco de la teoría general de la relatividad (Ecuaciones TOV), para luego obtener cantidades observables de interés, tales como su masa y radio.

Por último, la tesis estará estructurada en el siguiente orden:

- En el Capítulo 1 se introdujo el contexto astrofísico que da pie a los objetivos planetados y para abordar de manera más rigurosa el modelado del interior de las ENs.
- En el Capítulo 2 se mostrarán las teorías y modelos que permitirán construir las ecuaciones de estado híbridas.

-
- En el Capítulo 3 se expondrá la motivación de porqué es necesario introducir la relatividad general a las ecuaciones de estructura estelar. Luego se mostrará la teoría que las describe y se obtendrán y presentarán dichas ecuaciones.
 - En el Capítulo 4 serán presentados y analizados los resultados obtenidos en este trabajo de tesis.
 - En el Capítulo 5, finalmente, se detallará un breve resumen de lo realizado y se discutirán las conclusiones de este trabajo de licenciatura.

Capítulo 2

Materia de quarks en estrellas de neutrones: estrellas híbridas

Como fue mencionado en el Capítulo 1, la EdE para la materia con la que están hechas las ENs es desconocida hasta el momento. Recordemos que en este régimen, la materia se comprime por acción de la gravedad hasta densidades de varias veces la densidad de saturación nuclear y el colapso de los átomos y la compresión de los núcleos atómicos parecería ser inevitable. En este contexto, uno esperaría, en principio, que ocurriera una transición de fase de primer orden de materia hadrónica a materia de quarks (por la zona en la que se ubican las EN en el diagrama de fases de la QCD, ver Fig. 1.4 del Capítulo 1). Esta transición puede darse de forma abrupta, a presión constante y con un salto en la densidad de energía, (*construcción de Maxwell*), o puede ser una transición de fase mixta, donde la presión crece monotónicamente con la densidad de energía, el salto en densidad de energía entre las fases hadrónica y de quarks no existe, y hay una región intermedia de coexistencia (*construcción de Gibbs*).

Ya en 1976 comenzaron las ideas de modelar EHs, tratando de explicar una posible transición de fase a materia de quarks en las ENs, considerando un núcleo interno de quarks como una bolsa gigante conteniendo a estas partículas [Baym et al., 1976]. De este *modelo de bolsa* daremos detalles en la siguiente subsección del presente capítulo.

En esta tesis se trabajó con la *construcción de Gibbs*, en la que se genera una fase mixta. La construcción de dicha fase para modelar la EdE híbrida, junto con las EdE de quarks y hadrónica, serán presentadas en este capítulo. Además, más adelante, se verá cómo introducir la formación de estructuras geométricas dentro de la fase mixta.

Antes de continuar, sin embargo, vale una aclaración. Si bien este capítulo y los objetivos de esta tesis están orientados a estudiar los fenómenos que ocurren en el núcleo de las ENs, el proceso de construcción de la EdE requiere considerar

de manera completa el rango de densidades existente. Por lo tanto, para la región que rodea al núcleo, la corteza, tomaremos resultados existentes en la literatura. En la corteza de las ENs, las densidades son menores que la densidad de saturación nuclear, n_0 , por lo que es posible realizar experimentos de laboratorio y reducir la incertidumbre en la EdE para este régimen de bajas densidades. En nuestro caso, para incluir la corteza en la EdE total utilizamos los modelos subnucleares de Baym-Pethick-Sutherland (BPS) [Baym et al., 1971b] y Baym-Bethe-Pethick (BBP) [Baym et al., 1971a].

2.1. Ecuación de estado para materia de quarks con corrección de la constante de acoplamiento fuerte

Las predicciones teóricas de la QCD fueron testeadas en varios experimentos [Bethke, 2007]. Colisiones de alta energía entre protones revelan la existencia de tres partículas dentro del protón. El espectro de masas de los hadrones puede ser explicado por la QCD, resolviendo el lagrangiano de QCD con cálculos de supercomputadoras en una red discreta llamada LQCD (por sus siglas en inglés) ¹. Sin embargo, el fenómeno del confinamiento no es fácil de tratar ya que a densidad finita la QCD presenta algunos inconvenientes. Para estudiar la QCD a densidad finita, la acción, la integral temporal de la densidad lagrangiana, se vuelve compleja, imposibilitando comparar las probabilidades asociadas a distintas configuraciones. Por ello, para describir la materia de quarks al estudiar el diagrama de fases de la teoría y en el contexto de EN, se utilizan modelos fenomenológicos o efectivos.

Un modelo simple que reproduce la fenomenología de la QCD en estas condiciones es el Massachusetts Institute of Technology (MIT Bag Model o Modelo de bolsa del MIT), sugerido por [Chodos et al., 1974]. En este modelo los quarks se mueven libremente dentro de una región finita del espacio, con una energía constante por unidad de volumen B , llamada constante de bolsa o *Bag*. En esta región finita, la bolsa actuará como una presión externa contrarrestando la energía cinética de los quarks confinados en su interior.

Podemos modelar la materia de quarks dentro de la bolsa mediante un gas

¹LQCD fue inventada por K. Wilson (premio Nobel en 1982) para comprender la libertad asintótica y la propiedad de confinamiento de la QCD a partir de primeros principios. En LQCD el continuo espacio-tiempo cuadrimensional infinito se sustituye por un retículo hipercúbico finito.

ideal de Fermi-Dirac. Éste obedece la siguiente estadística:

$$f(\varepsilon_p) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} + 1}, \quad (2.1)$$

donde $f(\varepsilon_p)$ es el numero de ocupación promedio del fermión de masa m para la energía del nivel $\varepsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}$, μ es el potencial químico, $\beta = 1/kT$, siendo T la temperatura y k la constante de Boltzmann.

El potencial gran canónico para un fermión puede escribirse como [Kodama, 2002].

$$\Omega = -PV = \frac{gTV}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p \left(\ln[1 + e^{-\frac{\varepsilon_p - \mu}{T}}] + \ln[1 + e^{-\frac{\varepsilon_p + \mu}{T}}] \right), \quad (2.2)$$

donde V es el volumen del sistema y se han considerado unidades naturales, es decir, $\hbar = c = k = 1$, g es el factor de degeneración estadístico, y P la presión. El segundo término en la Ec. (2.2) corresponde a la presencia de los antiquarks. Este término en el límite de $T = 0$ no contribuye a la EdE; por lo tanto, los cálculos siguientes sólo incluirán el primer término de la Ec. (2.2), correspondiente a la contribución de los quarks. Aplicando integración por partes en la Ec. (2.2) se obtiene,

$$P = \frac{g}{6\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot \frac{p^4}{\varepsilon_p} \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon_p - \mu}{T}}}. \quad (2.3)$$

Para los quarks $g = 2N_c$ donde el factor 2 es debido a la degeneración del spin $\pm 1/2$ y $N_c = 3$, ya que representa los colores posibles de cada quark; por lo tanto $g = 6$. Como se mencionó, sólo consideramos tres sabores de quarks up (u) y down (d) sin masa, por simplicidad, y strange (s), con $m_s = 93$ MeV. Los quarks *top* y *bottom* se ignoran debido a que resultan demasiado masivos para los valores del potencial químico bariónico alcanzados en el interior de las ENs. Si bien el quark *charm* podría aparecer, ya que su masa es $\sim 1,2$ GeV, éste es inestable y decae casi en su totalidad en quarks s . Además, las estrellas con quarks *charm* son inestables frente oscilaciones radiales [Jiménez et al., 2020].

Como ya se anticipó, trabajaremos a temperatura cero. Esto es una buena aproximación para el tratamiento de la materia en ENs ya que si la temperatura de estos objetos es del orden del keV y el potencial químico (que coincide con la energía de Fermi E_f) ronda los 100 MeV (teniendo en cuenta $E_f = T_f$, en unidades naturales), se concluye que la temperatura de Fermi resulta $T_f \sim 100$ MeV. Esta última resulta unos seis órdenes de magnitud mayor que la temperatura de la estrella. Haciendo el límite para $T = 0$ en la Ec. (2.3), el número de ocupación Ec. (2.1) se convierte en la función escalón. En el caso de $m = 0$, $f_p \rightarrow \Theta(\mu - p)$, donde podemos definir $p_f = \mu$ el impulso de Fermi. Para los quarks u y d , la

Ec. (2.3) conduce a:

$$P = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_f} dp \cdot p^3 = \frac{p_f^4}{4\pi^2} = \frac{\mu^4}{4\pi^2}. \quad (2.4)$$

es decir sus presiones P_u y P_d son,

$$P_u = \frac{\mu_u^4}{4\pi^2}, \quad (2.5)$$

$$P_d = \frac{\mu_d^4}{4\pi^2}. \quad (2.6)$$

Para el caso del quark strange donde $m \neq 0$, $f_p \rightarrow \Theta(\epsilon_p - \epsilon)$; de la Ec. (2.3) obtenemos:

$$P_s = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_s^2 - m_s^2}} dp \cdot \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m_s^2}}. \quad (2.7)$$

Integrando por partes dos veces la Ec. (2.7), se obtiene

$$P_s = \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu_s (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2} (\mu_s^2 - \frac{5}{2} m_s^2) + \frac{3}{2} m_s^4 \ln \frac{\mu_s + \sqrt{\mu_s^2 - m_s^2}}{m_s} \right]. \quad (2.8)$$

Los electrones y muones están dentro de esta sopa de quarks y son tan numerosos como para ser tratados también como un gas ideal de Fermi. De la misma forma en que se deduce para los quarks, se puede hacer con el electrón y el muón con un factor de degeneración $g = 2$ (degeneración del espín); teniendo en cuenta que no interactúan fuertemente (por ser leptones), es decir sin correcciones de QCD, y despreciando la masa del electrón se tiene:

$$P_e = \frac{\mu_e^4}{12\pi^2}, \quad (2.9)$$

$$P_\mu = \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu_\mu (\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{1/2} (\mu_\mu^2 - \frac{5}{2} m_\mu^2) + \frac{3}{2} m_\mu^4 \ln \frac{\mu_\mu + \sqrt{\mu_\mu^2 - m_\mu^2}}{m_\mu} \right], \quad (2.10)$$

donde $m_\mu = 106,5$ MeV.

En las expresiones calculadas, si bien se ha considerado la degeneración de color de los quarks, nunca se introdujo la corrección debida a la interacción fuerte. En 1984, en el estudio de la materia de quarks a granel (en inglés *bulk quark matter*), es decir, donde se desprecian efectos de superficie considerando un *bulto* de materia de quarks, se incluyó una corrección debida a la constante de acoplamiento

to fuerte, α_s [Farhi et al., 1984]. En el caso en que el gas de quarks interactúa fuertemente se deben hacer correcciones $O(\alpha_s)$ a través de la expansión perturbativa de la QCD, desarrollando una renormalización de grupo mejorada. Para ello, es necesario elegir un punto de renormalización ρ donde $m(\rho)$ y $\alpha_s(\rho)$ estén definidas. Específicamente se eligió $\rho = M_N/3 = 313$ MeV, donde M_N es la masa del neutrón. Así, las presiones para los quarks livianos quedan de la siguiente forma [Farhi et al., 1984]:

$$P_u = \frac{\mu_u^4}{4\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi}\right), \quad (2.11)$$

$$P_d = \frac{\mu_d^4}{4\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi}\right), \quad (2.12)$$

$$P_s = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \mu_s (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2} \left(\mu_s^2 - \frac{5}{2} m_s^2 \right) + \frac{3}{2} m_s^4 \ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2}}{m_s} - \frac{2\alpha_s}{\pi} \left[3 \left(\mu_s (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2} - m_s^2 \ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2}}{\mu_s} \right)^2 - 2(\mu_s^2 - m_s^2)^2 + 3m_s^4 \ln \left(\frac{m_s}{\mu_s} \right)^2 + 6 \ln \left(\frac{\rho}{\mu_s} \right) \left(\mu_s m_s^2 (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2} - m_s^4 \ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2}}{m_s} \right) \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Finalmente, se tiene que derivar para así obtener las densidades correspondientes: haciendo uso del gran potencial, o lo que es lo mismo, la presión, podemos calcular las densidades de las partículas i como $n_i = \partial P_i / \partial \mu_i$ [Haar et al., 2007], obteniendo

$$n_e = \frac{\mu_e^3}{3\pi^2}, \quad (2.14)$$

$$n_\mu = \frac{(\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{3/2}}{3\pi^2}, \quad (2.15)$$

para los leptones, y

$$n_u = \frac{\mu_u^3}{\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi}\right), \quad (2.16)$$

$$n_d = \frac{\mu_u^3}{\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi}\right), \quad (2.17)$$

$$n_s = \frac{1}{\pi^2} \left[(\mu_s^2 - m_s^2)^{3/2} - \frac{2\alpha_s}{\pi} \left(\mu_s(\mu_s^2 - m_s^2) - 3m_s^2(\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. \ln \frac{\mu_s + (\mu_s^2 - m_s^2)^{1/2}}{\rho} + \frac{3m_s^4 \ln \frac{\mu_s}{m_s}}{\mu_s} \right) \right], \quad (2.18)$$

para los quarks.

Lo siguiente a tener en cuenta para trabajar en el contexto de las EHs es que se requiere equilibrio químico respecto a las interacciones débiles. Para la materia de quarks, se establecen las siguientes relaciones:

$$d \rightarrow u + e + \bar{\nu}_e, \quad (2.19)$$

$$s \rightarrow u + e + \bar{\nu}_e, \quad (2.20)$$

$$s + u \rightarrow u + d. \quad (2.21)$$

Como las EHs se encuentran en un estadio en el que ya se enfriaron, el camino libre medio de los neutrinos es mayor que el tamaño de la estrella. Al estar tan diluido el gas de neutrinos, y como el potencial químico es la medida de cómo cambia la energía del sistema por entrada o salida de estas partículas, podemos asumir entonces que $\mu_{\bar{\nu}_e} = 0$. Siendo así, se puede establecer la siguiente relación entre los potenciales químicos de las partículas consideradas:

$$\mu_d = \mu_s \equiv \mu, \quad (2.22)$$

$$\mu_u + \mu_e \equiv \mu, \quad (2.23)$$

donde $\mu = (\mu_u + \mu_d + \mu_s)/3$ es el potencial medio de los quarks. Los potenciales de los quarks en términos de μ y μ_e están dados por

$$\mu_u = \mu - \frac{2}{3}\mu_e, \quad (2.24)$$

$$\mu_d = \mu + \frac{1}{3}\mu_e, \quad (2.25)$$

$$\mu_s = \mu + \frac{1}{3}\mu_e. \quad (2.26)$$

Además, todo sistema en la hipótesis de materia a granel tiene que cumplir la ecuación de neutralidad de carga eléctrica local:

$$2n_u - (n_d + n_s) - 3(n_e + n_\mu) = 0, \quad (2.27)$$

consiguiendo así una única variable independiente μ , la cuál, cuando se quiere obtener la EdE en un rango de potenciales químicos, debe ser recorrida desde valores iguales a un tercio de la masa del neutrón.

Entonces, ahora se dispone de todos los ingredientes para obtener la EdE de quarks con correcciones debido a la constante de acoplamiento fuerte, dentro del modelo de bolsa del MIT, que surge de un análisis mecánico-estadístico o termodinámico:

$$\varepsilon = \sum_{i=u,d,s,e,\mu} [\mu_i n_i - P_i] + B, \quad (2.28)$$

donde ε es la densidad de energía e i recorre los tres sabores de los quarks, del electrón y muón. B , la constante de bolsa, actúa como una energía por unidad de volumen (o presión) cumpliendo el confinamiento que proviene de las interacciones de largo alcance de la QCD. El problema del modelo es que si bien da cuenta del confinamiento, no reproduce la libertad asintótica: aunque la densidad aumente indefinidamente la constante de bolsa tiene un valor fijo. Si bien hay modelos que tratan de corregir esto último, e introducen un *bag* dependiente de la densidad [Sen et al., 2021], en este trabajo consideraremos la constante de bolsa como un parámetro fijo del modelo.

2.2. Meta-estabilidad de la materia de quarks

La conjetura de Bodmer-Witten [Bodmer, 1971, Witten, 1984] sugiere que la materia de quarks conocida como materia extraña, formada por quarks u , d y s es el estado fundamental de las interacciones hadrónicas. Es decir, la materia extraña es más estable que la materia nuclear. En esta definición, la presión crítica es cero: el verdadero estado fundamental de la materia es siempre materia de quarks. Si esta conjetura fuera válida, las EHs, serían, en realidad, estrellas de quarks (EQs).

El elemento conocido más estable de la naturaleza que puede producirse en contextos astrofísicos es el Hierro, ${}^{56}\text{Fe}$. Si la materia de quarks que estamos considerando fuera absolutamente estable, debería tener una energía por barión menor que la masa de dicho elemento químico. Como nosotros no estamos interesados en las EQs sino en EHs, debemos tener en cuenta la conjetura de Bodmer-Witten para considerar valores de los parámetros libres de nuestro modelo por fuera de la ventana de estabilidad, presentada en la Fig. 2.1.

Para obtener la Fig.2.1 se construyó un programa en BASH que ejecuta un código en FORTRAN 90 para obtener distintas EdEs para distintos valores de los parámetros libres del modelo, la constante de acoplamiento fuerte, α_s , y el Bag, B .

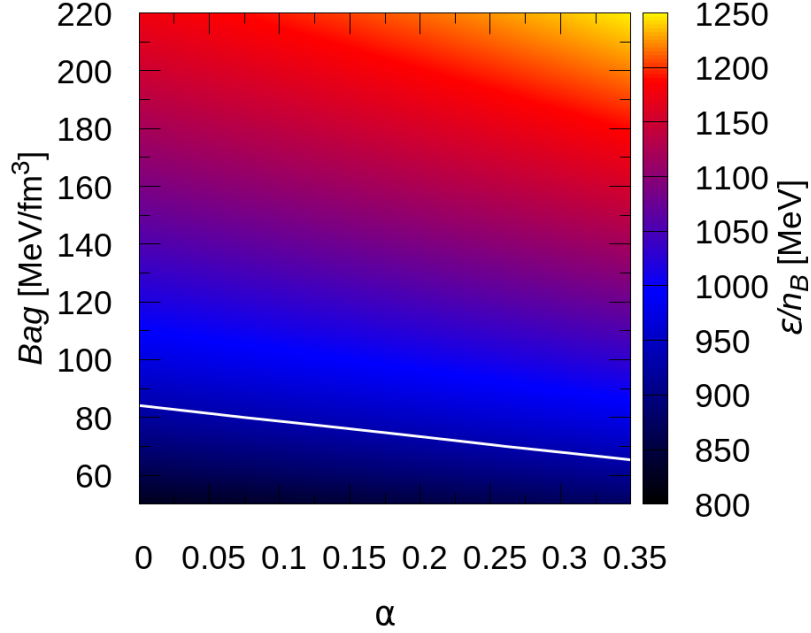


Figura 2.1: Mapa de color: densidad de energía por barión en función de los parámetros de nuestro modelo, B_{ag} y α . La línea blanca determina la curva de nivel correspondiente al valor de la masa del ^{56}Fe , 930 MeV; por debajo de ella se encuentra la denominada ventana de estabilidad de la materia extraña para nuestro modelo.

Los valores fueron recorridos entre 0,0-0,35 para α_s y entre 50-220 MeV/fm³ para B . Durante la ejecución del código se calculó la energía por barión a presión cero para cada conjunto de parámetros. Se identificaron las combinaciones de parámetros que producían una energía por barión mayor a la del hierro (^{56}Fe), de manera de seleccionar EdEs por fuera de la ventana de estabilidad: si se quiere modelar EHs es necesario que la materia nuclear sea la más estable en estas condiciones, ya que de otra forma la estrella se convertiría en una EQ. Para combinaciones de parámetros por debajo de la línea blanca de la Fig. 2.1 estaríamos en el régimen de la hipótesis de la materia extraña propuesta por [Bodmer, 1971, Witten, 1984].

En esta tesis hemos elegido un valor fijo para la constante de acoplamiento, $\alpha_s = 0,35$. El valor de α_s que consideramos fue acotado teniendo en cuenta la teoría de perturbaciones renormalizadas de QCD, en la que la constante de acoplamiento fuerte se puede escribir como [Kurkela et al., 2010, Jiménez et al., 2020],

$$\alpha_c(\bar{\Lambda}) = \frac{4\pi}{\beta_0 L} \left(1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln L}{L} \right), \quad (2.29)$$

donde $N_f = 3$, $\beta_0 = 11 - 2N_f/3$, $\beta_1 = 51 - 19N_f/3$, $L = 2 \ln(\bar{\Lambda}/\Lambda_{\overline{MS}})$. Tomamos

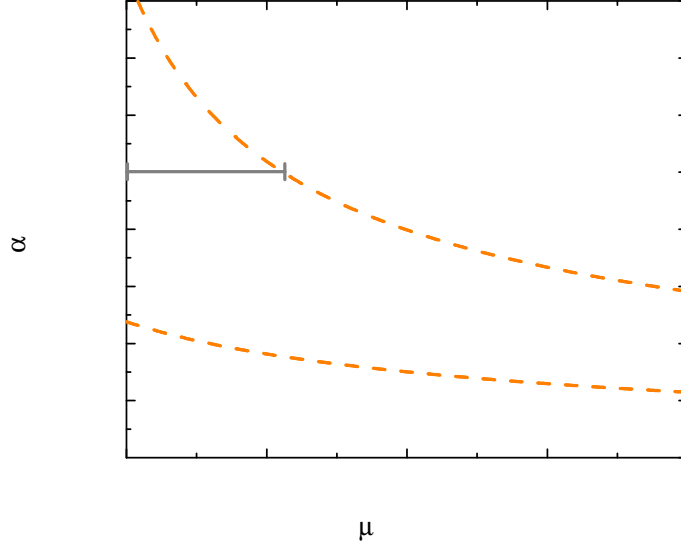


Figura 2.2: Constante de acoplamiento α_s como función del potencial químico μ . Las líneas punteadas naranjas indican los límites considerados para el factor de escala Λ , de la Ec. (2.29). La barra gris indica el valor fijo de $\alpha_s=0.35$, en el intervalo de potenciales químicos $\mu \in (1-1.5)$ GeV relevantes para las EHs consideradas en esta tesis.

el factor de escala $\Lambda_{\overline{MS}} \sim 378$ MeV [Kurkela et al., 2010] y $\bar{\Lambda} = x \sum_j \mu_j / N_f$, donde el parámetro $1 \leq x \leq 4$ [Jiménez et al., 2020]. Con la Ec. (2.29), se puede construir la Fig. 2.2.

Además, elegimos en particular dos EdE de materia de quarks correspondientes a dos valores de la *bag*, 120 MeV/fm³ y 220 MeV/fm³, ambos por encima de la línea del ^{56}Fe , donde la materia de quarks no es estable. La elección de valores de B no fue arbitraria, sino que nos interesa, además, comparar nuestros resultados con los obtenidos por [Benhar et al., 2005]. En dicho trabajo, se estudia la estabilidad de la fase mixta en EHs usando un modelo de quarks muy similar al nuestro y la EdE hadrónica conocida como APR [Schneider et al., 2019].

2.3. Ecuación de estado para materia hadrónica

Para la región correspondiente al núcleo externo y la descripción de la materia hadrónica de las EHs se usó el modelo *Walecka no lineal*, que es un método de la teoría relativista de campo medio [Bednarek, 2007]. Ésta describe interacciones entre nucleones a través de intercambios de mesones: escalar iso-escalar σ , y vector iso-escalar ω_μ , vector iso-vectorial $\vec{\rho}_\mu$. Se tendrán en cuenta neutrones, protones, electrones y muones, que también se encuentran en equilibrio químico a través de la relación

$$\mu_B = \mu_n - q_B \mu_e, \quad (2.30)$$

donde μ_n y μ_e son los potenciales químicos del neutrón y del electrón, respectivamente, y $q_B = 0, 1$ es la carga eléctrica del neutrón y protón, respectivamente.

La densidad lagrangiana de la materia hadrónica de las EHs en equilibrio beta es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_N \bar{\Psi}_N (i\mathcal{D} - (m_N g_{\sigma N} \sigma)) \Psi_N + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^a R^{a\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} m_\rho \rho_\mu^a \rho^{a\mu} - U(\sigma) + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $\lambda = e, \mu$ corresponde a los leptones y $N = n, p$ a los nucleones, $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$ es la derivada covariante, $D_\mu = \partial_\mu + ig_{\omega N} \omega_\mu + ig_{\rho N} I_{3N} \tau^a \rho_\mu^a$, contraída con las matrices gamma γ_μ ². Las constantes de acoplamiento mesón-nucleón, son $g_{\omega N}$ y $g_{\rho N}$, y la cantidad I_{3N} es la proyección de isospín de cada nucleón en la dirección 3.

La derivada parcial es reemplazada por la derivada covariante. De esta forma se tiene una invariancia frente a rotaciones locales de los respectivos grupos de simetría. Necesitamos que en conjunto con la transformación de los campos de calibre, no modifiquen la densidad lagrangiana. Es decir, introducir la derivada covariante implica tener en cuenta la variación del campo del nucleón y la interacción con los mesones de forma que frente a transformaciones de calibre locales la densidad lagrangiana permanezca invariante. Por ende la acción también quedará invariante, y entonces se encuentra una simetría del sistema. Por el teorema de Noether, al haber una transformación continua, se garantiza la conservación de una tetra-corriente, donde su componente cero da la cantidad conservada temporalmente. La interacción nucleón- ω da lugar al número bariónico como cantidad conservada, mientras que nucleón- ρ la densidad de isospín.

Retomando la expresión de la densidad lagrangiana Ec. (2.31) aquí quedan definidos el resto de los términos:

$$\begin{aligned} U(\sigma) &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{3} a m_n g_{\sigma N}^3 \sigma^3 + \frac{1}{4} b g_{\sigma N}^4 \sigma^4, \\ R_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu \rho_\nu^a - \partial_\nu \rho_\mu^a + g_{\rho N} \varepsilon_{abc} \rho_\mu^b \rho_\nu^c, \\ \Omega_{\mu\nu} &= \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \end{aligned}$$

donde el primero es el potencial del mesón escalar σ que hace que el modelo sea no-lineal y los últimos dos son los campos tensoriales de ambos mesones, ω y ρ . Las constantes a y b del potencial U se ajustan de acuerdo a la parametrización

²En la base de Weyl $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{2 \times 2} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \mathbb{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$ con $\sigma^\mu \equiv \{\mathbb{1}_{2 \times 2}; \sigma^i\}$ y $\bar{\sigma}^\mu \equiv \{\mathbb{1}_{2 \times 2}; -\sigma^i\}$ donde σ^i son las matrices de Pauli.

considerada. En nuestro caso, usamos la parametrización conocida como GM1 [Glendenning et al., 1991], en la que $a = 0,002947$ y $b = -0,00107$. La masa del neutrón considerada es $m_n = 939,6$ MeV y la del protón, $m_p = 938,3$ MeV.

Con la densidad lagrangiana dada por la Ec. (2.31) se puede aplicar el principio variacional y obtener las ecuaciones de movimiento para los campos involucrados. Las soluciones pueden ser halladas tomando los valores medios clásicos de los campos mesónicos, sumados a sus respectivas fluctuaciones cuánticas (que no están consideradas en el nivel fundamental), como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \bar{\sigma}(x) + s_0, \\ \omega_\mu(x) &= \bar{\omega}_\mu(x) + \langle w_\mu \rangle, \\ \rho_\mu^a(x) &= \bar{\rho}_\mu^a(x) + \langle r_\mu \rangle \delta^{3a}.\end{aligned}$$

Una vez establecida la hipótesis de materia infinita e isotrópica, las ecuaciones de movimiento se escriben como sigue:

$$m_\sigma^2 s_0 + a m_n g_{\sigma N}^2 s_0^2 + b g_{\sigma N}^3 s_0^3 = \sum_N g_{\sigma N} \rho_s, \quad (2.32)$$

$$m_\omega^2 w_0 = \sum_N g_{\omega N} n_N, \quad (2.33)$$

$$m_\rho^2 r_0 = \sum_N \frac{1}{2} g_{\rho N} \rho_3, \quad (2.34)$$

donde $n_N = \langle \bar{\Psi}_N \gamma^0 \Psi_N \rangle$, $\rho_s = \langle \bar{\Psi}_N \Psi_N \rangle$, $\rho_3 = \langle \bar{\Psi}_N \gamma^0 \tau_3 \Psi_N \rangle$, son los valores de expectación del estado fundamental de la densidad bariónica, escalar, y de isospín respectivamente. El espectro de autovalores para la energía está dado por:

$$e_\pm(k) = (g_{\omega N} w_0 + \frac{1}{2} g_{\rho N} r_0) \pm (k^2 + (m_N - g_{\sigma N} s_0))^{1/2}.$$

Para calcular la densidad de energía ε y la presión P de la materia nuclear, debe ser utilizado el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Éste viene dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\mu \phi_i - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

En esta ecuación, ϕ_i denota los campos fermiónicos y bosónicos. La densidad de energía ε es igual a $\langle T_{00} \rangle$, mientras que la presión P está relacionada con el valor medio estadístico de la traza de la parte espacial del tensor de energía impulso T_{ij} . Los valores explícitos de la densidad de energía y la presión pueden

Parámetro	Valor GM1
m_σ (MeV)	512
m_ω (MeV)	783
m_ρ (MeV)	770
$g_{\sigma N}$	8.910
$g_{\omega N}$	10.610
$g_{\rho N}$	8.196

Cuadro 2.1: Cantidades usadas en la EdE hadrónica para la parametrización GM1.

ser calculados, y toman la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m_\omega^2 w_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2 r_0^2 + U(s_0) + \varepsilon_N, \quad (2.35)$$

$$P = \frac{1}{2}m_\rho^2 r_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega w_0^2 - U(s_0) + P_N, \quad (2.36)$$

donde si $k_{F,N}$ es el impulso de Fermi para el nucleón N, entonces ε_n y P_N se escriben como:

$$\varepsilon_N = \sum_{N=n,p} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_{F,N}} k^2 \sqrt{k^2 + (m_N - g_{\sigma N} s_0)^2} dk,$$

$$P_N = \sum_{N=n,p} \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_{F,N}} \frac{k^4 dk}{(k^2 + m_N - g_{\sigma N} s_0)^2},$$

permitiendo así construir una EdE hadrónica que será usada en la construcción de EHs [Bednarek, 2007]. Las masas de los mesones y los valores de las constantes de acoplamiento utilizadas se muestran en la Tabla 2.1.

2.4. Construcción de la fase mixta

La tensión superficial σ_{HQ} en la interfaz hadron-quark juega un papel importante en el tratamiento de una posible transición de fase dentro de las ENs, y su valor aún es incierto. En [Heiselberg et al., 1993] se estimó un valor crítico $\sigma_{HQ,crit} \sim 70 \text{ MeV}/fm^2$. Para $\sigma_{HQ} > 70 \text{ MeV}/fm^2$, la fase mixta se vuelve menos favorable energéticamente, mecánicamente inestable, y el tratamiento de la transición de fase debe hacerse usando el formalismo de Maxwell, considerando un salto en la densidad de energía del sistema. Hay distintos trabajos que exploran diferentes modelos teóricos [Berger et al., 1987, Lugones et al., 2017, Lugones et al., 2019] y hasta geométricos [Pinto et al., 2012] para determinar el valor de σ_{HQ} .

La condición para la transición a una fase más estable se cumple si la energía

libre de Gibbs, E_G ,

$$E_G = \frac{G}{n_B} = \frac{\epsilon - TS + P}{n_B} = \sum_i \mu_i n_i, \quad (2.37)$$

de la fase de quarks es menor que la energía libre de Gibbs de la fase de hadrones, para presiones superiores a la presión de transición. En la Ec. (2.37), G es la energía de Gibbs por unidad de volumen, ϵ es la densidad de energía por unidad de volumen, T es la temperatura y S es la entropía por unidad de volumen. Cuando el sistema es homogéneo y tenemos la misma clase de partículas en las dos fases o la temperatura es cero, pedir que la energía de Gibbs por partícula sea igual de los dos lados es equivalente a pedir que los potenciales químicos sean iguales.

La construcción de Maxwell se basa en pedir igualdad de presiones e igual potencial químico bariónico en ambas fases. Esto, en un diagrama *presión vs. potencial químico* marca un cruce entre la fase hadrónica y la de quarks. Ésta refleja un cambio de pendiente en el punto de transición y se concluye una discontinuidad en la densidad (ya que $n = \frac{\partial P}{\partial \mu}$). Además, la transición debe suceder de una región de baja densidad a una de alta, incrementando el potencial químico. En un diagrama *presión vs. densidad de energía* se puede ver que la transición ocurre a presión constante y esto produce una discontinuidad en la densidad de energía lo cual se observa en la Fig. 2.3. Esto último es así ya que para objetos compactos, la región donde no hay gradiente de presiones no soporta la fuerza gravitatoria, y esa región de transición se comprime. Así, como función de la coordenada radial, la densidad de energía saltará instantáneamente de un valor a otro, dando lugar a una transición abrupta en un radio determinado.

Como nos interesa estudiar los efectos de una fase mixta y la aparición de posibles estructuras geométricas en las EHs, en este trabajo utilizaremos dos valores representativos de la tensión superficial, σ_{HQ} , 10 MeV/fm² y 50 MeV/fm² [Iida et al., 1998, Xia et al., 2019], por debajo del valor crítico para el cual habría que considerar una transición de fase abrupta. La elección de los valores de σ_{HQ} mencionados implicarían la existencia de una fase mixta, por lo que se usará la construcción de Gibbs para el tratamiento de la transición de fase hadrón-quark.

El equilibrio mecánico exige que las presiones de la fase de hadrones (FH) y la fase de quarks (FQ) sean iguales $P_{FH} = P_{FQ}$ a lo largo de toda la fase mixta (FM), ya que de no ser así, habría un gradiente de presiones. Dicho gradiente extendería una fase por sobre la otra conduciendo a un sistema dinámico y fuera del equilibrio estacionario.

Además, se sabe que en la materia de ENs hay dos números cuánticos conservados por lo tanto dos potenciales químicos involucrados [Schaffner-Bielich, 2020].

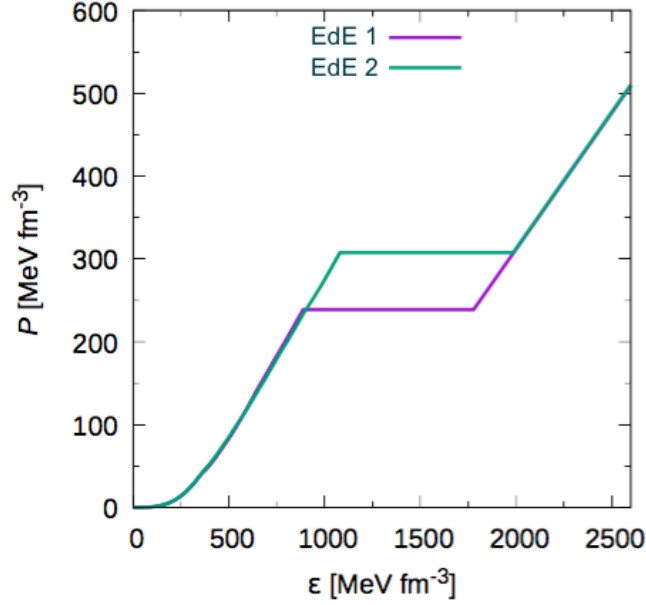


Figura 2.3: Diagrama de presión como función de la densidad de energía para una transición de fase abrupta, en el marco del formalismo de Maxwell, considerando, a modo de ejemplo, dos EdE diferentes. Figura adaptada de [Mariani et al., 2019]

Una descripción apropiada de una transición de fase, involucrando tanto el potencial químico bariónico como el electrónico, conduce a una fase mixta extendida, como se menciona en [Glendenning, 1992], donde también se menciona cómo, en la fase mixta, hay regiones separadas y cargadas, positiva y negativamente, y por lo tanto se exige conservación global de la carga eléctrica durante la fase mixta.

Para el equilibrio químico se pide la igualdad de potenciales químicos entre las fases. De no ser así, habría un gradiente en los potenciales. Las partículas viajarían a regiones de menor potencial químico porque es energéticamente favorable, hasta llegar a un punto en el que el cambio en la concentración causará que los potenciales químicos se igualen. Y entonces, se llegaría al equilibrio que se exige.

La construcción de Gibbs para temperatura cero se resume en las siguientes ecuaciones:

$$P_{FH}(\mu_B^I, \mu_Q^I) = P_{FQ}(\mu_B^{II}, \mu_Q^{II}), \quad (2.38)$$

$$\mu_B^I = \mu_B^{II}, \quad (2.39)$$

$$\mu_Q^I = \mu_Q^{II}. \quad (2.40)$$

La presión en las distintas fases es entonces dependiente de los dos potenciales químicos, los cuáles son variables independientes del modelo. Las presiones representan una superficie en el espacio de los potenciales químicos bariónicos y electrónicos. Estas superficies tendrán una intersección a lo largo de una curva,

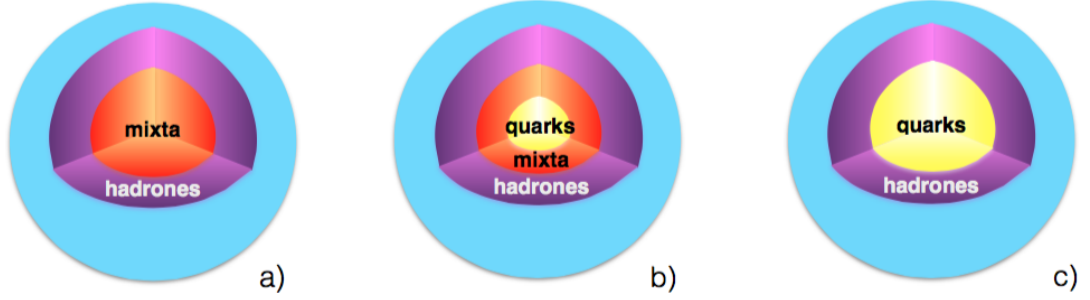


Figura 2.4: Ilustración de distintas de posibles fases de la materia en el interior de EHS. La configuración a) muestra una estrella cuyo núcleo externo esta formado por una fase de hadrones pura y el núcleo interno por una fase mixta hadrón-quark. La configuración b) presenta estas mismas fases como capas de cebolla, pero además presenta materia de quarks pura en la parte central del núcleo. La configuración c) no presenta una transición suave por lo que no existe la fase mixta. Las configuraciones estelares a) y b), que incluyen fase mixta, pueden obtenerse si ocurre una transición de fase tipo Gibbs. La configuración c), que ilustra una transición de fase abrupta, se obtiene mediante una construcción tipo Maxwell.

en vez de en un punto como en la construcción de Maxwell. Estos potenciales, dada una densidad bariónica, pueden ser calculados a través de las ecuaciones de neutralidad de carga eléctrica global y conservación del número bariónico:

$$0 = n_e + n_\mu - \frac{\chi}{3}(2n_u - n_d - n_s) - (1 - \chi)n_p, \quad (2.41)$$

$$n_{mix} = \chi \frac{(n_u + n_d + n_s)}{3} + (1 - \chi)(n_p + n_n), \quad (2.42)$$

donde n_i es la densidad asociada a la partícula correspondiente $i = u, d, s, p, n, e, \mu$ y $\chi = V_{FQ}/(V_{FQ}+V_{FH})$ es la fracción de volumen de la fase quarks. Por tanto, para un valor de $\chi = 0$ estamos en el final de la fase hadrónica pura, y cuando $\chi = 1$ es el comienzo de la fase de quarks pura. La fase mixta se recorre continuamente para valores intermedios entre los límites mencionados. La densidad bariónica en la fase mixta resulta de la contribución de cada fase promediada, según la definición de n_{mix} . También se define la densidad de energía ε_{mix} en la fase mixta como la suma promediada de cada fase:

$$\varepsilon_{mix} = \chi\varepsilon_{FQ} + (1 - \chi)\varepsilon_{FH}. \quad (2.43)$$

Recorriendo el parámetro χ entre 0 y 1, en conjunto con las ecuaciones 2.38, 2.39, 2.40, 2.42 y 2.41, se obtiene la EdE de la fase mixta en la construcción de Gibbs.

A modo ilustrativo, en la Fig. 2.4 se presentan las posibles configuraciones estelares que pueden obtenerse con un tratamiento de la transición de fase mediante

la construcción de Gibbs -configuraciones a) y b)-, o Maxwell -configuración c)-.

2.5. Estructuras geométricas dentro de la fase mixta, y modificaciones a la energía

La formación de estructuras entre la corteza interna y el núcleo externo de ENs fue investigada en un trabajo pionero [Negele et al., 1973]. Luego de tres décadas, con la llegada de las supercomputadoras, simulaciones en redes tridimensionales revelaron la formación de estructuras geométricas, la llamada *fase de pasta*. Su estudio teórico se remonta a 1983 en [Ravenhall et al., 1983]. En el mencionado trabajo se usa la aproximación de Wigner-Seitz, que será la utilizada en esta tesis.

Se adaptó este modelo para la región donde coexisten la materia hadrónica y de quarks, entre los núcleos externo e interno de la EH. La aproximación de Wigner-Seitz plantea al sistema como una división periódica de celdas eléctricamente neutras. La FH y FQ están separadas por una interfaz abrupta, con una dada tensión superficial σ_{HQ} y con en un fondo común de leptones (electrones y muones). Dentro de las celdas habrá materia de quarks con distintas geometrías, que estarán cargadas eléctricamente, en un fondo de materia hadrónica. A partir de cierta densidad, la situación se invierte: tendremos un fondo de quarks con estructuras de materia hadrónica.

La aparición de estructuras no esféricas es lo que caracteriza la fase de pasta. Se puede interpretar de la siguiente manera: a medida que aumenta la densidad las esferas (ñoquis/gotas) se acercan cada vez más formando cilindros (spaghetti/sogas). Y estos, aumentando aún mas la densidad, se agrupan con sus vecinos para formar capas de un cierto espesor. Luego, estas se juntan con sus pares formando capas encimadas (lasagna/lajas). A cierta densidad la situación se invierte, los cilindros ahora están formados por materia hadrónica (antispaghetti/tubos), y las esferas también (antiñoquis-burbujas). Las capas invierten el rol naturalmente y ésta es la denominada *fase antipasta*.

Lo esencial de este modelo es que entran en juego las fuerzas superficiales y coulombianas. Esta competencia lleva a la materia a reorganizarse formando estructuras para minimizar la energía. La densidad de energía total de la fase mixta tiene, entonces, las siguientes contribuciones:

$$\varepsilon_{FM} = \chi\varepsilon_{FQ} + (1 - \chi)\varepsilon_{FH} + \varepsilon_{Sup} + \varepsilon_{Coul}, \quad (2.44)$$

donde, $\chi = V_{FQ}/(V_{FQ} + V_{FH})$ es la fracción del volumen de la fase de quarks, las energías ε_{FQ} y ε_{FH} son las dadas por las Ec. (2.28) y Ec. (2.35). Las energías su-

periferal y coulombiana están dadas por las siguientes expresiones [Wu et al., 2019]:

$$\varepsilon_{Sup} = \frac{D\sigma_{HQ}\chi_{in}}{r_D}, \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_{Coul} = \frac{e^2}{2}(\delta n_c)^2 r_D^2 \chi_{in} \Phi(\chi_{in}), \quad (2.46)$$

donde, en primer lugar, las cantidades involucradas son los radios de las esferas, cilindros y ancho de las capas, r_D , además del tamaño de la celda, r_C :

$$r_D = \left[\frac{\sigma_{HQ} D}{e^2 (\delta n_c)^2 \Phi} \right]^{1/3}, \quad (2.47)$$

$$r_C = \chi^{-1/D} r_D. \quad (2.48)$$

La función Φ , la cual toma cierta forma dependiendo de la dimensión de cada estructura (D=3,2,1), resulta:

$$\Phi(\chi_{in}) = \begin{cases} \frac{1}{D+2} \left(\frac{2-D\chi_{in}^{1-2/D}}{D-2} + \chi_{in} \right), \\ \frac{\chi_{in}^{-1} - \text{Ln}(\chi_{in})}{D+2}. \end{cases} \quad (2.49)$$

Como mencionamos, σ_{HQ} es la tensión superficial en la interfaz hadron-quark. Luego, $\chi_{in} = \chi$ para las gotas (D=3), sogas (D=2) y lajas (D=1), mientras que para los tubos (D=2) y burbujas (D=3), $\chi_{in} = 1 - \chi$, que es la fracción interna de volumen; $e = \sqrt{4\pi/137}$ es la constante de acoplamiento electromagnética y $\delta n_c = n_c^{FH} - n_c^{FQ}$ es la diferencia entre la densidad de carga de las fases hadrónica y de quarks.

Estableciendo $\varepsilon_{Sup} = \varepsilon_{Coul} = 0$, se puede minimizar la densidad de energía de la fase mixta (FM) y se obtienen las ecuaciones de equilibrio mecánico y químico, dadas por la Construcción de Gibbs:

$$P_{FH} = P_{FM} = P_{FQ}, \quad (2.50)$$

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s = \frac{1}{3}\mu_n + \mu_e, \quad (2.51)$$

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad (2.52)$$

$$\mu_\mu = \mu_e. \quad (2.53)$$

Resulta importante aclarar que, tal como se plantea en [Wu et al., 2019] bajo el nombre de *método de coexistencia de fases*, éste resulta un tratamiento perturbativo, dado que se desprecian las contribuciones de las energías superficiales y coulombianas en estas ecuaciones de equilibrio. Las contribuciones de dichas ener-

gías sólo se consideran *a posteriori* a través de la Ec. 2.44. Teniendo en cuenta que cada estructura tendrá una energía de Gibbs asociada, para una determinada presión dentro de la fase mixta, una estructura prevalecerá frente a las otras si su energía de Gibbs es menor a la del resto. Es de esta forma, mediante esta competencia entre estructuras por minimizar la energía del sistema, que se consigue establecer cuándo y cuánto contribuye una estructura a la energía dada por la Ec. 2.44, y cuándo deja de hacerlo para dar paso a la siguiente geometría.

Capítulo 3

Ecuaciones de estructura estelar en el marco de la relatividad general

3.1. Motivación

Existen dos teorías increíblemente exitosas, tanto por su formalismo matemático, su capacidad de explicar fenómenos físicos desde un punto de vista totalmente distinto, como por su capacidad predictiva. Éstas son la teoría de la Relatividad General y la Teoría Cuántica de Campos, mencionadas en el Capítulo 1. Es realmente fascinante como un evento astrofísico como las ENs pueden requerir para su caracterización el uso de ambas teorías.

La relatividad general se ve reflejada en las siguientes ecuaciones:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein (en unidades naturales, $G=c=1$). En la parte izquierda, $G_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Einstein, representa la geometría del espacio-tiempo y se puede escribir en función del tensor de curvatura de Ricci, $R_{\mu\nu}$, el escalar de Ricci, R , y la métrica del espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}; \quad (3.2)$$

en el lado derecho de la Ec. (3.1), $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso, el cual caracteriza la materia (ya sean sólidos, fluidos, campos, etc) y describe cómo se distribuye. La Ec. (3.2) se puede entender como una generalización de la ecuación de Poisson, llevada a un formalismo tensorial (implica que sea válida en cualquier sistema de referencia), en un espacio curvo y en un régimen relativista [Carroll, 2019].

En particular, resulta relevante el tensor denominado como la métrica del

espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$, el cual es un tensor de rango (0,2) simétrico. Este caracteriza esencialmente la forma en que se miden las distancias entre los eventos en el espacio-tiempo (representados por puntos de una variedad \mathbb{R}^{3+1} pseudoriemanniana). La métrica queda definida por las ecuaciones de Einstein una vez que hayamos definido el campo tensorial que caracteriza la materia, también de rango (0,2) y simétrico, $T_{\mu\nu}$. Tanto $G_{\mu\nu}$ como $T_{\mu\nu}$ son cantidades conservadas y lo son de forma independiente; es decir, la conservación del primero tiene una raíz matemática propia de pedir una métrica libre de torsión y métricamente compatible, y la conservación del segundo tiene un origen físico, como lo son la conservación de la energía y el impulso de un sistema. Esto quiere decir que sus derivadas covariantes (generalización de la derivada parcial a un espacio curvo) son nulas. Luego, aparecen involucrados el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, y el escalar de Ricci R . El tensor de Ricci contiene derivadas segundas de la métrica y derivadas primeras, ambas de forma no lineal. El escalar de Ricci es simplemente la contracción de $R_{\mu\nu}$ con la métrica inversa, $R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Históricamente, la primer solución a la Ec. (3.2) la dio Karl Schwarzschild en 1916 [Schwarzschild, 1916]. Ésta corresponde a una solución de vacío, esféricamente simétrica y estática. El hecho que sea una solución de vacío implica que el tensor de energía-momento es nulo, por lo que las ecuaciones de Einstein resultan $G_{\mu\nu} = 0$. El requerimiento que la métrica, como solución, sea estática y esféricamente simétrica implica que al elemento de línea lo podemos escribir como [Carroll, 2019]:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.3)$$

Para buscar entonces esta solución, primero se calculan los símbolos de Christoffel, definidos según:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (3.4)$$

los cuales permiten obtener el tensor de Riemman:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (3.5)$$

Finalmente, se puede calcular el tensor de Ricci como: $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$. De esta manera, se pueden plantear las ecuaciones de Einstein, Ec. (3.1), para este caso particular; dado que buscamos una solución de vacío, se las puede escribir como $R_{\mu\nu} = 0$. De esta forma, se obtienen las soluciones para las funciones de la

Ec. (3.3), $\alpha(r)$ y $\beta(r)$:

$$e^{2\alpha(r)} = 1 - \frac{R_s}{r},$$

$$\beta(r) = -\alpha(r).$$

Por tanto, la métrica de Schwarzschild queda definida por la siguiente expresión:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.6)$$

donde $R_s = 2GM$ es el radio de Schwarzschild, y M puede ser interpretada, en el límite de campo débil, como la masa Newtoniana de un cuerpo esférico central [Carroll, 2019]. En límite de campo débil se trata a la métrica según $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde $h_{\mu\nu}$ resulta una perturbación pequeña, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, a la métrica plana de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. En esta aproximación, se obtiene que la componente temporal h_{00} es proporcional al potencial gravitatorio clásico no relativista. Es decir, en este límite, las soluciones a las ecuaciones de Einstein se reducen a la teoría Newtoniana. Por otro lado, el radio de Schwarzschild define un horizonte de eventos, es decir, una superficie más allá de la cual los eventos no pueden afectar a un observador externo. Si se quiere caracterizar el cono de luz de una partícula de prueba en la región interna al horizonte de eventos, este inevitablemente apuntaría hacia adentro de la superficie definida por el radio de Schwarzschild. Es decir, para que una estrella esté en una configuración estable, necesitamos que toda su masa esté distribuida en una esfera de radio mayor a $R_s = 2GM$ [Schmitt, 2010].

Ahora, si se construye una estrella con un número A de nucleones de masa $m = 939\text{MeV}$ (masa del neutrón), y que además cada uno de ellos ocupe un región esférica de radio $r_0 = 0,5 \cdot 10^{-13}\text{cm}$ (distancia característica a la cuál las interacciones nucleares se vuelven repulsivas en algunos modelos), estos ocuparán un volumen $V \sim \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$, y entonces la estrella tendrá un radio $R \sim r_0 A^{1/3}$, y una masa $M \sim mA$. Por lo tanto, la cantidad de nucleones que se pueden almacenar antes de que la estrella se vuelva inestable se deduce de exigir que el radio de la estrella sea R_s . Obtenemos entonces,

$$A \sim \left(\frac{r_0}{2Gm}\right)^{3/20} \sim 2,88 \times 10^{57}. \quad (3.7)$$

Esta es la cantidad de nucleones que puede tener una estrella antes de volverse inestable, obteniendo así una configuración límite:

$$R \sim 7\text{km},$$

$$M \sim 2,3M_\odot.$$

Si bien estas cantidades podrían ser debatibles, resultan valores que no se alejan demasiado de lo observado [Schmitt, 2010]. Si, además, se calcula la energía gravitacional del sistema suponiendo una densidad constante, en un régimen no relativista, se obtiene:

$$E_{grav} = \int_0^R \frac{G \cdot m(r) \cdot dm(r)}{r} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \sim 3,2 \cdot 10^{44} J. \quad (3.8)$$

Aquí hemos usado valores realistas, $M = 1,4M_{\odot}$ y $R = 10km$ de ENs. El resultado que muestra la Ec. (3.8) representa más del 15% de la masa de la estrella, por lo que deberíamos considerar efectos relativistas si queremos calcular la estructura de las ENs y su relación masa-radio.

Por todo esto es que, para realizar nuestro estudio, se necesita una solución que sea relativista y que no sea de vacío, de manera que pueda así representar adecuadamente la estructura interior de las ENs.

3.2. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

En una teoría clásica no relativista se pueden resolver las ecuaciones de estructura estelar dadas por:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r), \quad (3.9)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (3.10)$$

donde p es la presión, r el radio, $\rho(r)$ es la densidad de masa, $m(r)$ la masa contenida en el radio r y G la constante de gravitación universal [Wikipedia, 2022a].

Para trabajar en el marco de la Relatividad General también se usa la hipótesis de simetría esférica y un régimen estacionario. Pero la diferencia con el tratamiento anterior, es que esta condición se la exige también a la métrica, no sólo a la distribución de materia. Pedirle simetría esférica y estaticidad a la métrica se traduce en que el elemento de línea se escriba de acuerdo a la Ec. (3.3).

Como ya mencionamos, buscamos una solución que no sea la de vacío. Para

ello hay que usar las ecuaciones de Einstein en su totalidad, es decir calcular $G_{\mu\nu}$:

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2(\alpha-\beta)} (2r\partial_r\beta - 1 + e^{2\beta}), \quad (3.11)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} (2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta}), \quad (3.12)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\beta} [\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta)], \quad (3.13)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)G_{\theta\theta}. \quad (3.14)$$

Lo siguiente es especificar el tensor de energía-impulso. Es factible pedir que el sistema sea un fluido perfecto [Estevez-Delgado et al., 2019], por lo tanto resulta:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

donde p , la presión, y ε , la densidad de energía, dependen solo de la coordenada radial. Como se buscan soluciones estáticas, se puede elegir un vector velocidad tipo tiempo, y optar por la normalización $U^\mu U_\mu = -1$. Se obtiene entonces:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha}\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta)p \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

De esta manera, se tienen tres componentes independientes de las ecuaciones de Einstein, la componente tt , rr y $\theta\theta$, pues la componente $\phi\phi$ es proporcional a la $\theta\theta$. Usando las Ecs. (3.11), (3.12) y (3.13), obtenemos:

$$G_{tt} = 8\pi G\varepsilon, \quad (3.17)$$

$$G_{rr} = 8\pi Gp, \quad (3.18)$$

$$G_{\theta\theta} = 8\pi Gp. \quad (3.19)$$

Si se usa la siguiente sustitución

$$e^{2\beta} = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1},$$

se llega a:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.20)$$

La componente g_{rr} es una generalización del caso de Schwarzschild, pero no es el

caso para lo componente g_{tt} , que se convierte en:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon, \quad (3.21)$$

y puede ser integrada para obtener:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon(r') r'^2 dr'.$$

Si la estrella se extiende hasta un radio R , luego de este valor para r se tiene la solución de vacío, es decir, la solución de Schwarzschild. Para que ambas métricas coincidan a ese radio y tengamos una solución continua, la masa de Schwarzschild, M , tiene que estar dada por:

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R \varepsilon(r) r^2 dr.$$

Se podría pensar que la cantidad $m(r)$ es la integral de la densidad de energía sobre el interior estelar y puede ser interpretada como la masa contenida en un determinado radio r . Sin embargo, en una apropiada integral sobre el espacio, el elemento de volumen debería ser:

$$\sqrt{\gamma} d^3x = e^\beta r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi,$$

donde

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = e^{2\beta} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

es la métrica espacial. La verdadera densidad de energía integrada es, entonces,

$$\bar{M} = 4\pi \int_0^R \varepsilon(r) r^2 e^{\beta(r)} dr = 4\pi \int_0^R \frac{\varepsilon(r) r^2}{\left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]^{-1/2}} dr.$$

La diferencia entre ambas integrales emerge porque hay una energía de ligadura debida a la atracción gravitatoria de los elementos de fluido en la estrella, que está dada por

$$E_B = \bar{M} - M > 0.$$

Esta es la cantidad de energía que se requeriría para expulsar la materia de la estrella al infinito.

En términos de $m(r)$, la ecuación rr puede ser escrita como sigue:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi Gr^3 p(r)}{r[r - 2Gm(r)]}. \quad (3.22)$$

Además, en vez de usar la componente $\theta\theta$, se puede usar la conservación del tensor de energía-impulso, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Para la métrica definida en la Ec. (3.20) resulta inmediato que la única componente no trivial es para $\nu = r$ y entonces:

$$[\varepsilon(r) + p(r)] \frac{d\alpha}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (3.23)$$

Si se combinan la Ec. (3.23) con la Ec. (3.22) se obtiene la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[\varepsilon(r) + p(r)][Gm(r) + 4\pi Gr^3 p(r)]}{r[r - 2Gm(r)]}, \quad (3.24)$$

que puede ser reescrita para obtener una expresión más fácilmente interpretable desde un punto de vista cualitativo:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (3.25)$$

Esta expresión deja en evidencia que el primer factor es la parte de la derecha de la Ec. (3.9) y los tres restantes son correcciones de la relatividad general. El primer factor de corrección modifica la densidad de masa $\rho(r)$ y toma en cuenta que la gravedad se acopla a la densidad de energía $\varepsilon(r)$ y a la presión $p(r)$ de la materia. El segundo, modifica al término de masa y agrega otra corrección para el factor de la presión de la materia. El tercero y último altera el radio e introduce la deformación del espacio-tiempo descrito por el factor de Schwarzschild generalizado [Schaffner-Bielich, 2020].

A pesar de estos desarrollos, para que el sistema de ecuaciones sea cerrado se necesita una relación más. Esto es así ya que las ecuaciones de Einstein sólo proveen tres ecuaciones independientes, Ecs. (3.21), (3.22) y (3.23), y se tienen cuatro incógnitas, $\alpha(r)$, $m(r)$, $\varepsilon(r)$, y $p(r)$. La EdE del fluido, $p(\varepsilon)$, es la relación que cierra el sistema de ecuaciones y permitirá obtener soluciones. Esta relación, además, es la que caracteriza y fija las propiedades de la materia de la que esta hecha la estrella. La EdE describe la física mas allá de la gravedad y es en el marco de la Teoría Cuántica de Campos, que tiene una formulación también tensorial y relativista, que se consigue la ecuación deseada. Las ecuaciones TOV no son sensibles a ningún otro detalle más que las cantidades informadas por la EdE, p y ε . Es entonces que, con una EdE, la conservación de la masa, Ec. (3.21), y la

ecuación TOV, Ec. (3.25), se determinan todas las cantidades físicas relevantes del sistema. En este sentido, en el Capítulo 2 se planteó el modelo que utilizaremos para construir la EdE híbrida que alimentará nuestro sistema de ecuaciones TOV. En este caso, las ecuaciones TOV se resuelven numéricamente con un código en FORTRAN 90 provisto por el propio grupo de investigación GGAC dentro el cual se desarrolló este trabajo de tesis.

Antes de concluir el Capítulo, es importante mencionar que las soluciones que proveen las ecuaciones TOV resultan soluciones estáticas de equilibrio, pero nada hemos dicho respecto a su estabilidad. El análisis de estabilidad resulta fundamental para poder clasificar, entre las soluciones obtenidas, cuáles configuraciones son las físicamente válidas y potencialmente comparables con las observaciones astrofísicas. La estabilidad de esta clase de objetos se obtiene perturbando radialmente las soluciones de equilibrio y estudiando la evolución temporal de estas perturbaciones. El estudio de los modos radiales a partir de perturbaciones y la consecuente estabilidad estelar ya se ha realizado en el trabajo de [Chandrasekhar, 1964]. Este resultado tradicional, válido para estrellas frías con simetría esférica, en equilibrio termodinámico e hidrostático y con una EdE continua, indica que el objeto será inestable si se cumple que $\partial M/\partial \epsilon_c < 0$, donde M es la masa total de la estrella y ϵ_c su densidad central [Shapiro et al., 2008]. De esta manera, cuando analicemos nuestros resultados, consideraremos que, en una familia de soluciones estelares calculadas a partir de una dada EdE, la configuración de masa máxima corresponderá a la última estrella estable de dicha familia y, a partir de allí, comenzará la rama de soluciones inestables.

Capítulo 4

Resultados

En el Capítulo 2 se presentó la manera de construir una EdE híbrida con fase mixta hadrón-quark mediante la construcción de Gibbs y considerando la presencia de estructuras geométricas. Dentro de dicho marco teórico, seleccionamos cuatro conjuntos de parámetros del modelo de materia de quarks; adoptamos dos valores de la *bag*, $B = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ y $B = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, y dos valores para la tensión superficial σ_{HQ} : $10 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ y $50 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ (ver detalle en la Tabla 4.1). Como se discutió en el Capítulo 2, estos valores se encuentran dentro de los rangos esperados desde el punto de vista físico y motivados por diversos estudios y resultados previos, ya mencionados. La selección que se muestra en la Tabla 4.1 permitirá explorar la posible amplitud de resultados en el marco de nuestro modelo y, además, estudiar en detalle el impacto de la variación de estos parámetros libres de manera independiente. Se presentan a continuación los resultados correspondientes a estas cuatro diferentes EdEs seleccionadas.

En primer lugar, en la Fig. 4.1 presentamos las EdEs obtenidas; cada panel de dicha figura muestra el resultado para cada uno de los conjuntos seleccionados. Como ya anticipamos, el comportamiento de la presión como una función creciente de la densidad de energía es necesaria para poder resolver las ecuaciones TOV. En principio, los cuatro paneles muestran un comportamiento general

EdE	$B_{ag} [\text{Mev}/\text{fm}^3]$	$\sigma_{HQ} [\text{Mev}/\text{fm}^2]$
(a)	120	10
(b)	220	10
(c)	120	50
(d)	220	50

Cuadro 4.1: Conjuntos de parámetros seleccionados para la construcción de las EdEs híbridas con fase mixta.

compartido: para bajas densidades se tiene la corteza¹ y luego la fase hadrónica pura, a densidades intermedias aparece la fase mixta y finalmente para densidades extremadamente altas prevalece la fase de quarks pura. Además, todas las fases mixtas muestran una presencia progresiva de los cinco tipos de estructuras geométricas incluidas en el modelo. Por otro lado, se puede ver que, para los casos de $B_{ag} = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ (paneles 4.1b y 4.1d), la transición de fase comienza a densidades de energía y presiones más altas y que la fase mixta es más extendida si los comparamos con los casos de $B_{ag} = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ (paneles 4.1a y 4.1c). En este sentido, el aumento del B_{ag} retrasa la aparición de la materia de quarks y en consecuencia, mayores valores de este parámetro generan EdEs más *duras* (mayor presión a una dada densidad de energía). Por otro lado, el efecto de la variación de la tensión superficial (comparación de los paneles 4.1a, 4.1c con los paneles 4.1b, 4.1d) resulta indistinguible en este plano presión-densidad de energía.

En relación a la Fig.4.1, en las EdE presentadas se puede analizar la discontinuidad en la primera derivada en la Fig.4.2. Para entender la causa de este fenómeno hay que recordar que, en las transiciones de fase, este tipo de comportamiento es propio del mismo. Aquí, en particular, la discontinuidad que se presenta es en la derivada de la presión respecto a la densidad, lo cual no es otra cosa que el cuadrado de la velocidad del sonido. Esto es esperable, ya que si cambia el estado de la materia en el medio en el que se propaga la onda de sonido, naturalmente la velocidad en la interfaz debe cambiar.

En correspondencia con los puntos de inflexión en las gráficas de las EdE de los paneles de la Fig.4.1, los máximos que se pueden ver en la Fig.4.2 surgen a densidades donde una estructura geométrica es más conveniente que otra, desde el punto de vista energético. Más específicamente, para el $B_{ag} = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, casos 4.2a y 4.2c, sucede entre la transición de sogas a lajas, y para $B_{ag} = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, casos 4.2b y 4.2d, en el cambio de gotas a sogas.

Se observa un aumento considerable de la velocidad del sonido c_S a lo largo de la EdE hadrónica, para los 4 casos presentados, incluso para las EdEs híbridas con $B_{ag} = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ el aumento de c_S en la fase hadrónica es aún mayor, debido a que la transición a materia de quarks ocurre a densidades más altas, alcanzando velocidades relativistas de $\sim 0,7 c$. Para la fase de quarks se ve una velocidad c_S casi constante, resultado que deja en evidencia la linealidad entre la presión y la densidad de energía, relación obtenida en varios modelos de quarks (ver, por ejemplo, [Mariani et al., 2017, Curin et al., 2021, Lopes et al., 2021]).

En la Fig. 4.3 se muestra, para las cuatro EdEs seleccionadas la contribución

¹La materia en la corteza interna consiste mayormente en un mallado coulombiano de núcleos inmerso en un mar de electrones, y a densidades mayores a la de goteo de neutrones, neutrones libres.

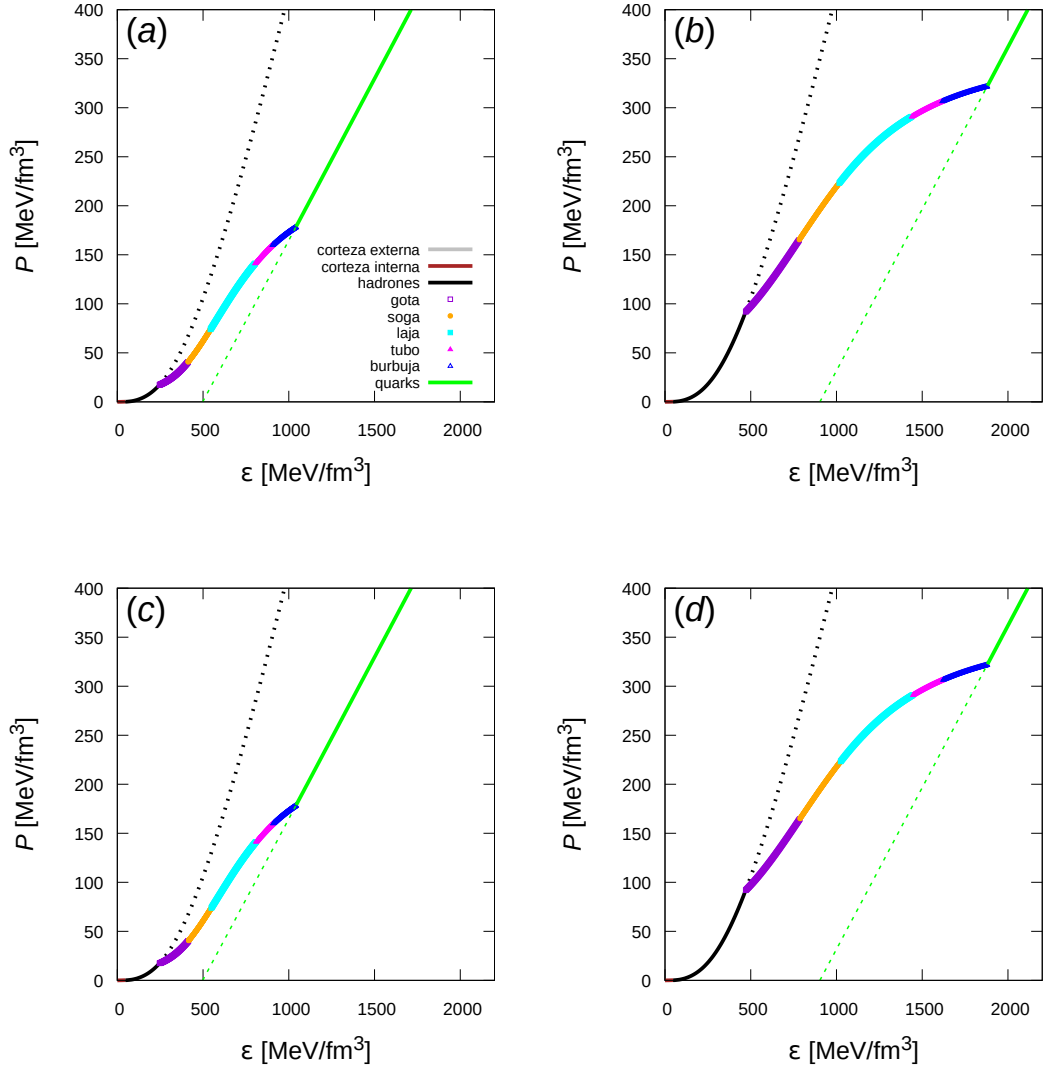


Figura 4.1: EdEs híbridas para los distintos conjuntos seleccionados de parámetros del modelo, presentados en la Tabla 4.1. En cada panel se presenta la relación presión-densidad de energía para cada EdE híbrida seleccionada; la fase hadrónica pura (líneas negras continuas) corresponde a bajas densidades, a densidades intermedias aparece la fase mixta, y la fase de quarks pura (líneas verdes continuas) ocurre para las densidades mayores. La región de fase mixta se presenta con diferentes colores de acuerdo a la estructura geométrica que prevalece para cada densidad. Por completitud y comparación se presentan con líneas punteadas negras y verdes, los resultados de los modelos de las fases puras de hadrones y quarks, respectivamente, en rangos de densidad donde dichas fases no prevalecen. Se observa como los casos con mayor valor del *Bag* (paneles 4.1b y 4.1d) producen EdEs más *duras* y regiones mixtas más extendidas; la variación de la tensión superficial (comparación de los paneles 4.1a, 4.1b con los paneles 4.1c, 4.1d respectivamente) no produce variaciones significativas en este plano presión-densidad de energía.

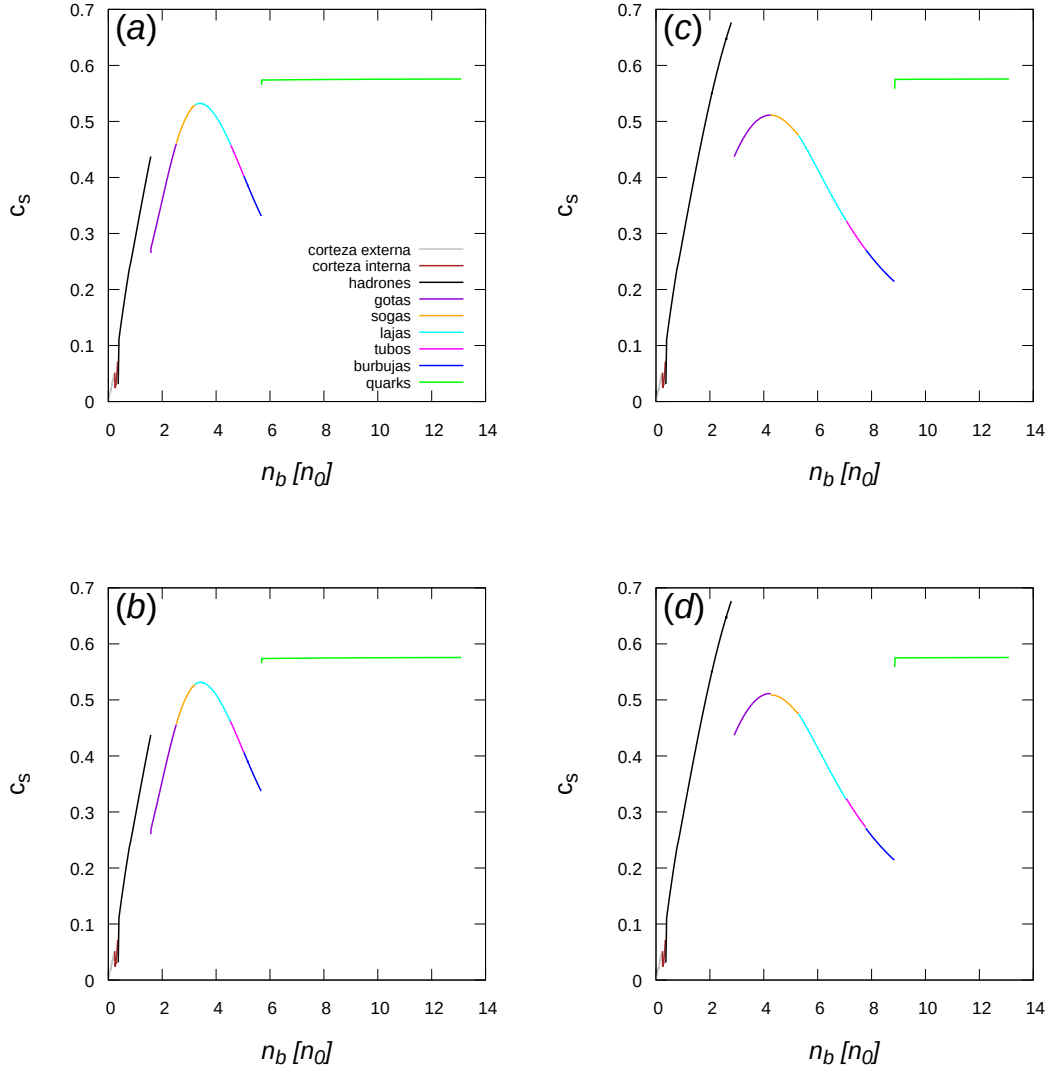


Figura 4.2: Velocidad del sonido c_s como función de la la densidad bariónica, n_B , expresada en unidades de densidad de saturación nuclear, n_0 . En todos los paneles (a), (b), (c) y (d), se ve como al cambiar de fase, ya sea de la corteza al núcleo externo, del núcleo externo a la fase mixta o de esta al núcleo interno, hay un salto en la velocidad del sonido debido a la transición de fase de primer orden.

de los efectos de superficie y de Coulomb a la densidad de energía, como función de la densidad bariónica, n_B . En primer lugar, se observa como, a medida que incrementa la densidad, es más favorable energéticamente una estructura que otra. En este sentido, como ya fue dicho, la construcción de esta fase mixta se realiza seleccionando, a una dada densidad, la estructura geométrica que minimiza la densidad de energía; esta construcción también se puede realizar comparando, a igual presión, la energía de Gibbs de cada estructura. Cuando se analiza esto último, la estructura que tiene menor de energía de Gibbs es la dominante para cada densidad. Es importante notar que las energías involucradas en los efectos de superficie y Coulomb, del orden de las unidades de MeV/fm^3 , son ampliamente menores que las contribuciones de los términos de *bulk* de la materia de hadrones y quarks, del orden de cientos o miles de MeV/fm^3 . Esta diferencia de valores en las densidades de energía involucradas es lo que habilita el tratamiento perturbativo en la construcción de la fase mixta, tal como fue mencionado al final del Capítulo 2 y como se analiza en detalle en la Ref. [Wu et al., 2019]. También es por este motivo que, como mostramos, las variaciones en el valor de σ_{HQ} son despreciables en la Fig. 4.1. Por otro lado, se puede ver que, al aumentar el *Bag* de $120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ (Fig. 4.3a y Fig. 4.3c) a $220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ (Fig. 4.3b y Fig. 4.3d), las estructuras aparecen a mayores densidades. Es decir, tal como ocurría con la EdE, el aumento del *Bag* posterga la aparición de la fase mixta y las respectivas estructuras geométricas. Además, se distingue que el aumento de la tensión superficial σ_{HQ} incrementa las energías de cada estructura (comparación de los paneles 4.3a, 4.3b con los paneles 4.3c, 4.3d); esto es debido a que estas energías dependen de σ_{HQ} según $\varepsilon_{Sup}, \varepsilon_{Coul} \propto \sigma_{HQ}^{2/3}$.

La Fig. 4.4 muestra los tamaños de cada estructura geométrica, r_D , y el de la respectiva celda de Wigner-Seitz, r_C , como función del número bariónico, n_B , para las cuatro EdEs seleccionadas. Se observa como el aumento del *Bag* desplaza la formación de estructuras hacia regiones de mayor densidad -efecto ya observado en las figuras anteriores- y, además, disminuye levemente el tamaño de las estructuras y celdas de W-S; estos fenómenos se observan comparando entre Figs. 4.4a y 4.4b, o entre Figs. 4.4c y 4.4d. En particular, es interesante notar que el efecto de variar el valor del *Bag* es más notorio para las estructuras de baja densidad (gotas y sogas) que para las estructuras de alta densidad (tubos y burbujas). Por otro lado, al aumentar la tensión superficial, los radios de las distintas estructuras y los tamaños de la celda de W-S crecen significativamente. Esto está directamente relacionado con la dependencia de r_C y r_D con la tensión superficial σ_{HQ} , según $r_C, r_D \propto \sigma_{HQ}^{1/3}$, tal como se puede observar en las Ecs. (2.47) y (2.48).

En la Fig. 4.5 se presentan las abundancias relativas, $Y_i = n_i/n_B$, de las partículas consideradas en el modelo en función del número bariónico, n_B , para los

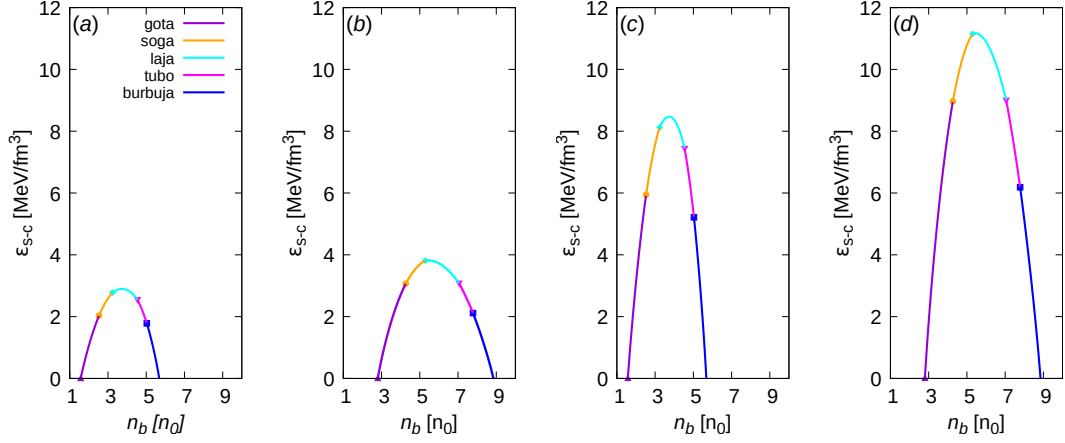


Figura 4.3: Energía superficial-coulombiana de cada estructura geométrica en la región de fase mixta, como función del número bariónico, n_B , para las cuatro EdEs seleccionadas. A una dada densidad, prevalece la estructura que posee menor densidad de energía. Se observa como el aumento del Bag posterga hacia mayores valores de n_B la existencia de la fase mixta y las correspondientes estructuras geométricas; el aumento de la tensión superficial σ_{HQ} genera una mayor contribución energética de las estructuras geométricas a la EdE total y afecta a todas las estructuras por igual, $\varepsilon_{S-C} \propto \sigma_{HQ}^{2/3}$.

casos seleccionados (a) y (b) (ver Tabla 4.1); no se presentan los casos (c) y (d) pues la variación de σ_{HQ} no genera diferencias apreciables. Se observa que, en ambos casos, inicialmente domina la presencia de neutrones y su contribución va decreciendo a medida que, junto con n_B , aumenta la abundancia de protones y electrones; en este rango de densidades bajas, donde sólo hay materia hadrónica y leptónica, es evidente el efecto de la neutralidad de carga: la abundancia de protones y electrones es la misma hasta la aparición de los muones; estos últimos, cuando aparecen, contribuyen negativamente a la carga total haciendo que disminuyan los electrones. Luego, a lo largo de la fase mixta, la materia hadrónica disminuye y aparece la materia de quarks progresivamente. La población del quark u es relativamente baja en relación a la de los quarks d y s durante la fase mixta; luego, en el inicio de la fase de quarks pura, estas poblaciones se equiparan bajo la condición de neutralidad de carga. En cuanto a la materia leptónica, los electrones son más abundantes que los muones sin importar la densidad, y ambos desaparecen rápidamente durante la fase mixta. En particular, sus abundancias se vuelven despreciables en torno a la aparición de las lajas. Si bien esta descripción cualitativa no depende del valor del Bag , los valores específicos de las abundancias a una dada densidad sí lo hacen: para una dada densidad, la abundancia de hadrones (quarks) es mayor (menor) a medida que el valor del Bag aumenta.

Finalmente, en la Fig. 4.6 presentamos el último resultado de este trabajo:

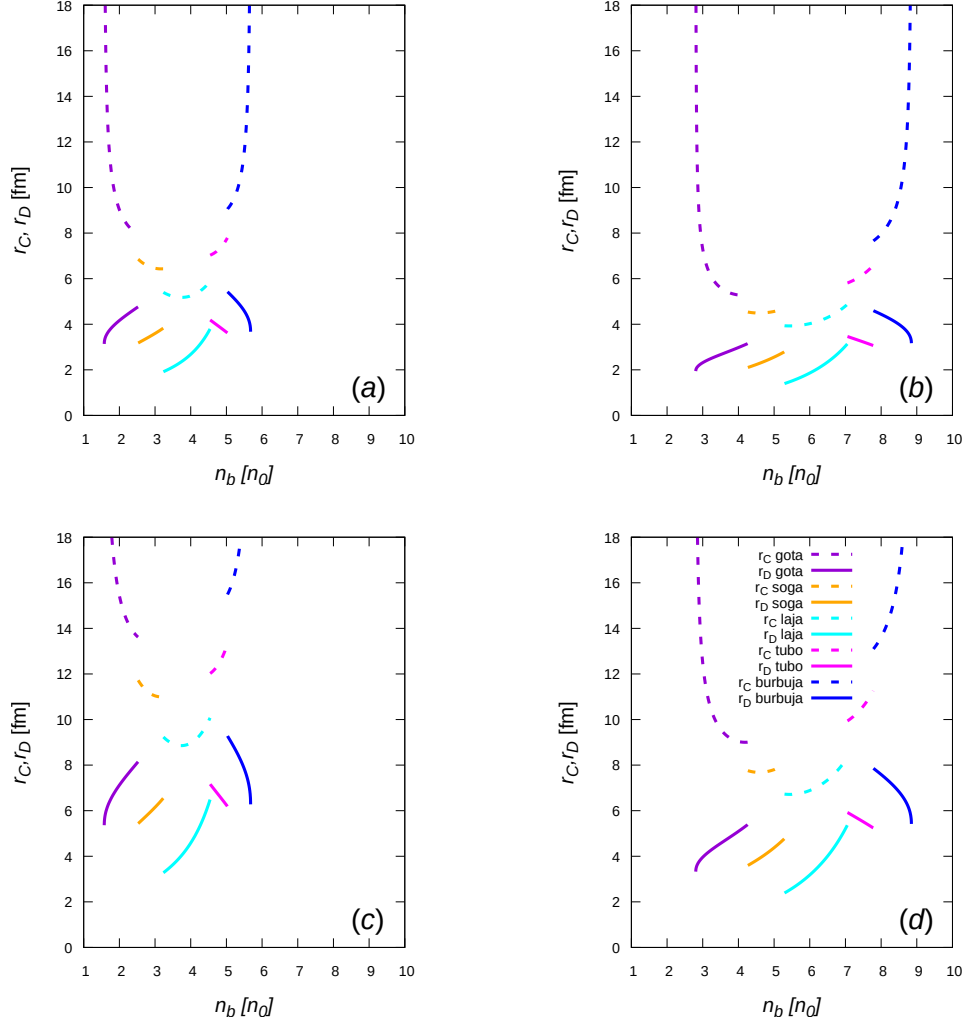


Figura 4.4: Tamaño de las estructuras geométricas r_D (líneas continuas) y de la celda de Wigner-Seitz r_C (líneas punteadas) como función del número bariónico para cada una de las cuatro EdEs seleccionadas. El aumento del Bag produce estructuras y celdas levemente más pequeñas; el aumento de la tensión superficial σ_{HQ} produce estructuras y celdas de mayor tamaño, dado que $r_C, r_D \propto \sigma_{HQ}^{1/3}$.

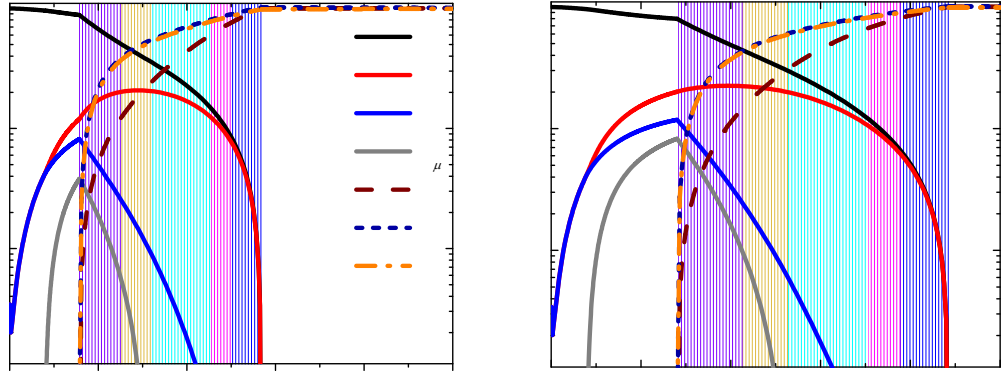


Figura 4.5: Abundancia relativa de partículas, $Y_i = n_i/n_B$, como función del número bariónico, n_B . Para bajas densidades se tiene la fase de hadrones pura, constituida por protones y neutrones. En densidades intermedias ocurre la coexistencia de materia de hadrones y quarks: con el aumento de la densidad, se observa el descenso progresivo de los primeros y el aumento progresivo de los segundos. Para altas densidades se tiene la materia de quarks pura, constituida por quarks u , d y s . En todo el rango de densidades existe un fondo común de leptones (electrones y muones) que se vuelve despreciable con el aumento de la proporción de materia de quarks. Para mayor claridad, la región de fase mixta se indica mediante franjas verticales coloreadas, de acuerdo al código de colores asociado a las estructuras geométricas de las figuras previas.

luego de integrar numéricamente las ecuaciones TOV, Ecs. (3.21)-(3.25), para los cuatros casos planteados, es posible obtener una familia masa-radio, donde cada punto sobre la curva representa una estrella. Además, a modo de comparación, calculamos la curva masa-radio para una estrella puramente hadrónica bajo el modelo hadrónico utilizado en esta tesis (curva negra); esta última presenta una masa máxima de $\sim 2,36 M_\odot$. En todos los casos, es importante recordar que las configuraciones estables se dan desde los radios grandes hasta el máximo de cada curva; luego del máximo, hacia radios menores, las soluciones resultan inestables. En las curvas que representan los distintos modelos híbridos estudiados se observa como, cuando ocurre la transición de fase y aparece la fase mixta en el interior de las estrellas, éstas se bifurcan respecto al modelo puramente hadrónico. Con triángulos sobre cada curva -rojos para casos (a) y (c), azules para casos (b) y (d)- se indica el comienzo de estrellas con núcleo con fase mixta; con círculos, la aparición de materia de quarks pura. Para los casos (a) y (c) la aparición de materia de quarks y fase mixta se da a densidades menores, por eso la bifurcación ocurre antes que para los casos (b) y (d). Otra manera de entender este comportamiento es recordar que un aumento del Bag genera EdEs más *duras*, y esto trae como consecuencia mayores masas máximas para la curva masa-radio. Este resultado es similar al que se obtiene en el trabajo de

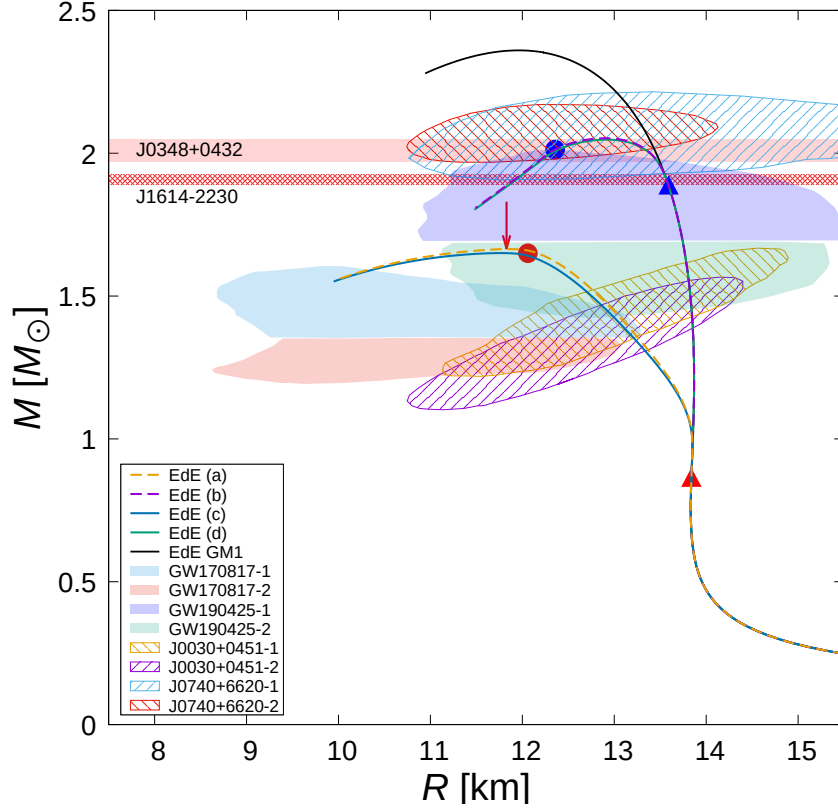


Figura 4.6: Las curvas coloreadas representan los cuatro casos de EdEs híbridas con fase mixta seleccionadas y en negro el modelo hadrónico con la parametrización GM1. Las restricciones astrofísicas actuales se indican mediante las nubes y rectángulos coloreados. La de los púlsares de $\sim 2M_{\odot}$ [Arzoumanian et al., 2018, Fonseca et al., 2021], los eventos GW170817 [Abbott et al., 2017], GW190425 [Abbott et al., 2020], y las observaciones de NICER [Miller et al., 2019, Riley et al., 2019, Miller et al., 2021, Riley et al., 2021]. Los triángulos -rojos para casos (a) y (c), azules para casos (b) y (d)- sobre las curvas indican el comienzo de estrellas con núcleo con fase mixta y los círculos, el comienzo de estrellas con núcleos de quark puros. La flecha roja indica esquemáticamente la configuración de masa máxima para los casos (a) y (c), inmediatamente posterior a la aparición del núcleo de quarks puros.

[Benhar et al., 2005]. En paralelo, se evidencia que aumentar la tensión superficial ablanda muy levemente la EdE (esto es consecuencia de la diferencia de algunas unidades de MeV/fm^3 en la contribución de los efectos de superficie-Coulomb a la densidad de energía, discutido algunos párrafos más arriba), resultando en una masa máxima más baja. La levedad de este efecto se observa en las diferencias en la masa máxima entre los casos (a) y (c) , o (b) y (d) . Es interesante, además, notar que para los casos (a) y (c) , $B_{ag} = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, inmediatamente después que la densidad central de las estrellas alcanza el valor correspondiente a la aparición de materia de quarks pura (indicado con el círculo rojo sobre las curvas), se llega a la última estrella estable (configuración de masa máxima, indicada mediante una flecha roja). Las configuraciones para los casos (b) y (d) , $B_{ag} = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, se vuelven inestables antes de la aparición del núcleo de quarks puros y, por lo tanto, estos casos sólo llegan a tener materia de quarks en su núcleo a través de la fase mixta. Finalmente, las nubes y rectángulos coloreados indican las diferentes restricciones actuales sobre masas y radios, fruto de observaciones recientes de ENs en radio, rayos-X y emisión de OGs (observaciones presentadas y discutidas en el Capítulo 1). Se observa que ninguna de las curvas de nuestro modelo satisface simultáneamente todas las restricciones existentes en la actualidad; esta falencia de nuestro modelo será discutida en el Capítulo 5.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo de Tesis de Licenciatura se ha estudiado la formación de una fase de pasta en EHs, es decir, ENs que contienen materia de quarks en su núcleo interno. Se hizo foco especialmente en la transición de fase entre dos estados de la materia presentes en el diagrama de fases de la QCD: hadrones y plasma de quarks y gluones. Para la construcción de la transición de fase, consideramos dos valores distintos de la tensión superficial en la interfaz hadrón-quark, por debajo de la tensión superficial crítica, para analizar los efectos de la formación de una fase mixta en las EHs, modeladas a temperatura cero.

Para la descripción de la materia de quarks, usamos el modelo de Bolsa del MIT, con la hipótesis de materia a granel y correcciones debidas a la constante de acoplamiento fuerte [Farhi et al., 1984]. La EdE correspondiente y todas sus cantidades termodinámicas derivadas, calculadas en forma semi-analítica, fueron programadas en FORTRAN 90. Además, hicimos un análisis de la estabilidad de la materia extraña, compuesta por quarks u , d y s , teniendo en cuenta la conjetura de Bodmer-Witten. Haciendo uso del lenguaje BASH, construimos un mapa de color con los parámetros libres del modelo, el Bag B y la constante de acoplamiento fuerte α_s , teniendo en cuenta la cota establecida por la masa del elemento más estable que puede crearse en contextos astrofísicos: el ^{56}Fe . De esta manera, establecimos dos combinaciones de estos parámetros por fuera de la ventana de estabilidad y, por lo tanto, adecuados para describir una EH. Se fijó un valor para $\alpha_s = 0,35$, acorde con la materia de quarks desconfiada según estudios teóricos, y se tomaron dos valores para el Bag, $B = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ y $B = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$.

Para la fase hadrónica, se hizo uso de la teoría relativista de campo medio, en particular del modelo de Walecka no lineal. En este modelo, los bariones interactúan a través de mesones escalares, vectoriales e iso-vectoriales. Teniendo en cuenta sólo nucleones, neutrones y protones, se pudo construir la EdE para la materia hadrónica, utilizando la parametrización GM1, la cual no incluye interac-

ciones entre los mesones. Para esta EdE, se usó un código en lenguaje FORTRAN desarrollado por el Grupo de Gravitación, Astrofísica y Cosmología (GGAC).

Se estableció conservación de carga local para cada una de las fases puras (hadrónica y de quarks). Para la fase mixta, se trabajó bajo la construcción de Gibbs y se pidió neutralidad de carga global, readaptando los códigos de quarks y hadrones para tal fin. Además, en el marco del método de coexistencia de fases, se agregaron las contribuciones a la energía por parte de las estructuras geométricas que, se especula, podrían formarse en esta fase. En particular, las estructuras que se introdujeron fueron gotas, sogas, lajas, tubos y burbujas, caracterizadas por diversa dimensionalidad, $d = 3, 2, 1$. Aquí se usaron dos valores para la tensión superficial $\sigma_{HQ} = 10 \text{ MeV/fm}^2$ y $\sigma_{HQ} = 50 \text{ MeV/fm}^2$, los cuales resultaron ser decisivos para el tamaño de las estructuras; no así para la contribución a la energía. Cada estructura dominó en cierto intervalo de densidad de la fase mixta, cuando, a una dada presión, su energía de Gibbs era menor a la de las otras estructuras.

Dada la mencionada selección de parámetros, establecimos cuatro EdE híbridas representativas de nuestro modelo (ver Tabla. 4.1). A partir de la construcción de estas cuatro EdEs seleccionadas, calculamos diversos resultados microfísicos y macrofísicos; además de la propia EdE y la velocidad del sonido asociada, para cada conjunto obtuvimos la población de partículas, la región en que cada geometría prevalece, con sus respectivos tamaños de estructura y celda, la energía de superficial-coulombiana que aporta cada una de estas estructuras y, finalmente, la relación masa-radio.

En cuanto a la EdE y los resultados microfísicos, el aumento del Bag genera una EdE más *dura*, con una fase mixta más extendida y con un comienzo de la misma a mayores densidades de energía y presión; no obstante, este mismo aumento disminuye levemente el tamaño de las estructuras. Sobre la velocidad del sonido se mostró que su discontinuidad estaba vinculada a las transiciones de fase de primer orden, y dentro de la fase mixta se vió como el cambio de una estructura a otra hace que esta cantidad disminuya. Por otro lado, el aumento de la tensión superficial incrementa significativamente tanto las densidades de energía de superficie y Coulombianas asociadas a las estructuras, como su tamaño. Respecto a las poblaciones de partículas, se nota cómo en la fase hadrónica dominan los neutrones, y cómo compiten electrones y muones contra los protones por la neutralidad de carga eléctrica local. La aparición de los muones es más tardía ya que tiene que aumentar la densidad de energía lo suficiente para que se creen estas partículas. Luego se puede ver que, con la aparición de los quarks en la fase mixta, la población de electrones y muones va desapareciendo, hasta hacerlo completamente en la fase de lajas. En ese punto la abundancia del quark

up, cargado negativamente, aumenta de manera de satisfacer la neutralidad eléctrica global de la fase. También se ve cómo los neutrones y protones a partir de la fase de tubos empiezan a igualarse hasta desaparecer. Esto sucede cuando inicia la fase de quarks pura, región en que las poblaciones de todos los quarks se equiparan, con una población leptónica despreciable, cumpliendo la neutralidad de carga eléctrica local.

Comparamos nuestro estudio con dos trabajos en los que se estudian EHs con fase mixta. En el trabajo de [Wu et al., 2019] para la construcción de EHs utilizan el mismo modelo hadrónico que nosotros, Walecka no lineal, con una parametrización distinta. El modelo de quarks, es diferente. En el trabajo de [Benhar et al., 2005], construyen las EHs con un modelo de quarks muy similar al nuestro, pero una EdE hadrónica diferente. Comparando los resultados del trabajo de [Wu et al., 2019] con el nuestro, para un Bag de $B = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, y con una tensión superficial $\sigma_{HQ} = 10 \text{ MeV}/\text{fm}^2$, se puede apreciar una gran similitud con las densidades a las que aparecen las estructuras de pasta. Las energías superficiales-coulombianas en la región de fase mixta para las estructuras son también parecidas, aunque los resultados presentados aquí muestran energías levemente superiores. Los tamaños de las celdas de Wigner-Seitz se asemejan bastante, mientras que el tamaño de las estructuras coinciden para tubos y burbujas, no así para el resto de las estructuras. En el caso del trabajo de [Benhar et al., 2005], en el que usan una tensión superficial $\sigma_{HQ} = 10 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ y un Bag $B = 200 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, se ve que las estructuras aparecen a densidades más altas que en esta tesis, y las energías superficiales y coulombianas son mayores, unos $\sim 6 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Además, un aumento del Bag implica que aparezcan las estructuras a densidades más altas en coincidencia con los resultados de esta tesis.

Finalmente, se procedió a usar el código TOV del GGAC para obtener las diferentes familias de estrellas con su respectiva curva masa-radio. Se obtuvieron ramas estables de estrellas puramente hadrónicas, estrellas con núcleo mixto y una proporción marginal de estrellas con fase mixta y núcleo interno de materia de quarks pura. Este último caso resulta interesante destacar: para las dos curvas cuya EdE corresponde a $B = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, la estrella de masa máxima posee un núcleo de quarks puro. Es decir, la aparición de materia de quarks pura, en estos casos, desestabiliza las configuraciones estelares. Por otro lado, si bien el efecto de la tensión superficial en las curvas masa-radio no es notorio, para una tensión superficial mayor, las curvas masa-radio con el mismo *Bag* sufren una disminución en la masa de las estrellas que contienen fase mixta. La EdE se *ablanda* levemente a mayor tensión superficial; este efecto es más evidente a menor Bag.

Tanto los resultados obtenidos en esta tesis como los de [Benhar et al., 2005],

para un Bag $B = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ no satisfacen la restricción de $2 M_{\odot}$. También se observa que los valores de radio para las configuraciones estelares de [Benhar et al., 2005] son menores. La aparición de estrellas con fase mixta en las curvas masa-radio del trabajo de [Wu et al., 2019] ocurre a partir de $\sim 1,5 M_{\odot}$ mientras que en esta tesis para un Bag $B = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ sucede a $\sim 1,85 M_{\odot}$. Además se observa que los valores de radio de las estrellas en dicho trabajo son mayores. Se puede concluir que la curva masa-radio construida con el modelo de Bag $B = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ de esta tesis es similar a la de [Wu et al., 2019], debido a que ambos trabajos utilizan el mismo modelo hadrónico. Las diferencias mencionadas anteriormente en este párrafo podrían radicar en el uso de distintas parametrizaciones hadrónicas. Además, se puede establecer cierto paralelismo en la descripción de los modelos de quarks, si uno considera interacciones vectoriales nulas en el trabajo de [Wu et al., 2019].

Además, se concluye que de las cuatro EdEs construidas ninguna cumple simultáneamente con todas las restricciones observacionales actuales de ENs. Esta falencia queda en evidencia directa para los casos con $B = 120 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, dado que sus masas máximas no superan las $1,7 M_{\odot}$. Para los casos con $B = 220 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, si bien la curva en el diagrama masa-radio alcanza las $2M_{\odot}$, lo cual sugiere que los púlsares J0348+0432 y J0740+6620 podrían ser EHs con fase mixta, no cumple con las restricciones para los radios dadas por el evento GW170817. En este sentido, es importante destacar que si bien nuestro modelo para las EdEs debe ser corregido o descartado en función de esta falencia, el proceso de implementación del método de coexistencia de fases y posterior desarrollo del código correspondiente, permitirá ahora, como trabajo a futuro, su aplicación sobre EdEs más modernas y/o sofisticadas. En este sentido, el trabajo realizado en esta Tesis de Licenciatura resulta un primer paso para el grupo en esta área de investigación del estudio de ENs. Por consiguiente, surgen ahora diversos caminos que pueden plantearse como trabajo a futuro.

Respecto a la EdE hadrónica, ésta debería satisfacer todas las restricciones observacionales de ENs; esto implica modificar la parametrización hadrónica. Además, deberían incluirse otro tipo de hadrones más masivos que pueden aparecer a medida que aumenta la densidad dentro de la estrella. La presencia de extrañeza, ya sea en forma de hiperones (hadrones que contienen al menos un quark s) en la materia nuclear o de quarks extraños en la materia quarks, hace más compresible la materia que compone las ENs. Esta mayor compresibilidad en la EdE conlleva un valor más bajo de masa máxima para la familia de ENs construida, dificultando el cumplimiento de la restricción de $2 M_{\odot}$. Esto puede solucionarse, por ejemplo, teniendo en cuenta auto-interacciones de los mesones para el modelo hadrónico, ya que endurecen la EdE. Respecto al modelo de quarks, se podría

mejorar usando un modelo de bolsa de MIT pero con correcciones en la constante de acoplamiento fuerte tal como se proponen en la Ref. [Fraga et al., 2005]. Este modelo considera la EdE de QCD a alta densidad y temperatura cero en teoría de perturbaciones a primer orden en la constante de acoplamiento, mejorando el tratamiento de [Farhi et al., 1984].

Otro aspecto interesante en el cual sería interesante profundizar, que nosotros comentamos brevemente, es el hecho de que nuestro enfoque fue perturbativo, agregando los efectos de la fase de pasta *a posteriori*, luego de construida la fase mixta con el método de Gibbs. Este método, como analizamos, resulta una buena aproximación dado que las energías asociadas a los efectos de superficie y Coulomb son pequeñas en relación a las energías de *bulk* de las fases de hadrones y quarks. Sin embargo, tal como se plantea en [Wu et al., 2019], este *método de coexistencia de fases* puede ser mejorado, recurriendo al *método de minimización de la energía* o *modelo de gota líquida compresible*, el cual incluye los efectos de tamaño finito *a priori* a la par de los efectos de *bulk*.

También podrían incluirse efectos del campo magnético, de manera de estudiar su influencia en las estructuras de pasta, las cuales tienen carga eléctrica neta. En este sentido, se podría realizar una extensión del estudio de [Wang et al., 2022], donde los campos magnéticos intensos entre la corteza interna y el núcleo externo, influyen en la formación de zonas inhomogéneas de pasta. Asimismo, la formación de estructuras podría ser relevante para mecanismos de enfriamiento de las EHs, influyendo, por ejemplo, en la emisividad de neutrinos [Na et al., 2012]. Finalmente, estudiar la manera en que la presencia de estructuras geométricas puede afectar ciertos modos de oscilación y su posterior emisión de OGs podría contribuir a identificar posibles evidencias observacionales de la fase de pasta, en el marco de la próxima generación de detectores de OGs.

Bibliografía

- [Abbott et al., 2020] B. P. Abbott et al. (2020). Gw190425: Observation of a compact binary coalescence with total mass $\sim 3,4m_{\odot}$. The Astrophysical Journal Letters, 892(1):L3.
- [Abbott et al., 2017] B. P. Abbott et al. (2017). Multi-messenger observations of a binary neutron star merger*. The Astrophysical Journal Letters, 848(2):L12.
- [Abbott et al., 2017] B. P. Abbott et al. (2017). Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. ApJ, 848(2):L13.
- [Abbott et al., 2018] B. P. Abbott et al. (2018). GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State. Phys. Rev. Lett., 121(16):161101.
- [Abbott et al., 2017] B. P. Abbott y et al. (2017). Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. Phys. Rev. Lett., 119:161101.
- [Alcain et al., 2014] P. N. Alcain, P. A. Giménez Molinelli y C. O. Dorso (2014). Beyond nuclear “pasta” : Phase transitions and neutrino opacity of new “pasta” phases. Phys. Rev. C, 90(6):065803.
- [Antoniadis et al., 2013] J. Antoniadis et al. (2013). A massive pulsar in a compact relativistic binary. Science, 340(6131):1233232.
- [Arzoumanian et al., 2018] Z. Arzoumanian et al. (2018). The NANOGrav 11-year Data Set: High-precision Timing of 45 Millisecond Pulsars. ApJS, 235(2):37.
- [Baade et al., 1934] W. Baade y F. Zwicky (1934). Cosmic Rays from Supernovae. Proceedings of the National Academy of Science, 20(5):259–263.
- [Baym et al., 1971a] G. Baym, H. A. Bethe y C. J. Pethick (1971a). Neutron star matter. Nuc. Phys. A, 175(2):225–271.

-
- [Baym et al., 1976] G. Baym y S. A. Chin (1976). Can a neutron star be a giant MIT bag? Physics Letters B, 62(2):241–244.
- [Baym et al., 1971b] G. Baym, C. Pethick y P. Sutherland (1971b). The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models. ApJ, 170:299.
- [Bednarek, 2007] I. Bednarek (2007). Relativistic mean field: models of neutron stars. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.
- [Benhar et al., 2005] O. Benhar y R. Rubino (2005). Stability of the mixed phase in hybrid stars. Astronomy & Astrophysics, 434(1):247–256.
- [Berger et al., 1987] M. S. Berger y R. L. Jaffe (1987). Radioactivity in strange quark matter. Phys. Rev. C, 35(1):213–225.
- [Bethke, 2007] S. Bethke (2007). Experimental tests of asymptotic freedom. Progress in Particle and Nuclear Physics, 58(2):351–386.
- [Bodmer, 1971] A. R. Bodmer (1971). Collapsed nuclei. Phys. Rev., D4:1601–1606.
- [Brecher et al., 1976] K. Brecher y G. Caporaso (1976). Obese ‘neutron’ stars. Nature, 259(5542):377–378.
- [Caplan et al., 2017] M. E. Caplan y C. J. Horowitz (2017). Colloquium: Astromaterial science and nuclear pasta. Reviews of Modern Physics, 89(4):041002.
- [Carroll, 2019] S. Carroll (2019). Spacetime and Geometry. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.
- [Chandrasekhar, 1964] S. Chandrasekhar (1964). The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity. ApJ, 140:417.
- [Chapline, 1976] G. Chapline (1976). Phase transition from baryon to quark matter. Nature, 264(5583):235–236.
- [Chodos et al., 1974] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn y V. F. Weisskopf (1974). New extended model of hadrons. Phys. Rev. D, 9:3471–3495.
- [Cromartie et al., 2020] H. T. Cromartie et al. (2020). Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. Nature Astronomy, 4:72–76.

-
- [Curin et al., 2021] D. Curin, I. F. Ranea-Sandoval, M. Mariani, M. G. Orsaria y F. Weber (2021). Hybrid Stars with Color Superconducting Cores in an Extended FCM Model. Universe, 7(10):370.
- [Dar et al., 2015] J. A. Dar, P. K. Singh y R. Swaroop (2015). Calculations for Density of Quark Core Consisting of Mono Flavored Closely Packed Quarks inside Neutron Star. International Journal of Astronomy and Astrophysics, 5(4):258–266.
- [Demorest et al., 2010] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts y J. W. T. Hessels (2010). A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. Nature, 467(7319):1081–1083.
- [Estevez-Delgado et al., 2019] G. Estevez-Delgado, J. Estevez-Delgado, N. M. García y M. P. Duran (2019). A perfect fluid model for compact stars. Canadian Journal of Physics, 97(9):988–993.
- [Falomir, 2015] H. A. Falomir (2015). Curso de métodos de la física matemática volumen ii - introducción a la teoría de grupos.
- [Farhi et al., 1984] E. Farhi y R. L. Jaffe (1984). Strange matter. Physical Review D, 30(11):2379–2390.
- [Fonseca et al., 2021] E. Fonseca et al. (2021). Refined Mass and Geometric Measurements of the High-mass PSR J0740+6620. ApJ, 915(1):L12.
- [Fraga et al., 2005] E. S. Fraga y P. Romatschke (2005). Role of quark mass in cold and dense perturbative qcd. Physical Review D, 71(10):105014.
- [Glendenning et al., 1991] N. Glendenning y S. Moszkowski (1991). Reconciliation of neutron-star masses and binding of the λ in hypernuclei. Physical review letters, 67(18):2414.
- [Glendenning, 1992] N. K. Glendenning (1992). First-order phase transitions with more than one conserved charge: Consequences for neutron stars. Phys. Rev. D, 46(4):1274–1287.
- [Goldreich et al., 1969] P. Goldreich y W. H. Julian (1969). Pulsar Electrodynamics. ApJ, 157:869.
- [Haar et al., 2007] D. Haar y R. Balian (2007). From Microphysics to Macrophysics: Methods and Applications of Statistical Physics. Volume I. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg.

-
- [Heiselberg et al., 1993] H. Heiselberg, C. J. Pethick y E. F. Staubo (1993). Quark matter droplets in neutron stars. Phys. Rev. Lett., 70(10):1355–1359.
- [Higgs, 1964] P. W. Higgs (1964). Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. Phys. Rev. Lett., 13(16):508–509.
- [Horowitz et al., 2020] C. J. Horowitz, J. Piekarewicz y B. Reed (2020). Insights into nuclear saturation density from parity-violating electron scattering. Phys. Rev. C, 102(4):044321.
- [Iida et al., 1998] K. Iida y K. Sato (1998). Effects of hyperons on the dynamical deconfinement transition in cold neutron star matter. Physical Review C, 58(4):2538.
- [Itoh, 1970] N. Itoh (1970). Hydrostatic Equilibrium of Hypothetical Quark Stars. Progress of Theoretical Physics, 44(1):291–292.
- [Jiménez et al., 2020] J. C. Jiménez y E. S. Fraga (2020). Cold quark matter with heavy quarks and the stability of charm stars. Physical Review D, 102(3):034015.
- [Keister et al., 1976] B. D. Keister y L. S. Kisslinger (1976). Free-quark phases in dense stars. Physics Letters B, 64(1):117–120.
- [Kodama, 2002] T. Kodama (2002). Introduction to relativistic gases. In AIP Conference Proceedings, volume 631, pages 3–26. American Institute of Physics.
- [Kurkela et al., 2010] A. Kurkela, P. Romatschke y A. Vuorinen (2010). Cold quark matter. Physical Review D, 81(10).
- [Landau, 1932] L. D. Landau (1932). To the Stars theory. Phys. Zs. Sowjet, 1:285.
- [Langanke et al., 2021] K. Langanke, G. Martínez-Pinedo y R. G. T. Zegers (2021). Electron capture in stars. Reports on Progress in Physics, 84(6):066301.
- [Lopes et al., 2021] L. L. Lopes, C. Biesdorf y D. P. Menezes (2021). Modified MIT bag models—part i: Thermodynamic consistency, stability windows and symmetry group. Physica Scripta, 96(6):065303.
- [Lugones et al., 2017] G. Lugones y A. G. Grunfeld (2017). Surface tension of highly magnetized degenerate quark matter. Phys. Rev. C, 95(1):015804.

-
- [Lugones et al., 2019] G. Lugones y A. G. Grunfeld (2019). Surface tension of hot and dense quark matter under strong magnetic fields. Phys. Rev. C, 99(3):035804.
- [Mariani et al., 2017] M. Mariani, M. Orsaria y H. Vucetich (2017). Constant entropy hybrid stars: a first approximation of cooling evolution. Astron. Astrophys., 601:A21.
- [Mariani et al., 2019] M. Mariani, M. G. Orsaria, I. F. Ranea-Sandoval y G. Lugones (2019). Magnetized hybrid stars: effects of slow and rapid phase transitions at the quark–hadron interface. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 489(3):4261–4277.
- [Miller et al., 2019] M. C. Miller et al. (2019). PSR j0030+0451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter. The Astrophysical Journal, 887(1):L24.
- [Miller et al., 2021] M. C. Miller et al. (2021). The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data. ApJ, 918(2):L28.
- [Na et al., 2012] X. Na, R. Xu, F. Weber y R. Negreiros (2012). Transport properties of a quark-hadron coulomb lattice in the cores of neutron stars. Phys. Rev. D, 86:123016.
- [Nefediev et al., 2009] A. V. Nefediev, Y. A. Simonov y M. A. Trusov (2009). Deconfinement and quark-gluon plasma. Int. J. Mod. Phys. E, 18:549–599.
- [Negele et al., 1973] J. W. Negele y D. Vautherin (1973). Neutron star matter at sub-nuclear densities. Nucl. Phys. A, 207(2):298–320.
- [Oppenheimer et al., 1939] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff (1939). On Massive Neutron Cores. Physical Review, 55(4):374–381.
- [Orsaria et al., 2019] M. G. Orsaria et al. (2019). Phase transitions in neutron stars and their links to gravitational waves. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 46(7):073002.
- [Pauli, 1925] W. Pauli (1925). Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. Zeitschrift für Physik, 31(1):765–783.
- [Pauli, 1994] W. Pauli (1994). Exclusion Principle and Quantum Mechanics, pages 165–181. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

-
- [Peskin, 2018] M. Peskin (2018). An Introduction To Quantum Field Theory. CRC Press.
- [Pinto et al., 2012] M. B. Pinto, V. Koch y J. Randrup (2012). Surface tension of quark matter in a geometrical approach. Phys. Rev. C, 86(2):025203.
- [Ranea-Sandoval et al., 2018] I. F. Ranea-Sandoval, O. M. Guilera, M. Mariani y M. G. Orsaria (2018). Oscillation modes of hybrid stars within the relativistic cowling approximation. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2018(12):031.
- [Ravenhall et al., 1983] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick y J. R. Wilson (1983). Structure of Matter below Nuclear Saturation Density. Phys. Rev. Lett., 50(26):2066–2069.
- [Rezzolla et al., 2018] L. Rezzolla, E. R. Most y L. R. Weih (2018). Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars. The Astrophysical Journal Letters, 852(2):L25.
- [Riley et al., 2019] T. E. Riley et al. (2019). A NICER View of PSR J0030+0451: Millisecond Pulsar Parameter Estimation. ApJ, 887(1):L21.
- [Riley et al., 2021] T. E. Riley et al. (2021). A nicer view of the massive pulsar psr j0740+6620 informed by radio timing and xmm-newton spectroscopy. The Astrophysical Journal Letters, 918(2):L27.
- [Rodríguez et al., 2021] M. C. Rodríguez et al. (2021). Hybrid stars with sequential phase transitions: the emergence of the g2 mode. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2021(02):009.
- [Schaffner-Bielich, 2020] J. Schaffner-Bielich (2020). Compact Star Physics. Cambridge University Press.
- [Schmitt, 2010] A. Schmitt (2010). Dense Matter in Compact Stars: A Pedagogical Introduction. Springer, 2010 edition.
- [Schneider et al., 2019] A. Schneider, C. Constantinou, B. Muccioli y M. Prakash (2019). The apr equation of state for simulations of supernovae, neutron stars and binary mergers. arXiv preprint arXiv:1901.09652.
- [Schwarzschild, 1916] K. Schwarzschild (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, pages 189–196.

-
- [Sen et al., 2021] D. Sen, N. Alam y G. Chaudhuri (2021). Properties of hybrid stars with a density-dependent bag model. Journal of Physics G Nuclear Physics, 48(10):105201.
- [Shapiro et al., 2008] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky (2008). Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects. John Wiley & Sons.
- [Shibata et al., 2019] M. Shibata, E. Zhou, K. Kiuchi y S. Fujibayashi (2019). Constraint on the maximum mass of neutron stars using gw170817 event. Phys. Rev. D, 100:023015.
- [Tan, 2021] C. Tan (2021). High-mass x-ray binary: Classification, formation, and evolution. Journal of Physics: Conference Series, 2012.
- [Tanimoto et al., 2020] T. Tanimoto, W. Bentz y I. C. Cloët (2020). Massive neutron stars with a color superconducting quark matter core. Phys. Rev. C, 101(5):055204.
- [Tsuruta, 2016] S. Tsuruta (2016). Temperature of neutron stars. International Journal of Modern Physics D, 25(10):1630026.
- [Voskresensky et al., 2003] D. N. Voskresensky, M. Yasuhira y T. Tatsumi (2003). Charge screening at first order phase transitions and hadron-quark mixed phase. Nucl. Phys. A, 723(1-2):291–339.
- [Wang et al., 2022] X. Wang, J. Li, J. Fang, H. Pais y C. Providência (2022). Pasta phases in neutron stars under strong magnetic fields. Physical Review D, 105(6):063004.
- [Wikipedia, 2022a] Wikipedia (2022a). Estructura estelar — wikipedia, la enciclopedia libre. [Internet; descargado 12-diciembre-2022].
- [Wikipedia, 2022b] Wikipedia (2022b). Evolución estelar — wikipedia, la enciclopedia libre. [Internet; descargado 20-febrero-2023].
- [Wikipedia, 2023] Wikipedia (2023). Estrella de neutrones — wikipedia, la enciclopedia libre. [Internet; descargado 20-febrero-2023].
- [Witten, 1984] E. Witten (1984). Cosmic Separation of Phases. Phys. Rev., D30:272–285.
- [Wu et al., 2019] X. H. Wu y H. Shen (2019). Nuclear symmetry energy and hadron-quark mixed phase in neutron stars. Phys. Rev. C, 99(6):065802.

[Xia et al., 2019] C.-J. Xia, T. Maruyama, N. Yasutake y T. Tatsumi (2019).
Constraining quark-hadron interface tension in the multimessenger era. Phys.
Rev. D, 99:103017.

[Zee, 2010] A. Zee (2010). Quantum Field Theory in a Nutshell: Second Edition.
In a Nutshell. Princeton University Press.