

DETERMINACION DE ALTURAS. MATEMATICA, FISICA Y TECNOLOGIA

Cecilia Z. González – Horacio Caraballo – Fabiana Pauletich

ceciliazgonzalez@gmail.com – caraballohoracio@gmail.com - fpauletich@gmail.com

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.

Modalidad: Feria Matemática (F)

Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)

Palabras clave: Telemetría. Clinómetro. Tecnología. Aplicación.

Resumen

En este trabajo presentamos una situación didáctica estructurada que integra el conocimiento matemático y algunos aspectos de la Física y la Tecnología; entendida esta última como conjunto de instrumentos y procedimientos fundados científicamente que permiten lograr un objetivo.

La arquitectura de este diseño puede resumirse en cuatro partes: Matemática, Física, Tecnología y Aplicación. Cada una de estas partes se pueden tratar con mayor o menor profundidad según se decida y no necesariamente debe respetarse el orden en que están enunciadas. Se construye una tecnología telemétrica que permite medir la altura de un objeto dado, a partir de conocimientos trigonométricos elementales.

Los propósitos de estas actividades son: integración y refuerzo de los conocimientos matemáticos puestos en juego; integración de los aspectos matemáticos, físicos y tecnológicos involucrados en el problema y la resignificación de los contenidos formales en el marco más amplio de la aplicación tecnológica. Un aspecto importante es que los alumnos construyen su propio instrumento de medición (un clinómetro) y un protocolo de procedimientos que le permite implementar la tecnología. Además, se utiliza software de Matemática Dinámica como herramienta de modelización.

Hemos usado este tipo de situaciones, con muy buenos resultados, planteándolas como un taller que se desarrolla en uno o más encuentros.

Introducción

El eje que estructura las actividades es un taller o proyecto que los alumnos desarrollan en pocas clases. Está pensado para generar una discontinuidad en el desarrollo habitual de un curso. La temática involucrada es la de los triángulos y ángulos de la geometría plana. El propósito es resignificar el conocimiento geométrico en el contexto de la aplicación, aportar

a la comprensión del tema y estimular competencias relacionadas a las capacidades matemáticas de conexión y reflexión.

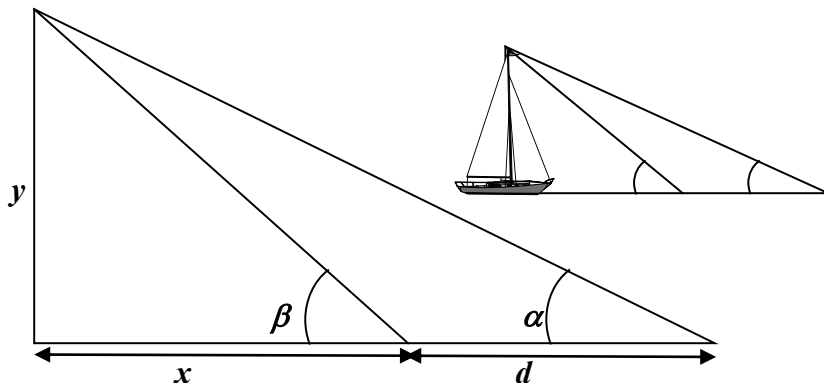
El trabajo propuesto en el taller consiste en calcular la altura de un punto de un objeto seleccionado, el observador se puede desplazar en un lugar plano y horizontal. El punto en el objeto no es accesible. Pueden presentarse dos casos: la intersección de la vertical del mismo con el plano horizontal en el que se mueve el observador es accesible o no lo es, estas alternativas generan situaciones de diferente complejidad. Para calcular la altura buscada se miden ángulos de elevación de la visual al objeto y la vertical y las distancias de algunos desplazamientos en el plano horizontal, según corresponda a una de tres situaciones: se tiene acceso a la intersección de la vertical del objeto con el plano horizontal y el observador se puede desplazar hasta medir un ángulo de elevación de 45° , se tiene acceso a la intersección de la vertical del objeto con el plano horizontal y el observador se coloca en cualquier punto y mide el ángulo correspondiente, no se tiene acceso a la intersección de la vertical del objeto con el plano horizontal.

Con todos los datos el problema se puede resolver a partir de la aplicación conceptos básicos sobre razones trigonométricas de triángulos rectángulos o se puede construir un simulador geométrico utilizando un software de matemática dinámica para determinar la altura pretendida. Los instrumentos que se utilizan son: una cinta métrica y un clinómetro, este último es un instrumento básico construido por los alumnos, consta de un tubo, un transportador de ángulos y un hilo con un contrapeso.

El simulador, si se decide utilizarlo, está realizado por los alumnos utilizando GeoGebra, la idea está relacionada con la representación de un triángulo a escala que modeliza el problema, la construcción dinámica permite elegir los parámetros medidos y obtener la información requerida (Caraballo, González, 2016).

Descripción y resolución del problema

El problema consiste en determinar la medida del segmento y que representa la altura de un punto que se identifica en un objeto dado.



Por motivos de simplicidad, en estas notas, se acepta una transposición didáctica respecto a nombrar el segmento y y su medida del mismo modo; se podrían nombrar los vértices de los triángulos con letras mayúsculas y utilizar una notación tradicional para los segmentos y la medida entre sus puntos extremos logrando un discurso más correcto desde el punto de vista formal pero más engorroso.

La resolución del problema general (determinar y sin poder medir x) involucra los temas matemáticos:

- Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.
- Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Extracción de un factor común.
- Valor numérico de una expresión con varias incógnitas, $x(\alpha, \beta, d)$ y $y(\alpha, \beta, d)$.

La solución general es:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x + d} \quad (1) \qquad \tan \beta = \frac{y}{x} \quad (2)$$

De la ecuación (1): $y = x \tan \alpha + d \tan \alpha$

Reemplazando en (2): $x \tan \beta = x \tan \alpha + d \tan \alpha$

Finalmente:

$$x = \frac{d \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \qquad y = \frac{d \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

En particular si se puede medir x el problema se restringe al triángulo rectángulo más pequeño, luego:

$$\tan \beta = \frac{y}{x} \quad \text{Finalmente: } y = x \tan \beta$$

Si se puede medir x y además determinar el valor de beta en 45° entonces:

$$y = x$$

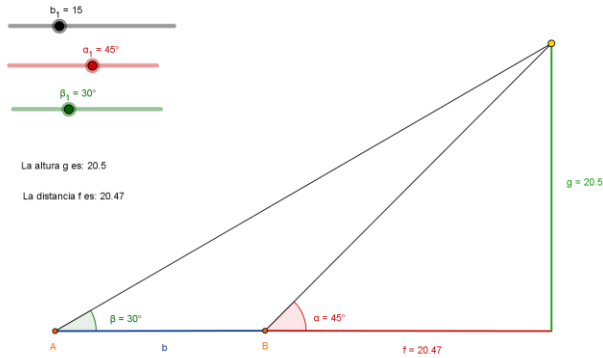
Simulación

La simulación está a cargo de los alumnos utilizando un programa de geometría dinámica, la idea está relacionada con la representación de los triángulos a escala que modeliza el problema, la construcción dinámica permite elegir los parámetros medidos y obtener la información requerida.

La aplicación que utilizamos es GeoGebra, el motivo de la elección es que el programa tiene licencia GNU (General Public License), es un software libre de matemática para la educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único entorno, sencillo a nivel operativo y muy potente.

Para el caso general se muestra a continuación un simulador que permite ingresar las medidas utilizando los deslizadores y obtener directamente el resultado.

Esta simulación está en <https://www.geogebra.org/m/TtTKk46S> se puede descargar libremente y ver el protocolo de construcción para entender como fue diseñada. Recordemos que la idea es que los alumnos construyan su propia simulación, si no están suficientemente familiarizados con el software se les puede ofrecer un instructivo en forma de guía que les resuelva el contacto con la interface.

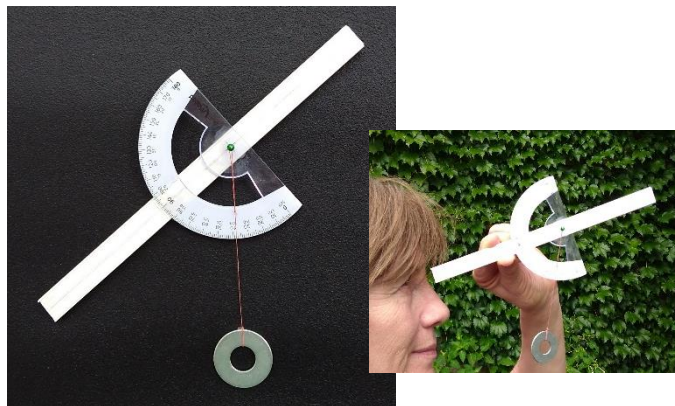


Notar que la simulación permite prescindir de la resolución deductiva del problema, por ejemplo, en el caso de alumnos que todavía no hayan estudiado la trigonometría.

Aclaremos que con los datos obtenidos se podría construir un dibujo a escala utilizando lápiz y papel, esta alternativa no debe ser descartada y puede ser una actividad previa a la simulación dinámica. Los escenarios didácticos que se generan son diferentes, en el caso del dibujo en papel la idea central es la escala, en el caso de la simulación el eje central está dado por la programación de los objetos geométricos y la comprensión de sus propiedades.

Clinómetro

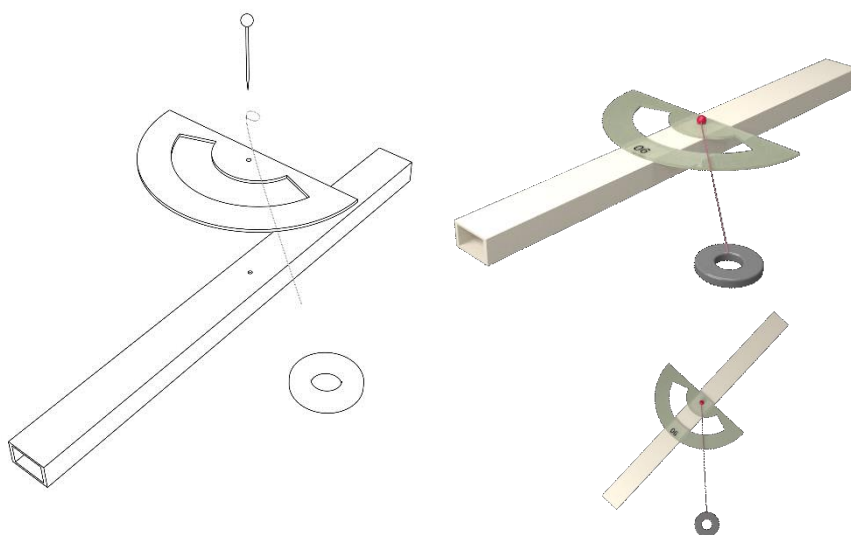
El clinómetro que utilizamos es un instrumento elemental que permite medir el ángulo de elevación entre la visual y la horizontal.



La visual es la línea recta que pasa por el objeto observado y el ojo del observador, entendemos por horizontal una línea recta en el plano horizontal. El plano horizontal es perpendicular a una recta vertical, esta recta vertical queda determinada por el hilo del

clinómetro (plomada). De estas definiciones se entiende el funcionamiento del clinómetro. Notar que la visual, la horizontal y la vertical del objeto están en un mismo plano.

A continuación, describimos la construcción de un modelo básico de clinómetro. Esto puede hacerse de distintas formas, las claves para el correcto funcionamiento son: el hilo debe colgar libremente en el centro del transportador como se ve en las figuras y la varilla que se utiliza para determinar la visual debe estar alineada con la línea que pasa por el centro del transportador y la marca de 90° . En la figura siguiente se muestran las piezas por separado: un alfiler, hilo de costura, transportador, tubo de sección rectangular y una arandela. Todos estos elementos podrían cambiarse por otros equivalentes, nuestra elección se debe a la simplificación de construcción y a los elementos que disponíamos, el transportador y el tubo se pegan con cualquier adhesivo.



Física

Los conceptos físicos involucrados son:

- Propagación de la luz, para este nivel se toma la representación de un rayo que viaja de manera rectilínea. En particular debe explicitarse el mecanismo básico de “ver un objeto” y relacionarlo con la alineación visual del clinómetro.
- Atracción gravitatoria, peso de un cuerpo, asociada a la determinación de la vertical y horizontal. Junto con el punto anterior permite fundamentar el funcionamiento del clinómetro.

- Sistema Internacional de Unidades, en la determinación del protocolo experimental en lo que respecta a las medidas de distancias y ángulos.
- Reconocimiento de la geometría euclídea del plano como formalismo que permite modelizar la situación en los contextos matemático y físico. Si estas actividades se propusieran para un nivel superior se podrían estudiar las geometrías no euclídeas como alternativas en la descripción de los fenómenos físicos.

En general, la profundidad con la que se aborden estos tópicos dependerá del nivel en el que se desarrolle la actividad y de las decisiones didácticas que tomen los docentes.

Tecnología

Según la Real Academia Española (RAE), las posibles acepciones para la palabra tecnología son:

- Conjunto de teorías y de técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico.
- Tratado de los términos técnicos.
- Lenguaje propio de una ciencia o de un arte.
- Conjunto de los instrumentos y procedimientos industriales de un determinado sector o producto.

Para estas notas caso tomaremos como definición de tecnología al conjunto de los instrumentos y procedimientos formulados en un contexto científico que permiten resolver el problema.

Método didáctico

El diseño de las actividades se presenta en un formato de taller o proyecto que los alumnos desarrollan en varias clases. Es conveniente que se proponga para grupos pequeños, no más de cuatro alumnos.

Para sistematizar la tarea, la estructura se puede resumir esquemáticamente en cuatro bloques: resultados formales, supuestos físicos, tecnología y por último la aplicación de la tecnología (Caraballo, González, 2002).

Los resultados formales son geométricos referidos a triángulos y ángulos en el plano según el nivel educativo en el que está propuesto este trabajo. Si se quisiera proponer a alumnos que no conocen la trigonometría se podría hacer directamente la simulación dinámica sin resolver el problema deductivamente. Si se quisiera proponer a alumnos de niveles

superiores se podría agregar el análisis de los errores de medición, la variación relativa de primer orden.

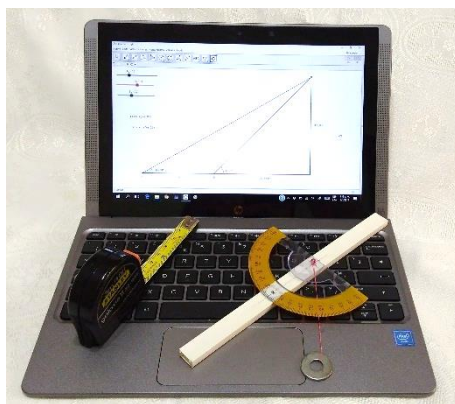
Los supuestos físicos, como ya dijimos, están relacionados con la carga semántica que le otorgamos a la geometría euclídea, a nivel específico con la propagación de la luz, etc. Si se quiere profundizar un aspecto relacionado al fundamento se puede instalar una controversia a partir de la presentación de las geometrías no euclídeas.

La tecnología es entendida como el conjunto de instrumentos y procedimientos y la aplicación es el uso de la tecnología para determinar teleméricamente la altura de algún objeto seleccionado.

El orden en el que se articulan las actividades puede ser diverso y no respetar la estructura matemática, física, tecnología y aplicación.

Cada parte que hemos descrito implica decisiones referentes a cuanta tarea queda a cargo de los alumnos y cuanta se les entrega hecha, esto está relacionado a la duración del taller, a la profundidad que se le quiera dar y los objetivos didácticos trazados. Además, se le pueden agregar otras etapas, por ejemplo:

- Informe final, que agregaría capacidades relacionadas a la expresión escrita y nuevos recursos informáticos como por ejemplo un procesador de texto, etc.
- Defensa de los resultados por parte de los distintos grupos ante sus pares y el docente, que agregaría capacidades relacionadas a la expresión oral y recursos informáticos como programas para presentaciones, etc.
- Publicación digital, blog, Wiki, etc.



En resumen, los alumnos disponen de resultados geométricos, instrumentos de medición, un simulador y un protocolo de procedimientos que permite aplicar la tecnología a una

situación concreta. Respecto de los procedimientos da muy buenos resultados que los alumnos los redacten con un formato de “manual de usuario” con una serie de pasos que le permita a cualquier persona aplicar la tecnología. Esta no es una tarea simple, si no se dan pautas fijas es notable ver la diversidad de discursos que genera, la mayor o menor síntesis, los acentos puestos en lo visual o lo muy discursivo, etc.

Conclusiones

Se logra la resignificación, refuerzo e integración del conjunto de saberes matemáticos puestos en juego en el desarrollo de las actividades. Los conocimientos son reacomodados, dándose una síntesis integradora. Los alumnos logran relacionar distintos temas entre si y utilizarlos en el transcurso del proyecto. Hay una articulación significativa con la Física y también una estimulación de la creatividad referida a la solución de problemas técnicos.

La posibilidad de enfrentar con éxito problemas reales implica como resultado un cambio de perspectiva respecto del conocimiento matemático. Se ve este último como una herramienta que puede ser aplicada en distintos contextos y no solamente como un “juego formal”.

En este marco la utilización de recursos informáticos queda totalmente integrada a las actividades. Desde un punto de vista más específico el uso de un programa de matemática dinámica propone nuevos escenarios de aprendizaje, nuevas capacidades referidas a construir herramientas, modelar y estructurar situaciones. Este último tópico se refiere a traducir la “realidad” a una estructura matemática (Niss,1999), en nuestro caso dinámica, trabajar con el modelo matemático, reflexionar, analizar y plantear críticas, monitorear y controlar el proceso de modelado, etc.

La construcción del clinómetro plantea un sinnúmero de desafíos que motiva positivamente a los alumnos.

Referencias bibliográficas

Caraballo H. y González C. (2016). Situaciones didácticas estructuradas. Una simulación geométrica. Acta del XI Congreso Argentino de Educación Matemática. 286-295.

González C. y Caraballo H. (2002). De un resultado matemático a una implementación tecnológica. Memorias del IV Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy. Provincia de Buenos Aires.

Manual de GeoGebra 5.0 (2016). <https://wiki.geogebra.org/es/Manual> Consultado en diciembre de 2016.

Niss M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*,9, 21-29

Catetos de un triángulo rectángulo (2015). <https://www.geogebra.org/horacioc> Consultado en enero de 2017.