

## DETERMINACION DE DISTANCIAS. MATEMATICA, FISICA Y TECNOLOGIA

Cecilia Z. González – Horacio Caraballo – Fabiana Pauletich

[ceciliazgonzalez@gmail.com](mailto:ceciliazgonzalez@gmail.com) – [caraballohoracio@gmail.com](mailto:caraballohoracio@gmail.com) - [fpauletich@gmail.com](mailto:fpauletich@gmail.com)

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.

Modalidad: Feria Matemática (F)

Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)

Palabras clave: Telemetría. Goniómetro. Tecnología. Aplicación.

### Resumen

*En este trabajo presentamos una situación didáctica estructurada que integra el conocimiento matemático y algunos aspectos de la Física y la Tecnología; entendida esta última como conjunto de instrumentos y procedimientos fundados científicamente que permiten lograr un objetivo.*

*La arquitectura de este diseño puede resumirse en cuatro partes: Matemática, Física, Tecnología y Aplicación. Cada una de estas partes se pueden tratar con mayor o menor profundidad según se decida y no necesariamente debe respetarse el orden en que están enunciados. Se construye una tecnología telemétrica que permite medir la distancia entre dos puntos partiendo de conocimientos trigonométricos generales.*

*Los propósitos de estas actividades son: integración y refuerzo de los conocimientos matemáticos puestos en juego; integración de los aspectos matemáticos, físicos y tecnológicos involucrados en el problema y la resignificación de los contenidos formales en el marco más amplio de la aplicación tecnológica. Uno de los aspectos más importantes de este diseño es que los alumnos construyen su propio instrumento de medición (un goniómetro basado en el funcionamiento del sextante) y un protocolo de procedimientos que le permite implementar la tecnología.*

*Hemos usado este tipo de situaciones, con muy buenos resultados, planteándolas como un taller que se desarrolla en uno o más encuentros.*

### Introducción

El eje que estructura las actividades es un taller o proyecto que los alumnos desarrollan en pocas clases. Está pensado para generar una discontinuidad en el desarrollo habitual de un curso. La temática involucrada es la de los triángulos y ángulos de la geometría plana. El propósito es resignificar el conocimiento geométrico en el contexto de la aplicación, aportar

a la comprensión del tema y estimular competencias relacionadas a las capacidades matemáticas de conexión y reflexión.

El trabajo propuesto en el taller consiste en calcular la distancia entre dos puntos, el observador se encuentra en uno de estos puntos y no puede acceder al otro. Para calcular la distancia se desplaza lateralmente hasta un tercer punto quedando determinado un triángulo, se realiza la medida del lado del triángulo y los dos ángulos interiores que corresponden a este lado. Con todos los datos el problema se puede resolver a partir de la aplicación del teorema del seno o se puede construir un simulador geométrico utilizando un software de matemática dinámica para determinar la distancia pretendida. Los instrumentos que se utilizan son: una cinta métrica y un goniómetro.

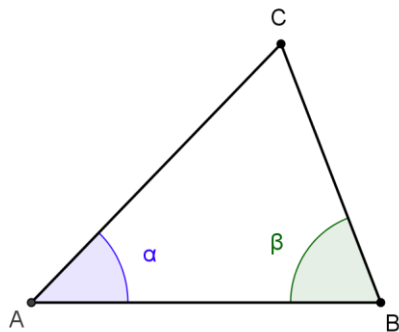
El goniómetro elemental está basado en el funcionamiento del sextante, tiene dos tubos paralelos, un transportador de ángulos y un espejo que gira con un eje perpendicular al plano del transportador.

El simulador, si se decide utilizarlo, está realizado por los alumnos utilizando GeoGebra, la idea está relacionada con la representación de un triángulo a escala que modeliza el problema, la construcción dinámica permite elegir los parámetros medidos y obtener la información requerida (Caraballo, González, 2016).

Se puede utilizar el software para armar un modelo que muestre que si un espejo gira un ángulo determinado el rayo reflejado gira el doble de dicho ángulo respecto del rayo incidente; de otro modo este resultado puede alcanzarse en términos deductivos a partir de propiedades elementales. Lo anterior permite comprender como se interpreta la lectura del transportador en el goniómetro.

### **Descripción y resolución del problema**

El problema que origina las actividades que nos ocupan tiene que ver con el cálculo de la distancia entre dos puntos a partir de las medidas que se obtienen sin tener acceso a uno de los puntos en cuestión. La situación se esquematiza en la siguiente figura.



Supongamos que no tenemos acceso al punto C. Los ángulos se miden con el goniómetro, la distancia entre A y B con una cinta métrica, la distancia entre A y C o entre B y C pueden determinarse de las siguientes maneras:

### Determinación deductiva de la distancia.

Datos:  $\alpha$ ,  $\beta$  y la distancia entre A y B. Del teorema del seno se tiene:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \beta} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } (180^\circ - \alpha - \beta)}$$

Luego:

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } (180^\circ - \alpha - \beta)} \text{sen } \alpha \quad \overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } (180^\circ - \alpha - \beta)} \text{sen } \beta$$

### Simulación en GeoGebra

Los siguientes comandos permiten construir, en GeoGebra, un simulador que resuelve la situación planteada en el problema de una manera dinámica.



Deslizador. 1 - Se define el deslizador a entre 1 y 50 incremento de 0.1



Deslizador. 2 - Se define el deslizador  $\alpha_1$  entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  con un incremento de  $1^\circ$



Deslizador. 3 - Se define el deslizador  $\beta_1$  entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  con un incremento de  $1^\circ$



Nuevo punto. 4 - Se ubica el punto A



Nuevo punto. 5 - Se ubica el punto B








Segmento entre dos puntos. 6 - Se define el segmento entre A y B

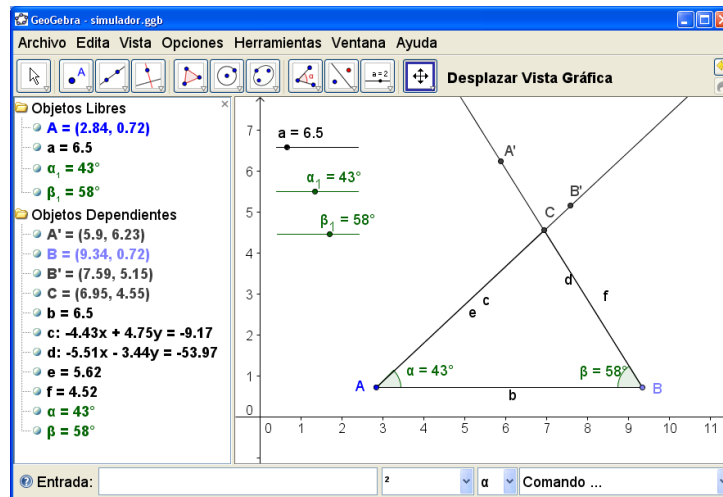


Angulo dada su amplitud. 7 - Se define un ángulo dada su amplitud, el primer punto es B, el vértice es A y la amplitud es  $\alpha$ , se elige en sentido antihorario

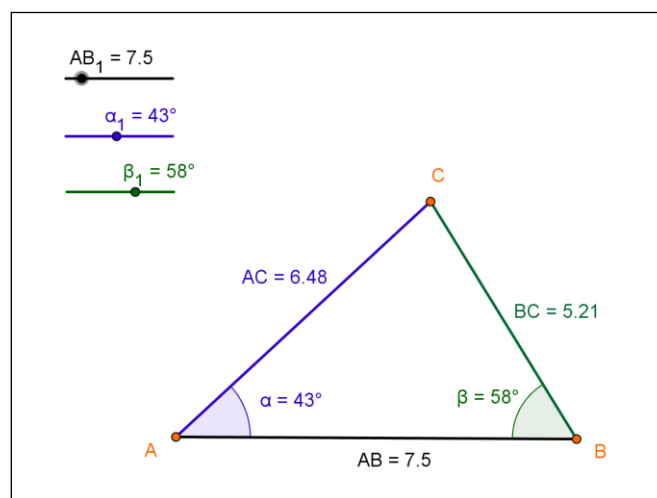


Angulo dada su Amplitud. 8 - Se define un ángulo dada su amplitud, el primer punto es A, el vértice es B y la amplitud es  $\beta$  se elige en sentido horario

-  Semirrecta que pasa por dos puntos 9 - Se define por A y B'
-  Semirrecta que pasa por dos puntos 10 - Se define por B y A'
-  Nuevo Punto. 11 - Se ubica el punto C en la intersección de las semirrectas
-  Segmento entre dos puntos. 12 - Se define el segmento entre A y C
-  Segmento entre dos puntos. 13 - Se define el segmento entre B y C



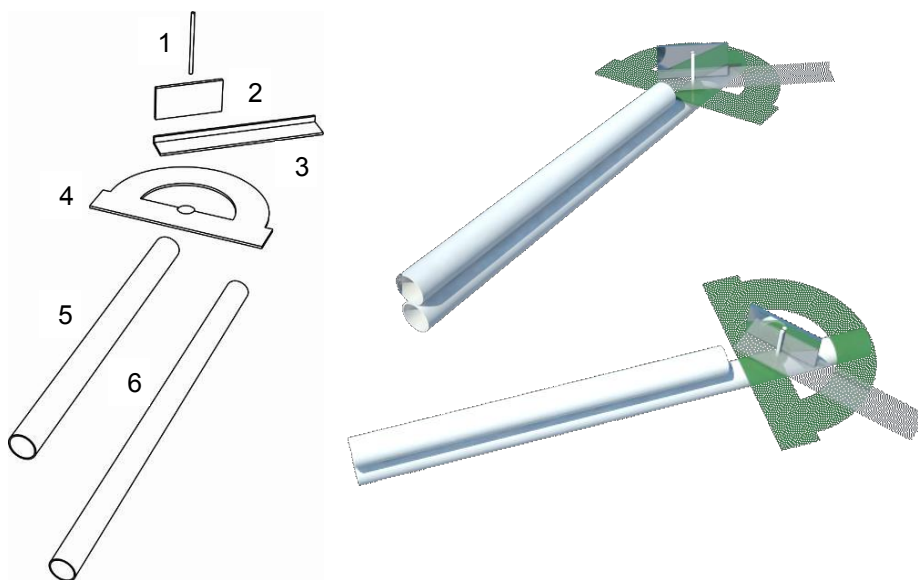
Las posibilidades de edición de las propiedades de cada objeto, que permite GeoGebra, hacen la tarea muy entretenida y atractiva, sin embargo, esto no debe subestimarse como un recurso cosmético ya que hacen a la claridad y a las posibilidades de comprensión del comportamiento dinámico del sistema, aportando un valor didáctico extra. Finalmente, ocultando algunos objetos y editando otros, la salida gráfica presenta el siguiente aspecto: (La construcción dinámica esta ofrecida en: <https://www.geogebra.org/m/dwP6mygb>)



Una vez medidos los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y la distancia AB se cargan en el simulador utilizando los deslizadores, AC y BC muestran directamente las distancias que pretendíamos calcular.

### Goniómetro

Este instrumento es una simplificación de un sextante.



Está pensado para medir ángulos en planos más o menos horizontales. Son dos tubos por los que el observador puede mirar casi simultáneamente dos objetos, por el tubo de abajo mira directamente un objeto, por el de arriba mira el reflejo en un espejo del otro objeto.

Las piezas que forman el aparato se detallan a continuación, en nuestro caso aclaramos concretamente que materiales fueron utilizados en la construcción, pero esto es a modo de ejemplo, se podrían cambiar por otros materiales teniendo iguales o mejores resultados.

- 1 – Eje, se usó un alfiler.
- 2 – Espejo, es de 4 cm. de ancho por 2 cm. de alto, se consigue en cualquier vidriería.
- 3 – Soporte del espejo, es una placa transparente de 10 cm. de ancho por 1 cm. de largo que tiene una pequeña pestaña longitudinal, se cortó de la tapa de una caja de CD.
- 4 – Transportador de ángulos.
- 5 – Tubo superior, es de 20 cm. de largo.

6 – Tubo inferior, es de 30 cm. de largo, en ambos casos se utilizó caño plástico de media pulgada para instalaciones eléctricas.

Los pasos para la construcción se resumen brevemente, en todos los casos se utilizó un adhesivo de fraguado rápido (gotita).

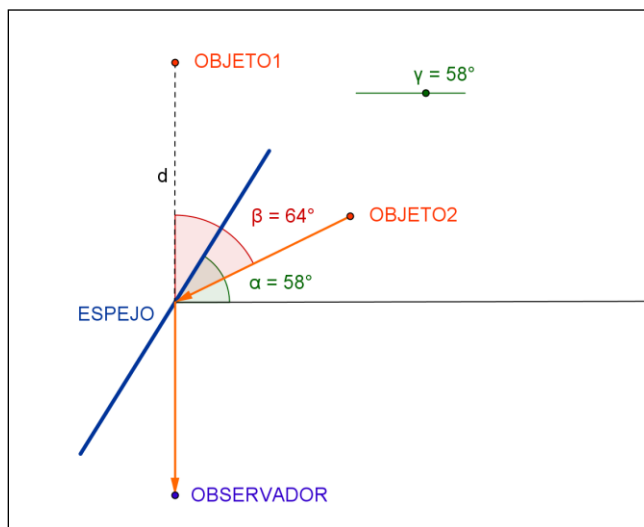
- Se pegan los dos tubos haciendo coincidir dos de los extremos.
- Se apoyan los tubos con el más corto arriba, por ejemplo, entre dos libros, se pega el transportador en la parte saliente del tubo más largo prestando atención a que el plano del transportador sea perpendicular al plano que contiene a los ejes de los tubos y que el segmento que une el origen del transportador con la marca de los  $90^\circ$  sea paralelo a los ejes de los tubos. La marca de  $90^\circ$  queda orientada hacia la punta del tubo.
- Se perfora el tubo de abajo pasando el alfiler de abajo hacia arriba de forma perpendicular al plano del transportador y por el centro del mismo, se pega.
- Por otro lado se pega el espejo sobre la placa transparente de modo que el plano del espejo quede perpendicular al plano de la placa, un borde del espejo coincide con un borde de la placa, la pestaña en uno de los lados de la placa facilita la maniobra, la parte reflectante queda orientada hacia el lado de la placa, se perfora la placa (por ejemplo con un alfiler caliente) contra el espejo en su punto medio.

Quedan dos piezas, los tubos el transportador y el alfiler por un lado y la placa y el espejo por otro, se monta la placa sobre el transportador haciendo pasar el alfiler por el orificio. La placa y el espejo giran sobre el transportador. Si se mira por el tubo de abajo se ve directamente mientras que si mira por el de arriba se ve una imagen relejada en el espejo. El borde de la placa sobre el que se encuentra el espejo (el de la pestaña) permite leer el ángulo indicado sobre el transportador.

Respecto a la lectura del instrumento hay que notar que el ángulo que indica el transportador no es el que buscamos, esto se debe al montaje del mismo y al hecho del giro doble del rayo reflejado con respecto al giro del espejo. El ángulo que gira el espejo es  $90^\circ$  menos el ángulo que se lee en el transportador y el ángulo que nos interesa es el doble de este último. Esta situación se comprende fácilmente manipulando un poco el instrumento, la aparente complicación debe ser vista como disparador que enriquece la actividad. Se puede, también, construir una simulación en GeoGebra del funcionamiento y lectura del goniómetro, esta es otra instancia didáctica que puede ser abordada con mayor o menor

profundidad estando a cargo del alumno u ofrecida por el docente como una caja negra, a continuación se muestra una imagen de una tal simulación:

La construcción dinámica esta ofrecida en: <https://www.geogebra.org/m/g6b6PcrV>



### Método didáctico

El diseño de las actividades se presenta en un formato de taller o proyecto que los alumnos desarrollan en varias clases. Es conveniente que se proponga para grupos pequeños, no más de cuatro alumnos.

Para sistematizar la tarea, la estructura se puede resumir esquemáticamente en cuatro bloques: resultados formales, supuestos físicos, tecnología y por último la aplicación de la tecnología (Caraballo, González, 2002).

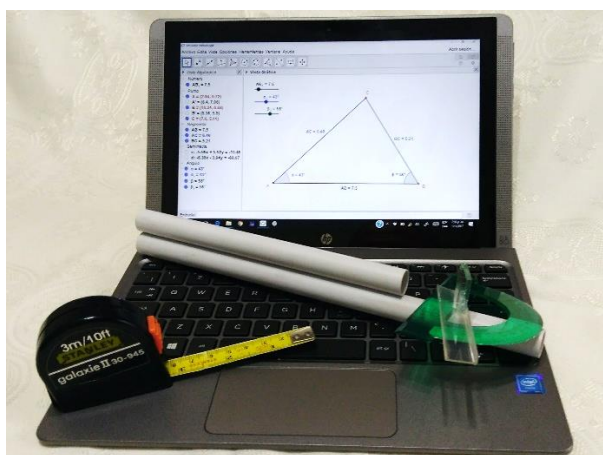
Los resultados formales son geométricos referidos a triángulos y ángulos en el plano, para el nivel educativo para el que se propone este trabajo, los alumnos conocen la trigonometría básica y el teorema del seno. Si se quisiera proponer a alumnos de niveles anteriores que no conocen la trigonometría se podría hacer directamente la simulación dinámica sin resolver el problema deductivamente. Si se quisiera proponer a alumnos de niveles superiores se podría agregar el análisis de los errores de medición, la variación relativa de primer orden, etc.

Los supuestos físicos a nivel básico están relacionados con la carga semántica que le otorgamos a la geometría euclídea, a nivel específico con la propagación de la luz y ley de

la reflexión. Si se quiere profundizar un aspecto relacionado al fundamento se puede instalar una controversia a partir de la presentación de las geometrías no euclídeas.

La tecnología es entendida como el conjunto de instrumentos y procedimientos y la aplicación es el uso de la tecnología para determinar teleméricamente distancias de un modo concreto.

El orden en el que se articulan las actividades puede ser diverso y no respetar la estructura matemática, física, tecnología y aplicación.



Cada parte que hemos descrito implica decisiones referentes a cuanta tarea queda a cargo de los alumnos y cuanta se les entrega hecha, esto está relacionado a la duración del taller, a la profundidad que se le quiera dar y los objetivos didácticos trazados. Además, se le pueden agregar otras etapas, por ejemplo:

- Informe final, que agregaría capacidades relacionadas a la expresión escrita y nuevos recursos informáticos como por ejemplo un procesador de texto, etc.
- Defensa de los resultados por parte de los distintos grupos ante sus pares y el docente, que agregaría capacidades relacionadas a la expresión oral y recursos informáticos como programas para presentaciones, etc.
- Publicación digital, blog, Wiki, etc.

### **Conclusiones**

Se logra la resignificación, refuerzo e integración del conjunto de saberes matemáticos puestos en juego en el desarrollo de las actividades. Los conocimientos son reacomodados,



dándose una síntesis integradora. Los alumnos logran relacionar distintos temas entre si y utilizarlos en el transcurso del proyecto. Hay una articulación significativa con la Física y también una estimulación de la creatividad referida a la solución de problemas técnicos.

La posibilidad de enfrentar con éxito problemas reales implica como resultado un cambio de perspectiva respecto del conocimiento matemático. Se ve este último como una herramienta que puede ser aplicada en distintos contextos y no solamente como un “juego formal”.

En este marco la utilización de recursos informáticos queda totalmente integrada a las actividades. Desde un punto de vista más específico el uso de un programa de matemática dinámica propone nuevos escenarios de aprendizaje, nuevas capacidades referidas a construir herramientas, modelar y estructurar situaciones. Este último tópico se refiere a traducir la “realidad” a una estructura matemática (Niss,1999), en nuestro caso dinámica, trabajar con el modelo matemático, reflexionar, analizar y plantear críticas, monitorear y controlar el proceso de modelado, etc.

La construcción del goniómetro plantea un sinnúmero de desafíos que motiva positivamente a los alumnos.

### **Referencias bibliográficas**

Carballo H. y González C. (2016). Situaciones didácticas estructuradas. Una simulación geométrica. Acta del XI Congreso Argentino de Educación Matemática. 286-295.

González C. y Carballo H. (2002). De un resultado matemático a una implementación tecnológica. Memorias del IV Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy. Provincia de Buenos Aires.

Manual de GeoGebra 5.0 (2016). <https://wiki.geogebra.org/es/Manual> Consultado en diciembre de 2016.

Niss M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*,9, 21-29.