



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis para obtener el grado académico de
Licenciado en Astronomía

EXPLORANDO LA TRANSICIÓN CUÁNTICO-CLÁSICA DE
LAS PERTURBACIONES PRIMORDIALES DURANTE LA
ÉPOCA INFLACIONARIA DEL UNIVERSO

Martín Miguel Ocampo

Director: Dr. Gabriel León García
Co-Director: Dr. Gabriel R. Bengochea

LA PLATA, ARGENTINA
- MARZO DE 2023 -

Resumen

En la presente Tesis buscamos analizar el origen físico de las inhomogeneidades primordiales durante la época inflacionaria del Universo. A su vez, hacemos énfasis en el denominado problema de la medición en Mecánica Cuántica y sus posibles vías de solución. Exploramos los denominados modelos de colapso objetivo y, en particular, en este trabajo tomamos el modelo de Localización Continua Espontánea (CSL) como el mecanismo generador del colapso de la función de onda asociada al campo inflatón, donde hacemos a su vez las elecciones más simples posibles para el operador y el parámetro de colapso. Con estas herramientas, en el marco de gravedad semiclásica, obtenemos un espectro de potencias primordial para las perturbaciones escalares en la curvatura prácticamente invariante de escala. Este resultado lo comparamos con el espectro obtenido en el enfoque estándar, sin mostrar diferencias significativas entre ambos, siendo a su vez consistentes con las observaciones de las anisotropías del Fondo Cósmico de Radiación (CMB). A su vez, mostramos que, en el caso en el que no hubiese colapsos, obtendríamos un espectro de potencias nulo, es decir, sin inhomogeneidades de ningún tipo en el Universo temprano, lo que conduciría a la no formación de estructuras en el Universo.

Introducción

El año 1965 fue testigo de uno de los hitos más importantes en la historia de la astronomía. En los Laboratorios Bell en New Jersey, EEUU, los científicos Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson se encontraban trabajando en un nuevo tipo de antena cuando descubrieron un ruido constante de baja frecuencia que no pudieron eliminar luego de comprobar a fondo su equipo. La señal provenía de todas las direcciones del cielo y era constante en el día, la noche y a través de los cambios estacionales. Penzias y Wilson habían descubierto de forma accidental y sin saberlo la radiación de fondo de microondas (CMB por sus siglas en inglés). Paralelamente, a 60 km de allí en la Universidad de Princeton, el equipo formado por Robert Dicke, Jim Peebles, Peter Roll y David Wilkinson intentaban medir esta misma radiación predicha de manera teórica. Los dos equipos entraron en contacto y publicaron dos artículos en el mismo número del *Astrophysical Journal Letters* acerca del descubrimiento (Penzias & Wilson, 1965; Dicke et al., 1965) y, en 1978, Penzias y Wilson recibieron el Premio Nobel de Física. El descubrimiento del CMB significó la evidencia observacional más precisa que se tiene del llamado *Principio Cosmológico* que detallaremos un poco más adelante, al ser una radiación prácticamente constante que se observa en todas las direcciones y es, al día de hoy, la observación que se ajusta más precisamente a un espectro de cuerpo negro a temperatura promedio de $T_0 = 2.7255\text{K}$.

El Principio Cosmológico, en conjunto con la Teoría de la Relatividad General, conduce al modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), denominado **modelo de Hot Big Bang**, el cual, a pesar de su éxito, contiene problemas fundamentales como el problema del horizonte y el problema de la planitud, entre otros (Baumann, 2011). Esto motivó la introducción del modelo de Inflación. De esta manera, se postula que el Universo primitivo sufrió una etapa de expansión acelerada y esta explicación es, al día de hoy, la más aceptada y constituye lo que actualmente se denomina Modelo Cosmológico Estándar. Esta hipótesis fue formulada en la década de 1980 (Guth, 1981) y su principal atractivo radica, además de solucionar los mencionados problemas, en que presuntamente puede dar una explicación al origen de las inhomogeneidades primordiales, las cuales representan las semillas de estructura cósmica (Mukhanov et al., 1992). Esta propuesta indica que las fluctuaciones cuánticas del campo inflatón, responsable de la expansión acelerada, se amplifican a escalas mayores que el radio de curvatura del Universo, a medida que la inflación sucede. Estas fluctuaciones serían el origen de las perturbaciones primordiales que, se dice, son las causantes de las anisotropías que se observan en el CMB y de toda la estructura que se ve en el cosmos. En ese sentido, se puede calcular de manera sencilla un espectro de potencias prácticamente invariante de escala, con una distribución de perturbaciones altamente gaussiana y adiabática, que se corresponde con las observaciones más recientes del CMB (Planck Collaboration et al., 2020b).

Este paradigma, sin embargo, deja una pregunta abierta: ¿Cuál es el mecanismo encargado de transformar las fluctuaciones cuánticas del inflatón en perturbaciones clásicas del espacio-tiempo? Por otro lado, la evolución unitaria dada por la ecuación de Schrödinger no da ningún

mecanismo capaz de romper simetrías del estado inicial de vacío, es decir, la homogeneidad e isotropía espaciales. La teoría Cuántica estándar nos indica que las mediciones actúan como mecanismo posible para colapsar las funciones de onda. Estos colapsos a estados particulares ocurren según la regla de probabilidad de Born. Esto nos abre la puerta al llamado problema de la medición en Mecánica Cuántica (Okon, 2014), y su relación con la cosmología es muy estrecha: ¿Quién es el observador en el Universo? ¿Qué es hacer una medición? La teoría Cuántica estándar no da una respuesta satisfactoria a estos problemas.

Una posible solución comenzó a proponerse en Perez et al. (2006), al invocar el colapso dinámico de la función de onda como mecanismo responsable de generar las perturbaciones primordiales clásicas al transicionar del estado inicial simétrico a un estado carente de simetrías, prescindiendo de la figura de “observador” y de “medición” al ser el colapso auto-inducido.

Actualmente, el modelo de Localización Continua Espontánea (Bassi & Ghirardi, 2003; Bassi et al., 2013) (CSL por sus siglas en inglés), se considera un modelo factible para el colapso objetivo de la función de onda y para solucionar el problema de la medición en la Mecánica Cuántica. En pocas palabras, el mismo consiste en una modificación a la ecuación de Schrödinger que incorpora un mecanismo de colapso autoinducido de la función de onda. Este modelo, con sus limitaciones, ha podido aplicarse al Universo inflacionario, buscando dar los primeros pasos en la Cosmología. Algunos resultados pueden verse en Martin et al. (2012), Das et al. (2013), Cañate et al. (2013), León & Bengochea (2016), León et al. (2018), Martin & Vennin (2020), Martin & Vennin (2021a), Martin & Vennin (2021b), León & Bengochea (2021), Bengochea et al. (2021) y Bengochea et al. (2020) donde, en particular, se hace un análisis de los diferentes enfoques y variantes de la aplicación del modelo CSL en el contexto inflacionario, juntamente con desafíos que presenta esta línea de trabajo.

En base a lo expuesto anteriormente, la presente Tesis de Licenciatura tiene como objetivo el estudio de las perturbaciones primordiales en inflación y la transición cuántico-clásica usando un modelo CSL de colapso autoinducido. Este enfoque, como se ha mencionado en el párrafo anterior, ya se ha estado aplicando para el cálculo de perturbaciones primordiales. En particular usaremos el modelo más simple, para incorporarlo a inflación y analizaremos su viabilidad al compararlo con las predicciones dadas por el enfoque estándar y las observaciones. El análisis de este modelo simple marca una diferencia con los trabajos previamente citados, la cual explicitaremos a medida que se vaya desarrollando la presente Tesis. A su vez, haremos una revisión del problema de la medición en Mecánica Cuántica y sus implicancias en el marco cosmológico, las cuales son la principal motivación a la hora de buscar un mecanismo físico satisfactorio que rompa las simetrías iniciales del Universo.

Para lograr los objetivos mencionados, la siguiente Tesis se estructura de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 presentaremos las herramientas básicas de Relatividad General e introduciremos el Modelo Cosmológico Estándar, conduciendo a las ecuaciones de Friedmann para la dinámica del Universo.
- En el Capítulo 2 expondremos las problemáticas del modelo estándar, particularmente el problema del horizonte y el problema de planitud. Para solucionarlos introduciremos el modelo inflacionario y, particularmente, describiremos el modelo slow-roll.
- En el Capítulo 3 mostraremos la teoría de perturbaciones lineal aplicada a las ecuaciones de la Relatividad General y las ecuaciones en cosmología. Calcularemos las perturbaciones escalares primordiales en inflación bajo el enfoque estándar, cuantizando la métrica y el campo simultáneamente y obteniendo un espectro de potencias. Veremos también cómo relacionar este espectro teórico con las anisotropías observadas en el CMB.

-
- En el Capítulo 4 discutiremos el problema de la medición en Mecánica Cuántica. Mencionaremos la postura histórica al respecto y evaluaremos distintas posibles vías de solución. En particular veremos los modelos de colapso, mencionando primero el llamado modelo de Mecánica Cuántica de Localización Espontánea, también conocido como modelo GRW (por su autores Ghirardi-Rimini-Weber) para introducir de forma más intuitiva los parámetros que usaremos después en el modelo CSL, que generaliza el anterior. Mencionaremos también la propuesta de decoherencia en cosmología, la cual se supone una vía alternativa para solucionar el problema.
 - En el Capítulo 5 aplicaremos el modelo CSL al modelo inflacionario, en un marco de gravedad semiclásica, para calcular el espectro de perturbaciones escalares primordiales. Analizaremos el resultado y repetiremos el cálculo para el caso en el que no hubiese colapso.
 - Finalmente, en el Capítulo 6 haremos un resumen del trabajo realizado, presentaremos las conclusiones y hablaremos del posible trabajo a futuro.

Índice general

Resumen	iii
Introducción	v
1. Introducción al Modelo Cosmológico Estándar	1
1.1. Nociones de Relatividad General	1
1.2. El Modelo Cosmológico FLRW	4
1.2.1. Métrica FLRW	4
1.2.2. Soluciones a las Ecuaciones de Einstein - Ecuación de Friedmann	6
1.2.3. Distancias y tiempo conforme	9
2. Inflación	13
2.1. Problemáticas del modelo	13
2.1.1. Problema de planitud	13
2.1.2. Problema del horizonte	14
2.1.2.1. Horizontes	14
2.1.2.2. Radio de Hubble	15
2.1.2.3. El problema	16
2.2. Inflación	17
2.2.1. Horizonte de Partículas vs Radio de Hubble	17
2.2.2. Propuesta y condiciones de Inflación	17
2.2.3. Fuente de Inflación	19
2.2.4. Inflación Slow-Roll	21
3. El Universo no tan homogéneo	23
3.1. Perturbaciones cosmológicas	23
3.1.1. Perturbaciones en FLRW	24
3.1.2. Problema de gauge	25
3.2. Perturbaciones escalares	25
3.3. Anisotropías en el CMB	29
4. El problema de la medición en Mecánica Cuántica y Cosmología	33
4.1. Introducción al problema de la medición	33
4.1.1. El gato de Schrödinger	34
4.1.2. El problema	35
4.2. El caso cosmológico	36
4.2.1. Decoherencia en cosmología	37
4.3. Propuesta de colapso	39
4.3.1. Modelo GRW	39
4.4. El modelo CSL	42
	ix

5. El colapso en inflación	45
5.1. Gravedad semiclásica	45
5.2. Ecuaciones CSL en cosmología	46
5.3. El espectro de potencias	46
5.4. El mecanismo de colapso	48
5.4.1. El parámetro λ	48
5.4.2. El operador de colapso	48
5.5. Cálculo del espectro de potencias primordial	49
5.5.1. Cálculo del primer término	50
5.5.2. Cálculo del segundo término	54
5.5.3. Resultado	59
5.5.4. Caso $\lambda = 0$	60
6. Conclusiones	63
A. No Localidad en modelos de colapso	67
A.1. EPR-B	67
A.2. Teorema de Bell	68
A.3. Colapsando de vuelta	70
Bibliografía	73

Capítulo 1

Introducción al Modelo Cosmológico Estándar

1.1. Nociones de Relatividad General

El modelo cosmológico que presentaremos en las siguientes secciones está enmarcado en la Teoría de la Relatividad General de Einstein (Einstein, 1915) por lo que, antes de hablar del mismo, vamos a introducir algunas nociones de la teoría y de geometría diferencial de forma conceptual. Las personas interesadas en un enfoque más profundo y riguroso pueden consultar Nakahara (2003), Carroll (2019) o cualquier otro texto sobre la temática.

El primer concepto que introduciremos es el de *variedad*, debido a que el espacio-tiempo en Relatividad General se modela como una variedad de 4 dimensiones Lorentziana⁽ⁱ⁾ Una variedad M n -dimensional es un conjunto de puntos que localmente se parece a un subconjunto de \mathbb{R}^n . En otras palabras, cada punto p en la variedad tiene una vecindad alrededor la cual se puede mapear uno a uno a un subconjunto de \mathbb{R}^n , es decir, que existen coordenadas locales en esa vecindad.

El segundo concepto a introducir es el de *vector*. Imaginemos una variedad M y un punto p arbitrario en la misma. Definimos a un vector \mathbf{V} en p como la derivada direccional a lo largo de una curva parametrizada $\gamma(\tau)$, con $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Entonces el vector \mathbf{V} es un mapeo de funciones a números reales $\mathbf{V} : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$. Vemos que γ es solamente una de las infinitas curvas que pueden pasar por dicho punto p en la variedad. El conjunto de vectores tangentes a estas curvas define el espacio tangente T_p . Escogiendo una base coordenada $\mathbf{e}_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$ el vector \mathbf{V} se puede descomponer como

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha}^n V^\alpha \mathbf{e}_\alpha = V^\alpha \partial_\alpha, \quad (1.1)$$

donde V^α son las componentes en la base coordenada de \mathbf{V} .⁽ⁱⁱ⁾ Notar que en la última igualdad de la ecuación utilizamos la convención de Einstein para la suma de índices. Estas componentes del vector transforman ante un cambio de coordenadas $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu$ según la

⁽ⁱ⁾El término Lorentziana refiere a la clasificación que se puede hacer de una variedad al escribir su métrica en la forma canónica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0)$. Podemos definir la *signatura* σ de la variedad n -dimensional como la suma entre todos los -1 y $+1$ de dicha representación. Tomando la convención de signos $-$ para las componentes temporales y $+$ para las espaciales, si $\sigma = n$ la variedad se dice Riemanniana y si $\sigma = n - 2$ se dice Lorentziana (Sperhake, 2016).

⁽ⁱⁱ⁾De esta manera, las componentes V^α se identifican con $\frac{d\gamma^\alpha}{d\tau}$, donde γ^α es la representación de la curva $\gamma(\tau)$ en las coordenadas x^α

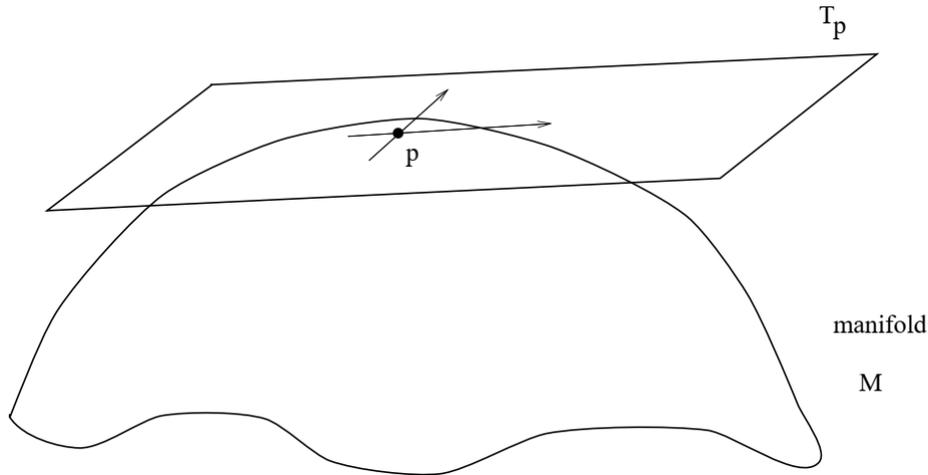


Figura 1.1. Una variedad M y su espacio tangente T_p al punto p . Figura tomada de [Carroll \(2019\)](#).

siguiente regla

$$\tilde{V}^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (1.2)$$

Así como definimos el espacio tangente T_p podemos definir aplicaciones que mapeen elementos del mismo (vectores) a números reales. Estos mapeos los denominamos *1-formas* $\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R}$ y el conjunto de ellas forman a su vez el espacio dual T_p^* , también llamado espacio cotangente a p . Las 1-formas se pueden descomponer en componentes $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ y estas transforman ante un cambio de coordenadas de la siguiente manera:

$$\tilde{\omega}_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \omega_\mu \quad (1.3)$$

Habiendo definido a los vectores y a las 1-formas podemos generalizar el concepto. Definimos así a un *tensor* como un mapeo $\mathcal{T} : T_p^* \times \cdots \times T_p^* \times T_p \times \cdots \times T_p \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, una aplicación que toma tanto vectores como 1-formas y nos devuelve números reales. Los tensores se pueden descomponer en componentes las cuales transformarán ante un cambio de coordenadas de la siguiente manera:

$$\tilde{T}_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_m}}{\partial x^{\mu_m}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \tilde{x}^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial \tilde{x}^{\beta_n}} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}. \quad (1.4)$$

Decimos también que un tensor como el escrito en (1.4), con m supraíndices (también llamados contravariantes) y n subíndices (llamados covariantes) es un tensor $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. De esta manera podemos ver a los vectores como tensores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y las 1-formas como tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. A partir de este punto en el siguiente trabajo escribiremos a los tensores en sus componentes, es decir, trabajaremos con bases coordenadas fijas.

El siguiente concepto que introduciremos es el de *métrica*. La métrica es un tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ simétrico que nos permite obtener una noción de distancia entre dos puntos de una variedad. De esta manera, en Relatividad General podemos calcular la separación entre dos eventos en el espacio-tiempo. El elemento de línea asociado a un segmento infinitesimal puede expresarse,

utilizando las componentes de la métrica, de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.5)$$

Podemos ver como ejemplos:

- La métrica $g_{\mu\nu}$ de \mathbb{R}^n en coordenadas cartesianas es simplemente $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, siendo $\delta_{\mu\nu}$ la delta de Kronecker.
- La métrica del espacio de Minkowski es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (asumiendo la convención de signos $(-, +, +, +)$ que mantendremos por el resto del trabajo).
- La 2-esfera de radio $r = 1$, que puede ser pensada como los puntos en \mathbb{R}^3 a distancia 1 del origen, en coordenadas (θ, ϕ) tiene una métrica dada por $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Aquí introducimos un abuso de lenguaje al denominar como métrica al elemento de línea. Vale tener presente que son dos entidades matemáticas distintas.

La métrica en Relatividad General tiene dependencia espacio-temporal $g_{\mu\nu}(t, \vec{x})$ la cual incorpora los efectos de la gravedad. Esto nos permite, por ejemplo, pasar de hablar de partículas moviéndose bajo los efectos de una fuerza externa a partículas moviéndose en un espacio-tiempo curvo.

El siguiente concepto que introduciremos es el de *derivada covariante*. Este operador es necesario por la definición que dimos de tensores y vectores: si derivamos un vector, por ejemplo, con el operador derivada parcial ordinaria podemos ver que sus componentes no transformarán como un tensor. La misma es una derivada que transforma como un tensor en un espacio arbitrario y se reduce a la derivada parcial en uno plano en coordenadas cartesianas. En particular, la derivada covariante de un vector V^ν está dada por

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda. \quad (1.6)$$

La misma vemos que está dada por la derivada parcial del vector a la que se le suma una “corrección” que viene dada por los llamados *coeficientes de conexión* $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$. En Relatividad General usamos la llamada *conexión de Levi-Civita* la cual tiene componentes dadas por *símbolos de Christoffel*

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{g^{\sigma\rho}}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (1.7)$$

Los símbolos de Christoffel los podemos usar para construir nuestra siguiente entidad matemática, el *tensor de Riemann*, el cual caracteriza la curvatura de un espacio arbitrario. Es decir, nos provee de una herramienta para medir qué tanto se desvía la geometría de una variedad respecto de la geometría euclídea. Cualquier otra entidad que se relacione con la curvatura se puede deducir a partir del mismo (como por ejemplo las dos que introduciremos a continuación). El tensor de Riemann se puede escribir como:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (1.8)$$

Este tensor lo podemos contraer para construir el *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad (1.9)$$

el cual a su vez también podemos contraer para construir el *escalar de Ricci*

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu. \quad (1.10)$$

Teniendo el tensor y el escalar de Ricci podemos construir el *tensor de Einstein*,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

el cual vamos a usar para escribir las *ecuaciones de Einstein*,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el *tensor de energía momento*. Estas ecuaciones nos relacionan la geometría de un espacio-tiempo con el contenido de materia y energía en el mismo. Notamos que al introducir materia o energía en un espacio-tiempo ésta modificará la curvatura en el mismo y esta curvatura a su vez condicionará la forma en que se moverá la primera. Se suele decir que “el espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse y ésta le dice al espacio-tiempo cómo curvarse”.⁽ⁱⁱⁱ⁾

1.2. El Modelo Cosmológico FLRW

Las observaciones a gran escala del Universo nos indican que la distribución de materia y energía en el mismo parece ser similar sin importar la dirección en la que miremos (Hinshaw et al., 2013; Planck Collaboration et al., 2020a). Esto nos sugiere que una distribución *isótropa* puede ser una buena aproximación en el Universo. Por otro lado, si asumimos que no estamos ubicados en una posición privilegiada como observadores y que bajo una traslación espacial el Universo tendrá las mismas propiedades podemos postular una *homogeneidad* en el mismo. Estas dos propiedades combinadas es lo que denominamos Principio Cosmológico. Para una definición más formal desde el punto de vista matemático se puede consultar Carroll (2019), texto que se toma como principal referencia para esta sección junto con Weinberg (2008), Baumann (2015) y Dodelson (2003).⁽ⁱ⁾

1.2.1. Métrica FLRW

Un Universo homogéneo e isótropo se describe mediante la siguiente métrica, denominada *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (1.13)$$

Las coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) son las denominadas *coordenadas comóviles*. Las mismas asignan valores constantes a los observadores que ven el Universo de forma isótropa y homogénea, independientemente de la expansión del mismo. Difieren de las *coordenadas físicas* precisamente en que a estas últimas sí las afecta la expansión (o contracción) del Universo.

En la métrica utilizamos la signatura $(-, +, +, +)$ y notamos que, debido a las simetrías de la variedad FLRW, las en principio diez componentes independientes del tensor métrico se nos redujeron a una dependencia con la función del tiempo $a(t)$ que llamamos *factor de escala* y la constante K . El factor de escala nos da noción del tamaño físico de un volumen comóvil y su cambio relativo a medida que transcurre el tiempo. La constante K se relaciona con la curvatura espacial de la variedad que estamos modelando.

⁽ⁱⁱⁱ⁾Más rigurosamente, sin materia el espacio-tiempo puede curvarse de todas formas como sucede, por ejemplo, en la solución de Schwarzschild.

⁽ⁱ⁾Vale hacer una pequeña aclaración al respecto de estas dos propiedades: la isotropía es algo que se observa a grandes escalas mientras que la homogeneidad se asume y es imposible de corroborar observacionalmente de forma directa.

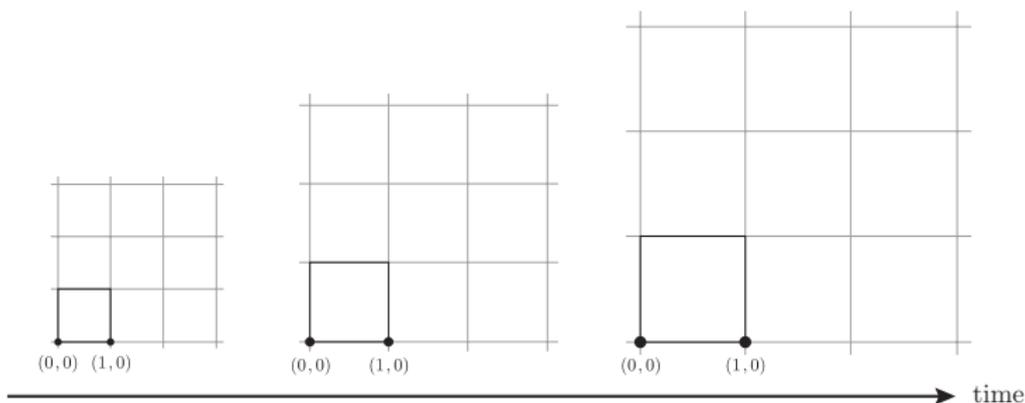


Figura 1.2. Evolución de grilla comóvil en el tiempo. Se ve que las coordenadas comóviles permanecen invariantes mientras que las distancias físicas aumentan con el tiempo. Figura tomada de [Baumann \(2015\)](#)

A su vez existe una simetría de escala en esta métrica, las transformaciones

$$k \rightarrow \frac{K}{|K|}, \quad r \rightarrow \sqrt{|K|}r, \quad a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{|K|}} \quad (1.14)$$

dejan (1.13) invariante. Esto nos indica dos cosas:

1. Podemos usar esta simetría para establecer el factor de escala a tiempo actual como $a_0 \equiv a(t_0) \equiv 1$.
2. El único valor relevante referido a K es $K/|K|$ lo que nos deja solamente con tres casos distintos, $K = -1, K = 0$ y $K = 1$. Examinemos cada una de estas posibilidades de curvatura.

- En el caso $K = 0$ la métrica en su parte espacial nos quedaría (omitiendo el factor de escala):

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.15)$$

la cual es simplemente la métrica del espacio Euclídeo plano. A un espacio FLRW con $K = 0$ se lo denomina entonces *plano*

- En el caso $K = 1$ podemos definir $r = \sin \chi$ y escribir la métrica como

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2, \quad (1.16)$$

que es la métrica de una 3-esfera. Un universo con $K = 1$ se denomina *cerrado*.

- En el caso $K = -1$ hacemos $r = \sinh \psi$ y obtenemos

$$dl^2 = d\psi^2 + \sinh^2 \psi d\Omega^2, \quad (1.17)$$

que es una métrica con curvatura constante negativa. A un universo descrito por esta curvatura espacial se lo denomina *abierto* y para visualizarlo se lo suele denominar “universo silla de montar”.

1.2.2. Soluciones a las Ecuaciones de Einstein - Ecuación de Friedmann

Una vez establecida la métrica podemos hacer los cálculos para resolver las ecuaciones de Einstein, (luego de establecer un tensor de energía momento adecuado). Debido a la simetría de la variedad con la que estamos trabajando notamos que, luego de calcular los símbolos de Christoffel y las componentes no nulas del tensor de Riemann, las únicas componentes distintas de cero del tensor de Ricci serán las diagonales

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K}{1 - Kr^2} \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) \\ R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) \sin^2 \theta \quad , \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde hemos definido $\dot{a} \equiv da/dt$. Por su parte el escalar de Ricci es:

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K). \quad (1.19)$$

Como comentario adicional, del mismo podemos deducir inmediatamente que cuando $a \rightarrow 0$ el escalar de curvatura anterior, el cual es una cantidad invariante frente a cambios de coordenadas, se hace arbitrariamente grande y, por ende, es un fuerte indicio de una posible singularidad física en el espacio FLRW en dicho límite.

Teniendo ya expresada la parte geométrica de las ecuaciones nos interesa estudiar la evolución de a y para eso necesitamos un modelo para la materia y energía del Universo. Usamos un modelo de fluido perfecto para el mismo, recordando que un fluido se define como perfecto cuando es isotrópico en su marco de referencia en reposo. El tensor de energía momento de un fluido perfecto es

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad , \quad (1.20)$$

donde p y ρ son la presión y la densidad de energía del fluido medidas en su marco en reposo y U^μ la cuadrivelocidad. Si tenemos un fluido que es isótropo en un marco de referencia que a su vez conduce a una métrica isótropa en un marco de referencia entonces ambos marcos deben coincidir. Esto quiere decir que el fluido perfecto va a estar en reposo en las coordenadas comóviles y entonces su tetravelocidad debe ser

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad (1.21)$$

la cual nos conduce a un tensor de energía momento de la forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad , \quad (1.22)$$

que podemos ver de forma más compacta subiendo un índice

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (1.23)$$

Utilizando las expresiones del tensor de Ricci (1.18) y la forma del tensor de energía momento (1.22), de las ecuaciones de Einstein se obtiene que:

- La ecuación para $\mu\nu = 00$ será

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p). \quad (1.24)$$

- Las ecuaciones para $\mu\nu = ij$ serán la misma debido a la simetría del sistema y estarán dadas por

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{K}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.25)$$

Estas se pueden combinar entre sí para, luego de un poco de álgebra, obtener las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.26)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}. \quad (1.27)$$

En particular, a (1.27) se la denomina *ecuación de Friedmann*.

Se puede obtener más información de las expresiones. Por ejemplo se puede usar la conservación de la energía, es decir

$$\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = 0, \quad (1.28)$$

para obtener la siguiente ecuación:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.29)$$

Para resolver la ecuación anterior es necesario establecer una ecuación de estado, es decir, una relación entre p y ρ que vendrá dada por el tipo de materia y energía con el que modelemos a nuestro fluido cosmológico. Las ecuaciones de estado más simples que se pueden considerar se llaman barotrópicas, lo que significa que la presión es una función de la densidad de energía $p(\rho)$ (por ejemplo, los campos escalares no obedecen en general ecuaciones de estado barotrópicas). La posibilidad más simple está dada por la relación

$$p = w\rho, \quad (1.30)$$

con w una constante. De esta manera al reemplazar en (1.29) e integrar se obtiene

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.31)$$

Entre los fluidos más comunes que se pueden considerar en cosmología se encuentran:

- *Materia fría no relativista*: también llamada *polvo*. Cumple $w = 0$ por lo que $\rho \propto a^{-3}$. A modo de ejemplo se puede usar para modelar distribuciones de galaxias para las cuales la presión es despreciable en comparación con su densidad de energía.
- *Radiación*: se denomina así no solamente a la radiación electromagnética si no además a cualquier tipo de materia ultra relativista que se pueda modelar como indistinguible de los fotones. Cumple $w = \frac{1}{3}$ y por ende vemos que $\rho \propto a^{-4}$.

Existe otra forma de energía que se puede considerar ya que las ecuaciones de Einstein admiten la adición de un término extra de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

Este término adicional puede pensarse como una componente adicional del tensor energía momento y modelarse como un fluido perfecto con $\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G} = \text{cte}$, siendo $\rho > 0$.

Originalmente Einstein introdujo este término a sus ecuaciones en busca de obtener una solución estática para el Universo, acorde a sus ideas de aquel entonces. Posteriormente esta idea fue descartada ya que, sumado a la inestabilidad de dicha solución estática, surgieron trabajos como los de [Lemaître \(1927\)](#) y [Hubble \(1929\)](#) donde, explorando la velocidad de recesión de las galaxias, proponían un *modelo de Universo en expansión*, idea que al día de hoy ha cobrado más fuerza al haber investigaciones como [Perlmutter et al. \(1999\)](#); [Riess et al. \(1998\)](#); [Tonry et al. \(2003\)](#) que indican que el universo no solamente se está expandiendo si no que además lo hace de forma acelerada con $\ddot{a} > 0$. Esta expansión acelerada dio lugar a la consideración de la existencia de una nueva componente en el universo, denominada genéricamente *energía oscura*, y el término de constante cosmológica resurgió como una de las explicaciones posibles a este fenómeno. Al día de hoy no hay una explicación completa acerca de su naturaleza física por lo que hay diversos modelos alternativos a esta propuesta. Al respecto puede consultarse [Martin \(2012\)](#), [Abbott et al. \(2019\)](#), [Yoo & Watanabe \(2012\)](#) y [Motta et al. \(2021\)](#), así como el capítulo 28 de [Zyla et al. \(2020\)](#).

A continuación introduciremos las definiciones de algunos parámetros cosmológicos que nos serán de gran utilidad. Empezaremos por el *parámetro de Hubble*, el cual definimos como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.33)$$

cuyo valor actual es la denominada *constante de Hubble* H_0 . El valor de la misma es al día de hoy un tema de investigación muy importante en la cosmología observacional ([Di Valentino et al., 2021a,b](#)). Con esta definición podemos ver que la ecuación de Friedmann (1.27) se reescribe como

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} \quad (1.34)$$

y se puede combinar con (1.26) para obtener

$$\dot{H} = -4\pi G(p + \rho). \quad (1.35)$$

Además Podemos definir también el *parámetro de desaceleración*.

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (1.36)$$

que mide la tasa de cambio de la tasa de expansión.

Otra cantidad importante a definir es el *parámetro de densidad*,

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}, \quad (1.37)$$

donde se introdujo a su vez a la *densidad crítica*, $\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$. El carácter “crítico” de ρ_{crit} lo podemos ver al reescribir la ecuación (1.27) como

$$\Omega - 1 = \frac{K}{H^2 a^2}. \quad (1.38)$$

Observamos que el signo de K , el cual determina la curvatura espacial del universo, queda determinado por Ω que a su vez es determinado por ρ_{crit} . Tenemos⁽ⁱⁱ⁾

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{\text{crit}} &\leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow K < 0 \leftrightarrow \text{universo abierto} \\ \rho = \rho_{\text{crit}} &\leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow K = 0 \leftrightarrow \text{universo plano} \\ \rho > \rho_{\text{crit}} &\leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow K > 0 \leftrightarrow \text{universo cerrado} \end{aligned} \quad (1.39)$$

⁽ⁱⁱ⁾En la literatura suele expresarse directamente usando $K = -1$ y $K = 1$ para los casos abierto y cerrado respectivamente, valiéndose de la transformación mostrada en (1.14).

Podemos expresar a ρ y Ω totales como las sumas de sus componentes,

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{rad}} + \rho_{\Lambda} \\ \Omega &= \Omega_{\text{mat}} + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\Lambda}\end{aligned}\tag{1.40}$$

Tomando como referencia las observaciones de [Planck Collaboration et al. \(2020a\)](#) se han podido estimar las densidades de cada componente:

- La componente de radiación en el presente se observa como despreciable frente a la materia y energía oscura, con $\Omega_{\text{rad}} \approx 10^{-5}$.
- La componente de materia se estimó en $\Omega_{\text{m}} = 0.315 \pm 0.007$ dentro de la cual se identifica una componente de materia bariónica (visible, formada por quarks y leptones con excepción de los neutrinos relativistas que se modelan dentro de la radiación) $\Omega_{\text{b}} \approx 0.05$ y una componente de materia oscura (DM por sus siglas en inglés) $\Omega_{\text{DM}} \approx 0.27$.
- La componente de energía oscura se estima en $\Omega_{\Lambda} \approx 0.68$.

Estas observaciones permiten estimar que el universo es aproximadamente muy plano espacialmente con $\Omega \approx 1$ y $K \approx 0$.

La ecuación (1.27) nos permite obtener la evolución del factor de escala en los tres casos de dominio de energía que hemos visto y, a su vez, estimar una edad actual para cada modelo de universo, asumiendo por simplicidad $K = 0$:

- Para un universo dominado por materia no relativista $a(t) \propto t^{2/3}$, $q_0 = 1/2$ y edad $t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6.52 \times 10^9 h^{-1} \text{yr}$. Este se denomina *modelo de Einstein-de Sitter* y fue por mucho tiempo el más popular a pesar de que se observan hoy en día estrellas más longevas que esta edad estimada.
- Para un universo dominado por radiación $a(t) \propto t^{1/2}$, $q_0 = 1$ y la edad se relaciona con la constante de Hubble como $t_0 = \frac{1}{2H_0}$.
- Para un universo dominado por constante cosmológica $a(t) \propto e^{Ht}$. En este modelo $H = \sqrt{8\pi G\rho_{\Lambda}/3} = \text{cte}$, $q_0 = -1$ y la edad del universo es infinita. Este modelo de expansión acelerada eterna se denomina *universo de de Sitter*.

El Universo no está compuesto únicamente por un solo tipo de materia sino que existe una mezcla de diversos tipos que contribuyen a su composición total. Dado que las densidades de energía de cada especie varían con el tiempo, podemos esperar que en distintas épocas la componente dominante no sea la misma.

En la Figura 1.3 podemos ver que, si bien el Universo al día de hoy está bien modelado como dominado por energía oscura, en el pasado lo estuvo por la materia y en una época más temprana lo estuvo por la radiación. Esto afecta a cómo evolucionaba $a(t)$ lo cual se puede ver graficado esquemáticamente en la Figura 1.4.

En resumen las observaciones actuales indican que el modelo FLRW para un universo espacialmente plano dominado actualmente por constante cosmológica es una buena descripción de nuestro Universo.

1.2.3. Distancias y tiempo conforme

En cosmología, debido a la expansión del universo, debemos ser más cuidadosos a la hora de hablar del concepto de “distancia”. Por lo tanto definimos:

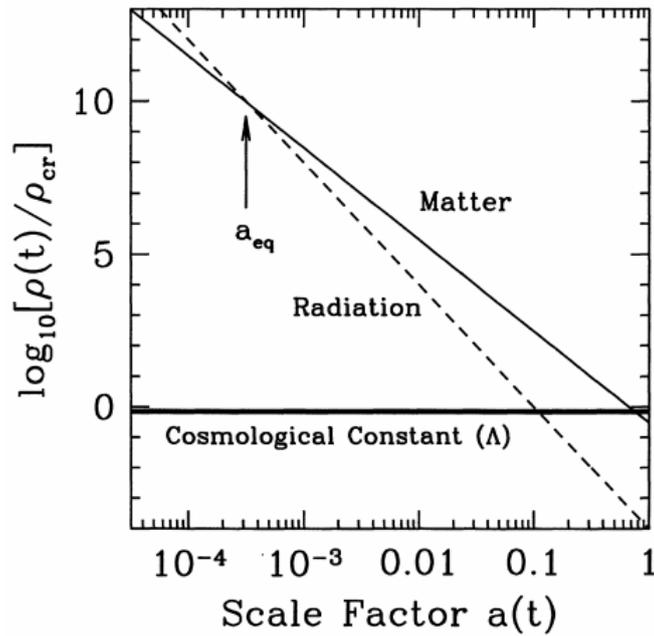


Figura 1.3. Evolución de las densidades de las componentes con respecto al tiempo. Figura tomada de [Dodelson \(2003\)](#)

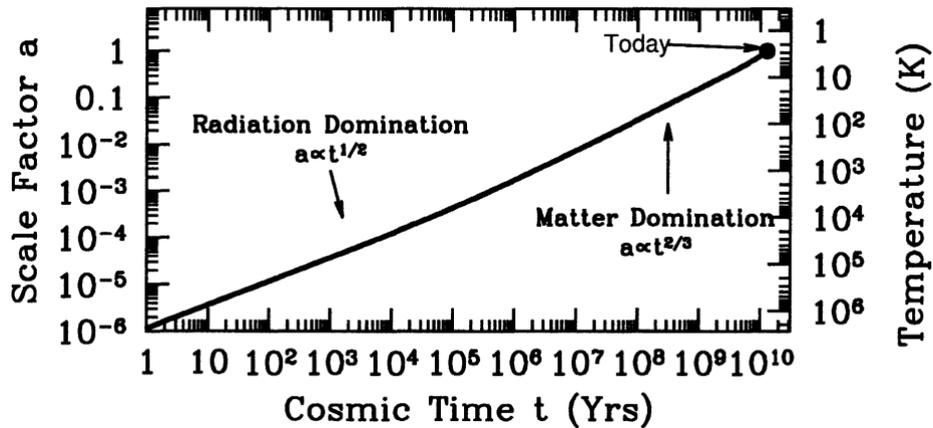


Figura 1.4. Evolución de $a(t)$ en las distintas épocas de dominio. Figura tomada de [Dodelson \(2003\)](#)

- Distancia física o propia: Suponiendo un objeto en $r = 0$ y otro en r la distancia propia es a un tiempo t

$$d_p(r, t) \equiv a(t) \int_0^r \frac{dr'}{1 - Kr'^2}. \quad (1.41)$$

- Distancia comóvil: definida de la misma manera que la física pero sin considerar al factor de escala:

$$d_c(r, t) \equiv \int_0^r \frac{dr'}{1 - Kr'^2} \quad (1.42)$$

Una distancia comóvil muy importante es la que recorre un fotón libre desde $t = 0$ hasta la actualidad. En un tiempo dt la luz recorre una distancia $d = dt/a$. La distancia total desde

$t = 0$ será entonces:

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (1.43)$$

A esta cantidad se la llama *tiempo conforme* y su importancia se discutirá en el siguiente capítulo. De momento nos limitaremos a reescribir la métrica FLRW en términos de esta nueva coordenada reemplazando a la coordenada temporal t :

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + d\Omega^2 \right) \quad (1.44)$$

Notamos que, considerando $K = 0$, nuestra métrica es conforme al espacio-tiempo de Minkowski.

Para finalizar este Capítulo, dado que hemos introducido la definición de tiempo conforme, vamos a reescribir algunas de nuestras expresiones previas en términos del mismo. Esto nos será de utilidad en los Capítulos siguientes donde serán utilizadas para nuestros cálculos. El parámetro de Hubble conforme lo definimos como

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}, \quad (1.45)$$

donde introducimos la notación de apóstrofo para indicar que estamos derivando al factor de escala respecto al tiempo conforme.

Por su parte, las ecuaciones (1.34) y (1.35) las podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}a^2 - K, \quad (1.46)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a^2. \quad (1.47)$$

Capítulo 2

Inflación

El modelo cosmológico visto en el capítulo anterior, el cual está basado en el principio cosmológico, es exitoso en explicar muchos de los fenómenos observacionales a gran escala del Universo. Sin embargo, adolece de requerir unas condiciones iniciales muy precisas para que la evolución del Universo coincida con las observaciones actuales. Esto es problemático porque implicaría que nuestro Universo es resultado de eventos y condiciones de muy baja probabilidad y esto no resulta satisfactorio en ningún modelo físico. Nos gustaría tener un modelo que a partir de condiciones iniciales más generales evolucione naturalmente hacia lo que se observa hoy en día y eso es precisamente lo que motivó la propuesta de Guth (1981) que da nombre a este capítulo. Antes de explorar dicha propuesta discutiremos dos de las problemáticas del modelo estándar de la cosmología (también denominado Hot Big Bang) tomando como referencia principalmente Riotto (2002) y Baumann (2015), y algunos elementos de Mukhanov (2005) y Baumann (2009).

2.1. Problemáticas del modelo

2.1.1. Problema de planitud

Vamos a asumir que la Relatividad General la podemos aplicar hasta la época de Planck cuando la temperatura del Universo era de $T_{\text{Pl}} \sim 10^{19}\text{GeV}$. Hipotéticamente, más atrás en el tiempo, efectos asociados a la gravedad cuántica cobrarían relevancia y la teoría de Einstein, clásica, dejaría de ser satisfactoria. Recordemos la ecuación de Friedmann en términos de Ω :

$$\Omega - 1 = \frac{K}{H^2 a^2}. \quad (2.1)$$

Observamos que para $K = 0$, lo que se traduce en un universo espacialmente plano, se debe cumplir que $\Omega = 1$ para todo tiempo. Esto es consistente con las observaciones actuales. Sin embargo, si consideramos un $K \neq 0$ la evolución de Ω será distinta.

- Para el modelo dominado por radiación $H^2 \propto \rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$ y, entonces,

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-4}} \propto a^2 \propto t. \quad (2.2)$$

- Para el modelo dominado por materia $\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3}$ y, entonces,

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-3}} \propto a \propto t^{2/3}. \quad (2.3)$$

2. Inflación

En ambos modelos se ve que $(\Omega - 1)$ es una cantidad monótonamente creciente con el tiempo. Sabiendo de las observaciones que el valor actual del parámetro de densidad, $\Omega(t_0) \equiv \Omega_0$, es del orden de la unidad podemos calcular el valor que debió tener $\Omega(t)$ en el universo primitivo para replicar los valores observados hoy en día. Para esto simplificaremos asumiendo un modelo dominado por radiación y usaremos $a \propto T^{-1}$ (Weinberg, 2008) y que la temperatura actual, tomada de la radiación del CMB, es $T_0 \sim 10^{-13} \text{GeV}$.

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_{\text{Pl}}}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left(\frac{a_{\text{Pl}}^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0^2}{T_{\text{Pl}}^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-64}). \quad (2.4)$$

A temor de haber empujado a la Relatividad General más allá de su límite aplicable podemos elegir de forma más prudente un tiempo más reciente como la época de nucleosíntesis, con $T_{\text{N}} \sim 1 \text{MeV}$. Así tendremos

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_{\text{N}}}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left(\frac{a_{\text{N}}^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0^2}{T_{\text{N}}^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-16}). \quad (2.5)$$

De esta manera, para obtener el valor correcto de $(\Omega_0 - 1) \sim 0$ con el modelo estándar, el valor de $(\Omega(t) - 1)$ en el pasado debió ser extremadamente cercano a cero.

2.1.2. Problema del horizonte

Antes de enunciar esta problemática vamos a dar algunas definiciones.

2.1.2.1. Horizontes

En la sección 1.2.3 establecimos la definición de tiempo conforme y adelantamos que discutiríamos su importancia en este capítulo. El mismo define una superficie espacial sobre la que podemos tomar un punto particular del espacio-tiempo. Este tendrá asociado un cono de luz que podemos expresar, tomando un intervalo nulo en (1.44) y un sistema de coordenadas adecuado, como $d\chi = \pm d\eta$. Este cono de luz permite identificar dos distancias máximas posibles u “horizontes” (Figura 2.1):

- *Horizonte de partículas:* la distancia comóvil máxima que la luz puede recorrer entre dos tiempos η_1 y $\eta_2 > \eta_1$ es $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$. Tomando un tiempo inicial t_i a partir del régimen de validez de la Relatividad General, la distancia comóvil máxima desde la que un observador en tiempo t puede recibir señales que viajen a la velocidad de la luz está dada por

$$\chi_{\text{ph}}(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.6)$$

Esto es lo que se conoce como el “horizonte de partículas” y es simplemente la intersección entre el cono de luz hacia el pasado para un observador en el tiempo η con la superficie espacial determinada por η_i .

- *Horizonte de eventos:* en cosmología, otra distancia comóvil que conviene definir es la máxima desde la que un observador en un tiempo futuro t_f podrá recibir una señal emitida en un tiempo t , la cual será

$$\chi_{\text{eh}}(\eta) = \eta_f - \eta = \int_t^{t_f} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.7)$$

A esta distancia la conocemos como “horizonte de eventos” y, así como el horizonte de partículas estaba delimitado por el cono de luz pasado de un observador en tiempo η ,

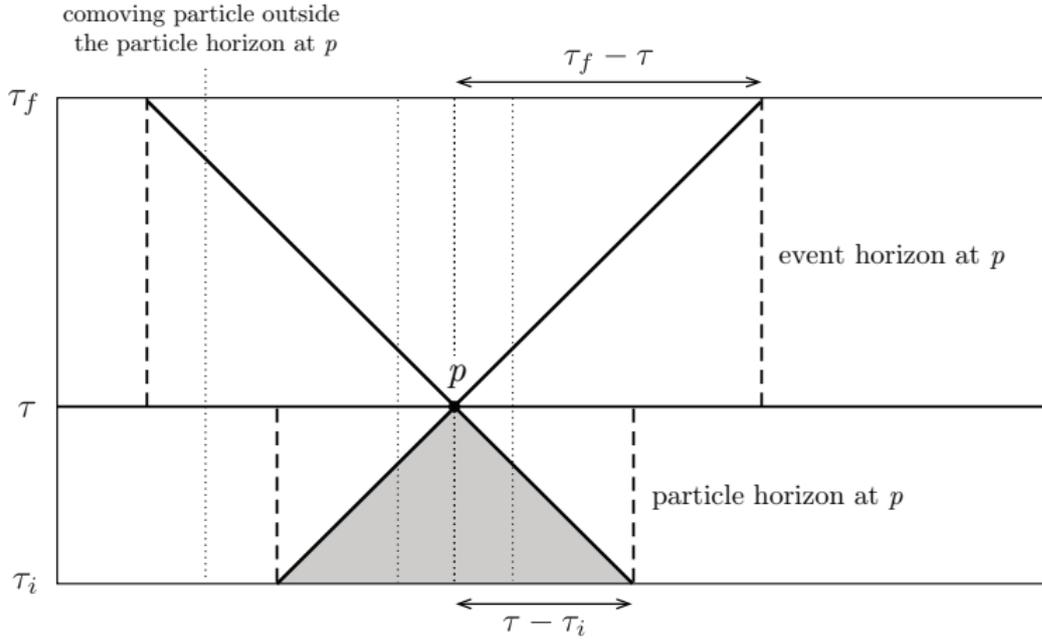


Figura 2.1. Horizontes de partículas y de eventos. Las líneas punteadas son líneas de mundo comóviles con p . Figura tomada de [Baumann \(2015\)](#), donde $\tau \equiv \eta$.

el de eventos lo estará por la intersección entre la superficie dada por η_f y el cono de luz futuro.

Notemos que puede darse el caso en donde, si bien t_f puede tender a infinito, η_f sea finito. Esto es, el horizonte de eventos puede ser finito. Esto dependerá del comportamiento de $a(t)$. De hecho, en el modelo dominado por constante cosmológica es finito.

2.1.2.2. Radio de Hubble

La ecuación 2.6 puede ser escrita como

$$\chi_{\text{ph}}(\eta) = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a} = \int_{a_i}^a \frac{da}{a\dot{a}} = \int_{\ln a_i}^{\ln a} (aH)^{-1} d \ln a, \quad (2.8)$$

donde a_i representa el factor de escala en un tiempo inicial dado. Este horizonte de partículas entonces lo podemos relacionar con el denominado *radio comóvil de Hubble* $(aH)^{-1}$. Este radio nos indica la distancia comóvil que pueden viajar las partículas en el curso de un tiempo de expansión $t_H \equiv H^{-1} = dt/d \ln a$. En el modelo estándar de fluido perfecto con ecuación de estado (1.30) el mismo nos queda

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)}. \quad (2.9)$$

En el modelo estándar cosmológico todas las fuentes familiares de materia satisfacen la condición fuerte de energía $(1+3w) > 0$ por lo que podemos ver que el radio de Hubble aumenta a medida que el universo se expande. Reemplazando (2.9) en (2.8) obtenemos

$$\chi_{\text{ph}}(a) = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} \left[a^{\frac{1}{2}(1+3w)} - a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \right] \equiv \eta - \eta_i. \quad (2.10)$$

Esta expresión está dominada por el límite superior ya que $\eta_i \rightarrow 0$ cuando $a_i \rightarrow 0$ y podemos concluir que el horizonte comóvil recibe su mayor contribución en los tiempos más tardíos.

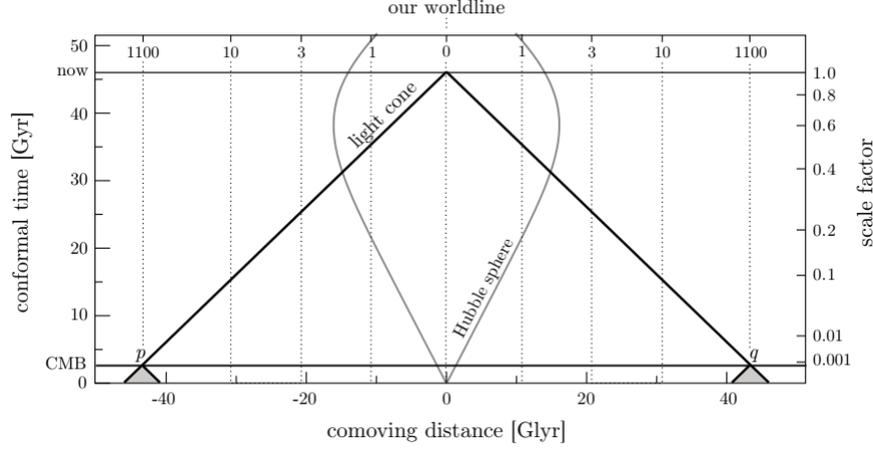


Figura 2.2. Problema del horizonte. Figura tomada de [Baumann \(2015\)](#).

2.1.2.3. El problema

Consideremos ahora dos regiones opuestas del cielo. Los rayos de luz emitidos en ellas se representan en la Figura 2.2 en los puntos p y q . Se ve que ambos están desconectados causalmente en aquella época. En concordancia con la ecuación (2.9) no pasó el tiempo suficiente desde la singularidad inicial para que sus conos de luz se superpongan.

Así como expusimos este caso extremo de dos rayos de luz viniendo de direcciones opuestas en el cielo en la cosmología estándar podemos hacer una estimación analítica de la problemática.

Comparemos el volumen del universo observable al día de hoy con el volumen del mismo en la época en la que la radiación del CMB fue emitida (desacople materia-radiación). Despreciando los tiempos más recientes de dominio de constante cosmológica supongamos un modelo dominado por materia y, de las ecuaciones (2.3) y (2.6), el tamaño del horizonte para un dado tiempo t será $a(t)\chi_{\text{ph}} \sim 3t$. El volumen del universo observable en t será entonces $V_t \sim (3t)^3 \sim t^3$. Deseamos ver la comparación entre el volumen que tendría el universo observable hoy al momento del desacople $V_0(t_d)$ con el volumen del mismo en ese momento V_d . Asumiendo $a \sim T_0/T$ y, llamando V_0 al universo observable hoy, por un lado tenemos

$$\frac{V_0(t_d)}{V_0} \sim \frac{a_d^3}{a_0^3} \sim \frac{T_0^3}{T_d^3}, \quad (2.11)$$

por lo que $V_0(t_d) \sim V_0 \left(\frac{T_0}{T_d}\right)^3$. Por lo tanto

$$\frac{V_0(t_d)}{V_d} \propto \frac{V_0 T_0^3}{V_d T_d^3} \propto \frac{t_0^3 T_0^3}{t_d^3 T_d^3} \sim 5 \times 10^4, \quad (2.12)$$

donde en la última aproximación hemos usado $T_0 = 2.73$ K y $T_d = 3000$ K. La diferencia de volúmenes es del orden de 10^4 . Esto nos dice que al día de hoy hay muchísimas regiones del cielo que en el momento del desacople no estuvieron en contacto causal. De hecho, regiones que hoy en el cielo están separadas por más de 1° no estaban en contacto causal en ese tiempo. Sin embargo, las anisotropías medidas en el CMB son del orden de $\Delta T/T \sim 10^{-5}$, indicando que algo tuvo que haber sucedido para que, al momento de la emisión del CMB, una región mucho más grande del universo haya estado en contacto causal previamente. Esto conforma el problema del horizonte.

2.2. Inflación

2.2.1. Horizonte de Partículas vs Radio de Hubble

La razón por la que nos tomamos el trabajo de definir al Radio de Hubble en 2.1.2.2 fue para presentar la siguiente idea: en el modelo estándar con materia ordinaria $\chi_{\text{ph}} \sim (aH)^{-1}$ pero, en sus definiciones, el horizonte de partículas χ_{ph} y el radio de Hubble $(aH)^{-1}$ se refieren a conceptos muy distintos.

- Si la distancia comóvil d a un dado tiempo entre dos eventos es $d > (aH)^{-1}$ entonces ambos no estarán en contacto causal luego de un tiempo de Hubble t_H .
- Si la distancia comóvil d entre dos eventos es $d > \chi_{\text{ph}}$ entonces ambos eventos *nunca* estuvieron en contacto causal.

Lo que nos interesaría entonces es una propuesta que disocie estos dos fenómenos: que las regiones que *hoy* vemos fuera de contacto causal lo hayan estado antes por algún mecanismo que provoque que $\chi_{\text{ph}} \gg (aH)^{-1}$. Esto sucedería si el radio de Hubble hubiese sido mayor en una época pasada de lo que es hoy en día, por lo que χ_{ph} habría recibido la mayor parte de su contribución en el pasado en vez de en épocas recientes. Sin embargo, en el modelo FLRW estándar, vemos que esto es imposible: tanto en la época de dominio de radiación como de materia $(aH)^{-1}$ es una función monótonamente creciente con el tiempo (no consideramos Λ porque su dominio se establece en el presente y necesitamos un mecanismo del pasado).

2.2.2. Propuesta y condiciones de Inflación

Expondremos ahora la propuesta de inflación para resolver el problema del horizonte siguiendo principalmente [Baumann \(2015\)](#) y veremos a su vez que además el problema de la planitud se resuelve con la misma.

Nos interesa una fase en la que decrezca el radio de Hubble. Veamos qué implica esto. Necesitamos que

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \tag{2.13}$$

por un tiempo suficiente para que se resuelva el problema del horizonte. Requerimos para esto que $(1 + 3w) < 0$, es decir $\ddot{a} > 0$. Este cambio ya tiene una consecuencia drástica en el modelo. La singularidad inicial, que en FLRW estándar la ubicábamos en $\eta_i = 0$, ahora podemos observar que se mueve hacia tiempo conforme *negativo*:

$$\eta_i = \frac{2H_0^{-1}}{(1 + 3w)} a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0} -\infty. \tag{2.14}$$

Este resultado es una solución al problema del horizonte: en este modelo las regiones que en $\eta = 0$ estaban causalmente desconectadas tuvieron tiempo suficiente en el pasado para que se intersecten sus conos de luz, como vemos en la figura 2.3.

Veamos qué podemos obtener de la definición (2.13) de inflación. Usando $H = \dot{a}/a$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \longrightarrow \frac{d\dot{a}^{-1}}{dt} = -\frac{\ddot{a}}{(\dot{a})^2} < 0. \tag{2.15}$$

De (2.15) podemos concluir que $\ddot{a} > 0$ y entonces inflación es una etapa de *expansión acelerada* del universo.

2. Inflación

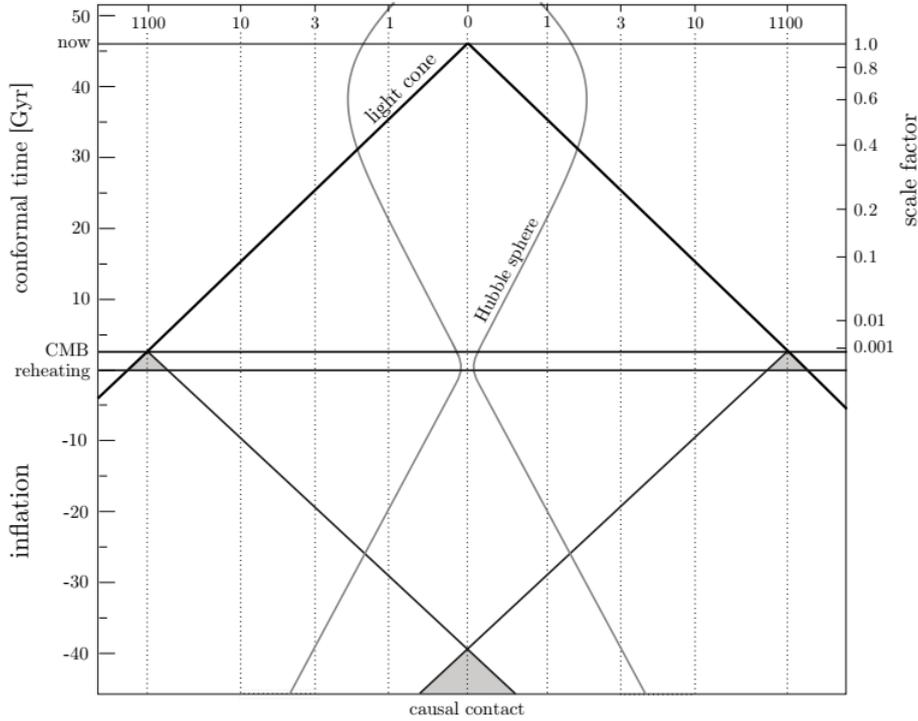


Figura 2.3. Solución al problema del horizonte. El radio de Hubble decrece durante inflación y los conos de luz desconectados en $\eta = 0$ ahora pasan a estar conectados en el pasado. $\eta = 0$ ya no es singularidad inicial sino que marca el paso de inflación a modelo estándar. Figura tomada de [Baumann \(2015\)](#).

Inflación se puede definir usando un parámetro que llamaremos ε de la siguiente manera. Reescribimos

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{-\dot{a} + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \varepsilon) \quad \text{con } \varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.16)$$

De esta manera inflación ocurre cuando $\varepsilon < 1$ y de su definición podemos ver que corresponde a una *variación lenta de H*. En el caso extremo $\varepsilon = 0$ la inflación es eterna ya que el espacio se vuelve de de Sitter

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} d\vec{x}^2. \quad (2.17)$$

Para $\varepsilon \neq 0$ pero chico este elemento de línea sigue siendo una buena aproximación por lo que a inflación se la llama también *expansión quasi-de Sitter*.

Al comienzo de la sección dijimos que para inflación requeríamos $(1 + 3w) < 0$. También mencionamos que ninguna fuente de materia o radiación tradicional del modelo FLRW cumple dicha condición por lo que se requiere un tipo de materia o energía no convencional. Además podemos demostrar que

$$\left| \frac{d \ln \rho}{d \ln a} \right| = 2\varepsilon < 1, \quad (2.18)$$

por lo que para ε pequeño la densidad de energía se mantiene prácticamente constante, a diferencia de la materia y radiación vistas en el modelo FLRW.

Lo siguiente que nos podemos preguntar es durante cuánto tiempo necesitamos que dure este período de expansión acelerada para que solucione efectivamente nuestro problema. Como mínimo requerimiento necesitamos que el universo observable al día de hoy esté contenido en el radio de Hubble al comienzo de inflación, es decir

$$(a_0 H_0)^{-1} < (a_I H_I)^{-1}, \quad (2.19)$$

donde el subíndice I indica el tiempo del comienzo de inflación. Vamos a asumir también que el universo luego de inflación estaba dominado por la radiación ($H \propto a^{-2}$) y no tendremos en cuenta las etapas dominadas por materia y por constante cosmológica más recientes. De esta manera, indicando con subíndice E el tiempo del fin de inflación, tendremos

$$\frac{a_0 H_0}{a_E H_E} \sim \frac{a_0}{a_E} \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 = \frac{a_E}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_E} \sim 10^{-28}. \quad (2.20)$$

En este paso hemos estimado $T_E \sim 10^{15} \text{GeV}$ y $T_0 = 10^{-3} \text{eV}$ ($\sim 2.7 \text{K}$) es la temperatura del CMB. De esta manera (2.19) se puede reescribir como

$$(a_I H_I)^{-1} > (a_0 H_0)^{-1} \sim 10^{28} (a_E H_E)^{-1}. \quad (2.21)$$

De esta manera vemos que, para que inflación solucione el problema del horizonte, $(aH)^{-1}$ debe reducirse en un factor de 10^{28} . Proponiendo que durante inflación $H \sim \text{cte}$, es decir que $H_I \approx H_E$ obtenemos

$$\frac{a_E}{a_I} > 10^{28}. \quad (2.22)$$

Esta propuesta para H será justificada en la siguiente sección. De este resultado podemos concluir

$$\ln \left(\frac{a_E}{a_I} \right) > 64. \quad (2.23)$$

Entonces para tener una solución necesitamos alrededor de 60 e -folds de inflación. Recordemos que un e -fold es el tiempo en el que una cantidad en crecimiento exponencial se incrementa en un factor e .

¿Cómo responde inflación al problema de la planitud? Habíamos mencionado que, a partir de la expresión (2.1), el modelo estándar cosmológico predecía un crecimiento monótono para universos dominados por materia y radiación. Podemos enfocar este problema de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} |\Omega - 1| = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a^2 H^2} \right) = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{a}^2} \right) = \frac{-2|K|\ddot{a}}{\dot{a}^3}. \quad (2.24)$$

Esto se traduce, considerando que en expansión $aH = \dot{a} > 0$, en la siguiente condición

$$\frac{d}{dt} |\Omega - 1| > 0 \iff \ddot{a} < 0, \quad (2.25)$$

la cual vemos que se cumple para \ddot{a} en las expresiones (2.2) y (2.3). El problema lo podemos plantear entonces como resultado de la expansión desacelerada del universo. Si consideramos una época inicial de expansión acelerada entonces la expresión $|\Omega - 1| = |K|/(aH)^2 = |K|/\dot{a}^2$ tiende a cero para condiciones iniciales genéricas. Al acercarse lo suficiente la expansión inflacionaria llega a su fin y comienza la evolución posterior en la que el crecimiento de $|\Omega - 1|$ es consistente con las observaciones al partir de un punto lo suficientemente cercano a 0.

2.2.3. Fuente de Inflación

Hemos visto que para que se produzca la inflación necesitamos un $\varepsilon < 1$. También necesitamos $\varepsilon \neq 0$ ya que si ε es nulo la inflación es eterna (es decir, un universo de De Sitter exacto) y dicho escenario no es físicamente realista. Inflación debe terminar en algún momento. Sin embargo, por lo visto en la sección anterior, para solucionar el problema del horizonte necesitamos una duración mínima para inflación de alrededor de 60 e -folds. Esto se traduce en

2. Inflación

que ε debe variar lentamente, así la condición de inflación $\varepsilon < 1$ se mantiene por un número suficiente de tiempos de Hubble. Lo anterior se puede parametrizar de la siguiente manera:

$$\eta_I \equiv \frac{d \ln \varepsilon}{dN} = \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon}, \quad (2.26)$$

con $dN \equiv d \ln a = H dt$ definiendo el número de e -folds N . De esta manera, si $|\eta_I| < 1$, entonces ε varía lentamente y se mantiene menor que 1 por un número suficiente de e -folds. De esta manera, por su definición, vemos que H debe variar muy lentamente y la aproximación constante usada en la sección anterior es válida. Veamos a continuación qué proceso físico puede dar origen a un comportamiento dinámico como el que acabamos de describir.

Como habíamos mencionado, vamos a modelar la materia considerando un enfoque de teoría de campos. En particular vamos a considerar un campo escalar al que llamaremos *inflatón* y denotaremos por ϕ . De todas formas debemos mencionar que existen modelos más complejos que el escalar como, por ejemplo, el propuesto por [Watson et al. \(2007\)](#). No desarrollaremos estos enfoques en el presente trabajo. La acción de un campo escalar en un espacio-tiempo curvo n -dimensional es:

$$S_\phi = \int \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^n x, \quad (2.27)$$

donde $V(\phi)$ es la densidad de energía potencial asociada al campo. A su vez, puede demostrarse ([Carroll, 2019](#)) que, definiendo un tensor de energía momento de la siguiente forma:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.28)$$

el mismo preserva la forma de las ecuaciones de Einstein. El término S_M hace referencia a la acción de la materia y la acción total resulta $S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M$, con S_H definida como la acción de Einstein-Hilbert. Esta última se puede usar en primer lugar para derivar las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Retomando la expresión para nuestra acción del campo escalar S_ϕ obtenemos, al variarla respecto de la métrica inversa,

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int d^n x \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) + \delta \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right) \right] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - V(\phi) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Con esta variación podemos construir el tensor de energía momento:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(\phi)} &= -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como el campo debe ser consistente con las simetrías del modelo FLRW entonces ϕ es una función solamente del tiempo. De la ecuación (2.30) podemos deducir la densidad y presión del campo, comparando el tensor de energía-impulso anterior con el de la solución dada por el modelo FLRW, es decir, el de un fluido perfecto.

- La componente $T_0^0 = \rho_\phi$ nos queda la suma de las densidades de energía cinética y potencial del campo

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (2.31)$$

- De las componentes $T_j^i = -p_\phi \delta_j^i$ vemos que la presión p es la diferencia de las componentes cinética y potencial

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.32)$$

Vemos que para que se cumpla la condición de inflación $(1 + 3w) < 0 \iff p_\phi < -\rho_\phi/3$ la energía potencial debe dominar sobre la cinética.

Nos interesa a continuación encontrar una ecuación de movimiento para ϕ . Sustituyendo la expresión para ρ_ϕ en la ecuación de Friedmann $\rho/3M_{\text{Pl}}^2$ obtenemos

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right], \quad (2.33)$$

lo cual después de derivar respecto del tiempo nos queda

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left[\ddot{\phi}\dot{\phi} + \partial_\phi V \right]. \quad (2.34)$$

A su vez podemos sustituir ρ_ϕ y p_ϕ en la otra ecuación de Friedmann, $\dot{H} = -(\rho + p)/2M_{\text{Pl}}^2$ para obtener

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{\text{Pl}}^2}. \quad (2.35)$$

Combinando (2.34) con (2.35) podemos obtener la ecuación de movimiento para ϕ denominada *ecuación de Klein-Gordon*.⁽ⁱ⁾

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_\phi V = 0. \quad (2.36)$$

2.2.4. Inflación Slow-Roll

Recordando la definición de ε podemos combinar la misma con la ecuación (2.35) y (2.33) para obtener

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2 H^2} = \frac{3\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + 2V}. \quad (2.37)$$

Para que ocurra inflación debe cumplirse $\varepsilon < 1$, entonces el término cinético $\dot{\phi}^2$ debe ser mucho menor que el potencial en su contribución a la energía total. Además requeríamos que esta condición perdurara en el tiempo. En nuestro modelo se traduce en que requerimos que la aceleración del campo sea pequeña. Esto conduce a un potencial aproximadamente plano $\partial_\phi V \ll 1$ y se puede expresar en términos de un parámetro de aceleración por tiempo de Hubble,

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad (2.38)$$

que podemos usar para reescribir (2.26)

$$\eta_I = 2(\varepsilon - \delta). \quad (2.39)$$

Vemos entonces que $\{\varepsilon, |\delta|\} \ll 1$ implica $\{\varepsilon, |\eta_I|\} \ll 1$. Este modelo de potencial plano en el que el campo “rueda lentamente” como podemos ver en la figura 2.4 se denomina *inflación slow-roll* y a ε y δ se los denomina *parámetros de slow-roll*.

Estas condiciones nos permiten hacer simplificaciones al modelo.

⁽ⁱ⁾Otra manera de obtener la misma ecuación es, con el tensor obtenido en (2.30), aplicar la conservación de energía, es decir $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

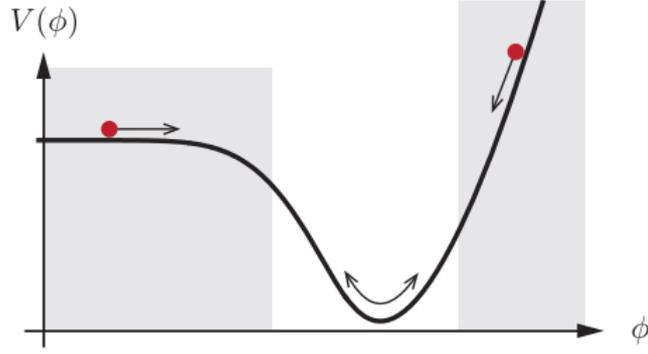


Figura 2.4. Potencial de slow-roll. Inflación ocurre en las zonas sombreadas. Figura tomada de [Baumann \(2015\)](#).

- Vimos que $\varepsilon \ll 1$ implicaba $\dot{\phi}^2 \ll 2V$. A su vez esto lo podemos traducir en una simplificación de la ecuación (2.33)

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_{\text{Pl}}^2}. \quad (2.40)$$

- La condición $|\delta| \ll 1$ simplifica la ecuación de Klein-Gordon (2.36) al ser $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ obteniendo así

$$3H\dot{\phi} \approx -\partial_\phi V. \quad (2.41)$$

En el presente trabajo usaremos el modelo slow-roll de inflación y, más específicamente, usaremos un modelo aproximado de de Sitter, en el que el factor de escala en términos del tiempo conforme nos quedará

$$a(\eta) \approx -\frac{1}{H_I \eta}, \quad (2.42)$$

siendo H_I el valor constante que tomamos para el parámetro de Hubble en inflación. Para estimarlo numéricamente usamos (2.40), estimando $V \simeq T_E^4$ con T_E definida en (2.20). De esta manera, $H_I \simeq 2.37 \times 10^{15} \text{ GeV} = 3.6 \times 10^{49} \text{ Mpc}^{-1}$. Anteriormente mencionamos que, para el caso en que (2.42) se cumple de manera exacta, la inflación es eterna. Por otra parte, la aproximación establecida por (2.42) es buena a primer orden en los parámetros de slow-roll, como quedará claro más adelante. Podemos ver, además, que el escalar de Ricci (1.19) en inflación para H_I constante toma la forma

$$R \simeq 12H_I^2. \quad (2.43)$$

Este resultado particular lo introducimos ya que cobrará relevancia en los cálculos que haremos en el Capítulo 5.

Para concluir este capítulo mencionaremos abreviadamente que, una vez que las condiciones de slow roll dejan de cumplirse, termina la inflación y el campo decae en las componentes del Modelo Estándar de Partículas y posiblemente en materia oscura. Este proceso de transición entre inflación y la etapa de dominio de radiación de FLRW estándar se llama *Recalentamiento* y una descripción de dicha fase puede encontrarse, por ejemplo, en [Baumann \(2015\)](#), [Mukhanov \(2005\)](#) y [Weinberg \(2008\)](#).

Capítulo 3

El Universo no tan homogéneo

Hasta este punto hemos considerado siempre modelos que cumplen el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía. Sin embargo notamos que el mismo tiene un límite de validez del orden de los cientos de Mpc, al presentar estructuras que rompen la simetría del modelo en escalas más chicas: galaxias, cúmulos, supercúmulos, filamentos y voids.

Este límite de validez del principio cosmológico lo podemos encontrar también en el CMB: el mismo presenta anisotropías que se asocian con inhomogeneidades en la densidad de materia y energía, las cuales a su vez servirían de semilla para la formación de las estructuras mencionadas en el párrafo anterior.

El estudio de la formación de estas estructuras necesita un enfoque que se aparte del modelo FLRW estándar pero sin ser totalmente distinto ya que verificamos que la homogeneidad e isotropía del mismo es consistente con las observaciones a gran escala del Universo. Con ese objetivo en este capítulo daremos un vistazo a la *teoría de perturbaciones* de la Relatividad General aplicada al modelo estándar y al campo Inflatón con el objetivo de relacionarla con las anisotropías que observamos en el CMB.

3.1. Perturbaciones cosmológicas

El estudio de la teoría de perturbaciones, en pocas palabras, se encarga de analizar el comportamiento de la métrica y el tensor de energía momento cuando se les aplica una perturbación. De esta manera tenemos ahora una variedad distinta de FLRW que escribimos

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{FLRW}} + \delta g_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

donde $g_{\mu\nu}^{\text{FLRW}}$ es la métrica FLRW y ahora representa un *espacio-tiempo de fondo*. Esta suma definida de esa manera es una igualdad mal planteada, pues $g_{\mu\nu}^{\text{FLRW}}$ y $\delta g_{\mu\nu}$ son tensores viviendo en variedades distintas, el primero en la de fondo y el segundo en la perturbada. Sin embargo este inconveniente puede solucionarse porque existe un mapeo entre ambas. Este mapeo (un difeomorfismo para ser más precisos) no es único y su elección la discutiremos en la sección 3.1.2. De momento sólo diremos que para algunos difeomorfismos se cumple $|\delta g_{\mu\nu}| \ll 1$, lo que nos permitirá trabajar este desarrollo perturbativo a orden lineal. Estas perturbaciones se introducen en las componentes de las ecuaciones de Einstein para obtener las mismas perturbadas. Un enfoque más riguroso sobre las mismas y el desarrollo completo con las perturbaciones a los símbolos de Christoffel, tensor de Riemann y de Ricci se puede consultar en Weinberg (2008) o Dodelson (2003). Nosotros seguiremos el desarrollo de Mukhanov (2005).

3.1.1. Perturbaciones en FLRW

Reescribamos la métrica de fondo de FLRW en tiempo conforme:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j). \quad (3.2)$$

Las perturbaciones en la métrica FLRW se pueden clasificar como *escalares*, *vectoriales* y *tensoriales*. Esta clasificación se denomina así por su comportamiento ante rotaciones locales de las coordenadas espaciales en hipersuperficies de tiempo constante. Más aún, a orden lineal se pueden desacoplar las mismas en lo que se denomina *teorema de descomposición*. La demostración del mismo puede verse en [Kodama & Sasaki \(1984\)](#).

La componente δg_{00} se comporta como un escalar y se puede expresar como

$$\delta g_{00} = 2a^2\phi, \quad (3.3)$$

siendo $\phi^{(i)}$ una función escalar.

Las componentes δg_{0i} se pueden descomponer como suma del gradiente de un escalar sumado a un vector de divergencia nula ($\partial^i S_i = 0$)

$$\delta g_{0i} = a^2(\partial_i B + S_i). \quad (3.4)$$

Finalmente las componentes δg_{ij} se pueden descomponer como la siguiente suma:

$$\delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E + \partial_j F_i + \partial_i F_j + h_{ij}), \quad (3.5)$$

donde ψ y E son funciones escalares, F_i es un vector de divergencia nula y h_{ij} un tensor sin traza y transversal, es decir que cumple

$$h_i^i = 0, \quad \partial_i h_j^i = 0. \quad (3.6)$$

Tenemos de esta manera diez funciones de η y las coordenadas espaciales para las componentes independientes de las perturbaciones de la métrica, cuatro para las perturbaciones escalares (ϕ , ψ , B y E), cuatro para las vectoriales (S_i y F_i teniendo cada una una restricción) y dos para las tensoriales (h_{ij} un tensor simétrico de en principio seis componentes independientes pero con cuatro restricciones).

Conceptualmente podemos ver los tres tipos de perturbaciones de la siguiente manera:

- Las perturbaciones escalares son inducidas por inhomogeneidades en la densidad de energía y, como exhiben inestabilidad gravitacional, conducen a la formación de estructuras en el Universo. Estas serán nuestro objeto de estudio en el Capítulo 5. Para las mismas la métrica tomará la forma, a primer orden en las perturbaciones:

$$ds^2 = a^2 \left[-(1 + 2\phi)d\eta^2 - 2\partial_i B d\eta dx^i + ((1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2\partial_i\partial_j E)dx^i dx^j \right]. \quad (3.7)$$

- Las perturbaciones vectoriales están relacionadas con el movimiento rotacional del fluido. Las mismas no son de interés cosmológico ya que decaen muy rápidamente con la expansión del universo en el modelo cosmológico estándar ([Mukhanov, 2005](#); [Baumann, 2015](#)). En este caso la métrica toma la forma:

$$ds^2 = a^2 \left[-d\eta^2 - S_i d\eta dx^i + (\delta_{ij} - \partial_j F_i - \partial_i F_j)dx^i dx^j \right]. \quad (3.8)$$

- Las perturbaciones tensoriales describen *ondas gravitacionales* y, a diferencia de las escalares y vectoriales, no tienen análogo en la teoría gravitatoria de Newton. En este tercer caso la métrica es:

$$ds^2 = a^2 \left[-d\eta^2 + (\delta_{ij} - h_{ij})dx^i dx^j \right]. \quad (3.9)$$

⁽ⁱ⁾Aquí esta función ϕ no refiere ni representa al campo inflatón. Cuando volvamos a usar esa notación para referirnos al campo será debidamente indicado.

3.1.2. Problema de gauge

Antes de continuar debemos mencionar que las perturbaciones dadas por (3.3), (3.4) y (3.5) no son únicas. Esto surge porque al tener una métrica de fondo y una perturbación estamos comparando, en principio, dos variedades diferentes. Necesitamos entonces un mapeo entre ambas (Carroll, 2019) y el mismo no es único. Esto nos conduce a tener que especificar una manera de mapear las variedades en lo que se denomina *elección de gauge*. La elección de gauge a primer orden en las perturbaciones es técnicamente equivalente a una transformación de coordenadas infinitesimal. Sin embargo, elegir coordenadas inapropiadas puede cambiar los valores de las variables de perturbación e, incluso, introducir perturbaciones ficticias (no olvidemos que la variedad será siempre la misma, lo que cambia es el mapeo). Por ejemplo, mencionamos que para algunos mapeos (difeomorfismos) obtengamos $|\delta g_{\mu\nu}| \ll 1$, esto podría no ser válido para una elección inapropiada y conducir a no poder realizar un análisis perturbativo. Este problema se puede resolver construyendo cantidades invariantes de gauge, las cuales introduciremos a continuación. Una transformación de coordenadas infinitesimal se expresa de la siguiente manera:

$$x^\mu \implies \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x^\nu). \quad (3.10)$$

Las transformaciones de coordenadas anteriores, a su vez, introducen cambios en la métrica,

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = g_{\alpha\beta}^{(0)}(x^\mu) + \delta g_{\alpha\beta}(x^\mu) \implies \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\mu) = g_{\alpha\beta}^{(0)}(\tilde{x}^\mu) + \delta \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\mu). \quad (3.11)$$

Estas transformaciones permiten simplificar las perturbaciones al construir con ellas cantidades *invariantes de gauge*, es decir, que no dependen del sistema de coordenadas. Esto nos permite identificar perturbaciones físicas de las que surgen de tomar un sistema de coordenadas inapropiado. En el caso de las perturbaciones escalares, de especial interés para los fines de este trabajo, vemos que dos de las cantidades más simples de construir son los llamados *potenciales de Bardeen*:

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a} [a(B - E')]', \quad \Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a} (B - E'). \quad (3.12)$$

Si bien no desarrollaremos las mismas, mencionaremos que para las perturbaciones tensoriales se puede ver (Mukhanov, 2005) que a primer orden el tensor h_{ij} ya es en sí mismo una cantidad invariante de gauge.

3.2. Perturbaciones escalares

Volvamos por un momento a la libertad de gauge. Otra manera de solucionar el problema es fijar un gauge que imponga condiciones sobre las funciones. En particular para las perturbaciones escalares podemos imponer dos condiciones. Dos gauges muy usados son:

- *Gauge newtoniano o longitudinal*, en el cual $B = E = 0$. Si además la parte espacial de δT es diagonal entonces $\psi = \phi$ y solamente una variable caracteriza a las perturbaciones. ψ es una generalización del potencial newtoniano, lo cual explica el nombre de este gauge.
- *Gauge sincrónico*, donde $\phi = B = 0$. Este gauge no fija un sistema de coordenadas de forma unívoca.
- *Gauge comóvil*, donde $B = \delta T_i^0 = 0$. Para inflación slow roll esto implica que las perturbaciones estarán caracterizadas únicamente por fluctuaciones en la métrica.

3. El Universo no tan homogéneo

En lo que resta de esta tesis elegiremos trabajar con el gauge Newtoniano y el comóvil. Notamos en particular, que en el gauge Newtoniano las perturbaciones escalares de la métrica, ψ y ϕ , coinciden exactamente con los potenciales de Bardeen (ya que $B = E = 0$), los cuales como mencionamos son invariantes de gauge. Así, en el gauge Newtoniano, la métrica (3.7) se escribe como:

$$ds^2 = a^2 \left[-(1 + 2\psi)d\eta^2 + (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right], \quad (3.13)$$

donde además hemos usado las simetrías del espacio de fondo para obtener $\psi = \phi$ y trabajar entonces con ψ , perturbación a la curvatura. Esto nos será útil, además, desde el punto de vista de la notación ya que a partir de ahora nos volveremos a referir con ϕ al campo inflatón. Las ecuaciones de Einstein perturbadas en este escenario son:

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu. \quad (3.14)$$

Usando estas expresiones para las componentes individuales de (3.14) se puede obtener (Mukhanov, 2005):

$$\nabla^2 \psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\psi + \psi') = -4\pi G a^2 \delta T_0^0, \quad (3.15)$$

$$\partial_i(\mathcal{H}\psi + \psi') = -4\pi G a^2 \delta T_i^0, \quad (3.16)$$

$$[\psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\psi]\delta_j^i = 4\pi G a^2 \delta T_j^i. \quad (3.17)$$

Nos interesa aplicar la teoría de perturbaciones cosmológica a la época inflacionaria, por lo que reescribimos el tensor de energía-momento (2.30) subiendo un índice para mantener la forma en que tenemos escrita las ecuaciones:

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\sigma} \partial_\sigma \phi \partial_\nu \phi + \delta_\nu^\mu \left(-\frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \phi \partial_\rho \phi - V(\phi) \right), \quad (3.18)$$

expresión con la cual, separando al campo en una componente homogénea sumada a una perturbación $\phi(t, \vec{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \vec{x})$, podemos obtener a primer orden:

$$\delta T_0^0 = a^{-2}(\phi_0'^2 \psi - \phi_0' \delta\phi' - \partial_\phi V a^2 \delta\phi), \quad (3.19)$$

$$\delta T_i^0 = \partial_i(-a^{-2} \phi_0' \delta\phi), \quad (3.20)$$

$$\delta T_j^i = a^{-2}(\phi_0' \delta\phi' - \phi_0'^2 \psi - \partial_\phi V a^2 \delta\phi) \delta_j^i. \quad (3.21)$$

Con estas expresiones junto con (2.31), (2.32) y (2.36) podemos reescribir (3.15) y (3.16):

$$\nabla^2 \psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\psi + \psi') = 4\pi G a^2 (\rho_0 + p_0) \left[\left(\frac{\delta\phi}{\phi_0'} \right)' - \psi - 2\mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi_0'} \right], \quad (3.22)$$

$$\mathcal{H}\psi + \psi' = 4\pi G a^2 (\rho_0 + p_0) \left(\frac{\delta\phi}{\phi_0'} \right), \quad (3.23)$$

donde $\rho_0 \equiv \rho_\phi$ y $p_0 \equiv p_\phi$ definidos de la misma manera que en (2.31) y (2.32) sobre la parte homogénea del inflatón ϕ_0 . A su vez, con estas expresiones y las ecuaciones de Friedmann podemos obtener:

$$\left(a^2 \frac{\psi}{\mathcal{H}} \right)' = \frac{4\pi G a^4 (\rho_0 + p_0)}{\mathcal{H}^2} \left(\mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi_0'} + \psi \right), \quad (3.24)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{4\pi G a^4 (\rho_0 + p_0)}{\mathcal{H}} \left(\mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi_0'} + \psi \right)'. \quad (3.25)$$

Estas ecuaciones las podemos escribir de forma más compacta como

$$\nabla^2 u = z \left(\frac{v}{z} \right)', \quad (3.26)$$

$$v = \theta \left(\frac{u}{\theta} \right)', \quad (3.27)$$

donde hemos introducido las siguientes variables:

$$z \equiv \theta^{-1} \equiv \frac{a^2 \sqrt{\rho_0 + p_0}}{\mathcal{H}} \quad (3.28)$$

$$u \equiv \frac{\psi}{4\pi G \sqrt{\rho_0 + p_0}}, \quad (3.29)$$

$$v \equiv a \left(\delta\phi + \frac{\phi'_0}{\mathcal{H}} \psi \right). \quad (3.30)$$

La variable v se denomina *variable de Mukhanov-Sasaki* y es de interés en este punto al ser una combinación de las perturbaciones de la métrica y del inflatón, además de ser la variable que se cuantiza en el enfoque estándar. Esto quiere decir que, en este enfoque estándar, cuantizaremos simultáneamente ψ y $\delta\phi$.

A continuación buscaremos una ecuación de movimiento para la variable v . Para esto tomamos la acción del campo escalar y gravitacional de fondo y hacemos una expansión a segundo orden en las perturbaciones escalares. El resultado dependerá sólo de v (y su derivada):

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left(v'^2 + v \nabla^2 v + \frac{z''}{z} v^2 \right). \quad (3.31)$$

Con esta acción podemos obtener usando las ecuaciones de Euler-Lagrange la ecuación de movimiento para v :

$$v'' - \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v^2 = 0. \quad (3.32)$$

El momento canónico conjugado de v es $\pi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial v' = v'$. Teniendo v y π podemos cuantizarlos al tomarlos como operadores cuánticos e imponiendo las siguientes relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales:

$$[\hat{v}(\vec{x}, \eta), \hat{v}(\vec{x}', \eta)] = [\hat{\pi}(\vec{x}, \eta), \hat{\pi}(\vec{x}', \eta)] = 0 \quad , \quad [\hat{v}(\vec{x}, \eta), \hat{\pi}(\vec{x}', \eta)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.33)$$

Nuestro siguiente paso ahora es descomponer a \hat{v} en modos de Fourier:

$$\hat{v}(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} (v_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^*(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (3.34)$$

con las funciones temporales $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ satisfaciendo⁽ⁱ⁾

$$v_{\mathbf{k}}'' + \omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) v_{\mathbf{k}} = 0 \quad , \quad \omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) \equiv k^2 - \frac{z''}{z}. \quad (3.35)$$

Podemos elegir para las funciones $v_{\mathbf{k}}$ la condición de normalización que nos garantice que $v_{\mathbf{k}}' v_{\mathbf{k}}^* - v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^{*'} = 2i$. Esto tendrá como consecuencia que nuestros operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ cumplan las relaciones de conmutación conocidas para los operadores de aniquilación y creación:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.36)$$

⁽ⁱ⁾Aclaración de notación: los subíndices \mathbf{k} indican cantidades dependientes del vector \mathbf{k} mientras que los subíndices k cantidades dependientes de la magnitud del mismo.

3. El Universo no tan homogéneo

La elección de $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ se corresponde con la elección del estado de vacío $|0\rangle$, es decir, el estado que al aplicársele los operadores de aniquilación cumple:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0. \quad (3.37)$$

Esta elección no es única aunque, de todas formas, en el tratamiento estándar, siempre se elige un estado de vacío que es espacialmente homogéneo e isótropo con indeterminaciones (fluctuaciones) cuánticas no nulas. Para caracterizar a este estado se suele adoptar el *vacío de Bunch-Davies* (Bunch & Davies, 1978). En el mismo tenemos

$$v_k(\eta) = \left(\frac{-\pi\eta}{4}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i[\nu+(1/2)](\pi/2)} H_{\nu}^{(1)}(-k\eta), \quad (3.38)$$

donde $\nu \equiv 3/2 + \varepsilon$ y $H_{\nu}^{(1)}$ es la función de Hankel de primer tipo y orden ν . Si tomamos el límite $\eta \rightarrow -\infty$ las soluciones $v_k(\eta) \rightarrow e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}$. Esto quiere decir que en ese límite se comportan como soluciones estándar en el espacio-tiempo de Minkowski.

Introducimos a continuación la siguiente cantidad, denominada *variable de Lukash* (Lukash, 1980):

$$\mathcal{R} \equiv \psi + \left(\frac{2\rho}{3}\right) \left(\frac{\mathcal{H}^{-1}\psi' + \psi}{\rho + p}\right). \quad (3.39)$$

Esta cantidad es invariante de gauge y representa, en el gauge comóvil, la perturbación a la curvatura. Una característica remarcable de esta variable es que para perturbaciones adiabáticas y escalas mayores al radio de Hubble es una cantidad conservada, como se demuestra en Piattella (2018). Podemos notar que \mathcal{R} se relaciona con la variable de Mukhanov-Sasaki de la siguiente manera:

$$\mathcal{R} = \frac{v}{z}, \quad (3.40)$$

y, al haber cuantizado v hemos cuantizado ya \mathcal{R} y escribiremos su descomposición en modos de Fourier de la siguiente manera:

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathcal{R}_k^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (3.41)$$

Nuestro objetivo es calcular la función de correlación de dos puntos e interpretarla como el espectro de potencias de las perturbaciones en la curvatura. Buscamos relacionar las fluctuaciones del campo cuántico con las de su correspondiente versión clásica. Esto lo haremos identificando

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{R}}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\mathcal{R}}(\eta, \mathbf{x}') | 0 \rangle \equiv \overline{\mathcal{R}(\eta, \mathbf{x}) \mathcal{R}(\eta, \mathbf{x}')}, \quad (3.42)$$

es decir, igualando un valor de expectación cuántico a un promedio de ensambles de configuraciones de campos clásicos, representado por la notación de barra sobre las dos variables clásicas. Esta identificación nos permite predecir el espectro primordial de estructura cósmica. Como el campo $\hat{\mathcal{R}}$ está definido en términos del campo \hat{v} , el cual a su vez es función del campo inflatón, es en este punto donde, en el enfoque estándar, se identifica a las *fluctuaciones cuánticas del inflatón* en el estado de vacío como generadoras de las perturbaciones primordiales. Sin embargo la misma no está exenta de problemas ya que justificarla es un punto delicado. Desde el punto de vista estándar una posible justificación relaciona el congelamiento de la amplitud de los modos con la transición de régimen cuántico a clásico (Baumann, 2011). Discutiremos esta elección y su relación con el problema de la medición en Mecánica Cuántica, tópico central de la presente tesis, en el siguiente Capítulo.

Habiendo realizado nuestra identificación para obtener el espectro de potencias procedemos a dar una definición del mismo. El espectro de potencias adimensional de las perturbaciones escalares de la métrica para un campo gaussiano, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$, viene dado por (Sriramkumar, 2009):

$$\begin{aligned} \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) &\equiv \int \frac{d^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{(2\pi)^3} \overline{\mathcal{R}(\eta, \mathbf{x})\mathcal{R}(\eta, \mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &\equiv \int \frac{d^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{(2\pi)^3} \langle 0 | \hat{\mathcal{R}}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\mathcal{R}}(\eta, \mathbf{x}') | 0 \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando la descomposición para $\hat{\mathcal{R}}$ dada en (3.41) podemos obtener, entonces:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{k^3}{2\pi^2} \right) |\mathcal{R}_k|^2 = \left(\frac{k^3}{2\pi^2} \right) \left(\frac{|v_k|}{z} \right)^2. \quad (3.44)$$

Nos interesa obtener el espectro de potencias en el límite fuera del horizonte⁽ⁱⁱ⁾ $k\eta \rightarrow 0$, ya que, como describiremos en la siguiente sección, se relacionan con las escalas para las cuales la microfísica no ha hecho evolucionar las perturbaciones, al ser las mismas más grandes que el horizonte. Para lograrlo debemos tomar la solución para v_k dada en (3.38) y hacer su desarrollo en serie como se muestra en Sriramkumar (2009) y Stewart & Lyth (1993) para obtener, a primer orden en los parámetros de slow-roll, el siguiente espectro para las perturbaciones en la curvatura:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k, \eta) \simeq \left(\frac{H_I^2}{2\pi\phi} \right)^2 = \frac{H_I^2}{8\pi^2 \varepsilon M_P^2}, \quad (3.45)$$

Observamos que esta expresión para el espectro es invariante de escala, es decir, independiente de k , en el límite $k\eta \rightarrow 0$. De todas formas, debemos notar que en realidad existe una pequeña desviación de la invarianza ya que H y ε son funciones del tiempo, más allá de la aproximación constante que hemos hecho (Baumann, 2011). Esta desviación se puede parametrizar mediante el siguiente índice escalar n_s de la siguiente manera:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k, \eta)}{d \ln k}, \quad (3.46)$$

el cual, a primer orden en los parámetros de slow roll, es

$$n_s - 1 = -2\varepsilon - \eta_I. \quad (3.47)$$

Este parámetro entonces depende de H , de \dot{H} y de \ddot{H} .

Este resultado invariante de escala está en sintonía con las observaciones del CMB que muestran un espectro muy cercano al invariante de escala. A este espectro invariante de escala se lo denomina *espectro de Harrison-Zel'dovich* (Harrison, 1970; Zel'dovich, 1972).

3.3. Anisotropías en el CMB

Habiendo realizado ya un desarrollo teórico para las perturbaciones cosmológicas para la métrica y materia en la época inflacionaria nos vamos a abocar en esta sección a ver cómo relacionarlas con las observaciones. Para esto nos enfocaremos en las mediciones que se

⁽ⁱⁱ⁾Estrictamente hablando nos referimos al radio de Hubble, en Inflación se le denomina horizonte a pesar de no ser un horizonte tal como lo definimos en el Capítulo 2.

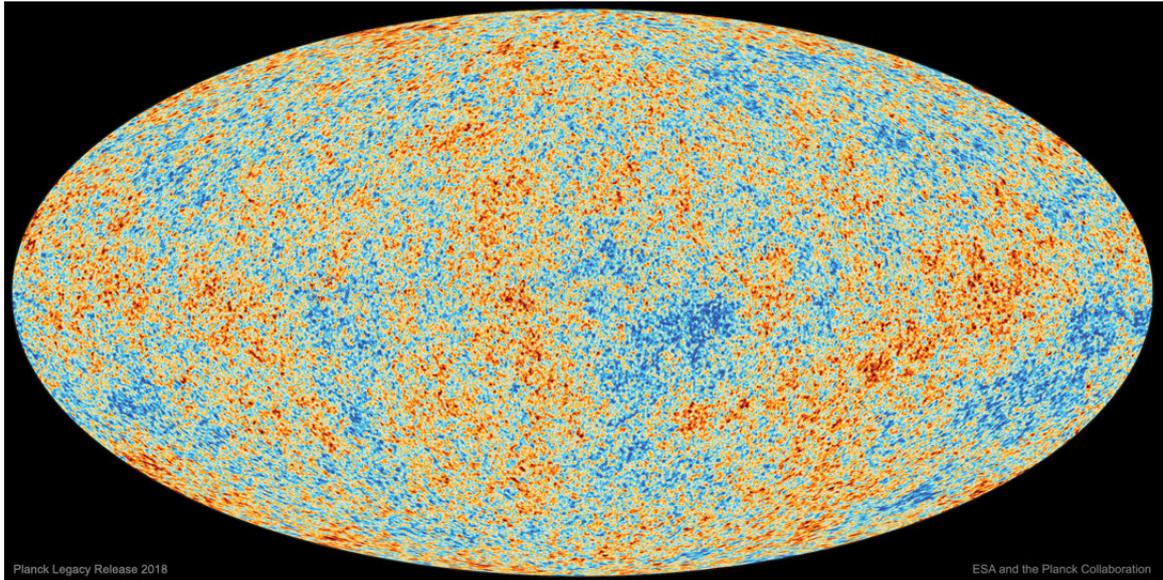


Figura 3.1. Fluctuaciones en la temperatura media del CMB $T_0 = 2.7\text{K}$. Los puntos azules indican regiones en el cielo hasta $\sim 10^{-4}\text{K}$ más frías que la media. Los puntos amarillos y rojos a su vez indican temperaturas superiores a la media. Figura tomada de [Planck & ESA \(2018\)](#)

realizan del CMB. Para una discusión más detallada acerca de los observables cosmológicos referimos, además de la bibliografía estándar de la materia, a [Scóccola \(2009\)](#) y [Piccirilli \(2018\)](#).

Ya hemos mencionado brevemente al Fondo Cósmico de Radiación como la radiación liberada 380000 años luego del Big Bang, la cual presenta gran isotropía y sirve como verificación observacional de la simetría del modelo FLRW. Sin embargo, esta radiación no es perfectamente isótropa si no que la misma posee anisotropías. Las perturbaciones escalares conducen a fluctuaciones en la densidad de energía en el plasma primordial. Cuando el universo se enfría a una temperatura de aproximadamente $T = 3000\text{K}$, los fotones se desacoplan del resto de la materia. Estos fotones viajan libremente produciendo el CMB, mientras que sus pequeñas perturbaciones quedan impregnadas en el mismo, en forma de las anisotropías en la temperatura del CMB que vemos hoy en día.

Las fluctuaciones en la temperatura del CMB se deben a diversos efectos físicos, cada uno afectando a diferentes escalas, respecto al horizonte de partículas en la época del desacople. En escalas menores sobre la superficie de desacople, $\theta \ll 1^\circ$, ocurren procesos de microfísica que no son relevantes para este trabajo. En escalas $\theta \gg 1^\circ$ ocurre el *efecto Sachs-Wolfe* ([Sachs & Wolfe, 1967](#)). Este efecto describe el cambio en la energía de los fotones por la interacción de estos con pozos de potencial gravitatorio en la superficie de última dispersión

Para estas grandes escalas vemos además que las longitudes de onda físicas asociadas al modo k de la perturbación son mayores que el horizonte de partículas en la época del desacople (recordemos que en el Capítulo 2 vimos que dos puntos del CMB separados por distancia angular mayor que 1° estaban desconectados causalmente, mientras que se puede mostrar que el horizonte de partículas, en la época del desacople, corresponde a $\theta \simeq 2^\circ$ ([León, 2011](#))). Las anisotropías en escalas angulares mayores no han evolucionado significativamente al no ocurrir microfísica en ellas y, por ende, reflejan las inhomogeneidades primordiales de la época inflacionaria ([Scott & Smoot, 2004](#)). Esto las hace de particular interés para los cálculos de la presente Tesis y justifica nuestra elección del límite fuera del horizonte $k\eta \rightarrow 0$

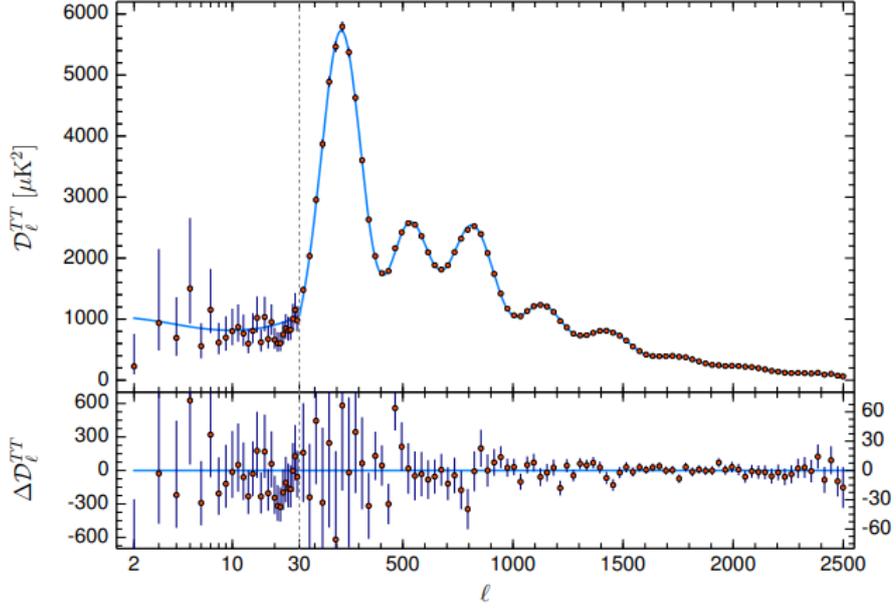


Figura 3.2. Espectro angular de anisotropías. $D_l^{TT} \equiv l(l+1)C_l/2\pi$. Figura tomada de [Planck Collaboration et al. \(2020a\)](#)

para obtener (3.45).

Las fluctuaciones en la temperatura del CMB, $\delta T/T_0$ las podemos expresar en términos de un desarrollo multipolar en armónicos esféricos, usando las variables angulares θ y φ sobre la superficie de última dispersión. El mismo está dado por:

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{-l \leq m \leq l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.48)$$

con

$$a_{lm} = \int \frac{\delta T}{T_0}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (3.49)$$

Los multipolos l son las diferentes escalas angulares sobre la superficie de desacople y cumplen $l \sim \pi/\theta$. Es decir que las escalas angulares grandes se corresponden con l chicos. En particular, los l correspondientes a escalas fuera del horizonte son los $l \lesssim 100$ ([Scott & Smoot, 2004](#)).

Con estas cantidades podemos obtener información cosmológica de la época del desacople mediante la función de correlación de dos puntos de la temperatura, la cual se define como el promedio en el cielo de la desviación fraccional en dos direcciones \mathbf{n} y \mathbf{n}' en términos de polinomios de Legendre:

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T(\mathbf{n})}{T_0} \frac{\delta T(\mathbf{n}')}{T_0} \right\rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos \theta). \quad (3.50)$$

En esta expresión los coeficientes C_l corresponden a la variancia de los coeficientes a_{lm} :

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (3.51)$$

Esta función se denomina espectro angular de anisotropías y es de interés ya que es un observable que se puede relacionar con la predicción teórica de inflación, al estar relacionadas

3. El Universo no tan homogéneo

las anisotropías en la temperatura del CMB con las fluctuaciones en densidad en la época de desacople y recombinación.

La manera de comparar este espectro con las predicciones de la teoría inflacionaria es recurriendo al espectro de potencias adimensional de las perturbaciones escalares, $P_{\mathcal{R}}$, que calculamos en la sección anterior. La expresión que relaciona C_l con $P_{\mathcal{R}}$ es (Baumann, 2011):

$$C_l = 4\pi \int \frac{dk}{k} j_l^2(kR_D) P_{\mathcal{R}}(k) T^2(k), \quad (3.52)$$

en la que $j_l(kR_D)$ son las funciones esféricas de Bessel de orden l , R_D es el radio de la superficie de última dispersión y $T(k)$ una función de transferencia que nos dice cómo evolucionaron las perturbaciones desde la época dominada por la radiación hasta la actualidad. Considerando solamente las escalas grandes se puede ver (Dodelson, 2003) que $T = 1$. Teniendo en cuenta, además, que el espectro $P_{\mathcal{R}}$ es una constante independiente de k , la integral en (3.52) nos da simplemente:

$$C_l = 4\pi P_{\mathcal{R}} \int \frac{dk}{k} j_l^2(kR_D) = 2\pi P_{\mathcal{R}} \frac{1}{l(l+1)}, \quad (3.53)$$

por lo que el espectro $l(l+1)C_l/2\pi = P_{\mathcal{R}}$ es una constante cuya amplitud se fija al valor de la amplitud en las anisotropías en la temperatura del CMB. En la Figura 3.2 esto se corresponde con las escalas $l \lesssim 30$ en lo que se conoce como el *plateau de Sachs-Wolfe*. Las escalas menores (l mayores) incluyen la física post-inflación y la información sobre ella la contiene la función de transferencia T . Las observaciones indican que, en escalas angulares grandes, el espectro se asemeja al espectro plano predicho por Harrison y Zel'dovich. El espectro exactamente invariante de escala, de todas formas, ya se encuentra descartado por Planck Collaboration et al. (2020b).

Capítulo 4

El problema de la medición en Mecánica Cuántica y Cosmología

En el Capítulo previo discutimos el escenario inflacionario como mecanismo generador de las semillas primordiales de estructura cósmica. En el mismo recurrimos al argumento del enfoque estándar en el que las fluctuaciones cuánticas del campo inflatón en el estado de vacío son las responsables de generar estas estructuras clásicas. Sin embargo, mencionamos que este argumento presentaba problemas a la hora de ser justificado y el objetivo de este Capítulo será explorar esa problemática. Describiremos también, de forma introductoria, el llamado *problema de la medición en Mecánica Cuántica*, su relación con la cosmología y el interés particular del presente trabajo. Para ello seguiremos principalmente [Bengochea \(2020\)](#) y [Okon \(2014\)](#).

4.1. Introducción al problema de la medición

Comencemos nuestra discusión identificando qué cualidades presentan las teorías que denominamos *clásicas* y las que son llamadas *cuánticas*. Dadas unas condiciones iniciales para los valores de propiedades físicas asociadas a un objeto, tales como la posición y su velocidad, una teoría clásica (tal como la teoría newtoniana), nos permite predecir con precisión para cualquier otro tiempo la *trayectoria* en el espacio de dicho objeto. Decimos entonces que la física clásica es:

- *Objetiva* porque no depende de un observador que efectúe mediciones.
- *Completa* porque en la teoría tenemos toda la información necesaria para describir las propiedades de los objetos.
- *Realista* porque los elementos de la teoría describen objetos reales, es decir, objetos que existen en el mundo, independientemente de las observaciones que se les realicen (o no), y cuyas propiedades y valores siempre están bien definidos.

Por el otro lado, en la teoría Cuántica estándar propiedades como velocidad y posición *no están definidos hasta que se miden estas propiedades*. La información accesible a un sistema cuántico está contenida en lo que denominamos *función de onda*, la cual no es un observable pero nos permite calcular, a través de la regla de Born, probabilidades para los valores posibles de cantidades físicas obtenibles si se hicieran mediciones. Esto introduce la necesidad de que exista, además del objeto de estudio, un agente externo que realice las mediciones de las propiedades. Este agente externo puede ser una persona, un dispositivo, o cualquiera capaz

de interactuar con el sistema de manera tal que realice una medición. La teoría Cuántica es intencionalmente ambigua en la caracterización de este agente externo.

A pesar de esta necesidad mencionada, la Mecánica Cuántica es quizás la teoría física más exitosa de la historia. La concordancia entre sus predicciones y las mediciones experimentales es asombrosa y gracias a ella hemos podido describir matemáticamente desde el comportamiento de los átomos hasta el mecanismo por el cual las estrellas brillan. De hecho se piensa que el universo entero es esencialmente cuántico y que la mecánica clásica es una aproximación macroscópica (muy buena, por cierto) de fenómenos más fundamentales. La pregunta que surge es: ¿por qué nuestros objetos cotidianos, compuestos por átomos, no parecen estar descritos por la teoría que describe tan bien a los átomos mismos?

En 1927 Werner Heisenberg enunció el *Principio de indeterminación* (o, como a veces suele llamársele, incerteza o incertidumbre), el cual nos dice que es imposible conocer simultáneamente con precisión arbitraria los valores de determinados pares de magnitudes físicas observables si sus operadores asociados no conmutan entre sí, como pueden ser la posición y el momento lineal de un objeto.⁽ⁱ⁾ Esto significa que, a mayor certeza para el valor de una cierta cantidad física, otra cantidad conjugada de la misma estará menos determinada. Aunque midamos algunas propiedades, otras se mantendrán indeterminadas o serán alteradas, en contraste con lo que observamos en la física clásica. El estado cuántico general de un sistema referido a cierta propiedad será un *estado de superposición*, combinación de todos los estados posibles para la misma.

4.1.1. El gato de Schrödinger

Erwin Schrödinger, quien formuló en 1925 la ecuación pilar de la Mecánica Cuántica que hoy en día lleva su nombre, en 1935 planteó un experimento mental que describiremos a continuación: una caja cerrada sin ventanas en la que adentro hay un gato y una botella con veneno mortal. A su vez hay un dispositivo atómico aleatorio que controla la apertura de la botella con dos posibles estados, que denominaremos *abierto* y *cerrado*, con una probabilidad de 50 % de estar en cada uno. En un escenario el veneno se libera, matando al gato en un instante que no podemos conocer con precisión. En el otro escenario el veneno no se libera y el gato vive. La Mecánica Cuántica nos permite preparar inicialmente al dispositivo atómico en una superposición de los dos estados posibles. Sin embargo todo el sistema, el aparato, la botella, el veneno, el gato y la caja están hechos de átomos y deben poder ser descritos todos por la Mecánica Cuántica. Considerando al gato y al aparato como dos sistemas cuánticos que interactúan entre sí, entonces el estado del gato estará *entrelazado* con el del dispositivo y, por ende, en un estado de superposición. A su vez, si tomamos a la propiedad *vida* del gato como un observable, hasta que efectuemos una medida el estado del gato será una superposición de los dos estados posibles: vivo y muerto. Sólo efectuar una medida hará que ese estado se defina en uno de ellos con una probabilidad de 50 %.

Siguiendo su evolución unitaria con la ecuación de Schrödinger el estado del gato seguirá siendo la superposición “vivo-muerto” hasta que se efectúe una medida. Si un sistema posee en un estado inicial una simetría cuyo generador conmuta con el Hamiltoniano (por ejemplo simetría ante traslaciones espaciales y $[\hat{p}, \hat{H}] = 0$) la evolución dada por la ecuación de Schrödinger no rompe esta simetría. La ecuación de Schrödinger, lineal en el tiempo, es *determinista y reversible* y, por ende, tampoco rompe las superposiciones cuánticas iniciales. Podemos conocer en cada instante el valor de la función de onda y siempre podemos calcular

⁽ⁱ⁾Esta imposibilidad suele confundirse con una limitación técnica o debida a la intervención experimental cuando es en realidad una característica intrínseca de los sistemas cuánticos demostrable a partir de los postulados de la teoría.

la evolución hacia adelante o hacia atrás en el tiempo de la misma. Denominamos a esto *Proceso A*.

Una vez que efectuamos una medición la función de onda *colapsa* y se obtiene un resultado definido (imaginemos que el gato sobrevivió). Este proceso es *aleatorio*, ya que podríamos haber obtenido otro resultado, e *irreversible*, ya que ahora no tenemos manera de saber si antes el estado era “vivo”, “muerto” o “vivo-muerto”. Llamamos a esto *Proceso B*.

De manera similar, cuando se prepara un experimento cuántico en un laboratorio en un estado de superposición (por ejemplo, posiciones de partículas) y luego ese sistema interactúa con los aparatos de medición estos deberían entrar en superposición de estados hasta que se efectúa una medida. Esto nunca se ha observado en un laboratorio, es decir, nunca se han visto superposiciones de objetos macroscópicos.

Entonces, si en principio la teoría Cuántica es aplicable a cualquier sistema físico: ¿Por qué los objetos como átomos pueden permanecer en superposición pero objetos cotidianos como el mate en mi escritorio no están en varios lugares simultáneamente?

4.1.2. El problema

El escenario planteado abre el siguiente interrogante: ¿cómo hace un sistema cuántico para ir, desde un estado inicial de superposición para cierta propiedad, a otro estado, sin superposiciones, y con valores definidos para dicha propiedad si la ecuación de Schrödinger no destruye tales superposiciones? Necesitamos que un agente *externo* produzca un colapso en la función de onda al efectuar una medición. Esto abre más preguntas: ¿Qué es una medición? ¿Quién puede hacerla? ¿De qué tamaño debe ser el sistema para que su estado colapse y no esté en superposición? ¿Cuándo ocurre una medición? ¿Cuándo debemos usar la evolución dada por el Proceso A y cuándo el colapso dado por el Proceso B? La Mecánica Cuántica no ofrece respuesta a este dilema y es lo que denominamos *problema de la medición*.

Enunciaremos ahora el problema de una manera más formal. Se puede mostrar que los siguientes tres enunciados son mutuamente inconsistentes (Maudlin, 1995):

- A. La función de onda de un sistema es completa, es decir, especifica todas las propiedades físicas de un sistema.⁽ⁱⁱ⁾
- B. La función de onda siempre evoluciona de acuerdo a una ecuación dinámica lineal (la ecuación de Schrödinger).
- C. Las mediciones siempre tienen un resultado definido.

Volviendo a nuestro experimento mental podemos ver la inconsistencia de estos tres enunciados (Okon, 2014):

- Si suponemos que **A.** y **B.** son correctos, por **B.** debemos concluir que el estado final será una superposición “vivo-muerto” y por **A.** el estado cuántico es completo (es decir, representa de manera fiel el estado físico del sistema) entonces no puede cumplirse **C.** ya que el experimento no concluirá con un resultado definido.
- Si suponemos **A.** y **C.** entonces la evolución no puede estar dada por la ecuación de Schrödinger (**B.**) ya que esta va a llevar al aparato a un estado de superposición
- Si suponemos **B.** y **C.** la descripción cuántica no puede ser completa (**A.**) porque el estado de superposición no contiene la información de qué resultado definido se obtuvo.

⁽ⁱⁱ⁾En el Apéndice A exploramos más en detalle el significado e implicancias de que una teoría sea completa.

Esta clasificación es sumamente útil para explorar alternativas al modelo estándar al negar **A.**, **B.** o **C.**. En pocas palabras, si negamos **A.** estamos diciendo que el estado es incompleto y se propone completar la teoría añadiendo *variables ocultas*. Si negamos **B.** estamos diciendo que la evolución no está dada por la ecuación de Schrödinger y se propone modificarla con términos no lineales aleatorios de manera que el colapso ocurra independientemente de las mediciones. Estos modelos se conocen como modelos de *colapso objetivo* y ampliaremos en los mismos más adelante pues será la vía que tomaremos para abordar el problema de la medición en este trabajo. Finalmente si negamos **C.** estaremos tomando modelos como la interpretación de muchos mundos basada en [Everett \(1957\)](#) o los modelos de decoherencia en los que se interpreta que la interacción de un sistema con el ambiente causa “colapsos efectivos” en los que si bien el estado nunca colapsa, la interacción con el ambiente elimina interferencias de manera que, en la práctica, se puede pretender que el sistema colapsó.

Antes de pasar a la relación entre el problema de la medición y la cosmología mencionaremos dos cosas.

Lo primero que diremos es que, para muchos científicos muy importantes en el siglo XX como Bohr o Heisenberg el problema de la medición no es un problema científico puesto que la ciencia debería limitarse a describir lo que se observa. Concluyeron que no se puede aspirar a tener una teoría realista, completa, objetiva y lógicamente coherente del mundo como un todo. Para ellos el problema de la medición representa, en todo caso, el límite del proyecto científico. Por otro lado, [Penrose \(1989\)](#); [Penrose \(2021\)](#), [Hartle \(1993\)](#) y [Weinberg \(2012\)](#), entre otros, discuten la necesidad de generalizar la Mecánica Cuántica y, en particular, señalan este problema en la cosmología, como veremos a continuación.

Finalmente, una cuestión que puede surgirnos al plantear el problema de la medición es: ¿Por qué la Cuántica estándar es tan exitosa de todas formas? La Mecánica Cuántica es una teoría acerca de hacer mediciones y, en la práctica, es muy fácil distinguir entre observador y el objeto de estudio en un laboratorio aunque la teoría no nos de una regla para hacerlo. La escala microscópica entre los objetos cuánticos de estudio es muy lejana a la escala macroscópica humana y de los dispositivos.

4.2. El caso cosmológico

En cosmología el problema de la medición es un problema serio ([Bell, 1995](#)). En este caso las diferencias entre observador y sistema que en el laboratorio eran muy fáciles de distinguir ya no aplican. La separación entre observador y objeto de estudio y el concepto de medición no pueden ser fundamentales en una teoría que describe el Universo primitivo ([Hartle, 1993](#)). ¿Cuál es el observador? ¿Cuál es el objeto de estudio? ¿Quién o qué puede hacer una medición en la época inflacionaria, por ejemplo?

La cuestión central es cómo arribamos a un estado inhomogéneo y anisotrópico, como el desarrollado en el Capítulo 3, a partir de un estado de vacío perfectamente homogéneo e isotrópico, como el vacío de Bunch-Davies ([Perez et al., 2006](#); [Landau et al., 2013](#)). Hemos dicho que el estado cuántico de un sistema contiene toda su información y que su evolución temporal está dictada por la ecuación de Schrödinger, que no destruye simetrías ni superposiciones.

En el enfoque estándar vimos que las *fluctuaciones cuánticas del vacío* son las responsables de generar las semillas cósmicas. Aquí conviene detenernos un momento para preguntarnos: ¿A qué nos referimos, en física, al hablar de fluctuaciones?. Podemos identificar, al menos, tres tipos distintos de cuestiones para las que se usa el término:

- *Variaciones de un ensamble*: el rango de valores de una determinada característica de

los elementos de un conjunto. Un ejemplo puede ser un cúmulo estelar para el cual las masas de las estrellas fluctúa entre $1M_{\odot}$ y $10M_{\odot}$.

- *Variaciones en distintas regiones de algo extendido*: variaciones locales de un ente homogéneo al ser considerado en su totalidad. Un ejemplo lo podemos tomar en el mar, el cual es homogéneo en su totalidad pero las olas son fluctuaciones locales del mismo.
- *Indeterminaciones cuánticas*: los valores posibles para una cierta propiedad hasta que esta es medida y el sistema colapsa a uno de ellos siguiendo la regla de probabilidad correspondiente.

De estas tres definiciones la primera no será considerada para esta discusión pues no tiene aplicación para los sistemas cuánticos: los valores en esta definición ya se encuentran fijos independientemente de que se efectúe una observación. El problema surge al considerar indistintamente la segunda y la tercera definición como la misma cuestión. En cosmología estándar, al hablar de las fluctuaciones de vacío, se las está considerando como variaciones aleatorias en distintas regiones de un ente físico. Sin embargo, las indeterminaciones cuánticas correspondientes al campo cuántico en el estado de vacío, junto a la regla de Born, nos dan el rango de valores (en dicho estado cuántico) más probables de obtener *si se hiciera una medición*. Sin embargo, si no hay una medición específica, entonces no existe ningún elemento en la teoría que pueda romper la simetría del estado cuántico correspondiente a los campos de materia; por lo tanto, *el estado del campo y la métrica del espacio-tiempo se mantienen homogéneos e isotropos de manera exacta*. Las fluctuaciones cuánticas del campo en el estado de vacío, sin un elemento adicional, *no pueden identificarse de manera directa como semillas de estructura*. En otras palabras, el campo inflatón presenta fluctuaciones en su estado de vacío *pero las fluctuaciones, que en realidad son indeterminaciones cuánticas, no son inhomogeneidades*. Las indeterminaciones cuánticas dan origen a las inhomogeneidades primordiales solamente si se agrega el elemento adicional de la medición con la regla de probabilidad de Born, por ende, la relación entre fluctuaciones como indeterminaciones cuánticas y fluctuaciones como inhomogeneidades *no es una equivalencia*.

4.2.1. Decoherencia en cosmología

Antes de enunciar y desarrollar la propuesta de colapso objetivo de las funciones de onda vamos a dar una muy breve descripción de la propuesta de decoherencia, ya que la misma se toma no solamente como una posible solución al problema de la medición sino que se pretende utilizarla en el caso cosmológico para explicar la transición cuántico-clásica para las perturbaciones en inflación, es decir, el objeto de estudio de nuestra tesis. La persona interesada puede encontrar referencias a favor y en contra de esta propuesta en [Crull \(2015\)](#) y [Okon & Sudarsky \(2016\)](#), respectivamente. Por su parte, para una descripción completa de decoherencia y sus aplicaciones se puede consultar [Schlosshauer-Selbach \(2007\)](#).

Decoherencia es un mecanismo que surge al considerar que un sistema cuántico no se puede aislar de su entorno de la misma forma que se puede considerar un sistema clásico cerrado. Debido a las interacciones entre un sistema y su entorno sus estados cuánticos se entrelazan, lo cual conduce a su vez a una posible alteración del sistema original. Estas interacciones, entonces, no pueden considerarse meras perturbaciones que podrían llegar incluso a ser despreciadas si son lo suficientemente “débiles” sino que este entrelazamiento ahora *define* las propiedades físicas observables del sistema.

De esta manera, la *coherencia* del sistema, que se puede considerar como una medida del carácter cuántico del sistema, se diluye en el estado entrelazado del sistema con su entorno.

Este proceso es irreversible en la práctica y se toma como posible explicación de cómo el mundo clásico que experimentamos a diario surge de este sustrato cuántico.

En otras palabras, si consideramos un sistema cuántico con varios grados de libertad, de los cuales despreciamos la mayoría al considerarlos el “ambiente”, la matriz de densidad $\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle\langle\psi|^{(i)}$ para el subconjunto de estados restantes evoluciona y se vuelve diagonal tras realizar un promedio temporal. Esto se interpreta como el surgimiento del comportamiento clásico de los observables de interés, ya que las interferencias cuánticas dadas por los elementos fuera de la diagonal se aproximan a cero rápidamente (León, 2011).

¿Cómo intenta responder decoherencia al problema de la medición? Podemos observar que, consecuencia de las interacciones con el ambiente, se desprenden dos procesos (Schlosshauer-Selbach, 2007):

- Se pierde la coherencia cuántica de forma irreversible, la cual era la fuente de fenómenos cuánticos en el sistema.
- Se definen las propiedades observables del sistema, es decir, se seleccionan un conjunto de estados preferenciales del sistema.

En resumen, decoherencia explicaría la no observación de interferencia cuántica de ciertos sistemas, pero no puede destruir la superposición cuántica del estado original. El entorno induciría una regla de selección para los estados que impediría que observemos interferencias cuánticas y solamente los estados que sobrevivan a este proceso podrían ser observados (Zurek, 2003).

En cosmología, la explicación que intenta dar decoherencia para la transición cuántico clásica estaría dada por la interacción del campo inflatón con el entorno, el cual se modela según el autor de cada modelo particular de decoherencia en cosmología. Algunos modelos pueden verse en Burgess et al. (2008) y Weenink & Prokopec (2011). Por su parte, en Sudarsky (2011) y Okon & Sudarsky (2016) se argumentan las problemáticas que posee el uso de esta propuesta, tanto para el caso cosmológico como para la resolución del problema de la medición. Esta discusión no será abordada en detalle en la presente Tesis, pero mencionaremos brevemente dos problemas que adolecen a esta propuesta (León, 2011).

1. *Problema de la base*: si realizamos un cambio de base en el espacio de Hilbert del sistema la matriz densidad dejaría de ser diagonal. Para tratar de lidiar con este problema el tratamiento se dice que la interacción con el ambiente es constante para todo sistema y que es el ambiente el que selecciona la base en la que la matriz densidad se vuelve diagonal. En ese caso podría suceder, por ejemplo, que el ambiente seleccionara la base de posición, haciendo el momento indeterminado y, así, imposibilitando hablar de emergencia de clasicidad en el sistema. Al igual que en el problema de la medición, esto se agrava en el caso cosmológico: ¿Quién es el ambiente en el Universo? ¿Qué mecanismo físico puede seleccionar la base en la que la matriz de densidad se vuelva diagonal? Si quisiéramos usar decoherencia para solucionar el caso cosmológico deberíamos escoger una base preferente, el mecanismo físico apropiado y un criterio para separar los grados de libertad en ambiente y sistema.
2. *Problema del estado mixto*: no existe una justificación satisfactoria que nos permita interpretar al estado mixto, caracterizado por la matriz de densidad, como una descripción del sistema en términos de un ensamble estadístico. Si bien estamos trabajando

⁽ⁱ⁾Dependiendo de la situación puede ser una suma sobre distintos estados posibles o una integral, aquí simplemente anotamos la definición más simple sobre un estado puro.

con la matriz de densidad reducida, el sistema total sigue estando descrito por una superposición de estados cuántica, ya que sigue siendo la función de onda la que contiene toda la información del estado del sistema. Dicho de una forma más “extrema”: habría un conjunto de realidades coexistiendo simultáneamente. Querer asignarle a los estados mixtos una incertidumbre clásica entra en conflicto con las llamadas desigualdades de Bell (Bell, 1964, 1987, 1995), de las cuales hablaremos en el Apéndice A.

4.3. Propuesta de colapso

Como adelantamos en la sección 4.1.2 uno de los caminos para intentar resolver el problema de la medición es descartar el enunciado B. de Maudlin. Adoptando esta opción debemos explorar entonces teorías cuánticas no estándares, en las cuales el colapso de la función de onda sea autoinducido por algún mecanismo novedoso. A estos modelos se los conoce como *teorías de colapso objetivo*.

En trabajos como Pearle (1976), Diosi (1984, 1987, 1989) y Penrose (1989) se comienza a explorar la idea de modificar la ecuación de Schrödinger para alterar la evolución del sistema de manera tal que el colapso pueda ocurrir sin injerencia de un observador externo. El objetivo es obtener una teoría que describa de la misma forma los fenómenos microscópicos, en los que la Mecánica Cuántica tradicional es exitosa, así como los fenómenos macroscópicos que no presentan superposición de estados.

Estas modificaciones a la ecuación de Schrödinger deben ser tales que las superposiciones desaparezcan para los objetos macroscópicos, es decir, deben incluir un *mecanismo de amplificación* que discrimine objetos microscópicos de macroscópicos y que la dinámica por sí misma cause el colapso y lleve de un estado a otro de forma estocástica para poder reproducir a su vez las predicciones exitosas de la Mecánica Cuántica estándar.

Entre las diferentes propuestas para construir una teoría modificada se encuentra el modelo de *Mecánica Cuántica de Localización Espontánea* (Ghirardi et al., 1986) (QMSL por sus siglas en inglés, luego conocido como GRW por sus autores Ghirardi, Rimini y Weber) y el modelo de *Localización Espontánea Continua* (Pearle, 1989; Ghirardi et al., 1990) (CSL por sus siglas en inglés), una versión del cual será el que usemos en el presente trabajo. Para una descripción completa de los mismos se puede consultar Bassi & Ghirardi (2003) y, en particular para el modelo CSL, Pearle (2012).

4.3.1. Modelo GRW

En 1986 Ghirardi, Rimini y Weber exploraron la idea de que, a tiempos aleatorios y de forma espontánea, las funciones de onda pueden colapsar naturalmente de la misma manera en que lo harían si un observador externo realizara una medición al sistema de estudio. Presentaremos ahora el modelo GRW, a pesar de no ser el que usaremos para nuestros cálculos, por su sencillez para ser interpretado físicamente y, además, porque el modelo CSL que usaremos nace como una generalización de este. Seguiremos principalmente Bassi et al. (2013) y Norsen (2017).

Consideremos un sistema de N partículas para las cuales su estado en un instante t , $|\psi, t\rangle$, puede ser descrito por una función de onda $\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ perteneciente al espacio de Hilbert \mathcal{L}^2 . El modelo GRW establece que la función de onda evolucionará de acuerdo a la ecuación de Schrödinger,

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t), \quad (4.1)$$

durante la mayoría del tiempo. Esta evolución se ve interrumpida por los ocasionales colapsos aleatorios de la función de onda. Matemáticamente esto se traduce en que la función de onda sufre una transformación. Suponiendo que el colapso ocurre en un instante t podemos relacionar las funciones de onda previa y posterior al mismo con la siguiente expresión:

$$\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t^+) = \frac{\hat{L}_n(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t^-)}{\|\hat{L}_n(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t^-)\|}, \quad (4.2)$$

es decir, la función de onda inmediatamente posterior al colapso resulta de aplicarle (y re-normalizarla con) el operador \hat{L}_n , el cual es un operador lineal gaussiano que se elige igual a:

$$\hat{L}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi r_C^2)^{3/4}} \exp \left\{ \frac{-(\hat{\mathbf{q}}_n - \mathbf{x})^2}{2r_C^2} \right\}, \quad (4.3)$$

donde $\hat{\mathbf{q}}_n$ es el operador posición asociado a la n -ésima partícula del sistema, \mathbf{x} corresponde al lugar donde ocurre el colapso y r_C es el parámetro que nos indica el ancho del proceso de localización. El valor de \mathbf{x} es aleatorio y presenta la siguiente densidad de probabilidad:

$$p_n \equiv \|\hat{L}_n(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t^-)\|^2 = \int |\hat{L}_n(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t^-)|^2 dx. \quad (4.4)$$

Los colapsos se asumen distribuidos en el tiempo de forma poissoniana con una frecuencia λ_{GRW} . Los valores numéricos para los parámetros r_C y λ_{GRW} se estiman en

$$r_C \approx 10^{-7} \text{m}, \quad \lambda_{\text{GRW}} \approx 10^{-16} \text{s}^{-1}, \quad (4.5)$$

y se muestran consistentes con las mediciones actuales, como se puede ver en la Figura 4.1. Es importante notar que el valor de r_C se encuentra en una escala pequeña si se toman en cuenta objetos macroscópicos pero a su vez se encuentra muy por encima de, por ejemplo, la escala atómica. Una motivación para esta elección es la siguiente, que se ve en [Bengoechea et al. \(2020\)](#): Un test básico para las teorías de colapso es uno en el cual un vector de estado describiendo la superposición de un dispositivo señalador macroscópico en dos lugares (lo cual es una aproximación al estado de un aparato experimental con dos resultados posibles) deberá colapsar a uno de ellos en una escala de tiempo menor a la escala de percepción del ojo humano $\sim 0.1\text{s}$. El colapso relativamente lento del dispositivo visible más pequeño (en la escala de la longitud de onda azul $\sim 4r_C$) es el test más riguroso que podemos hacer (en el marco de este ejemplo poco riguroso y puramente ilustrativo). En este caso el tiempo de colapso se estima en $t = 1/\lambda N^2$ siendo N el número de partículas del puntero. Se puede ver que este tiempo, para la elección de los parámetros hecha, es del orden de $t \simeq 0.01$ s. La naturaleza de λ_{GRW} la ilustraremos de la siguiente manera.

Supongamos que ψ describe la evolución de un sistema de una sola partícula. La frecuencia λ_{GRW} indica que, entonces, deberíamos esperar un colapso espontáneo aproximadamente cada $\tau = 1/\lambda_{\text{GRW}} \approx 10^{16}\text{s}$, es decir, unos 300 millones de años. Si tomamos, en cambio, un sistema de dos o más partículas *entrelazadas*⁽ⁱ⁾ el colapso espontáneo de una de ellas implica el colapso de todo el sistema. ¿Cuál de todas las partículas puede colapsar? La respuesta es: *cualquiera*, y eso revela la naturaleza de λ_{GRW} : si tenemos un sistema de $N \approx 10^{23}$ partículas, es decir un número macroscópico de ellas, el tiempo esperado para que ocurra el colapso será de $\tau/N \approx 3 \times 10^{-8}\text{s}$, unos 30 nanosegundos. λ_{GRW} caracteriza el mecanismo de amplificación deseado: para sistemas microscópicos de pocas partículas el tiempo entre colapsos espontáneos es tal que permite los estados en superposición habituales en Mecánica Cuántica

⁽ⁱ⁾Para sistemas no entrelazados se puede mostrar ([Norsen, 2017](#)) que el colapso de una partícula no afecta al resto.

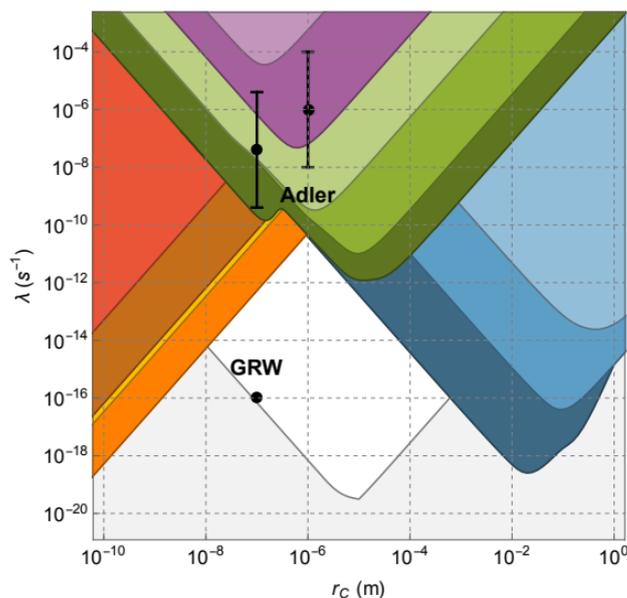


Figura 4.1. Restricciones experimentales actuales a los valores de λ y r_C . La zona blanca del diagrama es la correspondiente a los valores no descartados por las observaciones, las cuales van desde emisiones espontáneas de rayos X, experimentos atómicos, ondas gravitacionales y mediciones astrofísicas, entre otros, y se corresponden con las distintas zonas coloreadas del gráfico. En particular, la zona gris por debajo es prohibida por la teoría misma que requiere que las superposiciones macroscópicas no persistan en el tiempo. Para una discusión más detallada consultar [Carlesso et al. \(2022\)](#), del cual fue sacada esta Figura.

estándar mientras que para sistemas macroscópicos el número enorme de partículas involucradas implica un colapso casi instantáneo, evitando, a fines prácticos, las superposiciones macroscópicas. La teoría no dice que estas últimas sean imposibles, solamente las hace durar fracciones insignificantes de tiempo.

Como comentario final acerca del modelo GRW podemos notar que el mismo no posee una ecuación de evolución propia. Los sistemas evolucionan de acuerdo a la ecuación de Schrödinger en todo momento, excepto en los instantes puntuales en los que se producen colapsos espontáneos. Esta será modificada en el modelo CSL que veremos a continuación.

Antes de finalizar esta sección y presentar el modelo CSL vamos a mencionar una característica importante de los modelos de colapso descritos en esta tesis: tanto GRW como CSL son modelos *no relativistas*. La razón detrás de esto es que el colapso de la función de onda implica elegir una foliación privilegiada del espacio-tiempo, lo cual hace que la teoría no sea invariante de Lorentz. Este comportamiento hace difícil la formulación de los modelos en un contexto relativista. Una discusión más profunda a este respecto puede encontrarse en [Bassi & Ghirardi \(2003\)](#) y [Tumulka \(2006\)](#). En estos modelos, además, el colapso de la función de onda es no local, al ser un proceso instantáneo. ([Bassi et al., 2013](#); [Maudlin, 2011](#)). Esta característica, de todas formas, es un requisito de la teoría para poder reproducir las correlaciones cuánticas no locales en las desigualdades de Bell ([Bell, 1987](#)), las cuales son un fenómeno comprobado experimentalmente ([Aspect et al., 1982](#)). Daremos una discusión un poco más detallada de esta característica en el Apéndice A.

4.4. El modelo CSL

El modelo CSL es una generalización del modelo GRW de colapso espontáneo, presentado por Ghirardi, Rimini y Weber, a un sistema de partículas idénticas. En el modelo CSL el colapso de la función de onda ocurre de manera continua mientras que en GRW el colapso ocurre de forma discreta. Introduciremos las expresiones principales del mismo siguiendo [Pearle \(2012\)](#) y [Bassi et al. \(2013\)](#). Describiremos la forma más simple del mismo.

El modelo CSL consiste de dos ecuaciones principales, cuya derivación puede consultarse en [Pearle \(2012\)](#). La primera es una modificación a la ecuación de Schrödinger en la cual la evolución de un sistema a partir de un estado inicial queda dada por:

$$|\Psi, t\rangle = \hat{\mathcal{T}} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \left[i\hat{H} + \frac{1}{4\lambda} (w(t') - 2\lambda\hat{\Theta})^2 \right] \right\} |\Psi, t_0\rangle, \quad (4.6)$$

donde $\hat{\mathcal{T}}$ es el operador orden temporal, $w(t)$ caracteriza un proceso estocástico de ruido blanco, $\hat{\Theta}$ representa al *operador generador del colapso* y

$$\lambda \equiv \frac{\lambda_0}{r_C^2} \frac{m}{m_0}, \quad (4.7)$$

donde λ_0 nos da la tasa de colapso para una partícula de referencia en un estado espacialmente superpuesto, de la misma forma que λ_{GRW} hacía antes. Por su parte m representa la masa de una partícula y m_0 la masa de una partícula de referencia, como puede ser un nucleón. Esto implica que el colapso se hace más probable cuanto más masiva es la partícula en cuestión, es decir, tenemos un mecanismo de amplificación. En la presente tesis usaremos el modelo en el que el operador de colapso es el operador de posición

$$\hat{\Theta} = \hat{\mathbf{X}}. \quad (4.8)$$

Por su parte, la segunda ecuación principal del modelo nos da la Regla de Probabilidad para el ruido $w(t)$:

$$P(w)dw \equiv \langle \Psi, t | \Psi, t \rangle \prod_{t_i=t_0}^{t-dt} \frac{dw(t_i)}{\sqrt{2\pi\lambda/dt}}. \quad (4.9)$$

La norma del vector de estado evoluciona en el tiempo, es decir, no es siempre igual a 1. La ecuación (4.9) implica que los vectores con norma más grande son los más probables. La probabilidad total es $\int P(w)dw = 1$ si $\langle t_0, \Psi | \Psi, t_0 \rangle = 1$, es decir, si el vector de estado inicial del sistema está normalizado.

La ecuación (4.6) describe la evolución de un sistema a partir de un dado estado inicial. Debido al término de ruido w esta evolución será aleatoria y solamente podemos asegurar que, por cómo construimos el modelo, será conducido hacia uno de los autoestados del operador $\hat{\Theta}$. Nos interesa entonces averiguar qué sucede con un ensamble de sistemas en un estado inicial idéntico. Debido al mecanismo CSL el ensamble evolucionará hacia un conjunto de autoestados distintos, cada uno dado por una realización diferente de w . Para describir la evolución del ensamble introducimos el siguiente operador, llamado *matriz de densidad*:

$$\hat{\rho}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P(w)dw \frac{|\Psi, t\rangle\langle\Psi, t|}{\langle\Psi, t|\Psi, t\rangle}. \quad (4.10)$$

De esta ecuación, junto con (4.6), se puede demostrar que la evolución de la matriz de densidad cumple:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] - \frac{\lambda}{2}[\hat{\mathbf{X}}, [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\rho}(t)]]. \quad (4.11)$$

En [Perez et al. \(2006\)](#) se propone aplicar las ideas expuestas de modificar la Mecánica Cuántica al caso cosmológico, dando el primer paso al incorporar a las ecuaciones de Einstein los efectos del colapso autoinducido de forma efectiva, es decir, usando esquemas de colapsos sin usar algún mecanismo particular, si no simplemente estudiando el efecto de qué sucedía ante un salto del estado de vacío inicial simétrico a otro estado sin las simetrías previas. De esta manera, durante el período inflacionario ocurrirían colapsos espontáneos, que llevarían al sistema a un estado cuántico distinto del estado de vacío, y con valores de expectación no nulos para los campos involucrados en el nuevo estado. Esto ocurriría de manera similar a como si estuviera ocurriendo una medición. Dicho nuevo estado cuántico contendrá las inhomogeneidades responsables del apartamiento de una situación perfectamente isótropa y homogénea. En particular, el mecanismo de colapso daría origen a las pequeñas inhomogeneidades y anisotropías primordiales.

El modelo CSL, en particular, ha sido implementado desde entonces en, [Martin et al. \(2012\)](#), [Das et al. \(2013\)](#), [Cañate et al. \(2013\)](#), [León & Bengochea \(2016\)](#), [León et al. \(2018\)](#), [Martin & Vennin \(2020\)](#), [Bengochea et al. \(2020\)](#) [Martin & Vennin \(2021a\)](#), [Martin & Vennin \(2021b\)](#), [Gundhi et al. \(2021\)](#), [León & Bengochea \(2021\)](#) y [Palermo et al. \(2022\)](#), entre otros. En [Bengochea et al. \(2020\)](#) se exploran distintos enfoques y los desafíos que presentan en la aplicación de CSL en el marco inflacionario. En particular se discuten la identificación del operador de colapso, la naturaleza de los parámetros del modelo y dos enfoques a la hora de aplicar Teoría Cuántica de Campos junto con Relatividad General, es decir, maneras distintas de cuantizar las variables de métrica y/o los campos de materia, una de las cuales será nuestra elección en la presente Tesis. Mencionaremos más detalles en el siguiente Capítulo.

En este trabajo de tesis vamos continuar esta exploración al incorporar un mecanismo de colapso particular basado en el modelo CSL donde haremos la extrapolación más simple de este modelo al caso cosmológico. Es decir, consideraremos el modelo CSL donde el operador de colapso es la posición y lo generalizaremos al caso inflacionario donde el campo inflatón será el operador de colapso, manteniendo el carácter de λ_0 como una constante fundamental, universal y que manifiesta el mecanismo de amplificación .

Capítulo 5

El colapso en inflación

En el capítulo anterior mencionamos el problema de la medición en la Mecánica Cuántica y cómo los modelos de colapso objetivo intentan dar una respuesta al mismo. En particular, presentamos el modelo CSL que usaremos en este Capítulo para nuestros cálculos en el marco cosmológico. A continuación introduciremos el marco en el cual trabajaremos con el modelo CSL en cosmología para posteriormente calcular el espectro de potencias para las perturbaciones primordiales y compararlo con el obtenido en el enfoque estándar.

5.1. Gravedad semiclásica

En el presente trabajo, a diferencia de lo que presentamos en el Capítulo 3 para el enfoque estándar, emplearemos el enfoque de *gravedad semiclásica* (SCG por sus siglas en inglés). En este marco se introdujo la propuesta de colapso originalmente (Perez et al., 2006) y las ecuaciones de Einstein semiclásicas resultan:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle. \quad (5.1)$$

De esta forma la cuantización se realiza sólo sobre el tensor de energía-momento y su valor de expectación actúa ahora como fuente de curvatura espacio-temporal. La descripción de la gravedad en términos de la métrica la tomaremos siempre como clásica.

Podemos justificar nuestra elección de usar gravedad semiclásica basándonos en que inflación ocurre en escalas de energías menores que la masa de Planck. De esta forma, el uso de una teoría cuántica de la gravedad completa (a la cual no se tiene acceso actualmente) no resulta indispensable, por lo menos para los fines y alcances de esta Tesis. A su vez esta elección nos resulta ventajosa en dos aspectos:

1. El espacio-tiempo y, por ende, la métrica es siempre clásica. Esto nos evita tratar con una transición cuántico-clásica del espacio-tiempo y no necesitaremos justificar el pasaje de operadores en la métrica ($\hat{\psi}$ y $\hat{\mathcal{R}}$ como vimos en el Capítulo 3) a variables clásicas para la misma. Contar con un espacio-tiempo clásico es importante al incluir el modelo CSL ya que el colapso de la función de onda se considera un proceso físico ocurriendo en el tiempo. De esta manera contar con un modelo que admita la noción completa de espacio-tiempo es ventajoso (Diez-Tejedor & Sudarsky, 2012; Cañate et al., 2018).
2. Nos permite presentar de forma transparente el surgimiento de las perturbaciones primordiales a partir del colapso de la función de onda: el estado inicial del universo (el estado unos pocos e -folds después del inicio de inflación) está descrito con el vacío de Bunch-Davies y el espacio-tiempo FLRW, ambos homogéneos e isotrópos. Luego de esto

el mecanismo CSL actúa, la función de onda colapsa y el estado final no tendrá necesariamente estas simetrías previas. Como el espacio-tiempo luego del colapso se puede considerar descrito por (5.1), el valor de expectación $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ conducirá a una geometría $G_{\mu\nu}$ que tampoco será necesariamente homogénea e isotrópica.

Para una discusión más profunda respecto de las ventajas, desventajas y desafíos de este y otros enfoques de cuantización, el se puede consultar [Bengochea et al. \(2020\)](#).

Como último comentario, el enfoque de gravedad semiclásica provoca una supresión importante en las perturbaciones tensoriales, como se explica en [León \(2011\)](#) y en [León et al. \(2018\)](#)⁽ⁱ⁾. Esto provocaría, entonces, una fuerte supresión para la magnitud del espectro de los modos B de polarización primordiales.

5.2. Ecuaciones CSL en cosmología

Como nos interesa introducir el mecanismo CSL en un contexto cosmológico, usaremos una modificación de la ecuación de evolución (4.6) la cual viene dada por:

$$|\Phi, \eta\rangle = \hat{T} \exp \left\{ \int_{\tau}^{\eta} d\eta \int d^3x \sqrt{|g|} \left[-i\hat{\mathcal{H}} - \frac{1}{4\lambda} (W(\eta, \mathbf{x}) - 2\lambda\hat{C}(\eta, \mathbf{x}))^2 \right] \right\} |\Phi, \tau\rangle. \quad (5.2)$$

En esta expresión Φ representa la función de onda asociada al estado cuántico del inflatón, $d\eta d^3x \sqrt{|g|}$ el 4-volumen asociado a la métrica de fondo (FLRW) y $\tau \rightarrow -\infty$ el tiempo conforme al comienzo de inflación. $\hat{\mathcal{H}}$ representa la densidad hamiltoniana del sistema y λ y \hat{C} el parámetro CSL y el operador de colapso respectivamente sobre los que ampliaremos más adelante. W es un campo escalar caracterizando ruido blanco y cuya generalización para la Regla de Probabilidad (4.9) es:

$$P(W)dW = \langle \Phi, \eta | \Phi, \eta \rangle \prod_{\eta'=\tau}^{\eta-d\eta} \frac{|g|^{1/4} dW(\eta', \mathbf{x})}{\sqrt{2\pi\lambda/d\eta}} \quad (5.3)$$

Como tomamos una descripción en términos del tiempo conforme η entonces podemos ver que $\sqrt{|g|} = a^4$. Asumiendo $\langle \Phi, \tau | \Phi, \tau \rangle = 1$ uno puede obtener, de (5.2) y (5.3) que $\int P(W)dW = 1$.

En este escenario la matriz de densidad será:

$$\hat{\rho} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P(W)dW \frac{|\Phi, \eta\rangle \langle \Phi, \eta|}{\langle \Phi, \eta | \Phi, \eta \rangle}, \quad (5.4)$$

y su correspondiente evolución

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\eta)}{\partial \eta} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}(\eta)] - \frac{\lambda a^4}{2} \int d^3x [\hat{C}(\mathbf{x}, \eta), [\hat{C}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\rho}(\eta)]], \quad (5.5)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano “libre”, es decir, sin el término de colapso.

5.3. El espectro de potencias

En esta sección derivaremos una expresión para el espectro de potencias equivalente pero no exactamente igual a la desarrollada en el enfoque estándar. En el gauge newtoniano obtuvimos las ecuaciones (3.27) y (3.28). Las mismas se pueden combinar usando la definición

⁽ⁱ⁾En dicho artículo, para tratar las perturbaciones tensoriales se trabaja en el gauge newtoniano. De todas formas se puede mostrar que las mismas son cantidades invariantes de gauge ([Mukhanov, 2005](#)).

del parámetro de slow roll ε vista en el Capítulo 2, el modelo de gravedad semiclásica y $z = aM_P\sqrt{2\varepsilon}$ para obtener:

$$\psi + \mathcal{H}^{-1}\psi' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\langle \hat{y} \rangle}{aM_P}. \quad (5.6)$$

Esta ecuación relaciona la perturbación a la curvatura dada por el potencial newtoniano, clásica, con el valor de expectación del operador cuántico $\hat{y} = a\delta\hat{\phi}$, donde $\delta\hat{\phi}$ es la parte inhomogénea del inflatón. Este operador lo relacionaremos más adelante con el mecanismo de colapso. En el estado de vacío inicial $\langle \hat{y} \rangle_{BD} = 0$, por lo que no tendremos perturbaciones a la métrica. Luego de que el colapso ocurre vemos que $\langle \hat{y} \rangle \neq 0$.

De las componentes vistas para el tensor de energía momento del inflatón en el Capítulo 2 uno puede obtener la siguiente expresión:

$$\rho + p = \frac{\phi_0'^2}{a^2} = \frac{2\varepsilon M_P^2 \mathcal{H}^2}{a^2}, \quad (5.7)$$

la cual podemos combinar con la ecuación de Friedmann y la variable \mathcal{R} definida en (3.39) $\mathcal{H}^2 = a^2\rho/3M_P^2$ para obtener

$$\mathcal{R} = \psi \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\varepsilon} \psi'. \quad (5.8)$$

Notemos que, si bien es una cantidad invariante de gauge, a \mathcal{R} la calculamos en el gauge newtoniano. Recordamos, a su vez, que \mathcal{R} representa las perturbaciones a la curvatura pero en el gauge comóvil. Además podemos notar que, hasta ahora, todas nuestras expresiones son exactas. En este momento introducimos la condición de slow-roll $\varepsilon \ll 1$ para obtener la siguiente aproximación a orden más bajo en ε

$$\mathcal{R} \simeq \frac{1}{\varepsilon} (\psi + \mathcal{H}^{-1}\psi') = \frac{\langle \hat{y} \rangle}{aM_P\sqrt{2\varepsilon}}, \quad (5.9)$$

donde hemos usado, además, (5.6).

Como \mathcal{R} representa en el gauge comóvil la perturbación a la curvatura podemos definir un espectro de potencias asociado a esta cantidad el cual será, en el espacio de Fourier:

$$\overline{\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\mathcal{R}_{\mathbf{q}}^*} \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (5.10)$$

En esta expresión la barra encima de $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\mathcal{R}_{\mathbf{q}}^*$ denota un ensamble promediado sobre las posibles realizaciones del campo estocástico $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$. En nuestro modelo de inflación + CSL estas realizaciones estarán dadas por las que nos brindará el proceso estocástico del mecanismo de colapso, que serán realizaciones del término de ruido W .

Podemos usar (5.9) para obtener

$$\overline{\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\mathcal{R}_{\mathbf{q}}^*} = \frac{1}{2\varepsilon M_P^2 a^2} \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{y}_{\mathbf{q}} \rangle^*}, \quad (5.11)$$

y finalmente, usando esta expresión, nuestro espectro de potencias escalar será:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = \frac{k^3}{4\pi^2 \varepsilon M_P^2 a^2} \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{y}_{\mathbf{q}} \rangle^*}. \quad (5.12)$$

5.4. El mecanismo de colapso

5.4.1. El parámetro λ

El parámetro λ es la tasa de colapsos. En el modelo original GRW y en nuestro modelo CSL hay una tasa efectiva de colapso que depende de la masa de la partícula y desencadena el mecanismo de amplificación requerido en la sección 4.3. Al involucrar más partículas su tasa de colapso se fortalece. Por su parte, [Diosi \(1984, 1987, 1989\)](#) y [Penrose \(1996\)](#) discuten que el mecanismo de colapso debe ser un proceso dinámico ligado a la interacción gravitacional. En esa línea [Bengochea et al. \(2020\)](#) y [León & Bengochea \(2021\)](#) consideran que λ debe estar relacionado con la curvatura espacio-temporal, conduciendo a que en experimentos de laboratorio donde se puede tomar el espacio-tiempo como plano se pueda tomar λ_0 constante.

Nosotros, en la presente Tesis, proponemos generalizar el modelo CSL de la sección 4.4 para el contexto cosmológico. Recordemos que en dicho modelo teníamos $\lambda = \lambda_0 m / (r_C^2 m_0)$. En el caso cosmológico y, en particular para el presente modelo, proponemos la siguiente expresión para el parámetro de colapso, siendo la más simple que podemos construir considerando a la curvatura espacio-temporal:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{R}{M_P}, \quad (5.13)$$

donde R es el escalar de curvatura de Ricci y la masa de Planck M_P toma el papel de masa de referencia. Notar que en el caso cosmológico no estamos considerando r_C^2 . Este es un punto que requiere de un análisis detallado y que dejaremos para trabajo futuro. Además, para el caso de inflación $R \simeq 12H_I^2$, donde H_I es el parámetro de Hubble durante inflación como lo definimos en el Capítulo 2. De esta forma tendremos, durante inflación:

$$\lambda \simeq \lambda_0 \frac{H_I^2}{M_P}. \quad (5.14)$$

Esta elección es novedosa ya que en trabajos anteriores la parametrización del parámetro siempre resultó en una función $\lambda(k)$ como, por ejemplo, en [Palermo et al. \(2022\)](#) donde aplicamos una parametrización de λ como funciones lineales de k , es decir, $\lambda(k)$ se ajustaba de tal manera que la predicción final del espectro primordial fuera consistente con las observaciones. Veremos así cómo resulta nuestro espectro de potencias al considerar la generalización del parámetro λ que propusimos en los párrafos anteriores.

5.4.2. El operador de colapso

Discutiremos ahora nuestra elección para el operador \hat{C} generador del colapso en la ecuación (5.2). Nuestro criterio será generalizar el modelo más simple de CSL donde $\hat{\mathbf{X}}$ es el operador de colapso. En particular, el operador \hat{C} aplicado a nuestro caso de inflación será:

$$\hat{C} \equiv \delta\hat{\phi}, \quad (5.15)$$

es decir, la parte inhomogénea del inflatón, el cual es la variable de campo. De la ecuación (5.6) podemos ver que el operador de colapso está relacionado con el operador \hat{y} pues $\delta\hat{\phi} = \hat{y}/a$. De esta forma, podemos reescribir \hat{C} :

$$\hat{C}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\hat{y}(\eta, \mathbf{x})}{a(\eta)}, \quad (5.16)$$

donde el valor de expectación de \hat{y} actúa como fuente de la perturbación a la curvatura, como se ve en (5.6) y (5.9).

5.5. Cálculo del espectro de potencias primordial

El espectro de potencias se expresa en el espacio de Fourier, por lo que deberemos transformar nuestras ecuaciones a dicho espacio. El Hamiltoniano tomará la forma:

$$\int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3k a^4 \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{R}^{3+}} \left[\hat{p}_{\mathbf{k}}^* \hat{p}_{\mathbf{k}} + \hat{y}_{\mathbf{k}}^* \hat{y}_{\mathbf{k}} \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \right]. \quad (5.17)$$

Como el proceso de cuantización lo realizaremos en el esquema de Schrödinger nos es conveniente trabajar con cantidades reales para asociarlas con operadores hermíticos. Para lograrlo separamos las variables en sus partes reales e imaginarias. En el espacio de Fourier esto está dado por:

$$\hat{y}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{y}_{\mathbf{k}}^R + i\hat{y}_{\mathbf{k}}^I), \quad \hat{p}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_{\mathbf{k}}^R + i\hat{p}_{\mathbf{k}}^I). \quad (5.18)$$

El conmutador entre ambas será:

$$[\hat{y}_{\mathbf{k}}^s, \hat{p}_{\mathbf{q}}^{s'}] = i\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})\delta_{ss'}, \quad s, s' = R, I. \quad (5.19)$$

Se puede separar entonces al hamiltoniano libre como

$$\int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3k a^4 \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{R}^{3+}} d^3k (\hat{H}_{\mathbf{k}}^R + \hat{H}_{\mathbf{k}}^I), \quad (5.20)$$

con los términos del integrando definidos así:

$$\hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I} \equiv \frac{(\hat{p}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{2} + \frac{(\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{2} \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right). \quad (5.21)$$

El estado cuántico del sistema está descrito por una función de onda $\Phi[y(\mathbf{x}, \eta)]$. En el espacio de Fourier, considerando el hamiltoniano dado por (5.21), la misma se puede factorizar en modos como:

$$\Phi[y(\mathbf{x}, \eta)] = \prod_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}(y_{\mathbf{k}}^R, y_{\mathbf{k}}^I) = \prod_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}^R(y_{\mathbf{k}}^R) \Phi_{\mathbf{k}}^I(y_{\mathbf{k}}^I). \quad (5.22)$$

En la representación de campos los operadores tomarán la forma:

$$\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I} = y_{\mathbf{k}}^{R,I} \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \quad \hat{p}_{\mathbf{k}}^{R,I} \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I} = -i \frac{\partial \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}}{\partial y_{\mathbf{k}}^{R,I}}. \quad (5.23)$$

La descomposición mostrada en (5.22) junto con (5.2) muestran que el estado cuántico de cada modo evoluciona de forma independiente. De esta forma, en el espacio de Fourier la evolución CSL del estado cuántico de cada modo, correspondiente a cada función de onda $\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}(y_{\mathbf{k}}^{R,I})$, será

$$|\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta\rangle = \hat{\mathcal{T}} \exp \left\{ \int_{\tau}^{\eta} d\eta \left[-i\hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I} - \frac{a^4}{4\lambda} \left(W_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta) - 2\lambda \hat{C}_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta) \right)^2 \right] \right\} |\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \tau\rangle \quad (5.24)$$

donde nuestro operador de colapso en el espacio de Fourier será

$$\hat{C}_{\mathbf{k}}^{R,I} = \frac{\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I}}{a}. \quad (5.25)$$

La regla de probabilidad, por su parte, estará dada por

$$P(W_{\mathbf{k}}^{R,I}) dW_{\mathbf{k}}^{R,I} = \langle \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta | \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta \rangle \prod_{\eta'=\tau}^{\eta-d\eta} \frac{a^2 dW_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta')}{\sqrt{2\pi\lambda/d\eta}}. \quad (5.26)$$

5. El colapso en inflación

Asumiremos la misma condición para el estado inicial de vacío estándar del Capítulo 3, es decir, que al comienzo de inflación (en nuestro caso a tiempo τ) el mismo se trata del vacío de Bunch-Davies. Este estado inicial es, además, gaussiano. Esta propiedad junto con el hecho de que la ecuación CSL de evolución (5.24) es cuadrática en las variables canónicas $\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I}, \hat{p}_{\mathbf{k}}^{R,I}$ nos permite escribir al funcional de onda en el espacio de $y_{\mathbf{k}}$ como:

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta, y_{\mathbf{k}}^{R,I}) = \exp[-A_k(\eta)(y_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 + B_k(\eta)y_{\mathbf{k}}^{R,I} + C_k(\eta)], \quad (5.27)$$

la cual evolucionará a partir de las condiciones iniciales dadas por el vacío BD (Cañate et al., 2013):

$$A_k(\tau) = \frac{k}{2}, \quad B_k(\tau) = C_k(\tau) = 0. \quad (5.28)$$

De la ecuación (5.12) vemos que nuestro objetivo para calcular el espectro de potencias es obtener la cantidad $\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{y}_{\mathbf{q}} \rangle^*}$, con estos valores de expectación dados por la ecuación de evolución (5.24). A su vez los podemos separar en partes real e imaginaria:

$$\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{y}_{\mathbf{q}} \rangle^*} = \frac{1}{2} \left(\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^R \rangle^2} + \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^I \rangle^2} \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (5.29)$$

Los cálculos de las partes reales e imaginarias en esta expresión son iguales y se obtiene $\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^R \rangle^2} = \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^I \rangle^2} \equiv \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle^2}$, por lo que para simplificar notación omitiremos a partir de ahora los superíndices R, I en las expresiones.

Usando la función de onda gaussiana (5.27) y las ecuaciones CSL (5.24) y (5.26) obtenemos (Cañate et al., 2013):

$$\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle^2} = \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^2 \rangle} - \frac{1}{4\text{Re}[A_k(\eta)]}, \quad (5.30)$$

por lo que para calcular nuestro espectro de potencias primordial deberemos calcular el valor de esos dos términos.

5.5.1. Cálculo del primer término

De la misma manera que mostramos en las secciones 4.4 y 5.2 se pueden usar las ecuaciones (5.24) (5.27) para obtener la ecuación de evolución para la matriz de densidad en el espacio de Fourier:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(\eta)}{\partial \eta} = -i[\hat{H}_{\mathbf{k}}, \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(\eta)] - \frac{\lambda a^4}{2} [\hat{C}_{\mathbf{k}}(\eta), [\hat{C}_{\mathbf{k}}(\eta), \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(\eta)]]. \quad (5.31)$$

De esta última ecuación se puede obtener la ecuación de evolución del promedio de ensamble de un operador cualquiera $\hat{O}_{\mathbf{k}}$. La misma está dada por:

$$\frac{\partial \overline{\langle \hat{O}_{\mathbf{k}} \rangle}}{\partial \eta} = -i\overline{\langle [\hat{O}_{\mathbf{k}}, \hat{H}_{\mathbf{k}}] \rangle} - \frac{\lambda a^4}{2} \overline{\langle [\hat{C}_{\mathbf{k}}, [\hat{C}_{\mathbf{k}}, \hat{O}_{\mathbf{k}}]] \rangle}. \quad (5.32)$$

Ahora definimos las siguientes cantidades:

$$Q \equiv \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^2 \rangle}, \quad R \equiv \overline{\langle \hat{p}_{\mathbf{k}}^2 \rangle}, \quad T \equiv \overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}} + \hat{p}_{\mathbf{k}} \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle}. \quad (5.33)$$

Nos interesa obtener entonces una expresión para Q . Aplicando estas tres cantidades en la ecuación (5.32) obtenemos un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas para la evolución de las mismas:

$$Q' = T, \quad (5.34)$$

$$R' = -\omega_k T + \lambda a^2, \quad (5.35)$$

$$T' = 2R - \omega_k Q, \quad (5.36)$$

con $\omega_k \equiv k^2 - a''/a$. Tenemos así un sistema inhomogéneo de tres ecuaciones diferenciales de primer orden lineal. Sabemos que en un sistema cualquiera de ecuaciones diferenciales ordinarias inhomogéneo lineal de primer orden $\mathbf{u}'(t) = \mathbb{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{q}(t)$ la solución puede escribirse como (Naón et al., 2014)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_h(t) + \mathbf{u}_{pi}(t), \quad (5.37)$$

donde $\mathbf{u}_h(t)$ representa la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{u}' = \mathbb{A}\mathbf{u}_h$ y $\mathbf{u}_{pi}(t)$ es una solución particular del sistema inhomogéneo. En nuestro caso particular podemos identificar

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} Q \\ R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_h \\ R_h \\ T_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{pi} \\ R_{pi} \\ T_{pi} \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

donde el sistema homogéneo es

$$Q'_h = T_h \quad (5.39)$$

$$R'_h = -\omega_k T_h \quad (5.40)$$

$$T'_h = 2R_h - \omega_k Q_h. \quad (5.41)$$

Procedemos entonces a resolver primero este caso. Luego encontraremos una solución particular para el caso inhomogéneo y las combinaremos.

Para comenzar derivamos (5.39) y reemplazamos en (5.41) para obtener

$$Q''_h = 2R_h - 2\omega_k Q_h. \quad (5.42)$$

Al mismo tiempo, reemplazando (5.39) en (5.40) obtenemos

$$R'_h = -\omega_k Q'_h. \quad (5.43)$$

Derivamos ahora (5.42):

$$Q'''_h = 2R'_h - 2\omega'_k Q_h - 2\omega_k Q'_h, \quad (5.44)$$

y, finalmente reemplazamos (5.43) en esta expresión para obtener una sola ecuación diferencial de tercer orden:

$$Q'''_h = -4\omega_k Q'_h - 2\omega'_k Q_h. \quad (5.45)$$

Para resolver esta ecuación proponemos el siguiente *ansatz*:

$$Y \equiv c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_1 y_2, \quad (5.46)$$

donde los factores c_1, c_2 y c_3 son constantes, $y_2 = y_1^*$ y ambas funciones son soluciones de $y'' + \omega_k y = 0$. Probemos si nuestra propuesta es solución de (5.45). Para esto derivamos (5.46) tres veces:

$$Y' = 2c_1 y_1 y'_1 + 2c_2 y_2 y'_2 + c_3 (y'_1 y_2 + y_1 y'_2), \quad (5.47)$$

$$Y'' = 2c_1 (y_1'^2 + y_1 y_1'') + 2c_2 (y_2'^2 + y_2 y_2'') + c_3 (y_1'' y_2 + 2y_1' y_2' + y_1 y_2''), \quad (5.48)$$

$$Y''' = 2c_1 (3y_1' y_1'' + y_1 y_1''') + 2c_2 (3y_2' y_2'' + y_2 y_2''') + c_3 (y_1''' y_2 + 3y_1'' y_2' + 3y_1' y_2'' + y_1 y_2'''). \quad (5.49)$$

A su vez sabemos, por definición de y_1 y y_2 que

$$y_{1,2}'' = -\omega_k y_{1,2}, \quad (5.50)$$

por lo que podemos calcular

$$y_{1,2}''' = -\omega'_k y_{1,2} - \omega_k y_{1,2}'. \quad (5.51)$$

5. El colapso en inflación

Reemplazamos estas dos expresiones en (5.49):

$$Y''' = 2c_1(-4\omega_k y_1' y_1 - \omega_k' y_1^2) + 2c_2(-4\omega_k y_2' y_2 - \omega_k' y_2^2) + c_3(-2\omega_k' y_1 y_2 - 4\omega_k y_1' y_2 - 4\omega_k y_1 y_2'), \quad (5.52)$$

y reacomodamos términos

$$Y''' = -4\omega_k[2c_1 y_1' y_1 + 2c_2 y_2' y_2 + c_3(y_1' y_2 + y_1 y_2')] - 2\omega_k'(c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_1 y_2), \quad (5.53)$$

$$Y''' = -4\omega_k Y' - 2\omega_k' Y. \quad (5.54)$$

Llegamos de esta manera a la misma ecuación que (5.45), por lo que nuestro *ansatz* es una solución. La solución de las otras dos ecuaciones se encuentra de forma inmediata. Comparando (5.39) con (5.47) se obtiene T_h y, reemplazando (5.48) en (5.41), se obtiene R_h . La solución general del sistema homogéneo es, de esta manera:

$$Q_h = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_1 y_2, \quad (5.55)$$

$$R_h = c_1 y_1'^2 + c_2 y_2'^2 + c_3 y_1' y_2', \quad (5.56)$$

$$T_h = 2c_1 y_1 y_1' + 2c_2 y_2 y_2' + c_3(y_1' y_2 + y_1 y_2'), \quad (5.57)$$

con las expresiones explícitas para y_1 e y_2 siendo:

$$y_1 = \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\eta}\right), \quad (5.58)$$

$$y_2 = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right). \quad (5.59)$$

Teniendo nuestra solución para el problema homogéneo planteamos ahora el problema inhomogéneo. Hacemos para (5.34),(5.35),(5.36) el mismo procedimiento descrito para el sistema (5.39),(5.40),(5.41), obteniendo así la siguiente expresión:

$$Q''' + 4\omega_k Q' + 2\omega_k' Q - 2\lambda a^2 = 0, \quad (5.60)$$

a partir de la cual nos interesa encontrar el término Q_{pi} de su solución general. Esta ecuación puede resolverse mediante el método de la función de Green. Nosotros, por simplicidad, nos valimos del software Wolfram Mathematica. De esa manera obtenemos

$$Q_{pi} = \frac{\lambda}{3H_I^2 k^3 \eta^2} \left\{ -2k|\eta| + \text{Ci}(2k|\eta|)[2k|\eta| \cos(2k\eta) + (-1 + k^2 \eta^2) \sin(2k|\eta|)] \right. \\ \left. + [(1 - k^2 \eta^2) \cos(2k\eta) + 2k|\eta| \sin(2k|\eta|)] \text{Si}(2k|\eta|) \right\}, \quad (5.61)$$

siendo Ci y Si las funciones coseno integral y seno integral respectivamente, definidas como:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx, \\ \text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos x - 1}{x} dx, \quad (5.62)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

Las soluciones R_{pi} y T_{pi} se construyen a partir de Q_{pi} como:

$$T_{pi} = Q_{pi}' \\ R_{pi} = \frac{1}{2}(Q_{pi}'' + 2\omega_k Q_{pi}) \quad (5.63)$$

Debemos calcular las constantes c_1 , c_2 y c_3 . Para ello escribiremos (5.38) evaluándola en el límite $k\eta = k\tau \rightarrow -\infty$. Primeramente estimaremos Q_{pi} , R_{pi} y T_{pi} en dicho régimen asintótico:

$$\begin{aligned} Q_{pi}(k\tau) &= \frac{-\lambda\pi \cos(2k\tau)}{6H_I^2 k}, \\ R_{pi}(k\tau) &= \frac{\lambda\pi(2 + k^2\tau^2) \cos(2k\tau)}{6H_I^2 k^2 \tau^2}, \\ T_{pi}(k\tau) &= \frac{\lambda\pi \sin(2k|\tau|)}{3H_I^2}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

donde, para simplificar Q_{pi} en primer lugar, hemos usado los siguientes valores límites para el coseno y el seno integral:

$$\begin{aligned} \text{Ci}(2k|\tau|) &\rightarrow 0, \\ \text{Si}(2k|\tau|) &\rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Por su parte, las funciones y_1 e y_2 se simplifican a:

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}}, \\ y_2(\tau) &= \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Para estimar las constantes usaremos además, que conocemos que los valores de Q, R y T en el régimen asintótico $\tau \rightarrow -\infty$, es decir, al inicio de inflación, están dados por la condición de Bunch-Davies $Q(\tau) = 1/2k$, $R(\tau) = k/2$, $T(\tau) = 0$. Nuestro sistema de ecuaciones a resolver es, entonces:

$$\begin{aligned} c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_1 y_2 + Q_{pi} &= \frac{1}{2k}, \\ c_1 y_1'^2 + c_2 y_2'^2 + c_3 y_1' y_2' + R_{pi} &= \frac{k}{2}, \\ 2c_1 y_1 y_1' + 2c_2 y_2 y_2' + c_3 (y_1' y_2 + y_1 y_2') + T_{pi} &= 0. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Tenemos simplemente un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, para el cual las soluciones son:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda\pi e^{-2ik\tau} [\cos(2k\tau) + k^2\tau^2 \cos(2k\tau) + ik^2\tau^2 \sin(2k\tau)]}{6H_I^2 k^2 \tau^2} \\ &= \frac{\lambda\pi}{6H_I^2} \left(\frac{e^{-2ik\tau} \cos(2k\tau)}{k^2\tau^2} + 1 \right), \\ c_2 &= \frac{-i\lambda\pi e^{2ik\tau} [i \cos(2k\tau) + ik^2\tau^2 \cos(2k\tau) + k^2\tau^2 \sin(2k\tau)]}{6H_I^2 k^2 \tau^2} \\ &= \frac{\lambda\pi}{6H_I^2} \left(\frac{e^{2ik\tau} \cos(2k\tau)}{k^2\tau^2} + 1 \right) = c_1^*, \\ c_3 &= -\frac{-3H_I^2 k^2 \tau^2 + \lambda\pi \cos(2k\tau)}{3H_I^2 k^2 \tau^2} = 1 - \frac{\lambda\pi \cos(2k\tau)}{3H_I^2 k^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Como necesitamos el espectro de potencias al final de inflación, lo que equivale a decir que consideraremos los modos cuya longitud de onda física sea mucho mayor que el radio de

5. El colapso en inflación

Hubble durante inflación, entonces necesitamos evaluar Q en el régimen $k\eta \rightarrow 0$. Haciendo el cambio de variable $x = k\eta$ efectuamos un desarrollo en serie alrededor de $x = 0$ para la solución particular:

$$Q_{pi}(x) = \frac{-2\lambda(-7 + 3\gamma + \ln 8 + 3 \ln x)x}{27H_I^2 k} + \mathcal{O}(x^3), \quad (5.69)$$

y, procediendo de manera similar, encontramos el desarrollo para la solución homogénea:

$$\begin{aligned} Q_H(x) &= -\frac{c_1 + c_2 - c_3}{2kx^2} - \frac{c_1 + c_2 - c_3}{2k} - \frac{i(c_1 - c_2)x}{3k} + \mathcal{O}(x^3) \\ &= -\left(\frac{c_1 + c_2 - c_3}{2k}\right)\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) - \frac{i(c_1 - c_2)x}{3k} + \mathcal{O}(x^3), \end{aligned} \quad (5.70)$$

donde los coeficientes resultan:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - c_3 = c_1 + c_1^* - c_3 &= \frac{\lambda\pi \cos(2k\tau)(\cos(2k\tau) + 1)}{3H_I^2 k^2 \tau^2} + \frac{\lambda\pi}{3H_I^2} - 1, \\ i(c_1 - c_2) &= \frac{\lambda\pi \sin(2k\tau) \cos(2k\tau)}{3H_I^2 k^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

De esta manera, obtenemos $Q_x = Q_H(x) + Q_{pi}(x)$:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{-1}{2k} \left(\frac{\lambda\pi \cos(2k\tau)(\cos(2k\tau) + 1)}{3H_I^2 k^2 \tau^2} + \frac{\lambda\pi}{3H_I^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \\ &\quad - \frac{\lambda\pi \sin(2k\tau) \cos(2k\tau)x}{9H_I^2 k^3 \tau^2} - \frac{2\lambda(-7 + 3\gamma + \ln 8 + 3 \ln x)x}{27H_I^2 k} + \mathcal{O}(x^3). \end{aligned} \quad (5.72)$$

De todos estos términos, como estamos considerando el régimen $x \rightarrow 0$ y, además, $|\tau| \gg 1$, por lo que los únicos términos que sobreviven, es decir, no se suprimen por τ^{-2} ni por x son:

$$Q_{k\eta \rightarrow 0} \approx \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{\lambda\pi}{3H_I^2} \right) \frac{1}{k^2 \eta^2} = \frac{3H_I^2 k^{-1} - \lambda\pi k^{-1}}{6H_I^2 k^2 \eta^2}. \quad (5.73)$$

5.5.2. Cálculo del segundo término

Habiendo obtenido el primer término de (5.30) nos enfocaremos en el cálculo del segundo. Comenzamos tomando la derivada temporal de (5.24) obteniendo:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} |\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta\rangle = (-i\hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I} + \hat{H}_{\mathbf{k} \text{ CSL}}^{R,I}) |\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta\rangle, \quad (5.74)$$

$$\hat{H}_{\mathbf{k} \text{ CSL}}^{R,I} \equiv -\frac{a^4}{\lambda} (W_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta))^2 + a^4 W_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta) \hat{C}_{\mathbf{k}}^{R,I} - \lambda a^4 (\hat{C}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2. \quad (5.75)$$

Aplicamos entonces el operador hamiltoniano a la función de onda, con la definición de la parte libre dada por (5.21):

$$\begin{aligned} (-i\hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I} + \hat{H}_{\mathbf{k} \text{ CSL}}^{R,I}) |\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta\rangle &= \left[-i \left(\frac{(\hat{p}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{2} + \omega_{\mathbf{k}} \frac{(\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - a^4 (W_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta))^2 + a^3 W_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta) \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} - \lambda a^2 (\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 \right] |\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta\rangle. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Reemplazando la expresión para $\hat{p}_{\mathbf{k}}^{R,I}$ de la ecuación (5.23):

$$\begin{aligned} (-i\hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I} + \hat{H}_{\mathbf{k}}^{R,I} \text{ CSL}) | \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta \rangle = & \left[-i \left(\frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \omega_k \frac{(\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{2} \right) \right. \\ & \left. - a^4 (W_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta))^2 + a^3 W_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta) \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} - \lambda a^2 (\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 \right] | \Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \eta \rangle. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Ahora derivamos la función de onda, $\Phi_{\mathbf{k}}^{R,I}$ escrita en (5.27):

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{k}}}{\partial \eta} = (-A'_k y^2 + B'_k y + C'_k) \Phi_{\mathbf{k}}, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{k}}}{\partial y} = (-2A_k y + B_k) \Phi_{\mathbf{k}}, \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{k}}}{\partial y^2} = -2A_k \Phi_{\mathbf{k}} + (-2A_k y + B_k) \frac{\partial \Phi_{\mathbf{k}}}{\partial y} = (4A_k^2 y^2 - 4A_k B_k y + B_k^2 - 2A_k) \Phi_{\mathbf{k}}, \quad (5.80)$$

donde hemos vuelto simplificar las notaciones. De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} (-A'_k y^2 + B'_k y + C'_k) \Phi_{\mathbf{k}} = & \left\{ \left[-i \frac{-(4A_k^2 y^2 - 4A_k B_k y + B_k^2 - 2A_k)}{2} + \frac{\omega_k}{2} y^2 \right] - \right. \\ & \left. - a^4 W^2 + a^3 W y - \lambda a^2 y^2 \right\} \Phi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

De esta expresión observamos que los términos que involucran y^0 , y^1 e y^2 están desacoplados, es decir, las ecuaciones de evolución asociadas a esos términos estarán desacopladas. Esto nos permite, para obtener una ecuación para A'_k , quedarnos solamente con los términos de y^2 . La ecuación para A_k resultará, entonces:

$$A'_k = i \frac{\omega_k}{2} - 2i A_k^2 + \lambda a^2. \quad (5.82)$$

Efectuamos el siguiente cambio de variable:

$$A_k = \frac{f'_k}{2i f_k}, \quad (5.83)$$

donde f_k es solución de

$$f_k'' + (\omega_k - 2i\lambda a^2) f_k = 0. \quad (5.84)$$

Sustituyendo explícitamente la expresión para $\omega_k(\eta)$ y $a(\eta)$ notamos que nos encontramos con una ecuación diferencial de Bessel, cuya solución general es:

$$f_k = \tilde{C}_1 \sqrt{-\eta} J_\nu(-k\eta) + \tilde{C}_2 \sqrt{-\eta} Y_\nu(-k\eta), \quad (5.85)$$

siendo J_ν y Y_ν las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente y

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{9 + \frac{8i\lambda}{H_I^2}}. \quad (5.86)$$

Notamos que, al ser $\nu \notin \mathbb{Z}$, entonces

$$Y_\nu = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu - J_{-\nu}}{\sin(\nu\pi)} \quad (5.87)$$

5. El colapso en inflación

es una combinación lineal de J_ν y $J_{-\nu}$, por lo que reescribimos la función f_k como:

$$f_k = C_1 \sqrt{-\eta} J_\nu(-k\eta) + C_2 \sqrt{-\eta} J_{-\nu}(-k\eta). \quad (5.88)$$

Teniendo nuestra expresión para f_k la reemplazamos en (5.83):

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{C_1 \left(\frac{-1}{2\sqrt{-\eta}} J_\nu(-k\eta) - k\sqrt{-\eta} J'_\nu(-k\eta) \right) + C_2 \left(\frac{-1}{2\sqrt{-\eta}} J_{-\nu}(-k\eta) - k\sqrt{-\eta} J'_{-\nu}(-k\eta) \right)}{2i(C_1 \sqrt{-\eta} J_\nu(-k\eta) + C_2 \sqrt{-\eta} J_{-\nu}(-k\eta))} \\ &= \frac{-C_1 \left(\frac{-1}{2\eta} J_\nu(-k\eta) + k J'_\nu(-k\eta) \right) - C_2 \left(\frac{-1}{2\eta} J_{-\nu}(-k\eta) + k J'_{-\nu}(-k\eta) \right)}{2i(C_1 J_\nu(-k\eta) + C_2 J_{-\nu}(-k\eta))} \\ &= \frac{\frac{1}{2\eta} (C_1 J_\nu(-k\eta) + C_2 J_{-\nu}(-k\eta)) - k (C_1 J'_\nu(-k\eta) + C_2 J'_{-\nu}(-k\eta))}{2i(C_1 J_\nu(-k\eta) + C_2 J_{-\nu}(-k\eta))} \\ &= \frac{1}{4i\eta} - \frac{k}{2i} \frac{(C_1 J'_{-\nu}(-k\eta) + C_2 J'_{-\nu}(-k\eta))}{C_1 J_\nu(-k\eta) + C_2 J_{-\nu}(-k\eta)}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Nuevamente debemos estimar las constantes C_1 y C_2 . Nuevamente trabajaremos en el límite $k\eta = k\tau \rightarrow -\infty$, ya que conocemos el valor de A_k en ese régimen por la condición de Bunch-Davies. El primer término se hace despreciable:

$$A_k(\tau) = \frac{-k}{2i} \frac{(C_1 J'_{-\nu}(-k\tau) + C_2 J'_{-\nu}(-k\tau))}{C_1 J_\nu(-k\tau) + C_2 J_{-\nu}(-k\tau)}. \quad (5.90)$$

En este momento efectuamos nuevamente el cambio de variables $-k\tau = x$ y recordaremos estas dos propiedades de las funciones de Bessel:

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)), \quad (5.91)$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x). \quad (5.92)$$

Usando estas propiedades obtenemos:

$$\begin{aligned} A_k(\tau) &= \frac{-k}{2i} \frac{C_1 \left(\frac{1}{2} (J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)) \right) + C_2 \left(\frac{1}{2} (J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x)) \right)}{C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)} \\ &= \frac{-k}{2i} \frac{\frac{C_1}{2} \left[J_{\nu-1}(x) - \left(\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \right) \right] + \frac{C_2}{2} \left[J_{-\nu-1}(x) - \left(\frac{2\nu}{x} J_{-\nu}(x) - J_{-\nu-1}(x) \right) \right]}{C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)} \\ &= \frac{-k}{2i} \frac{C_1 (J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x)) + C_2 (J_{-\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{-\nu}(x))}{C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Podemos sacar ν/x como factor común y obtener así un término para simplificar con el denominador

$$\begin{aligned} A_k(\tau) &= \frac{-k}{2i} \frac{C_1 J_{\nu-1}(x) + C_2 J_{-\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} (C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x))}{C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)} \\ &= \frac{-k}{2i} \left[\frac{C_1 J_{\nu-1}(x) + C_2 J_{-\nu-1}(x)}{C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)} - \frac{\nu}{x} \right]. \end{aligned} \quad (5.94)$$

En régimen que estamos trabajando este segundo término se hace despreciable y obtenemos así:

$$A_k(\tau) = \frac{-k}{2i} \left[\frac{C_1 J_{\nu-1}(x) + C_2 J_{-\nu-1}(x)}{C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)} \right]. \quad (5.95)$$

En este punto tomaremos expresiones asintóticas para las funciones de Bessel (Arfken & Weber, 2005):

$$\begin{aligned}
 J_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 J_{\nu-1}(x) &\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 J_{-\nu}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 J_{-\nu}(x) &\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

Reemplazando en (5.95):

$$A_k(\tau) = \frac{k}{2i} \left[\frac{\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tilde{C} \sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tilde{C} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right], \tag{5.97}$$

donde hemos hecho el reemplazo $\tilde{C} \equiv C_2/C_1$. Recordando que $A_k(\tau) = k/2$:

$$1 = -i \left[\frac{\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tilde{C} \sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tilde{C} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right], \tag{5.98}$$

y, reacomodando los términos

$$\tilde{C} \left[\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] = -\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{5.99}$$

Esto nos conduce a:

$$\tilde{C} \exp\left[i\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = -\exp\left[i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{5.100}$$

Por lo que, finalmente:

$$\tilde{C} = -e^{i\nu\pi}. \tag{5.101}$$

De esta forma obtenemos la expresión completa para A_k :

$$A_k = \frac{1}{4i\eta} - \frac{k}{2i} \frac{(J'_{-\nu}(-k\eta) + \tilde{C} J'_{-\nu}(-k\eta))}{J_\nu(-k\eta) + \tilde{C} J_{-\nu}(-k\eta)} \tag{5.102}$$

Al mismo tiempo podemos reemplazar el segundo término con lo obtenido en (5.94), ya que dicha expresión es válida para todo tiempo:

$$A_k = \frac{1}{4i\eta} - \frac{k}{2i} \left[\frac{J_{\nu-1}(-k\eta) - e^{i\nu\pi} J_{-\nu-1}(-k\eta)}{J_\nu(-k\eta) - e^{i\nu\pi} J_{-\nu}(-k\eta)} - \frac{\nu}{-k\eta} \right]. \tag{5.103}$$

Definiendo

$$Z(-k\eta) \equiv \frac{J_{\nu-1}(-k\eta) - e^{i\nu\pi} J_{-\nu-1}(-k\eta)}{J_\nu(-k\eta) - e^{i\nu\pi} J_{-\nu}(-k\eta)} \tag{5.104}$$

reescribimos

$$A_k = \frac{1}{4i\eta} - \frac{k}{2i} \left(Z(-k\eta) + \frac{\nu}{k\eta} \right). \tag{5.105}$$

5. El colapso en inflación

Para nuestro cálculo del espectro de potencias (5.30) recordemos que lo que necesitamos es una expresión para el límite de la parte real de A_k en el límite $k\eta \rightarrow 0$. Para calcularlo lo primero que haremos será un desarrollo en serie de $Z(k\eta)$ alrededor de $k\eta = 0$:

$$Z(-k\eta) \approx \frac{\frac{-A}{\eta} - \mathcal{B}\eta + |\eta|^{2\nu} \left(\frac{-C}{\eta} - \mathcal{D}\eta \right)}{\mathcal{E} + |\eta|^{2\nu} \mathcal{F}}, \quad (5.106)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{-2^{\nu+1} e^{i\nu\pi} k^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}, \\ \mathcal{B} &= \frac{-2^\nu e^{i\nu\pi} k^{1-\nu}}{2\nu\Gamma(-\nu)}, \\ \mathcal{C} &= \frac{2^{1-\nu} k^{-\nu}}{\Gamma(\nu)}, \\ \mathcal{D} &= \frac{-2^{-\nu} k^{\nu+1}}{2\nu\Gamma(\nu)}, \\ \mathcal{E} &= \frac{-2^\nu e^{i\nu\pi} k^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \\ \mathcal{F} &= \frac{2^{-\nu} k^\nu}{\Gamma(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (5.107)$$

siendo $\Gamma(x)$ la función Gamma de Euler.

Al estar multiplicada por un número imaginario puro, para encontrar la parte real de A_k nos interesa la parte imaginaria de $Z(k\eta)$. Reescribimos primero $\eta^{2\nu}$ de la siguiente manera:

$$|\eta|^{2\nu} = e^{\ln(|\eta|)2\nu} = e^{2\nu_R \ln(|\eta|)} e^{2i\nu_I \ln(|\eta|)} = \mathcal{N} |\eta|^{2\nu_R}, \quad (5.108)$$

con $\mathcal{N} \equiv e^{2i\nu_I \ln(|\eta|)}$ y $|\mathcal{N}| = 1$. Podemos también multiplicar y dividir a $Z(-k\eta)$ por el conjugado de su denominador y así obtener:

$$\begin{aligned} Z(k\eta) &= \frac{\frac{-A}{\eta} - \mathcal{B}\eta + |\eta|^{2\nu} \left(\frac{-C}{\eta} - \mathcal{D}\eta \right)}{\mathcal{E} + |\eta|^{2\nu} \mathcal{F}} \frac{(\mathcal{E}^* + (\eta^{2\nu})^* \mathcal{F}^*)}{|\mathcal{E} + \eta^{2\nu} \mathcal{F}|^2}, \\ &= \left[\frac{-\mathcal{A}\mathcal{E}^*}{\eta} - \mathcal{B}\mathcal{E}^* \eta + |\eta|^{2\nu} \mathcal{E}^* \left(\frac{-C}{\eta} - \mathcal{D}\eta \right) - \frac{\mathcal{A}\eta^{2\nu*} \mathcal{F}^*}{\eta} - \mathcal{B}\eta^{2\nu*} \mathcal{F}^* \eta + \right. \\ &\quad \left. + |\eta|^{2\nu} |\mathcal{F}^* \left(\frac{-C}{\eta} - \mathcal{D}\eta \right)| \right] \frac{1}{|\mathcal{E} + \eta^{2\nu} \mathcal{F}|^2}. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Como nos interesa la parte imaginaria de Z hacemos

$$\begin{aligned} Z_I &= \left[\frac{(-\mathcal{A}\mathcal{E}^*)_I}{\eta} - (\mathcal{B}\mathcal{E}^*)_I \eta - \frac{(|\eta|^{2\nu} \mathcal{E}^* \mathcal{C})_I}{\eta} - (|\eta|^{2\nu} \mathcal{E}^* \mathcal{D})_I \eta - \frac{(\mathcal{A}|\eta|^{2\nu*} \mathcal{F}^*)_I}{\eta} - (\mathcal{B}|\eta|^{2\nu*} \mathcal{F}^*)_I \eta - \right. \\ &\quad \left. - |\eta|^{2\nu} |\mathcal{F}^* \mathcal{C})_I - |\eta|^{2\nu} |\mathcal{F}^* \mathcal{D})_I \eta \right] \frac{1}{|\mathcal{E} + |\eta|^{2\nu} \mathcal{F}|^2} \\ Z_I &= - \left[\frac{(\mathcal{A}\mathcal{E}^*)_I + \eta^{2\nu_R} (\mathcal{N}\mathcal{E}^* \mathcal{C})_I + \eta^{2\nu_R} (\mathcal{A}\mathcal{N}^* \mathcal{F}^*)_I + \eta^{4\nu_R} (\mathcal{F}^* \mathcal{C})_I}{\eta} - \right. \\ &\quad \left. - \left((\mathcal{B}\mathcal{E}^*)_I + \eta^{2\nu_R} (\mathcal{N}\mathcal{E}^* \mathcal{D})_I + \eta^{2\nu_R} (\mathcal{B}\mathcal{N}^* \mathcal{F}^*)_I + \eta^{4\nu_R} (\mathcal{F}^* \mathcal{D})_I \right) \eta \right] \frac{1}{|\mathcal{E} + \eta^{2\nu} \mathcal{F}|^2}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

A orden dominante esta expresión la podemos aproximar, sabiendo que estamos en $|k\eta| \ll 1$:

$$Z_I \approx - \left(\frac{(\mathcal{A}\mathcal{E}^*)_I}{\eta} + (\mathcal{B}\mathcal{E}^*)_I \eta \right) \frac{1}{|\mathcal{E}|^2} = - \frac{(\mathcal{A}\mathcal{E}^*)_I}{|\mathcal{E}|^2 \eta} - \frac{(\mathcal{B}\mathcal{E}^*)_I \eta}{|\mathcal{E}|^2}. \quad (5.111)$$

Entonces, la parte real de A_k en este regimen será:

$$\text{Re}(A_k) = \frac{-k}{2} \left(Z_I - \frac{\nu_I}{k\eta} \right) = \frac{-k}{2} \left(- \frac{k(\mathcal{A}\mathcal{E}^*)_I}{|\mathcal{E}|^2 k\eta} - \frac{(\mathcal{B}\mathcal{E}^*)_I k\eta}{k|\mathcal{E}|^2} - \frac{\nu_I}{k\eta} \right). \quad (5.112)$$

De esta expresión podemos descartar el segundo término que vemos fácilmente que tiende a cero, tenemos:

$$\text{Re}(A_k) = \frac{-k}{2} \frac{\left(- \frac{k(\mathcal{A}\mathcal{E}^*)_I}{|\mathcal{E}|^2} - \nu_I \right)}{k\eta}. \quad (5.113)$$

A su vez, el primer término podemos simplificarlo:

$$\frac{-k(\mathcal{A}\mathcal{E}^*)_I}{|\mathcal{E}|^2} = -k \left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{E}^*}{\mathcal{E}\mathcal{E}^*} \right)_I = -k \left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{E}} \right)_I = -k \left(\frac{-2^{\nu+1} e^{i\nu\pi} k^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} \right)_I = 2\nu_I. \quad (5.114)$$

$$\text{Re}(A_k) = \frac{-\nu_I}{2\eta}. \quad (5.115)$$

Para concluir, podemos simplificar la expresión original (5.86) reemplazando λ por su expresión explícita, obteniendo así:

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{9 + \frac{8i\lambda_0 H_I^2}{H_I^2 M_P}} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + \frac{8i\lambda_0}{M_P}}. \quad (5.116)$$

En unidades de Planck, el valor experimental de $\lambda_0 \simeq 10^{-17} s^{-1}$ es del orden de $\lambda_0 \simeq 10^{-61} M_P$ (León & Bengochea, 2021). Es decir, el parámetro fundamental λ_0 está suprimido por la masa de Planck y entonces podemos ver que $\lambda/H_I^2 \ll 1$, lo cual usamos para reescribir ν :

$$\nu \approx \sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda}{H_I^2} \quad \rightarrow \quad \nu_I = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\lambda}{H_I^2}. \quad (5.117)$$

De esta manera, finalmente:

$$\text{Re}(A_k) = - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda}{H_I^2 \eta}. \quad (5.118)$$

Así, el segundo término de (5.30) en el régimen $k\eta \rightarrow 0$ resulta

$$\frac{1}{4\text{Re}(A_k)} \Big|_{k\eta \rightarrow 0} = 0. \quad (5.119)$$

5.5.3. Resultado

Habiendo deducido expresiones para los dos términos de la ecuación (5.30) estamos en condiciones de escribir el espectro de potencias escalar en el régimen $k\eta \rightarrow 0$. Primero escribiremos explícitamente (5.30) con nuestras cantidades calculadas:

$$\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle^2} = Q - \frac{1}{4\text{Re}[A_k(\eta)]} = \frac{3H_I^2 k^{-1} - \lambda \pi k^{-1}}{6H_I^2 k^2 \eta^2}. \quad (5.120)$$

5. El colapso en inflación

Reemplazando en la expresión 5.29, obtenemos, dado que las partes reales e imaginarias se calculaban de la misma manera:

$$\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle^*} = Q \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = \left(\frac{3H_I^2 k^{-1} - \lambda \pi k^{-1}}{6H_I^2 k^2 \eta^2} \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (5.121)$$

Esta expresión la reemplazamos en (5.12) para obtener una expresión para el espectro de potencias escalar al final de inflación:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{4\pi^2 \epsilon M_P^2 a^2} \left(\frac{3H_I^2 k^{-1} - \lambda \pi k^{-1}}{6H_I^2 k^2 \eta^2} \right) = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon M_P^2 a^2 \eta^2} - \frac{\lambda}{24\pi H_I^2 \epsilon M_P^2 a^2 \eta^2}. \quad (5.122)$$

Reemplazando $a = -1/H_I \eta$, obtenemos:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H_I^2}{8\pi^2 \epsilon M_P^2} - \frac{\lambda}{24\pi \epsilon M_P^2} = \frac{H_I^2}{8\pi^2 \epsilon M_P^2} \left(1 - \frac{\lambda \pi}{3H_I^2} \right). \quad (5.123)$$

En este momento podemos reemplazar λ por su definición dada en la sección 5.4.1:

$$P_{\mathcal{R}}(k) \approx \frac{H_I^2}{8\pi^2 \epsilon M_P^2} \left(1 - \frac{4\lambda_0 \pi}{M_P} \right). \quad (5.124)$$

Como $\lambda_0 \simeq 10^{-61} M_P$ entonces se suprime contra M_P y el segundo término es despreciable, y obtenemos, finalmente:

$$P_{\mathcal{R}}(k) \approx \frac{H_I^2}{8\pi^2 \epsilon M_P^2}, \quad (5.125)$$

es decir, un espectro esencialmente igual al estándar consistente con las observaciones como indicamos en el Capítulo 3.

5.5.4. Caso $\lambda = 0$

Para finalizar este Capítulo vamos a analizar qué pasaría si calculamos el espectro de potencias dado por (5.30) si intentáramos verlo desde la interpretación estándar de la Mecánica Cuántica, es decir, sin un mecanismo de colapso autoinducido. Esto se traduce en hacer simplemente $\lambda = 0$. Los cálculos en este caso son significativamente más breves.

Primero vamos a recordar el sistema de ecuaciones (5.34), (5.35), (5.36). Si sacamos el término de λ nos queda solamente la parte homogénea del sistema, para la cual sabemos que la solución está dada por (5.55), (5.56) y (5.57). Para determinar las constantes evaluaremos nuevamente en el régimen asintótico $k\eta = k\tau \rightarrow -\infty$. Las expresiones resultan:

$$\tilde{Q} = \tilde{c}_1 \frac{e^{2ik\eta}}{2k} + \tilde{c}_2 \frac{e^{-2ik\eta}}{2k} + \tilde{c}_3 \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k}, \quad (5.126)$$

$$\tilde{R} = -\tilde{c}_1 \frac{k^2 e^{2ik\eta}}{2k} - \tilde{c}_2 \frac{k^2 e^{-2ik\eta}}{2k} + \tilde{c}_3 \frac{k^2}{2k} = \frac{k}{2}, \quad (5.127)$$

$$\tilde{T} = 2\tilde{c}_1 \frac{ik e^{2ik\eta}}{2k} - 2\tilde{c}_2 \frac{ik e^{-2ik\eta}}{2k} + \tilde{c}_3 \left(\frac{ik}{2k} - \frac{ik}{2k} \right) = 0, \quad (5.128)$$

las cuales, luego de simplificar:

$$\tilde{c}_1 e^{2ik\eta} + \tilde{c}_2 e^{-2ik\eta} + \tilde{c}_3 = 1, \quad (5.129)$$

$$-\tilde{c}_1 e^{2ik\eta} - \tilde{c}_2 e^{-2ik\eta} + \tilde{c}_3 = 1, \quad (5.130)$$

$$\tilde{c}_1 e^{2ik\eta} - \tilde{c}_2 e^{-2ik\eta} = 0. \quad (5.131)$$

De la tercera ecuación obtenemos:

$$\tilde{c}_1 e^{2ik\eta} = \tilde{c}_2 e^{-2ik\eta}, \quad (5.132)$$

al mismo tiempo que, si le restamos la segunda a la primera y reacomodamos obtenemos:

$$\tilde{c}_1 e^{2ik\eta} = -\tilde{c}_2 e^{-2ik\eta}. \quad (5.133)$$

Si sumamos estas dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$2\tilde{c}_1 e^{2ik\eta} = 0. \quad (5.134)$$

De esta manera obtenemos que $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ y $\tilde{c}_3 = 1$ y el término de \tilde{Q} resulta ser, entonces:

$$\tilde{Q} = y_1 y_2. \quad (5.135)$$

Por su parte, ahora recordemos la definición de A_k dada por (5.83) y (5.84). Si hacemos $\lambda_0 = 0$ entonces (5.84) resulta:

$$f_k'' + \omega_k f_k = 0, \quad (5.136)$$

es decir, su solución será:

$$\tilde{Y} = \alpha y_1 + \beta y_2. \quad (5.137)$$

Reemplazando en A_k tenemos:

$$A_k = \frac{\alpha y_1' + \beta y_2'}{2i(\alpha y_1 + \beta y_2)} = \frac{y_1' + \zeta y_2'}{2i(y_1 + \zeta y_2)}. \quad (5.138)$$

Para calcular ζ vamos de vuelta a la condición dada por Bunch-Davies en $k\eta = k\tau \rightarrow -\infty$:

$$\frac{k}{2} = \frac{y_1' + \zeta y_2'}{2i(y_1 + \zeta y_2)}. \quad (5.139)$$

Luego de reacomodar los términos esto resulta:

$$\begin{aligned} ik y_1 - y_1' &= \zeta (y_2' - ik y_2), \\ ik \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} - ik \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} &= \zeta \left(-ik \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} - ik \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} \right), \\ 0 &= -2ik \zeta \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \rightarrow \zeta = 0. \end{aligned} \quad (5.140)$$

De esta manera:

$$A_k = \frac{y_1'}{2iy_1}, \quad (5.141)$$

y, para sacar su parte real, podemos hacer lo siguiente:

$$\text{Re}(A_k) = \frac{A_k + A_k^*}{2} = \frac{y_1'}{4iy_1} + \left(\frac{y_1'}{4iy_1} \right)^* = \frac{1}{4iy_1 y_2} (y_1' y_2 - y_2' - y_1) \equiv \frac{\mathcal{W}}{4iy_1 y_2}, \quad (5.142)$$

donde \mathcal{W} es el Wronskiano asociado a la ecuación diferencial de y . Nos interesa esta cantidad pues, como la ecuación (5.136) es del tipo de oscilador armónico con coeficientes reales, entonces el Wronskiano será constante en todo el dominio de la ecuación. Elegimos, entonces,

5. El colapso en inflación

el régimen sencillo $k\eta \rightarrow -\infty$ para evaluarlo y sabremos que valdrá lo mismo para todo tiempo.

$$y_1' y_2 - y_2' y_1 = \frac{ik e^{ik\eta} e^{-ik\eta}}{2k} - \frac{-ik e^{-ik\eta} e^{ik\eta}}{2k} = i. \quad (5.143)$$

Con este resultado, el valor de $\text{Re}(A_k)$ es:

$$\text{Re}(A_k) = \frac{1}{4y_1 y_2}, \quad (5.144)$$

y, finalmente, la expresión (5.29) sin el mecanismo de colapso será:

$$\overline{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}} \rangle \langle \hat{y}_{\mathbf{q}} \rangle^*} = \left(\tilde{Q} - \frac{1}{4\text{Re}(A_k)} \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = (y_1 y_2 - y_1 y_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = 0, \quad (5.145)$$

por lo que el espectro de potencias asociado $P_{\mathcal{R}}$ será nulo también. Esto quiere decir que, sin el colapso autoinducido de la función de onda, este modelo predice un espectro de anisotropías nulo. Este resultado es consistente con nuestro modelo en el cual, si no hay un colapso de la función de onda, no se rompen las simetrías primordiales, el Universo sigue siendo perfectamente homogéneo e isótropo y no existen inhomogeneidades de ningún tipo.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta Tesis se estudió el origen cuántico de las perturbaciones primordiales durante la época inflacionaria del Universo. Partiendo de un estado inicial homogéneo e isótropo se calculó el mecanismo por el que estas simetrías se rompen, aplicando un modelo de colapso autoinducido de la función de onda asociada al campo inflatón.

Para lograr esto, primero introdujimos los elementos básicos de Relatividad General y el modelo cosmológico FLRW necesarios para dar un marco teórico adecuado a los siguientes Capítulos. Analizando este modelo describimos dos de los problemas que presenta este modelo estándar, los cuales son el problema del horizonte y el de planitud. Motivados por esa problemática presentamos el modelo inflacionario como una posible solución para los mismos. Dentro del modelo exploramos los parámetros característicos y adoptamos, en particular, el modelo inflacionario slow-roll en un Universo cuasi de Sitter, tomando el factor de escala de de Sitter como una buena aproximación para nuestros fines.

Posteriormente expusimos un elemento faltante en los modelos previamente vistos: las inhomogeneidades en el Universo. Tanto el modelo FLRW como el inflacionario descritos en el Capítulo 2 se corresponden con un espacio-tiempo perfectamente homogéneo e isótropo, incluyendo las indeterminaciones cuánticas del vacío de Bunch Davies, las cuales por si mismas, no caracterizan inhomogeneidades ni anisotropías de ningún tipo (para ello se necesita el elemento adicional mencionado en el Capítulo 4) Vistos en la necesidad de explicar las inhomogeneidades que se observan expusimos la teoría de perturbaciones lineal aplicada a las ecuaciones de la Relatividad General en el caso cosmológico. Luego mostramos el planteo estándar que se realiza para el cálculo de las perturbaciones escalares, cuantizando simultáneamente a las perturbaciones en la métrica y al inflatón al promover al carácter de operador a la variable de Mukhanov-Sasaki, que las contiene a ambas. Mostramos que el enfoque estándar busca justificar la identificación de correlaciones de dos puntos cuánticas con correlaciones estadísticas clásicas. El cálculo estándar del espectro de potencias para las perturbaciones escalares en la curvatura da un espectro invariante de escala, llamado espectro de Harrison-Zel'dovich, compatible con las observaciones en grandes escalas. Las observaciones con las que comparamos el espectro las describimos mediante las anisotropías en el Fondo Cósmico de Radiación (CMB) y el espectro angular C_l , para el cual encontramos una expresión que lo relaciona con el espectro de potencias y pudimos verificar que, si el espectro es invariante de escala, la cantidad $l(l+1)C_l$ resulta en el plateau de Sachs-Wolfe, concordante con las observaciones.

Más adelante, de manera independiente, discutimos en detalle el denominado problema de la medición en Mecánica Cuántica, concluyendo que *la teoría presenta un problema fundamental a nivel conceptual*, al necesitar la inclusión de un agente externo que oficie de observador, sin que la teoría especifique quién puede ser un observador, qué es medir y por

qué los objetos macroscópicos no parecen estar nunca en estados de superposición cuando, en principio, la evolución lineal dada ecuación de Schrödinger no destruiría una superposición inicial. Todo esto, claro, sin discutir los enormes éxitos de la teoría a nivel práctico y predictivo. Mencionamos la posición estándar al respecto, que proclama que el problema de la medición no es un problema científico y que no se puede aspirar a construir una teoría completa de la realidad. Discutiendo esa postura llevamos el problema al caso cosmológico, donde la ausencia del observador externo al Universo, junto con la falta de una buena definición para lo que es una medición y/o un aparato de medición, nos plantea un serio problema a la hora de romper las simetrías iniciales del mismo para llegar al estado inhomogéneo actual. Más explícitamente discutimos el punto exacto en el que, a nuestro criterio, el enfoque estándar adolece de un elemento faltante a la hora de justificar la transición cuántico-clásica para explicar el origen de estas inhomogeneidades, trayendo atada una confusión en el uso del concepto de fluctuaciones, al usarlo para referirse tanto a las indeterminaciones cuánticas como a las inhomogeneidades.

En un intento de describir y resolver el problema de la medición, mencionamos los tres enunciados de Maudlin (1995) mutuamente inconsistentes y discutimos las posibilidades de ir negando cada uno de ellos. En particular, discutimos en detalle la posibilidad de que los estados cuánticos *no siempre evolucionen de acuerdo a la ecuación de Schrödinger*. Esto nos llevó a explorar las teorías de *colapso objetivo*.

Previo a discutir en detalle los modelos de colapso discutimos brevemente la propuesta de decoherencia y, sin entrar en detalle, mencionamos los dos grandes problemas que adolecen a dicha propuesta, por los que consideramos que no representa una alternativa viable para la solución del caso cosmológico.

Primero introducimos el *modelo GRW* para poder explicar de manera más sencilla los parámetros relevantes, sus valores numéricos y el colapso de la función de onda, a pesar de no ser el modelo usado en la presente tesis.

El *modelo CSL* fue introducido a continuación, haciendo una generalización del modelo GRW. Escribimos sus ecuaciones principales y establecimos *el operador posición como el operador de colapso*. Al mismo tiempo mostramos cómo el parámetro λ nos proporcionaba el *mecanismo de amplificación* necesario para poder mantener las superposiciones cuánticas en los sistemas microscópicos al mismo tiempo que romperlas para los macroscópicos.

Con estas herramientas y el marco teórico establecidos nos propusimos desarrollar el cálculo del espectro escalar de potencias para las perturbaciones en la curvatura, en un marco de gravedad semiclassical, es decir, no cuantizamos la métrica a la hora de describir cuánticamente las perturbaciones, a diferencia del enfoque estándar. En esta tesis, propusimos la generalización más natural del modelo de CSL descrito en la sección 4.4, donde el operador de colapso es el operador de posición y $\lambda = (\lambda_0 m / r_C^2 m_0)$. En particular, la generalización que propusimos es utilizar $\delta\hat{\phi}$ como el operador de colapso, es decir, la parte inhomogénea del inflatón y generalizamos $\lambda = \lambda_0 (R/M_P)$. La extrapolación propuesta para el parámetro λ , incluye el mecanismo de amplificación para un sistema donde la curvatura es importante, como es el caso de inflación. El valor de λ_0 lo tomamos de los experimentos de laboratorio. El espectro obtenido se corresponde con la predicción estándar y, por ende, *coincide con las evaluaciones observacionales de las anisotropías en el CMB*. Este resultado es importante ya que pudimos mostrar que el caso más simple del modelo CSL puede usarse en el marco cosmológico y predecir un espectro adecuado *sin necesidad de parametrizar de forma ad hoc* λ *como una función de los modos k* , a diferencia de trabajos anteriores como Cañate et al. (2013) León & Bengochea (2021) León & Bengochea (2016) y Palermo et al. (2022).

Para finalizar, mostramos que, con nuestra interpretación del mecanismo, el espectro de perturbaciones se anula para el caso en el que $\lambda = 0$, es decir, *el mecanismo de colapso es*

necesario para generar las perturbaciones primordiales.

Para concluir la presente Tesis mencionaremos tres cuestiones que aparecen en el horizonte inmediato como trabajos a futuro en lo concerniente no solamente a las teorías de colapso aplicadas a cosmología si no a las teorías en general:

- El parámetro r_C no fue considerado en la generalización del modelo CSL. A futuro se debe considerar una adecuada parametrización, no solamente para mantener las unidades correctas del parámetro λ si no para especificar correctamente en qué escala de tamaño considerar el colapso. ¿Se debería considerar el radio de Hubble? ¿Se debería considerar el horizonte de partículas? Estas son preguntas a tratar en futuras versiones del cálculo.
- En el presente trabajo no cuantizamos la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein. A futuro se puede intentar aplicar este modelo con la cuantización conjunta de energía y métrica, mediante la variable de Mukhanov-Sasaki. Esto nos permitirá analizar las posibles diferencias que podrían aparecer respecto del cálculo del espectro escalar primordial en el marco de gravedad semiclásica y, además, respecto del enfoque estándar donde también se cuantiza la variable de Mukhanov-Sasaki pero sin incorporar el mecanismo de colapso. Además, el marco de cuantización conjunta nos permitiría obtener una predicción para las perturbaciones tensoriales primordiales radicalmente diferente de la que ofrece el marco semiclásico.
- A nivel general, es necesaria una formulación covariante del modelo CSL, que no entre en conflicto con el principio de relatividad, ya que en este modelo elegimos una foliación privilegiada del espacio-tiempo.

Apéndice A

No Localidad en modelos de colapso

El presente Apéndice tiene como objetivo la discusión sobre el carácter no local de los modelos expuestos en la presente Tesis.

En el Capítulo 4 mencionamos que los modelos GRW y CSL eran no locales al tener un colapso global e instantáneo de la función de onda. Mencionamos también que este era un aspecto necesario para que la teoría fuese compatible con el teorema de Bell. En este escenario nos debemos preguntar primero: ¿Qué definimos exactamente como localidad y cómo afecta al carácter de una teoría? Para responder estos interrogantes seguiremos principalmente el texto de Norsen (2017).

A.1. EPR-B

Comenzaremos nuestra discusión planteando la pregunta que se hicieron Einstein, Podolsky y Rosen en el famoso artículo de 1935 que se suele llamar artículo EPR (Einstein et al., 1935)⁽ⁱ⁾. La pregunta central de ese trabajo es si la Mecánica Cuántica puede ser considerada una teoría *completa*. Los autores definen una teoría completa como aquella en la que todo *elemento de realidad* tiene su contraparte en la teoría. A su vez, el artículo da una condición suficiente para que un elemento sea real⁽ⁱⁱ⁾. La misma dice que si podemos, sin perturbar un sistema, predecir con certeza el valor de una cierta cantidad física, entonces existe un elemento de realidad correspondiente a dicha cantidad física. Por ejemplo, si tenemos el siguiente autovector:

$$Q|\psi\rangle = q|\psi\rangle \tag{A.1}$$

en un estado $|\psi\rangle$, entonces la cantidad Q tiene con certeza el valor q y, entonces, hay un elemento de realidad asociado a Q , al poder predecir con certeza su valor sin perturbar al sistema.

El artículo, además, toma una premisa de *localidad*, sin hacerla explícita, en el sentido clásico dado por la relatividad especial de Einstein. Es decir, si dos regiones A y B están separadas por un intervalo espacial, los eventos en A no pueden influenciar eventos en B .

No veremos el argumento presentado en el artículo EPR si no que directamente presentaremos a continuación el ejemplo presentado por Bohm en su reformulación del problema (Bohm, 1951), el cual se vale de los spines de un par de partículas de spin $1/2$. Supongamos que tenemos una molécula diatómica la cual tiene spin total nulo. A su vez el spin total de

⁽ⁱ⁾En Norsen (2017) se cuenta que el artículo, en realidad, fue escrito en su totalidad solamente por Podolsky, luego de debates con Einstein y Rosen.

⁽ⁱⁱ⁾Hacemos énfasis en que es una condición suficiente, no una definición, en cuyo caso todas las teorías serían completas trivialmente.

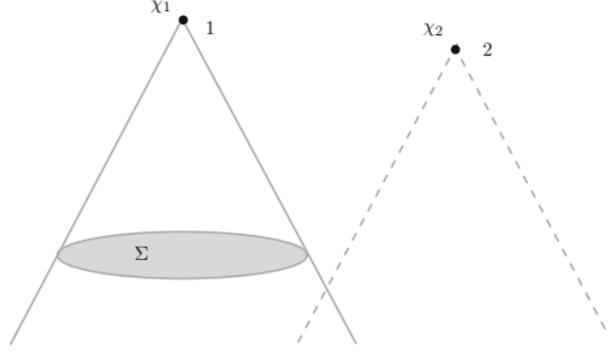


Figura A.1. La definición de localidad de Bell nos dice que la especificación de χ_2 no afecta la probabilidad de χ_1 conociendo todos los eventos en Σ . Figura tomada de Norsen (2017).

cada átomo es $1/2$. El estado total de spin cero es el siguiente:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (\text{A.2})$$

es decir, un estado en superposición de los dos posibles: la primera partícula con spin up y la segunda con spin down y viceversa. Supongamos que la molécula es desintegrada por un proceso que no afecta al momento angular de la misma, separando espacialmente ambos átomos pero manteniendo el momento angular de spin total del sistema nulo, al no haber aplicado ningún tipo de torque.

La ecuación (A.2) no es un autoestado del operador spin en un eje, el z por ejemplo \hat{S}_{z2} para la partícula 2. Es una superposición de estados en los que \hat{S}_{z2} para la partícula 2 tiene dos valores distintos (1 y -1). Por lo tanto, para nuestra definición de completitud la partícula 2 no tiene un estado definido para \hat{S}_{z2} cuando el estado del sistema está dado por (A.2). Sin embargo, podemos realizar una medición de \hat{S}_{z1} sin perturbar a la partícula 2 separada espacialmente y obtener, por ejemplo, que la partícula 1 tiene spin up. En ese caso la partícula 2 tendrá spin down, y viceversa. Es decir, existe un elemento de realidad asociado a \hat{S}_{z2} , el cual no está contenido en la descripción cuántica de $|\psi\rangle$, por lo que esta sería *incompleta*. Es importante notar que para concluir que existía un elemento de realidad asociado a \hat{S}_{z2} tuvimos que aceptar la suposición de localidad, pues de otra manera podríamos decir que la medición de \hat{S}_{z1} separada espacialmente perturbó a la partícula 2. Entonces, si asumimos que la teoría es local, entonces *la Mecánica Cuántica es incompleta*.

A.2. Teorema de Bell

Dado este resultado Bell intentó restaurar la noción de localidad de modo que complete la Mecánica Cuántica. Bell define la localidad valiéndose de la siguiente igualdad entre probabilidades (Norsen, 2017):

$$P[\chi_1 | \mathcal{C}_\Sigma] = P[\chi_1 | \mathcal{C}_\Sigma, \chi_2]. \quad (\text{A.3})$$

Esta definición quiere decir simplemente que, dado un evento χ_1 , su probabilidad asociada dada una completa especificación \mathcal{C}_Σ de los eventos en la superficie Σ que corta el cono de luz hacia el pasado (Figura A.1) es igual a la probabilidad para el mismo evento χ_1 especificando, además de \mathcal{C}_Σ , otro evento χ_2 separado espacialmente de Σ . Esto significa que, conociendo \mathcal{C}_Σ , la probabilidad de χ_1 queda completamente determinada y no cambia al especificar otro

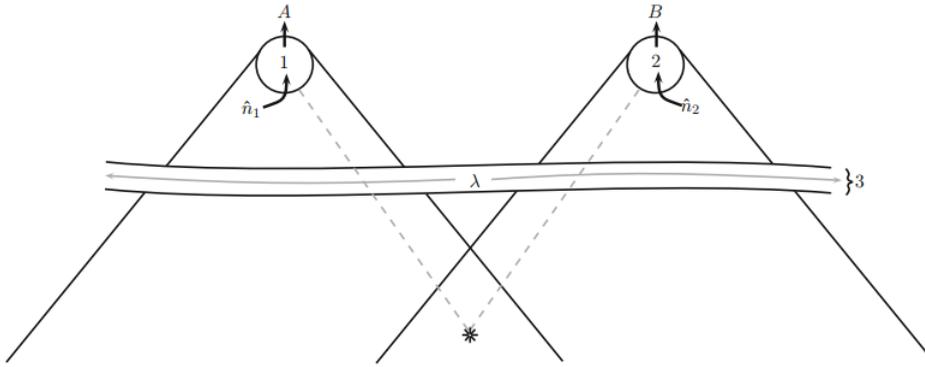


Figura A.2. Un aparato lanza pares de partículas (líneas punteadas para indicar sus líneas de mundo) hacia 1 y 2 separadas espacialmente. La región 3 intercepta ambas partículas en algún punto intermedio. En la figura $\lambda \equiv \varphi$. Figura tomada de [Norsen \(2017\)](#).

evento χ_2 sin conexión causal con \mathcal{C}_Σ . Es importante conocer completamente \mathcal{C}_Σ porque de otra forma algún evento en un pasado más lejano podría correlacionar causalmente χ_1 y χ_2 de forma de agregar información adicional a la descripción. A su vez es importante que Σ esté separada espacialmente de χ_2 para que ningún evento intermedio X entre Σ y χ_1 pueda influenciar a χ_2 . Si ese fuera el caso, especificar χ_2 podría dar información sobre X que a su vez podría dar información sobre χ_1 no especificada por \mathcal{C}_Σ .

Consideremos ahora un arreglo experimental en el que una fuente crea pares de partículas en estados como (A.2), que la Mecánica Cuántica describiría como singletes. Intentaremos ser más generales y dar lugar a una completitud de la teoría mediante variables ocultas locales, por lo que diremos que el estado de un par de partículas está dado por $|\varphi\rangle$ el cual podría ser simplemente el estado $|\psi\rangle$ descrito por la Mecánica Cuántica, podría ser el mismo sumado a ciertas variables ocultas o podría ser completamente distinto a la función de onda de la cuántica.

Las partículas, entonces, salen disparadas en direcciones opuestas hacia estaciones denominadas en regiones 1 y 2 respectivamente como se muestra en la Figura A.2. En 1 se genera de manera aleatoria una elección de eje \hat{n}_1 para medir el spin de la partícula obteniendo A . De la misma manera, de forma independiente, en 2 se elige \hat{n}_2 obteniendo B . Tomando nuestra condición de localidad entonces una completa especificación del estado físico en la región 3 hace lo que suceda en la región 2 (2 eligiendo \hat{n}_2 y obteniendo un spin en particular) irrelevante a la hora de hacer predicciones sobre lo que se pueda obtener en 1, y viceversa.

De esta manera, asumiendo que la teoría es local, la probabilidad conjunta se puede factorizar así:

$$P[A, B|\hat{n}_1, \hat{n}_2, \varphi] = P[A|\hat{n}_1, \varphi]P[B|\hat{n}_2, \varphi]. \quad (\text{A.4})$$

Esto quiere decir, simplemente, que la probabilidad de obtener A en 1 solamente puede depender de los parámetros φ del sistema y la elección \hat{n}_1 , y similar para obtener B en 2. Definimos ahora el coeficiente de correlación $C(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$ como el valor de expectación del producto de los resultados A y B . Esto es simplemente la suma sobre todos los posibles resultados conjuntos de A y B del producto de los resultados pesados con la probabilidad de cada particular salida conjunta. Lo escribimos como

$$C(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \int \sum_{A,B} A \cdot B \cdot P[A, B|\hat{n}_1, \hat{n}_2, \varphi] \rho(\varphi) d\varphi, \quad (\text{A.5})$$

donde $\rho(\varphi)$ representa la densidad de probabilidad del espectro de posibles valores φ . Usando

la factorización (A.4) podemos obtener:

$$C(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \int \bar{A}[\hat{n}_1, \varphi] \bar{B}[\hat{n}_2, \varphi] \rho(\varphi) d\varphi, \quad (\text{A.6})$$

donde $\bar{A}[\hat{n}_1, \varphi] = \sum_A A \cdot P[A, \hat{n}_1, \varphi]$ es el valor promedio de A y de manera similar se define para B . Ambos promedios cumplen, dado que el resultado de las mediciones solo puede ser $+1$ y -1 :

$$|\bar{A}[\hat{n}_1, \varphi]| \leq 1 \quad , \quad |\bar{B}[\hat{n}_2, \varphi]| \leq 1. \quad (\text{A.7})$$

Consideremos la siguiente combinación de coeficientes:

$$C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c}) = \int \bar{A}[\hat{a}, \varphi] [\bar{B}[\hat{b}, \varphi] - \bar{B}[\hat{c}, \varphi]] \rho(\varphi) d\varphi, \quad (\text{A.8})$$

de manera que

$$|C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c})| \leq \int |\bar{B}[\hat{b}, \varphi] - \bar{B}[\hat{c}, \varphi]| \rho(\varphi) d\varphi, \quad (\text{A.9})$$

dado que $|\bar{A}[\hat{n}_1, \varphi]| \leq 1$. De forma similar podemos ver que

$$|C(\hat{a}', \hat{b}) + C(\hat{a}', \hat{c})| \leq \int |\bar{B}[\hat{b}, \varphi] + \bar{B}[\hat{c}, \varphi]| \rho(\varphi) d\varphi. \quad (\text{A.10})$$

Sumando ambas expresiones, notando $|x - y| + |x + y|$ es $2x$, $-2x$, $2y$ o $-2y$ lo cual es siempre ≤ 2 dado que $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$ y, usando $\int \rho(\varphi) d\varphi = 1$ arribamos a la siguiente desigualdad, denominada *desigualdad CHSH*:

$$|C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c})| + |C(\hat{a}', \hat{b}) + C(\hat{a}', \hat{c})| \leq 2. \quad (\text{A.11})$$

De esta manera, cualquier teoría que respete la causalidad de Bell debe realizar predicciones que respeten este tipo de desigualdad (Bell, 1964, 1987, 1995). Lo que sucede, en la vida real, es que los experimentos violan claramente la desigualdad (Aspect et al., 1982), por lo que debemos concluir que las teorías que respetan la causalidad de Bell son *incorrectas* y que la teoría *verdadera* debería no respetar este postulado. Esto significaría asumir que el mundo es no local, que influencias causales más rápidas que la luz realmente existen en el mundo.

A.3. Colapsando de vuelta

Habiendo hablado de localidad y el teorema de Bell nos podemos preguntar en este punto: ¿Y cómo afecta esto a una tesis sobre cosmología? Como mencionamos anteriormente, los modelos de colapso expuestos son de carácter no local. Esto hace a las teorías de colapso objetivo candidatas a tener en cuenta para ser completas según el teorema de Bell.

Exploraremos esta característica nuevamente siguiendo Norsen (2017). Supongamos que dos partículas están divididas en dos pares de mitades de caja. En particular supongamos que Alice tiene una partícula dividida en la mitad de la caja en su mano izquierda (estado $|\psi_I^A\rangle$) y la mitad de la caja en su mano derecha (estado $|\psi_D^A\rangle$). De igual manera Bob, separado espacialmente, tiene $|\psi_I^B\rangle$ y $|\psi_D^B\rangle$. Las dos partículas fueron preparadas previamente en el estado:

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_I^A\rangle |\psi_I^B\rangle + |\psi_D^A\rangle |\psi_D^B\rangle \right). \quad (\text{A.12})$$

Existe una pequeña posibilidad de que la partícula en la caja de Alice colapse a uno de los dos estados I o D . Supongamos que la partícula colapsa a I . De la misma manera que describimos en A.1, este colapso espontáneo hará que la partícula de Bob colapse a su vez a

I. A su vez, la probabilidad del colapso de A estará afectada por una eventual medición que pudiera hacer Bob previamente. En cualquier caso, existe una acción a distancia no local.

De todas formas, como indica [Bell \(1987\)](#), las teorías de colapso espontáneo podrían ser compatibles con la relatividad al ser de carácter estocástico. Esta posibilidad de reconciliar la no localidad con la relatividad no significa que hayamos entendido mal el concepto y que no existan interacciones causales superlumínicas, significa que tal vez nuestra percepción de la relatividad (o la causalidad o ambos) puede ser incorrecta y eso nos haya hecho pensar durante todo este tiempo que la relatividad no podía ser compatible con conexiones causales entre eventos separados espacialmente.

Bibliografía

- Abbott T. M. C., et al., 2019, , [122, 171301](#)
- Arfken G., Weber H., 2005, *Mathematical Methods for Physicists*
- Aspect A., Grangier P., Roger G., 1982, *Phys. Rev. Lett.*, 49, 91
- Bassi A., Ghirardi G., 2003, , [379, 257](#)
- Bassi A., Lochan K., Satin S., Singh T. P., Ulbricht H., 2013, *Reviews of Modern Physics*, [85, 471](#)
- Baumann D., 2009, arXiv e-prints, p. [arXiv:0907.5424](#)
- Baumann D., 2011, The Physics of Inflation. https://www.icts.res.in/sites/default/files/baumann_icts_dec2011.pdf
- Baumann D., 2015, *Cosmology Part III Mathematical Tripos*. <https://homes.psd.uchicago.edu/~liantaow/my-teaching/dark-matter-472/lectures.pdf>
- Bell J. S., 1964, *Physics Physique Fizika*, 1, 195
- Bell J. S., 1987, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*
- Bell J., 1995, [10.1142/9789812795854_0084](#)
- Bengochea G. R., 2020, arXiv e-prints, p. [arXiv:2007.03428](#)
- Bengochea G. R., León G., Pearle P., Sudarsky D., 2020, *The European Physical Journal C*, [80](#)
- Bengochea G. R., Piccirilli M. P., León G., 2021, *European Physical Journal C*, [81, 1049](#)
- Bohm D., 1951, *Quantum Theory*
- Bunch T. S., Davies P. C. W., 1978, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, [360, 117](#)
- Burgess C. P., Holman R., Hoover D., 2008, *Phys. Rev. D*, [77, 063534](#)
- Cañate P., Ramirez E., Sudarsky D., 2018, , [2018, 043](#)
- Carlesso M., Donadi S., Ferialdi L., Paternostro M., Ulbricht H., Bassi A., 2022, *Nature Physics*, [18, 243](#)
- Carroll S. M., 2019, *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press
- Cañate P., Pearle P., Sudarsky D., 2013, *Physical Review D*, [87](#)
- Crull E. M., 2015, *Found. Phys.*, [45, 1019](#)
- Das S., Lochan K., Sahu S., Singh T. P., 2013, , [88, 085020](#)
- Di Valentino E., et al., 2021a, *Classical and Quantum Gravity*, [38, 153001](#)
- Di Valentino E., et al., 2021b, *Astroparticle Physics*, [131, 102605](#)
- Dicke R. H., Peebles P. J. E., Roll P. G., Wilkinson D. T., 1965, *Astrophys. J.*, [142, 414](#)
- Diez-Tejedor A., Sudarsky D., 2012, , [2012, 045](#)
- Diosi L., 1984, *Phys. Lett. A*, [105, 199](#)
- Diosi L., 1987, *Phys. Lett. A*, [120, 377](#)
- Diosi L., 1989, *Phys. Rev. A*, [40, 1165](#)
- Dodelson S., 2003, *Modern cosmology*
- Einstein A., 1915, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften* (Berlin, [pp 844–847](#))
- Einstein A., Podolsky B., Rosen N., 1935, *Phys. Rev.*, [47, 777](#)

- Everett H., 1957, *Rev. Mod. Phys.*, 29, 454
- Ghirardi G. C., Rimini A., Weber T., 1986, , 34, 470
- Ghirardi G. C., Pearle P., Rimini A., 1990, , 42, 78
- Gundhi A., Gaona-Reyes J. L., Carlesso M., Bassi A., 2021, , 127, 091302
- Guth A. H., 1981, *Phys. Rev. D*, 23, 347
- Harrison E. R., 1970, *Phys. Rev. D*, 1, 2726
- Hartle J. B., 1993, arXiv e-prints, pp gr-qc/9304006
- Hinshaw G., et al., 2013, *ApJS*, 208, 19
- Hubble E., 1929, *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168
- Kodama H., Sasaki M., 1984, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 78, 1
- Landau S., León G., Sudarsky D., 2013, *Phys. Rev. D*, 88, 023526
- Lemaître G., 1927, *Annales de la Sociéte; Scientifique de Bruxelles*, 47, 49
- León G., Bengochea G. R., 2016, *European Physical Journal C*, 76, 29
- León G., Bengochea G. R., 2021, *European Physical Journal C*, 81, 1055
- León G., Majhi A., Okon E., Sudarsky D., 2018, , 98, 023512
- León G., 2011, PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México
- Lukash V. N., 1980, *Sov. Phys. JETP*, 52, 807
- Martin J., 2012, *Comptes Rendus Physique*, 13, 566
- Martin J., Vennin V., 2020, , 124, 080402
- Martin J., Vennin V., 2021a, *European Physical Journal C*, 81, 64
- Martin J., Vennin V., 2021b, *European Physical Journal C*, 81, 516
- Martin J., Vennin V., Peter P., 2012, , 86, 103524
- Maudlin T., 1995, *Topoi*, 14, 7
- Maudlin T., 2011, *Quantum Non-Locality and Relativity*
- Motta V., García-Aspeitia M. A., Hernández-Almada A., Magaña J., Verdugo T., 2021, *Universe*, 7, 163
- Mukhanov V., 2005, *Physical Foundations of Cosmology*, doi:10.2277/0521563984.
- Mukhanov V. F., Feldman H. A., Brandenberger R. H., 1992, , 215, 203
- Nakahara M., 2003, *Geometry, topology and physics*
- Naón C. M., Rossignoli R., Santángelo E. M., 2014, *Ecuaciones diferenciales en Física*. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/36112>
- Norsen T., 2017, *Foundations of Quantum Mechanics: An Exploration of the Physical Meaning of Quantum Theory*
- Okon E., 2014, *Revista mexicana de física E*, 60, 130
- Okon E., Sudarsky D., 2016, *Foundations of Physics*, 46, 852
- Palermo O., Ocampo M. M., Bengochea G. R., León G., 2022, *Eur. Phys. J. C*, 82, 1146
- Pearle P., 1976, *Phys. Rev. D*, 13, 857
- Pearle P., 1989, , 39, 2277
- Pearle P., 2012, arXiv e-prints, p. arXiv:1209.5082
- Penrose R., 1989, *The emperor's new mind. Concerning computers, minds and laws of physics*
- Penrose R., 1996, *Gen. Rel. Grav.*, 28, 581
- Penrose R., 2021, *Roger Penrose*. Cambridge University Press, p. 391–406, doi:10.1017/9781316717639.023
- Penzias A. A., Wilson R. W., 1965, *Astrophys. J.*, 142, 419
- Perez A., Sahlmann H., Sudarsky D., 2006, *Classical and Quantum Gravity*, 23, 2317
- Perlmutter S., et al., 1999, *ApJ*, 517, 565
- Piattella O., 2018, *UNITEXT for Physics*
- Piccirilli M. P., 2018, PhD thesis, Universidad Nacional de La Plata
- Planck ESA 2018, CMB, <https://apod.nasa.gov/apod/ap180722.html>

- Planck Collaboration et al., 2020a, *A&A*, **641**, A6
- Planck Collaboration et al., 2020b, *A&A*, **641**, A10
- Riess A. G., et al., 1998, *AJ*, **116**, 1009
- Riotto A., 2002, arXiv e-prints, pp [hep-ph/0210162](#)
- Sachs R. K., Wolfe A. M., 1967, *ApJ*, **147**, 73
- Schlosshauer-Selbach M., 2007, Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition, [doi:10.1007/978-3-540-35775-9](#).
- Scott D., Smoot G., 2004, arXiv e-prints, pp [astro-ph/0406567](#)
- Scóccola C., 2009, PhD thesis, Universidad Nacional de La Plata
- Sperhake U., 2016, Part II General Relativity - Lecture Notes. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/us248/Lectures/Notes/grII.pdf>
- Sriramkumar L., 2009, arXiv e-prints, p. [arXiv:0904.4584](#)
- Stewart E. D., Lyth D. H., 1993, *Physics Letters B*, **302**, 171
- Sudarsky D., 2011, *Int. J. Mod. Phys. D*, **20**, 509
- Tonry J. L., et al., 2003, *ApJ*, **594**, 1
- Tumulka R., 2006, *Journal of Statistical Physics*, **125**, 821
- Watson S., Perry M. J., Kane G. L., Adams F. C., 2007, , **2007**, 017
- Weenink J., Prokopec T., 2011
- Weinberg S., 2008, *Cosmology*
- Weinberg S., 2012, , **85**, 062116
- Yoo J., Watanabe Y., 2012, *International Journal of Modern Physics D*, **21**, 1230002
- Zel'dovich Y. B., 1972, *MNRAS*, **160**, 1P
- Zurek W. H., 2003, arXiv e-prints, pp [quant-ph/0306072](#)
- Zyla P. A., et al., 2020, *PTEP*, **2020**, 083C01