

**ELEMENTOS DE GEOGRAFIA MATEMATICA**  
**CARTOGRAFIA**



PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR: CAPITÁN DE FRAGATA (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

SERIE ESPECIAL Nº 2

---

---

ELEMENTOS  
DE  
**GEOGRAFIA MATEMATICA**  
**CARTOGRAFIA**

POR

MANUEL GONZÁLEZ FERNÁNDEZ

Profesor de Geodesia Superior de la Escuela Superior de Astronomía y Geofísica  
del Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata



BUENOS AIRES

IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »

684, PERÚ, 684

—  
1948



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

---

## **Interventor**

DOCTOR CARLOS IGNACIO RIVAS

## **Guarda Sellos**

DOCTOR FAUSTINO J. LEGON

## **Secretario General de la Intervención**

DOCTOR VICTOR M. ARROYO

## **Secretario Privado del Interventor**

DOCTOR ENRIQUE A. PIZARRO

## **Prosecretario General de la Universidad**

SEÑOR ENRIQUE I. ROSSI

## **Prosecretario General de la Intervención**

SEÑOR JUAN C. CERANA

*Delegados Interventores* : Facultad de Agronomía, Ing. César A. Ferri ; Facultad de Ciencias Físicomatemáticas, Ing. Héctor Ceppi ; Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales, Doctor Julio M. Laffitte ; Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Doctor Enrique A. Pilorge Mora ; Facultad de Química y Farmacia, Doctor Carlos Alberto Castro ; Facultad de Ciencias Médicas, Doctor Vicente H. Cicardo ; Facultad de Medicina Veterinaria, Prof. Doctor José de la Barrera ; Escuela de Bellas Artes, Señor César Sforza.

*Directores de Institutos Superiores* : Instituto del Museo, Doctor Emiliano J. Mac Donagh ; Instituto del Observatorio, Capitán de Fragata (R.) Guillermo O. Wallbrecher.

*Encargado de Publicaciones* : Abogado Estanislao de Urzaa.

INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO  
Y ESCUELA SUPERIOR DE ASTRONOMÍA Y GEOFÍSICA

---

**Director**

CAPITÁN DE FRAGATA (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

**Secretario**

ABOGADO ANDRÉS GUILLEN

PERSONAL DOCENTE Y CIENTÍFICO

*Jefes de Departamento y Profesores:* Ing. Miguel A. Agabios (Coordinador Interdepartamental - Astrometría, Segundo Curso) ; Agrim. Angel A. Baldini (Geodesia - Gravimetría y Mareas) ; Ing. Simón Gershánik (Geofísica - Sismología) ; Doctor Livio Gratton (Astrofísica - Astrofísica, Primer Curso) ; Agrim. Miguel Itzigsohn (Astrometría - Astrometría, Primer Curso) ; Doctor Alexander Wilkens (Astronomía teórica y Cosmogonía - Mecánica Celeste).

*Profesores:* Agrim. Guillermo H. Borel (Astronomía General) ; Doctor Reynaldo P. Cesco (Cálculos Científicos) ; Geodesta Manuel González Fernández (Geodesia Superior y Determinaciones Geográficas) ; Agrim. Víctor J. Meneclier (Astronomía Esférica) ; Doctor Leónidas Slaucitajs (Magnetismo Terrestre y Electricidad Atmosférica).

PERSONAL CIENTÍFICO Y AUXILIAR

*Jefes de División y Astrónomos de Primera:* Agrim. Guillermo H. Borel (Círculo Meridiano) ; Doctor Reynaldo P. Cesco (Astronomía teórica) ; Prof. Silvio Mangariello (Círculo Meridiano) ; Agrim. Hugo A. Martínez (Círculo Meridiano) ; Doctor Franz Pingsdorf (Estrellas Variables) ; Doctor Pascual Sconzo (Efemérides, Pequeños Planetas) ; Doctor Sergio Slaucitajs (Círculo Meridiano) ; Ing. Numa Tapia (Fotometría fotográfica) ; Doctor Herbert Wilkens (Estadística Estelar).

PERSONAL DOCENTE AUXILIAR

*Jefe de Biblioteca:* Prof. Nidia Ethel Guillamón.

*Jefes de Trabajos Prácticos:* Capitán de Fragata (R.) Domingo A. Santángelo (Gravimetría y Mareas) ; Doctor Pascual Sconzo (Astronomía Esférica).

*Ayudante de Trabajos Prácticos:* Srta. Alicia M. Di Bella (Idioma Inglés) ; Srta. Araceli Stichling (Idioma Alemán).

PERSONAL TÉCNICO DE TALLERES

*Jefes:* Ing. Elio Maffi (Departamento de Óptica) ; Sr. Carlton J. Pearson (Taller de Óptica) ; Sr. Atlanto Fresneda (Taller de Mecánica de Precisión) ; Sr. Antonio Palumbo (Taller de Ebanistería) ; Sr. Mario A. Tomasini (Taller de Electricidad).

## INTRODUCCION

---

Toda vez que la geografía aborda el estudio de problemas que incumben a sus actividades, necesita localizar sobre la superficie terrestre la región donde acontecen los hechos o fenómenos que estudia, relacionando la posición del lugar donde ellos suceden con las situaciones que otras regiones conocidas tienen sobre la Tierra.

Las vinculaciones entre las diversas zonas que interesan a las actividades geográficas en cada caso, surgen desde luego la descripción de las mismas; pero los asuntos se simplifican cuando tales vinculaciones se logra establecerlas gráficamente.

Tal es la finalidad de la *geografía matemática* y que esta ciencia realiza por medio de la *cartografía*.

Al hablar de las ramas principales de la geografía, en el tomo 1º de su clásico *Tratado General de Geografía* dice el profesor Hermann Wagner: <sup>1</sup> « De la geografía matemática surgen dos de sus ramas independizándose de ella — la *geodesia* y la *cartografía* — o sea, el arte de llevar a la carta gráfica los resultados de la geodesia. »

Y finalmente agrega: « la finalidad de toda la geografía matemática es la cartografía de precisión ».

Gracias a ella, aparecen entonces claramente expresadas las formas de las zonas donde los diversos fenómenos tienen lugar. Y de las comparaciones entre las características de dichas zo-

<sup>1</sup> Parágrafo 19.

nas es posible inferir, entonces, *correlaciones* de unos fenómenos con otros.

El conocimiento de la verdadera forma de la Tierra debe, pues, ser previo, para que su descripción gráfica pueda ajustársela a la realidad de las cosas.

Al geógrafo interesa entonces, fundamentalmente, conocer no solamente el proceso de las operaciones que es necesario realizar para poder representar luego de modo gráfico la configuración geométrica de la Tierra, sino también los diversos entes científicos que intervienen en tal proceso y su debida diferenciación.

La primera etapa de tales operaciones corresponde a las mediciones que se efectúan sobre la superficie terrestre, cuya utilización se realiza luego con la intervención de una determinada *superficie de referencia*; en general un *elipsoide*, como *intermediario*.

Es a la geodesia y a la topografía que corresponden tales operaciones, por lo cual se impone dar al respecto la consiguiente información, que es a lo que ha de referirse el siguiente capítulo inicial.

# ELEMENTOS DE GEOGRAFIA MATEMATICA

## CARTOGRAFIA

---

### CAPITULO I

#### Mediciones sobre la superficie terrestre

##### A. FUNDAMENTOS DE LA GEODESIA

1. Definida la Geodesia como la ciencia cuyo objetivo es el estudio de la configuración geométrica de la Tierra, equivale su problema al de la determinación con respecto a un dado sistema de coordenadas, de la posición en el espacio de puntos de la superficie terrestre vinculados entre sí.

2. Debe entenderse que el espacio geométrico que consideramos lo suponemos satisfaciendo a la condición primordial de acompañar a la Tierra en todos sus movimientos de traslación y rotación, permaneciendo, por lo tanto, siempre vinculado a ella de modo *invariable*.

3. Es indudable que estudiada la cuestión desde el punto de vista absolutamente riguroso, no es legítimo considerar a la Tierra como un cuerpo rígido, pues interiormente la evolución denominada geológica y exteriormente las múltiples manifestaciones de la naturaleza, sugieren al espíritu precisamente todo lo contrario de la idea de rigidez.

Pero, abstracción hecha de aquellas alteraciones manifiestamente visibles y frecuentes, tales como el nivel de las aguas del mar en constante movimiento, la configuración mudable de estrechos valles y *quebradas* enclavados en plena fragosidad de la montaña, etc., en general toda región tiene un aspecto panorámico bien definido y relativamente estable, y cabe pensar que dentro de ciertos límites de precisión o tolerancia, tanto las distancias entre puntos de dichas regiones como sus diferencias de altitud, pueden considerárselas como invariables.

4. En todo punto del espacio — que consideramos próximo a la superficie terrestre — la acción combinada de la fuerza atractiva de las masas que componen a la Tierra, y exteriores a ella, y la fuerza centrífuga proveniente del movimiento de rotación, tienen una *resultante* cuya *dirección* es dada por la *dirección de la plomada*.

Tal dirección es denominada la *vertical* del lugar, y *gravedad* la fuerza resultante.

El plano normal a la *vertical* del lugar que pasa por el punto en cuestión, que denominaremos (O), es el *plano horizontal* del lugar (fig. 1). La prolongación de la *vertical* es la *zenital* del lugar.

Para otro punto (P) del plano horizontal habrá una *vertical* que ya no será *normal* al plano que consideramos corresponde al punto (O), y la fuerza de la gravedad que solicita al punto P supuesto en libertad de moverse sobre el mencionado plano horizontal, tendrá una *componente horizontal* que sería la *proyección* de la gravedad en (P) sobre el plano horizontal que pasa por el punto (O).

En tales condiciones, el punto P no quedaría pues en equilibrio y tendería entonces a moverse en el sentido de la *componente horizontal*, es decir, de (P) *hacia* (O).

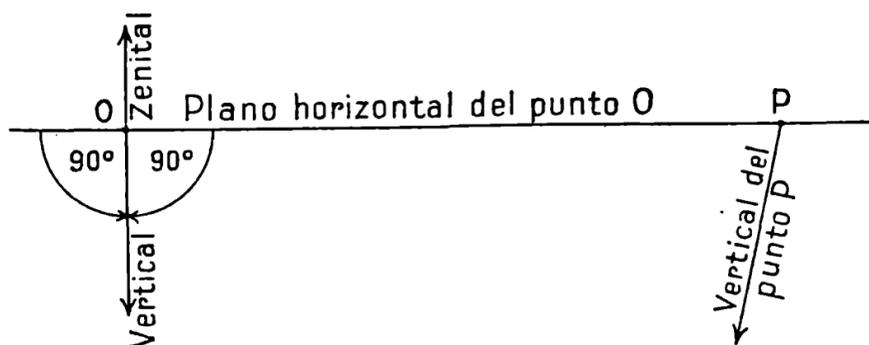


Figura 1

Ahora bien; podemos imaginar, en lugar del plano horizontal que pasa por (O), una superficie débilmente curvada de modo que en cualquier otro punto (P) de ella la dirección de la *vertical* le sea también *normal*.

El punto P, entonces, no tendería a moverse en ningún sentido sobre dicha superficie por ser la *vertical* siempre *normal* a ella, no dando por lo tanto componente horizontal alguna la gravedad. A tal superficie, curva naturalmente, se la denomina superficie de equilibrio o de *nivel*, por ser tal la forma que afecta la superficie exterior de las aguas de un lago en absoluta calma y quietud.

Se infiere inmediatamente que por todo punto del espacio ligado de modo invariable a la Tierra, donde la gravedad exista, y que por lo tanto tenga una dirección, pasará necesariamente una y única *superficie de nivel*.

5. Imaginemos ahora dos *superficies de nivel* infinitamente próximas, una más baja que otra.

Sea (P) un punto de una de ellas, (PV) la *dirección* de la *vertical* correspondiente al punto (P). Tal *vertical* cortará a la otra *super-*

*ficie de nivel* infinitamente próxima en un cierto punto (P') (fig. 2).

Si la dirección (PP'V) no es normal a la *superficie de nivel* que pasa por (P'), no será ella, pues, la *vertical* correspondiente a dicho punto (P'). La dirección de la vertical (PP'V) experimentará una pequeña rotación alrededor del punto (P') hasta colocarse en su justa posición (P'V') — por ejemplo — ; es decir, normalmente a la nueva *superficie de nivel*, y así sucesivamente a medida que la línea (PP') vaya atravesando a las demás *superficies de nivel* en nuevos puntos (P''), (P'''), etc.

La línea curva constituida por la sucesión de puntos (P), (P'), (P'') etc., será pues normal a cada una de las *superficies del nivel* que atraviesa (trayectoria ortogonal a ellas).

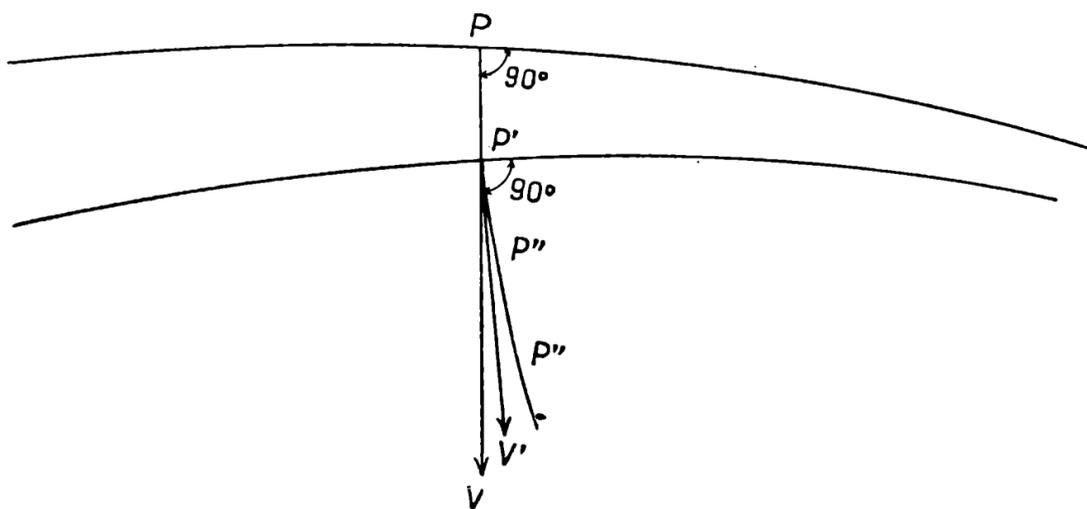


Figura 2

Tal línea curva es denominada *línea de fuerza de la gravedad*, por cuanto la tangente a dicha línea en el punto de cruce con una *superficie de nivel* cualquiera, es normal en dicho punto a la *superficie de nivel* considerada e indica, por lo tanto, la *dirección* de la fuerza de la gravedad en ese punto.

Generalmente la *línea de fuerza* no será una curva contenida toda ella en un plano (curva plana), sino que será una curva a doble curvatura o sea una *línea gausa*.

A la superficie libre de las aguas de un lago en perfecta calma y quietud, podemos considerar como parte de una misma *superficie de nivel*; pero en tal caso no se encuentran ya las dilatadas aguas de los mares, subordinadas a regímenes de movimientos diversos — corrientes marinas, fenómenos meteorológicos y acción de las *mareas*.

Ahora bien; *admitamos* por un momento que las aguas del mar oscilan [en cada punto de él alrededor de una posición *media* que denominaremos *nivel medio*. Todos los *niveles medios* constituirán entonces la *superficie media del mar*. A dicha superficie se la suele denominar *geoide*.

Una primera aproximación, es equiparar la forma del *geoide* a la de un *elipsoide de revolución* débilmente achatado en los polos como consecuencia del movimiento de rotación de la Tierra. A tal *elipsoide* suele impropriadamente denominársele *elipsoide terrestre*, y se lo identifica con la denominada *forma matemática de la Tierra*, que en rigor es la que corresponde a la verdadera forma del *geoide*, el que, desde luego, quedaría representado con más aproximación por un *elipsoide a tres ejes*.

La identidad entre *superficie media del mar* y *superficie de nivel* está lejos de ser evidente, pues sobran para considerarlo así las razones ya expuestas.

Por otra parte, de la *superficie media del mar* únicamente podemos tomar conocimiento en las zonas adyacentes a las costas marítimas.

Es a la *nivelación* que está reservado el estudio de vincular los *niveles medios* del mar en diferentes puntos, con una dada y efectiva *superficie de nivel*; darles a dichos *niveles medios* las *cotas* que les correspondan y comprobar si forman o no parte de una misma *superficie de nivel*.

Pero sin restarle importancia a tal asunto, él no afecta ni modifica al problema fundamental geodésico, cuyo objetivo final es el conocimiento de la configuración geométrica de las *superficies de nivel*.

Por lo pronto y para evitar toda ambigüedad, denominaremos *geoide* a la superficie efectiva *de nivel* que pasa por un determinado lugar y a una dada altitud o profundidad de dicho punto.

Cuando dicha altitud o profundidad sólo es de algunos metros o decenas de metros, puede considerarse que la vertical del lugar es también normal al *geoide*. Pero cuando dicha altitud o profundidad es de centenares de metros ya no es lícita tal suposición, y es necesario entonces, conocer las características de la *línea de fuerza de la gravedad* (sus radios de curvatura y de torsión), para poder *vincular* el *geoide* a la vertical del lugar.

La geodesia, al profundizar el estudio de su problema como ciencia auxiliar de la *geografía matemática*, sobrepasó a las exigencias de ésta; y es así que lo que en la geografía matemática se contemplaba como un solo ente científico: *superficie de nivel*, *nivel del mar*, *geoide* y *elipsoide*, sean puntos cuya diferenciación llevó a la *geodesia*, precisamente, al superior rango que hoy ocupa.

6. Así como para estudiar las características de una superficie que difiere poco de la forma plana, o que sea de reducida extensión, el procedimiento más indicado consiste en referir todos los puntos de dicha superficie a un plano fijo de referencia o comparación y resolver

el problema con un sistema de coordenadas cartesianas, tratándose de una superficie curva que difiera poco de otra de *forma conocida*, el procedimiento más ventajoso es adoptar, en lugar de un *plano de referencia*, la superficie de forma conocida a la cual debe considerársela colocada en una determinada posición *invariable* con respecto a la superficie curva que interesa estudiar, o sea a la Tierra, supuesta rígida para el caso del problema geodésico.

Denominaremos a la superficie de forma conocida: *superficie de referencia*.

Bajemos desde un punto (A) de la superficie terrestre, una perpendicular a la *superficie de referencia* y sea (A') el pie de dicha perpendicular. Denominaremos al punto (A'), *representante* del punto (A).

En lo que respecta a proporcionar la base plani-altimétrica necesaria a la *topografía*, dos problemas principales se presentan, que son:

1<sup>er</sup> *Problema*: Determinación de la *situación* sobre la *superficie de referencia*, de puntos *representantes* de otros tantos puntos *conocidos* de la superficie terrestre; y

2<sup>do</sup> *Problema*: Determinación de las distancias de los puntos *conocidos* de la superficie terrestre hasta sus *representantes* sobre la *superficie de referencia*.

El 1<sup>er</sup> *problema*, es el *problema fundamental de la triangulación*; el 2<sup>do</sup> es el *problema fundamental de la nivelación*.

Ahora bien; la *nivelación*, en rigor, sólo da la distancia desde los puntos *conocidos* de la superficie terrestre hasta la *superficie de nivel* elegida como *geoide*. Para resolver el 2<sup>do</sup> *problema* necesita pues conocer la *separación* entre la *superficie de referencia* y el mencionado *geoide* o sea la distancia entre ambas superficies, medida sobre la dirección de la normal a dicha *superficie de referencia*; lo cual precisamente es el objetivo final de la geodesia, o más propiamente hablando, de la *alta geodesia*.

7. Para relacionar entre sí la *dirección* de la *vertical* de distintos lugares se recurre a las *coordenadas astronómicas*, que pueden definirse del modo siguiente:

a) Se denomina *plano vertical* de un lugar a todo plano que pase por la *vertical* del punto considerado.

b) *Línea de los polos*, a la *dirección* en el espacio del eje de rotación diurna de la Tierra.

c) *Plano meridiano astronómico* de un lugar, al plano *vertical* que es *paralelo* a la *dirección* de la *línea de los polos*.

d) *Azimut astronómico* de un punto  $x$ , al ángulo plano correspondiente al ángulo *diedro* formado por el plano *meridiano astronómico*

*mico* del lugar, y el plano *vertical* del lugar que contiene el punto  $x$ .

Dicho ángulo plano se mide sobre el *plano horizontal* del lugar contándolo hacia la *derecha* (contemplando el plano horizontal desde el *zenit* del lugar). Como *origen* para la medición de los azimutes, universalmente se ha adoptado la *dirección hacia el sur*, que es la orientación del *plano meridiano astronómico*. „

e) *Plano ecuatorial astronómico*, al plano normal al eje de rotación diurna de la Tierra.

f) *Latitud astronómica* de un lugar, al complemento a  $90^\circ$  del ángulo  $\psi$  formado por la *dirección* de la *zenital* del lugar con la *paralela* a la *dirección hacia el polo Norte*.

Las *latitudes* de los puntos del *hemisferio Norte* serán pues *positivas*, por ser para ellos  $\psi$  *menor* que  $90^\circ$ . Las *latitudes* de los puntos del *hemisferio Sur* serán *negativas*, por ser entonces  $\psi$  *mayor* que  $90^\circ$ .

h) *Longitud astronómica* de un lugar, al ángulo formado por el *plano meridiano astronómico* del lugar con el *plano meridiano astronómico* de otro lugar de la Tierra, elegido como *origen*. Dicho ángulo se mide sobre el *plano ecuatorial astronómico*, por cuanto éste es normal a todos los planos meridianos.

El ángulo se mide a partir del *plano origen* contando *hacia la izquierda* (visto el *plano ecuatorial desde el polo Norte*).

La *astronomía* denominada *de posición* resuelve estas cuestiones, pues su problema equivale a materializar sobre el terreno :

1° La *paralela* a la *dirección hacia el polo Norte*, y

2° La *posición* del plano que pasando por tal línea es *paralelo* al *plano origen de las longitudes*.

## B. PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA TRIANGULACIÓN

(Representación elipsóidica)

8. Imaginemos un elipsoide de revolución engendrado por una elipse cuyo plano gira *alrededor de su eje menor*, orientado *paralelamente al eje del mundo (línea de los polos)*, y cuyas dimensiones sean tales que permitan suponerlo poco diferente de la forma del *geoide*, por lo menos en la zona donde los trabajos geodésicos se realizan.

Dicho elipsoide, subordinado a la condición de permanecer vinculado de modo invariable a la Tierra supuesta rígida, será la *superficie de referencia* que adoptaremos para *proyectar* sobre ella los puntos de la superficie terrestre.

Para establecer la situación de los puntos de la superficie del elip-

soide adoptaremos un sistema de coordenadas angulares análogo al astronómico, al cual denominaremos *elipsóidico*, y que será referido al mismo sistema de planos que el astronómico.

La diferencia consistirá únicamente que en vez de considerar la *dirección de la vertical*, consideraremos la *dirección de la normal a la superficie del elipsoide*.

Definiremos pues al sistema de coordenadas *elipsóidicas* del modo siguiente :

a) Al plano de la elipse que engendra al elipsoide girando alrededor de su eje menor, lo denominaremos *plano meridiano elipsóidico*.

Desde luego, la normal a la superficie del elipsoide está contenida en el *plano meridiano elipsóidico*, o sea en el plano de la *elipse meridiana*; que con tal nombre o simplemente con el de *meridiano*, se designa a la elipse que engendra al elipsoide.

b) El eje mayor de la elipse engendra un plano normal al eje menor; plano al cual denominaremos *plano ecuatorial elipsóidico* y que es *paralelo* al *plano ecuatorial astronómico*, por ser ambos normales a la dirección de la línea de los polos.

c) Denominaremos *latitud elipsóidica* de un punto P de la superficie del elipsoide, al complemento a  $90^\circ$  del ángulo que forma la normal al elipsoide en el punto considerado (*hacia el exterior*), con la *dirección del eje menor (hacia el Norte)*.

d) Todo punto P de la elipse meridiana engendra una circunferencia de círculo que denominaremos *paralelo elipsóidico de latitud  $\varphi$*  (siendo desde luego,  $\varphi$ , la latitud elipsóidica del punto P).

e) A la circunferencia de círculo engendrada por los extremos del eje mayor de la elipse, la denominaremos *ecuador del elipsoide*.

f) Denominaremos *longitud elipsóidica  $\omega$*  del punto P de la superficie del elipsoide, al ángulo que forma el *plano meridiano elipsóidico* que contiene el punto P, con un *plano meridiano elipsóidico fijo*, considerado como *origen de las longitudes elipsóidicas*; al cual lo tomaremos *paralelo* al *plano meridiano astronómico* que sirve de *origen* para las *longitudes astronómicas*. La medición de las longitudes elipsóidicas se hace de modo análogo que la medición de las longitudes astronómicas.

g) Denominaremos *azimut elipsóidico* a un punto ( $x$ ) del espacio, visto desde un punto P de la superficie del elipsoide, al ángulo formado por el *plano meridiano elipsóidico* que contiene el punto P y el plano que pasando por la normal al elipsoide en dicho punto P contiene además al punto ( $x$ ) del espacio. Los azimutes elipsóidicos se miden análogamente al modo como se miden los astronómicos.

Hemos visto ya que la *ley de correspondencia* entre los puntos de la superficie terrestre y los puntos de la superficie del elipsoide, consistirá en bajar desde cada punto ( $x$ ) de la superficie terrestre, una línea recta *perpendicular* a la superficie del elipsoide. Sea ( $x'$ ) el pie de dicha normal, o sea el punto de intersección con el *elipsoide de referencia*. Dicho punto ( $x'$ ) será pues el *representante elipsóidico* del punto terrestre ( $x$ ).

A la distancia ( $xx'$ ) medida según la dirección de la normal al elipsoide, la denominaremos *cota elipsóidica* del punto terrestre ( $x$ ).

Para que quede el elipsoide perfectamente determinado, en cuanto a su *posición* con respecto a la superficie terrestre, bastará pues con

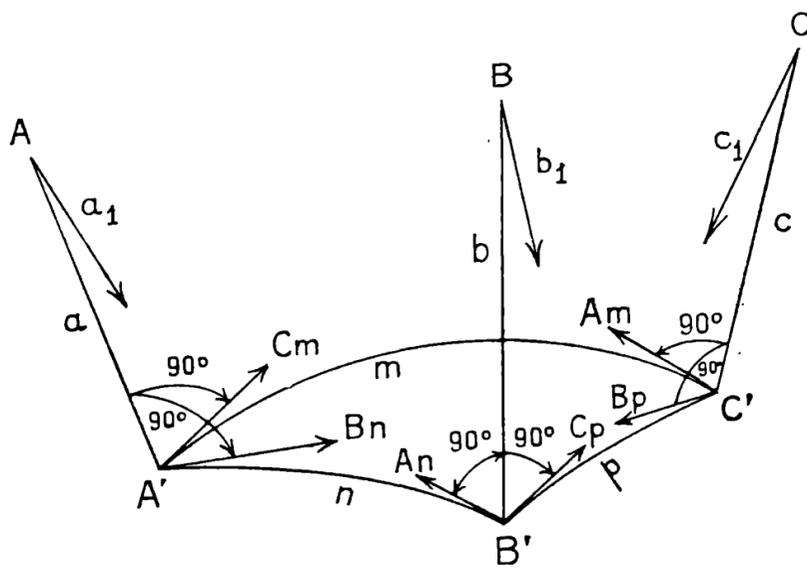


Figura 3

que se conozcan las coordenadas *astronómicas* de un punto terrestre conocido ( $x$ ), las coordenadas *elipsóidicas* de su representante ( $x'$ ) y la *cota elipsóidica* ( $xx'$ ) de dicho punto terrestre ( $x$ ).

**9.** Sentado esto, sean A, B y C tres puntos de la superficie terrestre, y A', B' y C' sus *representantes elipsóidicos* (fig. 3).

El *problema de la triangulación* consiste en lo siguiente: Se conoce la ubicación de los puntos A' y B' sobre la superficie del elipsoide, o sea, se conoce la *latitud y longitud elipsóidicas* de los puntos A' y B' *representantes elipsóidicos* de los puntos A y B del terreno, y se trata de determinar las coordenadas *elipsóidicas* del punto C' *representante* del punto C del terreno.

**10.** Para el estudio del problema se recurre al empleo de *líneas geodésicas*, que gozan sobre la superficie en que son trazadas de análoga propiedad a la de la línea recta en el plano y del arco de círculo máximo en la esfera, es decir, que marcan un recorrido mínimo entre los puntos de la superficie por los cuales pasan.

Recordemos que en toda línea curva, siempre tres puntos de ella

infinitamente próximos entre sí determinan un plano. A ese plano se lo denomina *plano osculador* del elemento de curva considerado, y contiene, por lo tanto, a la *normal principal* a la curva.

Si la curva no está toda ella contenida en un mismo plano, al ir pasando sucesivamente de un elemento de la curva al siguiente, el *plano osculador* gira alrededor de la tangente a la curva para colocarse en la posición que corresponde al segundo elemento; y así sucesivamente. De modo que en su posición final el plano osculador correspondiente al último elemento, y por lo tanto la normal principal a la curva formará allí un ángulo con el plano osculador correspondiente al primer elemento, tanto mayor cuantos más sean los elementos intermedios, o sea, tanto mayor cuanto más larga sea la curva.

Geoméricamente, se demuestra que la propiedad fundamental de la línea geodésica es que en todos los puntos de ella el plano osculador es normal a la superficie en el punto considerado; o en otros términos, que es normal al plano tangente a la superficie allí. Y por lo tanto la normal principal a la *geodésica es normal* a la superficie.

Cuando la superficie que se considera es de *revolución*, o sea engendrada por la rotación de una curva plana alrededor de un eje *contenido* en su plano, a la curva que engendra a la superficie se la denomina simplemente *meridiano* o curva meridiana.

Cada punto de ella engendra por su parte una circunferencia de círculo con centro en el eje de rotación, siendo su plano normal al eje.

A tal circunferencia de círculo se la denomina *paralelo*, y su radio, desde luego, es la distancia al eje.

En el caso particular de la esfera, se verifica que a lo largo de todo arco de círculo máximo trazado sobre ella, o sea a lo largo de toda línea geodésica, *el producto del seno del azimut por el radio del paralelo* permanece constante; que es lo que en trigonometría se denomina *teorema de los senos*.

Pues bien; en toda superficie de *revolución*, para toda línea geodésica se cumple también la propiedad fundamental que ocurre en la esfera, es decir, que el producto del seno del azimut por el radio del paralelo permanece constante a la largo de toda línea geodésica.

Tal célebre propiedad geométrica fué establecida por primera vez por Clairant, y traducida al campo analítico — del resorte ya de la *geodesia* — resuelve el problema fundamental del transporte de *coordenadas elipsóidicas* a lo largo de una línea geodésica trazada sobre un elipsoide de revolución. Geométricamente, esto significa

que es *trazable* la *geodésica*, conocidos un punto de ella y la *orientación* de ella allí.

11. Sentado esto, sea el *triángulo geodésico elipsóidico* constituido por las tres líneas *geodésicas elipsóidicas*  $m$ ,  $p$  y  $n$  trazadas sobre la superficie del elipsoide entre los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  (fig. 3).

Designemos con  $(A')$  al ángulo con que se cortan en  $A'$  las líneas geodésicas  $m$  y  $n$  y con  $(C')$  y  $(B')$  los ángulos con que se cortan las líneas  $m$  y  $p$  en el punto  $C'$  y  $p$  y  $n$  en el punto  $B'$  respectivamente.

Si conociéramos los ángulos  $(A')$  y  $(B')$ , puesto que la situación de los puntos  $A'$  y  $B'$  sobre la superficie del elipsoide es *conocida*, también sería conocida la *orientación* de la geodésica  $n$  tanto en  $A'$  como en  $B'$ ; y el problema se reducirá entonces a *trazar* sobre la superficie de dicho elipsoide las geodésicas  $m$  y  $p$ , de *orientación conocida* en los puntos  $A'$  y  $B'$  respectivamente, por suponer conocidos los ángulos  $(A')$  y  $(B')$ ; y por lo tanto *trazables* según lo dicho al final del número anterior.

La intersección de las geodésicas  $m$  y  $p$  nos daría, pues, precisamente la situación del punto  $C'$ .

En cuanto al ángulo  $(C')$ , quedaría también él determinado por estar vinculado a los  $(A')$  y  $(B')$  y a las geodésicas por una cierta ley de dependencia únicamente regida por las características geométricas inherentes a la superficie del elipsoide.

Pero como la triangulación exige ocupar el tercer vértice  $C$  de la superficie física del terreno, para la prosecución de los trabajos geodésicos, las mediciones en el vértice  $C$  se realizan, y se las hace intervenir no solamente con el objeto de verificar los resultados de las mediciones realizadas en  $A$  y  $B$ , sino también con la *esperanza* de mejorar la precisión de las mismas, introduciendo en ellas determinadas *correcciones* de acuerdo a lo que indique la *teoría de los errores*.

Se trata entonces de *determinar* los valores de los ángulos  $(A')$ ,  $(B')$  y  $(C')$  del triángulo geodésico elipsóidico, deduciéndolos de las mediciones realizadas en los puntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  de la superficie terrestre.

Para facilitar el estudio de tal cuestión designaremos con letras *mayúsculas* los puntos y con *minúsculas* las líneas rectas. Un plano lo designaremos con una letra minúscula y una mayúscula ( $eM$ ) o ( $Me$ ), por ejemplo; lo que indicará que se trata del plano que contiene a la vez al punto  $M$  y a la línea recta  $e$ . Un *ángulo diedro* lo designaremos con una letra minúscula entre dos mayúsculas —  $MeN$  — lo que indicará que se trata del *ángulo diedro* formado por los planos  $Me$  y  $eN$ .

Sean entonces (fig. 3)  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente las líneas rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  normales a la superficie del elipsoide en los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ , y sean asimismo  $a_1$ ,  $b_1$  y  $c_1$  las *direcciones* de la vertical (o sea de la gravedad) en los puntos de la superficie terrestre  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente; lugares donde se han realizado las mediciones.

Suponemos con el teodolito colocado en el punto físico  $A$ , estando su eje en la *dirección*  $a_1$  de la vertical allí, medido el *ángulo diedro*  $Ca_1B$  que forman los planos  $Ca_1$  y  $Ba_1$ , o sea el ángulo formado por los planos (verticales en  $A$ ) que contienen a los puntos físicos  $C$  y  $B$ , y al cual denominaremos  $(A)$ .

Y operación análoga se supone efectuada en los puntos físicos  $C$  y  $B$ , a cuyos ángulos denominaremos  $(C)$  y  $(B)$ .

Supongamos trazadas en  $A'$  las tangentes  $A'Cm$  y  $A'Bn$  a las geodésicas  $m$  y  $n$ , tangentes que desde luego serán normales a la línea  $AA'$  por ser ésta normal al elipsoide en el punto  $A'$ . Análoga cosa haremos en los vértices  $B'$  y  $C'$ .

El ángulo  $(Cm A' Bn)$  no será otro que el  $(Cm a Bn)$  o sea el ángulo  $(A')$  con que se cortan las geodésicas  $m$  y  $n$ ; y también serán:

$$An . b . Cp = (B'), \quad Bp . c . Am = (C')$$

El problema se reduce entonces a determinar las diferencias:

$$\begin{aligned} (A) - (A') &= Ca_1B - Cm a Bn \\ (B) - (B') &= Ab_1C - An b Cp \\ (C) - (C') &= Bc_1A - Bp c Am \end{aligned}$$

que pueden ponerse bajo la forma:

$$\begin{aligned} (A) - (A') &= (Ca_1B - CaB) + (CaB - C'aB') + (C'aB' - Cm a Bn) \\ (B) - (B') &= (Ab_1C - AbC) + (AbC - A'bC') + (A'bC' - An b Cp) \\ (C) - (C') &= (Bc_1A - BcA) + (BcA - B'cA') + (B'cA' - Bp c Am) \end{aligned}$$

Pero como en general, es:

$$(MeN - ReS) = (MeR - NeS)$$

se podrá poner también:

$$\begin{aligned} (A) - (A') &= (Ca_1B - CaB) + (CaC' - BaB') + (C'aCm - B'aBn) \\ (B) - (B') &= (Ab_1C - AbC) + (AbA' - CbC') + (A'bAn - C'bCp) \\ (C) - (C') &= (Bc_1A - BcA) + (BcB' - AcA') + (B'cBp - A'cAm) \end{aligned}$$

**11a.** *Tres* son las *correcciones* que es necesario efectuar, pues, sobre los ángulos  $(A)$ ,  $(B)$  y  $(C)$  medidos en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la

superficie del terreno para llegar a los ángulos (A'), (B') y (C') del *triángulo geodésico elipsóidico*.

Consideremos las *correcciones* correspondientes al vértice A.

a) La última corrección es la diferencia entre los ángulos (C'aCm) y (B'aBn) (fig. 3).

Tal corrección depende exclusivamente de las características inherentes a la superficie del elipsoide.

El ángulo C'aCm, es el ángulo diedro formado por los planos aC' y aCm *normales* al elipsoide en A'.

El plano aC' contiene al *extremo* C' de la geodésica, y el plano aCm es *osculador* a dicha geodésica en su comienzo A'.

La *geodesia* enseña que desconsiderando cantidades de un orden muy pequeño, el ángulo Ca'Cm es igual al *producto del cuadrado del largo m de la geodésica por una cantidad que depende de las coordenadas elipsóidicas, de A' y de la orientación de la geodésica m allí*. Pero este ángulo recién para líneas de 100 km puede alcanzar apenas a unos tres centésimos de segundo de arco de graduación sexagesimal, por lo cual generalmente se desconsidera esta *corrección*.

b) La segunda corrección es la diferencia entre los ángulos (CaC') y (BaB') (fig. 3).

Tal corrección depende también exclusivamente de las características inherentes a la superficie del elipsoide. El ángulo (CaC') es el ángulo diedro formado por los planos normales a la superficie en A' y que contienen uno de ellos al punto C' y el otro al punto C.

La geodesia también enseña que desconsiderando cantidades de un orden muy pequeño, el ángulo CaC' *ya no depende del largo m de la geodésica sino de la distancia entre los puntos C y C'*; y que él es igual al *producto de dicha distancia CC' por una cantidad que depende de las coordenadas elipsóidicas de A' y de la orientación de la geodésica m allí*.

Este ángulo, para una diferencia de altura de 900 metros entre C y C' puede alcanzar a *un décimo* de segundo de arco, de modo que adquiere valores no despreciables en las regiones montañosas pues para puntos visados que tengan una *cota* (altura) de 4500 metros, tal ángulo puede alcanzar a *medio segundo*.

c) La primera corrección, que es la diferencia entre los ángulos Ca<sub>1</sub>B y CaB, es un simple problema puramente trigonométrico.

En efecto, imaginemos una esfera de radio igual a la *unidad* con centro en el punto terrestre A, donde se suponen realizadas observaciones astronómicas de latitud y longitud. Asimismo, se suponen conocidas la latitud y longitud elipsóidicas del punto A', representante elipsóidico del A.

La línea  $AA'$  (fig. 4), que como ya hemos dicho es *normal* a la superficie del elipsoide, la designaremos con la letra minúscula  $a$  y con  $a_1$  la *dirección* de la vertical correspondiente al punto A del terreno.

Prolonguemos la línea  $a_1$  hasta su intersección  $z_A$  con la esfera, punto que marcará la dirección del *zenit astronómico* correspondiente al punto A.

Prolonguemos asimismo la línea  $a$  hasta su intersección  $z_{A'}$  con la esfera; dicho punto marcaría lo que sería el zenit correspondiente al punto  $A'$  del elipsoide.

Sean  $AP$  la dirección paralela a la línea de los polos, y  $AC$  y  $AB$  las direcciones hacia los puntos C y B del terreno; y designemos con  $P''$ ,  $C''$  y  $B''$  respectivamente a las intersecciones de dichas direcciones con la esfera.

Imaginemos trazada desde A la línea  $AL$  que conjuntamente con la  $AP$  determinan el *plano origen de las longitudes*, tanto astronómicas cuanto elipsóidicas, según la convención establecida en f) del n° 9.

La línea  $AL$  cortarí a la esfera en un cierto punto  $L''$ .

En el triángulo esférico  $z_A P'' z_{A'}$ , se conocen: el lado  $P'' z_A$  que es el complemento a  $90^\circ$  de la latitud *astronómica* de A, el lado  $P'' z_{A'}$  que es el complemento a  $90^\circ$  de la latitud *elipsóidica* del punto  $A'$  determinada por la triangulación geodésica-elipsóidica y el ángulo  $z_A P'' z_{A'}$  que es la *diferencia* entre la longitud *elipsóidica* de  $A'$  determinada también por la triangulación geodésica-elipsóidica y la longitud *astronómica* de A.

Conociendo pues en dicho triángulo tres elementos, podemos resolverlo. Al pequeño lado  $z_A z_{A'}$  que lo designaremos con  $\epsilon_A$  se lo denomina *desviación elipsoidal de la plomada*. Al ángulo  $P'' z_A z_{A'}$  que lo designaremos  $\gamma_A$  se lo denomina *acimut del plano de desviación*.

Designemos con  $\alpha_c \alpha_b$  respectivamente, a los acimutes *astronómicos* que corresponden a los puntos C y B vistos desde el punto A; es decir, a los ángulos  $(P'' z_A C'' = P a_1 C)$  y  $(P'' z_A B'' = P a_1 B)$ .

Designemos con  $(z_{AC})$  y  $(z_{AB})$  a los arcos  $z_A C''$  y  $z_A B''$ , o sea a los ángulos o distancias cenitales con que los puntos C y B fueron observados desde A (supuestos dichos ángulos corregidos del efecto de refracción).

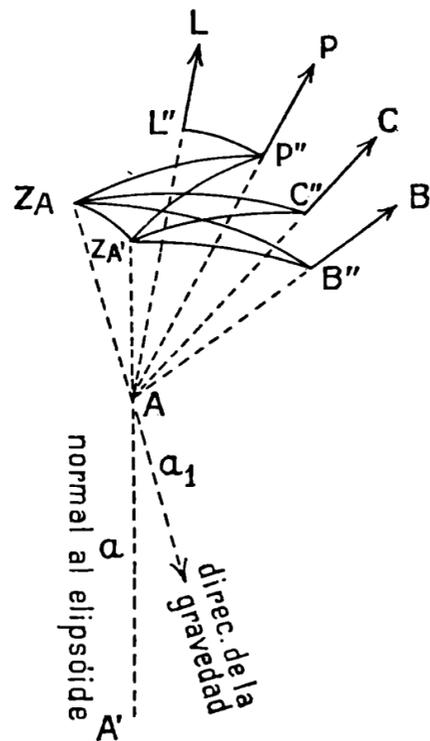


Figura 4

Luego de resolver los triángulos esféricos  $C''z_Az_A'$  y  $B''z_Az_A'$ , en cada uno de los cuales se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se llega finalmente a la fórmula :

$$CaB - Ca_1B = \epsilon_A [\text{sen} (\gamma_A - \alpha_c) \text{cotg } z_{AC} - \text{sen} (\gamma_A - \alpha_b) \text{cotg } z_{AB}]$$

En el llano, rara vez la cotangente de las distancias cenitales alcanza a un centésimo, por lo cual es suficiente conocer a la *desviación elipsoidal de la plomada* con algunos cuatro o cinco segundos de arco de precisión. Pero en la región montañosa la cosa varía, pues dicha cotangente puede alcanzar a valer un décimo y más aun, por lo cual es necesario conocer allí las coordenadas *astronómicas* de los vértices de la triangulación con precisiones no inferiores al segundo de arco.

Esta corrección, que no está regida por leyes simples de carácter geométrico como las otras dos, adquiere máximas magnitudes especialmente en las regiones montañosas, pues la presencia cercana de grandes *masas emergentes* como lo son las montañas, actúan como verdadera causa perturbadora sobre la dirección de la vertical, por lo cual esta corrección es denominada también, a veces, *corrección por atracción local*.

**12.** El problema en sí de la triangulación geodésica-elipsóidica, una vez en posesión de las tres correcciones indicadas, queda él absolutamente resuelto.

El geoide nada tiene ya que hacer en tal problema, del cual queda descartado, pues la triangulación únicamente se desenvuelve sobre la superficie del *elipsoide de referencia*, sobre el cual quedan *proyectados* sus vértices.

Insistimos especialmente sobre esto, por cuanto en más de una obra geodésica no se plantea en forma debida tal cuestión; y verdaderamente se divaga con la triangulación, llevándola ora sobre el elipsoide, ora sobre el geoide, produciendo al fin una lamentable confusión entre dichas superficies, con verdadero menoscabo para la claridad del concepto geodésico.

**13.** Una vez *proyectada* la triangulación sobre la superficie del elipsoide, toca su turno a la labor topográfica. Pero ésta prescinde en sus mediciones angulares de las correcciones de que nos hemos ocupado, por cuanto las precisiones son menores y no lo requieren.

En consecuencia, la topografía procede tal como si sus trabajos se desarrollaran directamente sobre el elipsoide. O más propiamente hablando, sus tareas las realiza como si las cosas pasaran sobre un

elemento de éste cuyas pequeñas dimensiones le hicieran equiparable a un elemento de superficie plana.

En el caso de las triangulaciones geodésicas, y especialmente si ellas son fundamentales y han de proporcionar los elementos necesarios para determinar la forma del geode, ya no debe prescindirse de la correcciones mencionadas.

Y es de advertir, por otra parte, que tanto la 2ª como la 3ª corrección no exigen mayor labor, por tratarse de pequeñas cantidades que pueden tabularse fácilmente.

En cuanto a la 1ª corrección, es decir, la que requiere el conocimiento de la desviación de la plomada y del acimut de su plano de desviación, ella en rigor exige que en cada vértice de triangulación geodésica *se realicen* las observaciones astronómicas necesarias para determinarla.

Las *comunicaciones radiotelegráficas de la hora* que se trasmiten diariamente, permiten resolver la cuestión sin ninguna dificultad y de sencillo modo.

En menos de un par de horas de trabajo se pueden realizar en una noche las observaciones astronómicas necesarias para obtener las coordenadas geográficas de cada lugar, al segundo de arco de precisión. Omitir tales observaciones y prescindir de las correcciones mencionadas, significaría restar categoría a los trabajos geodésicos. Con observaciones a *igual altura* de un grupo de unas diez estrellas, por ejemplo, la cosa queda resuelta.

**14.** La superficie del elipsoide de referencia recoge, pues, la imagen que *proyecta* sobre él la superficie terrestre; pero solamente desde el punto de vista puramente planimétrico.

Y tal imagen elipsóidica, que *no la real del terreno*, es lo que la *cartografía* representa después sobre el plano.

Las características del relieve altimétrico figuran luego en este último, de modo numérico o convencional; siendo lo general expresarlo por medio de curvas denominadas *de nivel*, cuyos puntos distan igualmente de la superficie del geode.

Con respecto a tales signos convencionales, cabe observar que no siempre son debidamente utilizados, y hasta se los pasa por alto como a simples acotaciones marginales sin valor; cosa que así acontece tal cual vez al estudiar ciertos problemas referentes a la superficie real del terreno.

Un caso típico, es el de la evaluación de las mismas.

Todo elemento superficial del terreno de una determinada región de la Tierra, es un ente que existe *independientemente* de todo concepto

de geoide o de elipsoide de referencia, y cuya extensión es lógico estimarla por la magnitud con que queda representado sobre el *plano horizontal del lugar*.

Pues, en realidad, es a la normal a dicho plano o sea a la *dirección de la gravedad* que están supeditados todos los factores que animan a la vida, tanto vegetal como animal. Un altiplano de unas 1000 hectáreas de superficie, colocado a unos 3 km de altura sobre el elipsoide de referencia, tiene *en realidad* 1000 hectáreas de superficie aun cuando quede reducida a 999 hectáreas la proyección de su superficie sobre el mencionado elipsoide. Esto es evidente.

Asia, cuyas amplias mesetas y altas cordilleras hacen de ella el continente más elevado del mundo, se considera que por *término medio* está a unos 1000 metros sobre el nivel del mar.

Su superficie representada en el elipsoide por unos 42.000.000 de km<sup>2</sup>, debe considerarse entonces que tiene *en realidad* unos 14.000 de km<sup>2</sup> *más* que lo que en la cartografía indique su perímetro.

Las curvas de nivel no deben entenderse, pues, que sólo tienen como finalidad proporcionar los elementos necesarios para la determinación de pendientes. Cuando se ha de estimar el valor *real* de superficies, debe tenérselos en cuenta, como queda aclarado con el ejemplo que antecede.

## CAPITULO II

### Representación de una superficie sobre otra

1. La *representación* sobre una superficie de los dibujos trazados sobre otra, según determinadas leyes de correspondencia, es denominada generalmente *proyección*.

El término, aunque impropio, tiene su origen en la generalización del procedimiento geométrico de proyectar.

Los casos que interesan a la *cartografía* son los de la representación de las superficies de *referencia* que se utilizan, que en general son la del elipsoide de revolución, de la esfera y del plano sobre otra esfera o sobre otro plano.

Es evidente que no siendo posible en general desarrollar una dilatada superficie curva sobre un plano, toda representación gráfica tiene necesariamente que ser a costa de deformaciones de figuras, ya que precisamente de la curvatura de tales superficies no puede el plano dar idea.

El conjunto de los diversos modos ideados para resolver tan importante cuestión es tan vario, que no admite sino una imperfecta clasificación.

Pero en todos ellos, la mayor preocupación es la de reducir al minimum posible las deformaciones.

Considerando la forma en que queda representada una figura *elemental*, es decir, de dimensiones infinitamente pequeñas, pueden establecerse dos grupos principales, que son : el *conforme* y el *equivalente*.

La representación *conforme*, *isogónica* u *ortomorfa*, término el primero usado por Gauss en 1834 y al cual debe vincularse el nombre de Lambert, consiste en esencia en reproducir el detalle de todo elemento de la superficie curva de modo que la  *semejanza*  con el elemento que lo representa en la otra superficie, sea tanto más perfecta cuanto más reducida sea la zona. Y así, si dos líneas se cortan en la superficie curva bajo un cierto ángulo ( $\alpha$ ), en la otra superficie las líneas que las representan se cortarán también bajo el mismo ángulo ( $\alpha$ ).

En la representación *equivalente*, el área ( $s$ ) de un elemento de la superficie original, cualquiera que sea su ubicación en la misma, queda representado en la otra superficie por un elemento de área ( $s'$ ) *proporcional* a la del elemento original. Es decir, que cualquiera que sea el elemento considerado, debe tenerse la relación :

$$\frac{\text{área } (s')}{\text{área } (s)} = c \text{ (constante).}$$

2. Consideremos en la superficie original tres puntos (P, Q, R) infinitamente próximos entre sí, y que por lo tanto puedan considerarse que constituyen un triángulo plano trazado sobre el plano tangente a la superficie.

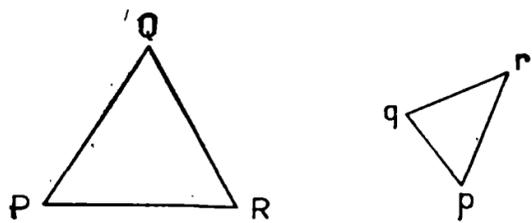


Figura 1

Sean sobre la otra superficie ( $p, q, r$ ) los puntos *representantes* de (P, Q, R) (fig. 1) puntos que análogamente constituyen un triángulo de lados infinitamente pequeños, que podrá por tanto considerárselo también como un triángulo plano trazado sobre el plano tangente a la segunda superficie.

A la relación

$$\frac{pq}{PQ} = M$$

se la denomina *módulo lineal*, y él indica la magnitud de ( $pq$ ) con respecto a (PQ) una vez conocido (M). Para el otro lado (PR), se tendrá

$$\frac{pr}{PR} = M'$$

y en general el *módulo lineal* ( $M'$ ) será diferente del (M). Vale decir, que él no solamente dependerá de la ubicación del elemento lineal sobre la superficie original, sino también de la dirección, o sea de la *orientación* que dicho elemento tiene.

3. Sean ahora, en la superficie original, un punto (A) y dos elementos lineales (AB) y (AC) normales entre sí, y que quedan representados en la otra superficie por el punto ( $a$ ) *representante* del (A), y los elementos ( $ab$ ) y ( $ac$ ) *representantes* de los (AB) y (AC), respectivamente.

Sea ( $\psi$ ) el ángulo con que se cortan dichos elementos ( $ab$ ) y ( $ac$ ) (fig. 2).

Sean, además ( $M_1$ ) y ( $M_2$ ) los *módulos lineales* correspondientes a las direcciones ( $ac$ ) y ( $ab$ ), respectivamente.

Consideremos en la superficie original un elemento ( $AP = \epsilon$ ) que forme un ángulo ( $\tau$ ) con el elemento ( $AC$ ), y sea ( $ap$ ) el elemento *representante* de ( $AP$ ) en la otra superficie. Designemos con ( $x$ ) al ángulo que forma ( $ap$ ) con ( $ac$ ).

Al elemento ( $AP$ ) lo podemos considerar formado por la *composición* de los elementos ( $AR = \epsilon \cos \tau$ ) y ( $PR = \epsilon \sin \tau$ ).

Asimismo, al elemento ( $ap$ ) lo podemos considerar también forma-

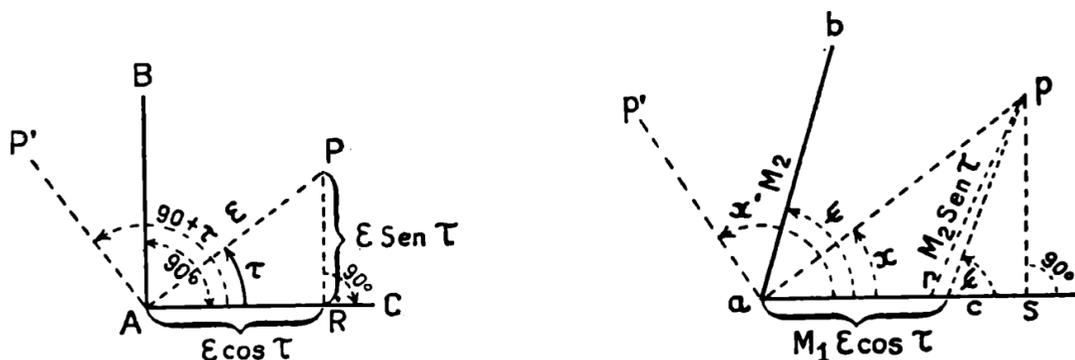


Figura 2

do por la *composición* de los elementos ( $ar$ ) y ( $rp$ ) *representantes* de los elementos ( $AR$ ) y ( $RP$ ), de modo que será:

$$ar = M_1 \cdot AR = M_1 \cdot \epsilon \cos \tau, \quad rp = M_2 \cdot PR = M_2 \cdot \epsilon \sin \tau$$

Bajemos desde ( $p$ ) la normal ( $ps$ ) al elemento ( $ac$ ), será:

$$ps = rp \cdot \sin \psi = M_2 \epsilon \cdot \sin \tau \sin \psi, \quad rs = rp \cdot \cos \psi = M_2 \epsilon \sin \tau \cdot \cos \psi$$

de donde se tendrá:

$$\operatorname{tg} x = \frac{ps}{ar + rs} = \frac{M_2 \epsilon \cdot \sin \tau \cdot \sin \psi}{M_1 \epsilon \cos \tau + M_2 \epsilon \sin \tau \cos \psi} = \frac{M_2 \cdot \sin \psi}{M_1 \cot \tau + M_2 \cdot \cos \psi}$$

Para otra dirección ( $AP'$ ) que forme con ( $AC$ ) un ángulo ( $90^\circ + \tau$ ), corresponderá en la otra superficie una dirección ( $ap'$ ) que formará con ( $ac$ ) un cierto ángulo ( $x'$ ); y será, pues:

$$\operatorname{tg} x' = \frac{M_2 \sin \psi}{M_1 \cot (90^\circ + \tau) + M_2 \cos \psi} = \frac{M_2 \cdot \sin \psi}{-M_1 \operatorname{tg} \tau + M_2 \cos \psi}$$

Si para un ángulo ( $\tau_0$ ) fuera ( $x' = 90^\circ + x$ ), sería entonces ( $\operatorname{tg} x' = \cot x$ ), y se tendrá:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} x' = \operatorname{tg} x (-\cot x) &= -1 = \\ &= \frac{M_2 \sin \psi}{(M_1 \cot \tau_0 + M_2 \cos \psi)} \cdot \frac{M_2 \sin \psi}{(-M_1 \operatorname{tg} \tau_0 + M_2 \cos \psi)} \end{aligned}$$

y después de efectuar las reducciones necesarias, resulta :

$$\operatorname{tg} 2\tau_0 = \frac{2M_1 \cdot M_2 \cdot \cos \psi}{M_1^2 - M_2^2}$$

El ángulo ( $\tau_0$ ) es *real* si así lo son los elementos del miembro de la derecha; de modo que podemos formular lo siguiente (suponiendo  $\psi$  diferente de  $90^\circ$ ):

En toda *representación*, para todo punto de la superficie original hay *dos direcciones normales entre sí*, que denominaremos *principales*, y que en la otra superficie quedan también *representadas* por dos *direcciones normales entre sí*, a las cuales denominaremos, asimismo,

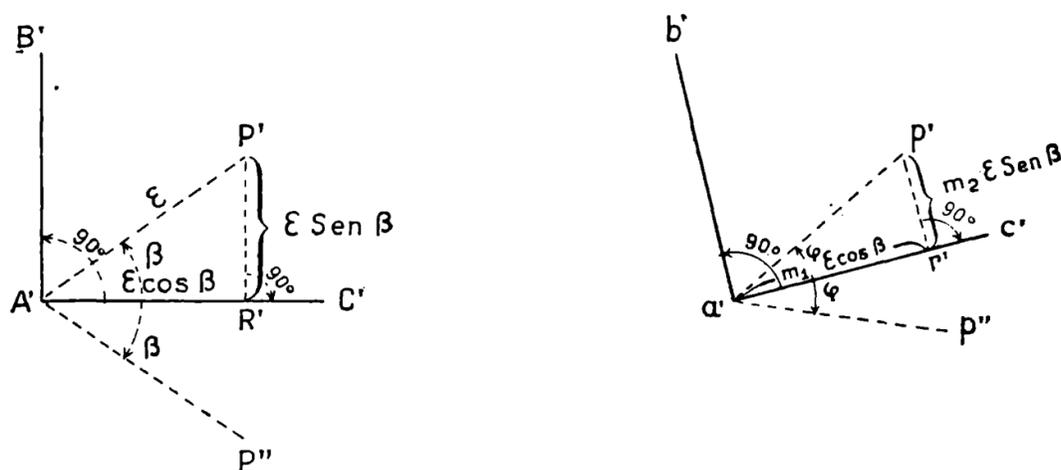


Figura 3

*direcciones principales*. A los *módulos lineales* correspondientes a esas direcciones los designaremos con ( $m_1$ ) y ( $m_2$ ). Si a la vez fuera :

$$M = M_1 = M_2, \quad \psi = 90^\circ$$

se tendría

$$\operatorname{tg} 2\tau_0 = \frac{0}{0}$$

y por lo tanto, para cualquier  $\tau_0$  se verificaría el hecho y sería además

$$\operatorname{tg} x = \frac{M \operatorname{sen} 90^\circ}{M \operatorname{cot} \tau + M \operatorname{cos} 90^\circ} = \operatorname{tg} \tau$$

vale decir, que la *representación* sería, pues, *conforme*.

4. Sean entonces ( $A'B'$ ) y ( $A'C'$ ) tales elementos *principales* en la superficie original, y ( $a'b'$ ) y ( $a'c'$ ) sus *representantes* en la otra superficie.

Sea ( $a'p'$ ) el elemento *representante* del ( $A'P'$ ) (fig. 3).

Sea, además ( $A'P''$ ) simétrico de ( $A'P'$ ) con respecto a ( $A'C'$ ) y ( $a'p''$ ) *representante* de ( $A'P''$ ) y simétrico de ( $a'p'$ ) con respecto a ( $a'c'$ ).

Consideremos al elemento  $(a'p')$  compuesto por los  $(ar')$  y  $(r'p')$  representantes de los elementos  $(A'R')$  y  $(R'P')$ . Se tendrá :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2}{m_1} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (a'p')^2 = (m_1 \varepsilon \cos \beta)^2 + (m_2 \varepsilon \operatorname{sen} \beta)^2$$

y denominando  $(m\varphi)$  al *módulo lineal* correspondiente a la dirección  $(a'p')$ , será :

$$\frac{(a'p')^2}{(A'P')^2} = m^2\varphi = m_1^2 \cos^2\beta + m_2^2 \operatorname{sen}^2\beta$$

Si  $m_1 > m_2$  será, pues,

$$m^2\varphi < m_1^2 \cos^2\beta + m_1^2 \operatorname{sen}^2\beta = m_1^2$$

y también

$$m^2\varphi > m_2^2 \cos^2\beta + m_2^2 \operatorname{sen}^2\beta = m_2^2$$

De modo que para las direcciones *principales*, los *módulos lineales* serán : *máximo* para la una ( $m_1$ ), y *mínimo* para la otra ( $m_2$ ).

Un elemento de área ( $s$ ) en la superficie original lo podemos considerar como formado por una serie de *rectángulos* de lados infinitamente pequeños orientados según las direcciones *principales*.

Dicho elemento quedará representado en la otra superficie por un elemento de área ( $s'$ ) formado por *rectángulos representantes* de los que forman al elemento ( $s$ ), y cuyos lados estarán orientados en la segunda superficie según las direcciones principales en ella.

A cada rectángulo de lados ( $l_1$  y  $l_2$ ), y por lo tanto de área ( $l_1 \cdot l_2$ ), le corresponderá otro rectángulo de lados ( $m_1 l_1$  y  $m_2 l_2$ ) en la otra superficie, y por lo tanto de área ( $m_1 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2$ ); de modo que se tendrá, entonces, entre los elementos totales de áreas ( $s$ ) y ( $s'$ ), la relación (o *módulo areal*);

$$\frac{\text{área } s'}{\text{área } s} = m_1 \cdot m_2$$

Esto nos permite definir a las *representaciones conforme y equivalente*, del siguiente modo :

a) Si para cada punto se tiene entre los *módulos lineales máximo y mínimo*

$$m_1 = m_2$$

el *módulo lineal* será igual para cualquier dirección en cada punto, aunque variando de un punto a otro.

Las figuras elementales en la superficie original y las que las representan en la otra serán, pues, *semejantes*; por lo cual la *representación* será *conforme*.

b) Si para todos los puntos de la superficie se verifica que el *módulo areal* es constante :

$$m_1 \cdot m_2 = c(\text{constante})$$

las áreas elementales serán reproducidas de modo *proporcional*, siendo entonces la *representación equivalente*.

c) Solamente en un caso la representación de una superficie sobre otra puede ser a la vez *conforme* y *equivalente*; y es cuando se pueden aplicar ambas superficies en todos sus puntos. Tal es el caso de las superficies que son desarrollables sobre el plano, como son los conos y cilindros.

5. Antes de entrar a tratar en detalle el problema de la representación cartográfica, es de advertir que en toda carta al indicarse en forma fraccionaria o gráfica lo que se ha convenido en denominar *escala de la carta*, se comete una incorrección, pues *escala* y *módulo lineal* son equivalentes. Y no es posible que una escala uniforme y constante rija para cualquier dirección en todo punto de la superficie, como la palabra *escala* lo sugiere.

Tal cosa únicamente puede tener lugar para los casos particulares a que se refiere el apartado c), los cuales no se presentan en cartografía.

6. Veamos ahora cuál es el ángulo que al ser reproducido en la carta experimenta mayor alteración. De la fórmula :

$$\text{tg } \varphi = \frac{m_2}{m_1} \cdot \text{tg } \beta$$

se tiene :

$$\text{tg } (\beta - \varphi) = \frac{\text{tg } \beta - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \beta \text{tg } \varphi} = \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \cdot \text{tg } \beta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \text{tg}^2 \beta}$$

Diferenciando se tiene :

$$\delta [\text{tg } (\beta - \varphi)] = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \text{tg}^2 \beta\right)}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \text{tg}^2 \beta\right)^2} \cdot \delta (\text{tg } \beta)$$

La condición de máximo exige, pues :

$$1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \text{tg}^2 \beta = 0$$

de donde poniendo  $(\beta_0)$  y  $(\varphi_0)$  para tal caso, será :

$$\text{tg } \beta_0 = \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad \text{tg } \varphi_0 = \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

y se tendrá :

$$\operatorname{tg}(\beta_0 - \varphi_0) = \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} - \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right)$$

y el ángulo formado por las líneas (A'P' y A'P''), *simétricas* con respecto a las direcciones *principales*, será :

$$\operatorname{tg} 2\beta_0 = \frac{2 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}{1 - \frac{m_1}{m_2}} = \frac{-2 \sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2}$$

es decir, *mayor* de  $90^\circ$  [si ( $m_1$ ) es mayor que ( $m_2$ )].

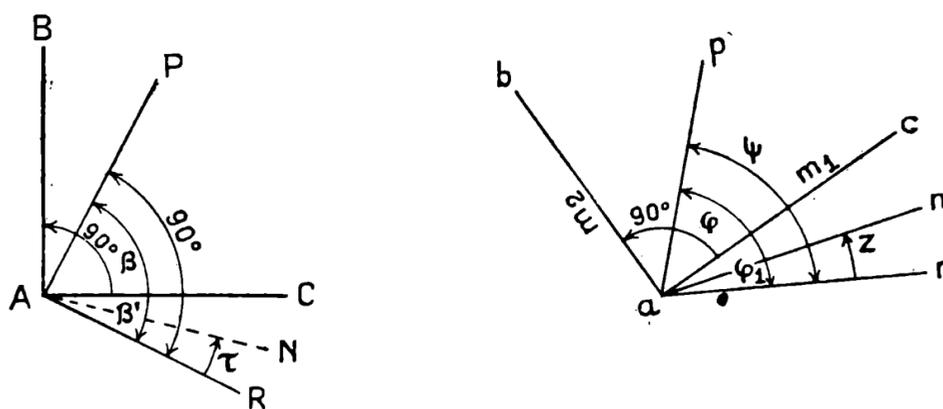


Figura 4

Tal ángulo será reproducido en la segunda superficie por el ángulo formado por las líneas (a'p') y (a'p''), *simétricas* con respecto a las direcciones *principales* allí, y su valor será :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = -\frac{2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}{1 - \frac{m_2}{m_1}} = \frac{+2 \sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2}$$

La deformación máxima que experimentará un ángulo corresponderá al ( $P'A'P'' = 2\beta_0$ ), que quedará representado en la otra superficie por el ( $p'a'p'' = 2\varphi_0$ ); y una vez efectuadas las simplificaciones correspondientes, se tendrá :

$$\operatorname{tg}(2\beta_0 - 2\varphi_0) = \operatorname{tg}[P'A'P'' - p'a'p''] = \frac{4(m_1 - m_2) \sqrt{m_1 m_2}}{6 m_1 m_2 - (m_1^2 + m_2^2)}$$

siendo, desde luego :

$$P'A'P'' + p'a'p'' = 180^\circ$$

7. Sean ahora (AB) y (AC) las dos direcciones *principales* en la superficie original correspondientes al punto (A), y (AP) y (AR) dos direcciones *normales entre sí* (fig. 4)..

Sean  $(ab)$  y  $(ac)$  las direcciones *representantes* de las *principales*  $(AB)$  y  $(AC)$ , y que por lo tanto son *principales* en la segunda superficie, es decir, que el ángulo  $(bac)$  es de  $90^\circ$  y los *módulos lineales*  $(m_1)$  y  $(m_2)$  correspondientes a ellas son *máximo* y *mínimo*. Y finalmente, sean  $(ap)$  y  $(ar)$  las direcciones *representantes* de  $(AP)$  y  $(AR)$  que forman un ángulo  $(\psi = \varphi_1 + \varphi)$ .

Según las fórmulas que vimos anteriormente, será :

$$\begin{aligned} m^2\varphi &= m_1^2 \cos^2\beta + m_2^2 \sin^2\beta \\ m^2\varphi_1 &= m_1^2 \cos^2\beta_1 + m_2^2 \sin^2\beta_1 = m_1^2 \sin^2\beta + m_2^2 \cos^2\beta \end{aligned}$$

de donde resultará :

$$m^2\varphi + m^2\varphi_1 = m_1^2 + m_2^2 \quad (1)$$

Y con las fórmulas :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_1}{m_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{cot.} \beta = \frac{m_1}{m_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$$

luego de convenientes simplificaciones, se obtiene para el *módulo areal* :

$$m_\varphi \cdot m_{\varphi_1} \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_1) = m_\varphi \cdot m_{\varphi_1} \operatorname{sen} \psi = m_1 \cdot m_2 \quad (2)$$

$$4(m_1 - m_2) = 4\sqrt{m^2\varphi + m^2\varphi_1 - 2m\varphi \cdot m\varphi_1 \operatorname{sen} \psi} \quad (3)$$

y con (1), (2) y (3), la fórmula final del n° 6 resulta :

$$\operatorname{tg}(2\beta - 2\varphi_0) = \frac{4\sqrt{m_\varphi^2 + m_{\varphi_1}^2 - 2m_\varphi \cdot m_{\varphi_1} \operatorname{sen} \psi} \cdot \sqrt{m_\varphi \cdot m_{\varphi_1} \operatorname{sen} \psi}}{6m_\varphi \cdot m_{\varphi_1} \operatorname{sen} \psi - (m_\varphi^2 + m_{\varphi_1}^2)} \quad (4)$$

Para una dirección  $(AN)$  que en la superficie original forma un ángulo  $(\tau)$  con  $(AR)$ , en la otra superficie corresponderá como *representante* la dirección  $(an)$ , que forma un ángulo  $(z)$  con  $(ar)$ .

Y cambiando  $(m\varphi_1)$  por  $M_1$ ,  $(m\varphi_2)$  por  $M_2$ , y  $(z)$  por  $(x)$ , en las fórmula del n° 3, se tendrá la relación :

$$\operatorname{tg} z = \frac{m_\varphi \cdot \operatorname{sen} \psi}{m_{\varphi_1} \operatorname{cot} \tau + m_\varphi \cos \psi} \quad (5)$$

de donde sale :

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{m\varphi_1}{m\varphi} \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen}(\psi - z)} \quad (6)$$

Del triángulo de la figura del n° 3 sale para el *módulo lineal* de la dirección  $(ap)$  en dicho triángulo :

$$M_{(ap)} = \frac{M_2 \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} z}$$

Pasando entonces a la dirección  $(an)$  de la figura de este número,

y designando con  $(m_z)$  al *módulo lineal* correspondiente a dicha dirección, poniendo además  $(m_\varphi)$  en lugar de  $(M_2)$ , se tendrá finalmente :

$$m_z = \frac{m_\varphi \cdot \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} z} \quad (7)$$

Supuesto ahora que tenemos una carta en la cual, como es de práctica, figuran trazados los meridianos y paralelos con la gradación correspondiente, podemos, con las fórmulas que acabamos de establecer, pasar de los elementos de la carta a los de la superficie original.

Supondremos para esto que en la carta,  $(ar)$  es un *paralelo* y  $(ap)$  un *meridiano*. Conociendo la latitud conoceremos en seguida los valores de *un grado de paralelo y de meridiano*, por ejemplo, y su medición sobre la carta nos dará directamente los *módulos lineales*  $(m_\varphi$  y  $m_{\varphi_1})$  que con el ángulo  $(\psi)$  que lo tomamos de la carta nos dará, a su vez :

- a) con la fórmula (2), el *módulo de superficie* ;
- b) con la (4), la *deformación angular máxima allí* ;
- c) con la (6), de una dirección que en la carta forma un ángulo  $(z)$  con el *paralelo*, deduciremos el ángulo  $(\tau)$  que corresponde en la superficie original ; y
- d) con la fórmula (7) obtendremos luego el *módulo lineal* que corresponde a esa dirección.

8. Tissot (*Mémoire sur la représentation des surfaces*, año 1881), ha dado a las fórmulas que anteceden para el *módulo lineal*, una interesante interpretación geométrica, en un cierto modo análoga a la de la *indicatriz* de Euler para los *radios de curvatura*.

Consideremos nuevamente la figura y fórmulas del número anterior.

Pongamos de manifiesto para las direcciones  $(ap)$  y  $(ar)$  los *módulos lineales* correspondientes  $(m_\varphi)$  y  $(m_{\varphi_1})$ .

Tomemos en la figura correspondiente a la superficie original un punto  $(Q)$  y sea la unidad la magnitud de  $(AQ)$  (fig. 5).

El representante de  $(Q)$  en la segunda superficie será  $(9)$ , y por lo tanto, designando con  $(m_z)$  al *módulo lineal* correspondiente a esa dirección : será, pues,  $(aq = AQm_z = mz)$ .

Tomemos como ejes coordenados ortogonales  $ar$  y  $aL$ .

De la fórmula (7) del número anterior, sacamos :

$$y = m_z \operatorname{sen} z = \frac{m_\varphi \cdot \operatorname{sen} \tau \cdot \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} z} \cdot \operatorname{sen} z = m_\varphi \cdot \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \psi$$

De la (5) se tiene :

$$\cot z = \frac{m\varphi_1 \cot \tau + m\varphi \cos \psi}{m_\tau \sin \psi}$$

y por lo tanto :

$$mz \cos z = x = y \cot z = m\varphi_1 \cos \tau + m\varphi \cos \psi \sin \tau$$

Con ésta y la (y) sale :

$$x \sin \psi - y \cos \psi = m\varphi_1 \cos \tau \sin \psi$$

y por lo tanto :

$$\left( \frac{x \sin \psi - y \cos \psi}{m\varphi_1} \right)^2 + \left( \frac{y}{m\varphi} \right)^2 = \cos^2 \tau \sin^2 \psi + \sin^2 \tau \sin^2 \psi = \sin^2 \psi$$

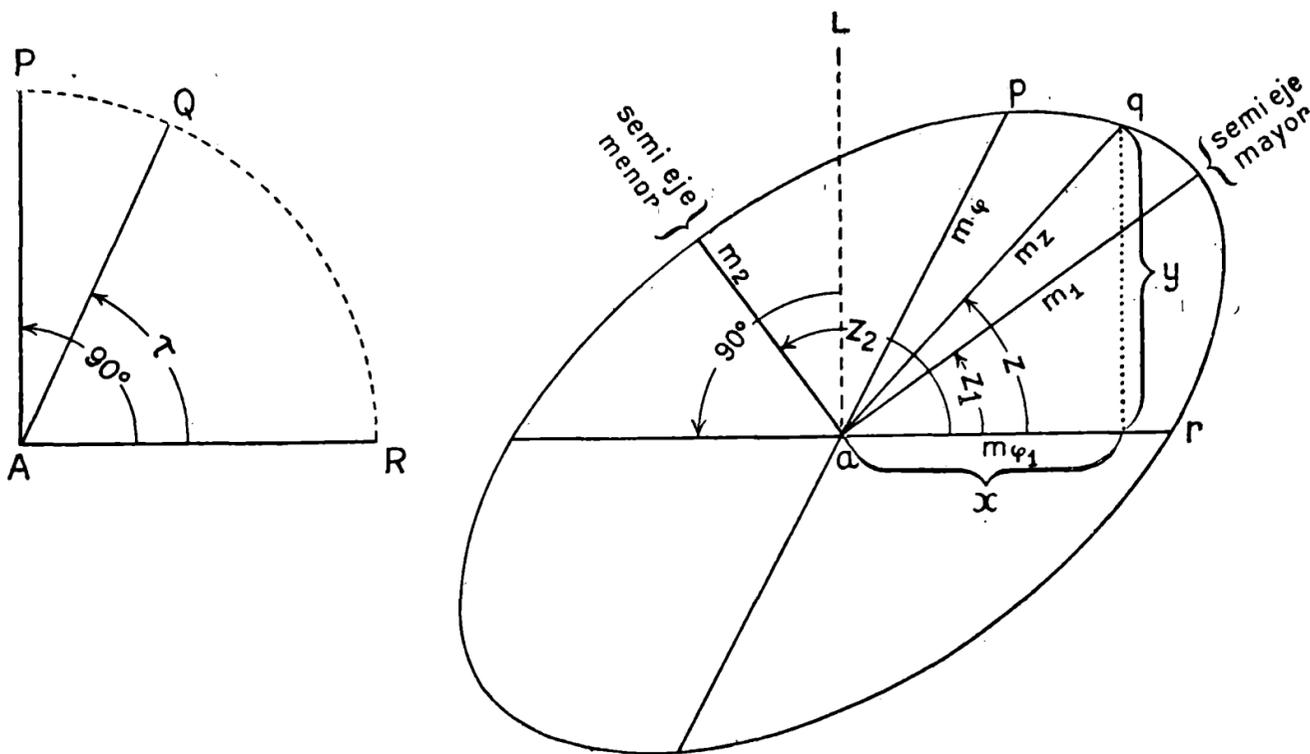


Figura 5

De donde se tendrá, reduciendo :

$$\frac{x^2}{m^2\varphi_1} + \left[ \frac{\cos^2 \psi}{m^2\varphi_1} + \frac{1}{m^2\varphi} \right] \cdot \frac{y^2}{\sin^2 \psi} - 2xy \frac{\cot \psi}{m^2\varphi_1} = 1$$

que es la ecuación de una *elipse*, denominada a veces *elipse indicadora de Tissot*, y que viene a ser la representante de la circunferencia de círculo de radio igual a la *unidad*, trazada en la superficie original con centro en A.

Según la conocida propiedad de la ecuación de la elipse, el ángulo  $\psi$  es el ángulo que forma con *ar* su diámetro *conjugado*, que no es otro que *ap*.

De modo que todo par de líneas emergentes de A que en la superficie original formen un ángulo recto, en la segunda superficie serán representadas por un par de *diámetros conjugados*. Y como única-

mente en un solo caso dichos diámetros forman entre sí un ángulo de  $90^\circ$  (los ejes de la elipse), solamente habrá en la superficie original un par de líneas normales entre sí que en la otra superficie quedan también representadas por dos líneas normales entre sí, que son las que hemos denominado *direcciones principales*.

El radio vector  $aq$  de la elipse es, pues, el *módulo lineal*  $m_z$  para esa dirección que forma con  $ar$  el ángulo  $z$ .

Teniendo en cuenta las anteriores expresiones :

$$x = m_z \cos z, \quad y = m_z \operatorname{sen} z$$

la última fórmula nos permite poner :

$$\frac{\cos^2 z}{m^2 \varphi_1} + \left( \frac{\cos^2 \psi}{m^2 \varphi_1} + \frac{1}{m^2 \varphi} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \psi} - 2 \frac{\cot \psi}{m^2 \varphi_1} \cos z \operatorname{sen} z = \frac{1}{m_z^2} \dots \quad (8)$$

Y para el caso en que se tratara del par de *direcciones principales* ( $\psi = 90^\circ$ ), sería entonces (fig. del n° 7) :

$$\frac{\cos^2 \varphi}{m_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{m_2^2} = \frac{1}{m_z^2}$$

que es análoga a la fórmula de Euler para los *radios de curvatura* <sup>1</sup>.

De la inspección de la penúltima fórmula se desprende que para que la transformación sea *conforme* ( $m_z = \text{constante}$ ) para cualquier valor de  $z$ , será, por lo tanto, para ( $z = 0$ ), ( $m_{\varphi_1} = m_z$ ), y luego será necesario, además, que se tenga ( $\psi = 90^\circ$ ) y ( $m_\varphi = m_{\varphi_1}$ ).

Supongamos que sea ( $\psi = 90^\circ$ ); la (6) nos da :

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{m\varphi_1}{m\varphi} \cdot \operatorname{tg} z$$

si para ( $\tau' = 90 + \tau$ ) se tiene ( $z' = 90^\circ + z$ ), será, pues :

$$\operatorname{tg} \tau' = - \operatorname{cotg} \tau = \frac{m\varphi_1}{m\varphi} \cdot \operatorname{tg} z' = - \frac{m\varphi_1}{m\varphi} \cdot \operatorname{cotg} z$$

de donde será :

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{m\varphi}{m\varphi_1} \operatorname{tg} z$$

lo que exige, pues :

$$\frac{m\varphi_1}{m\varphi} = \frac{m\varphi}{m\varphi_1}, \quad m\varphi = m\varphi_1$$

y la transformación, como se vió recién, será *conforme*.

<sup>1</sup> Para los radios de curvatura, en lugar de ( $m_1^2$ ,  $m_2^2$  y  $m_z^2$ ) habría que poner ( $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_z$ ), en el caso, naturalmente, en que las *direcciones principales* fueran las de las *líneas de curvatura*.

Es decir, que si para *dos casos* se verifica que dos líneas que en la superficie original se cortan normalmente, son reproducidas de igual modo en la otra superficie, la transformación es *conforme*, y por lo tanto, *todo par de líneas* que en la superficie original se corten normalmente, será reproducida de igual modo en la otra superficie. Y en tal caso, la *elipse indicadora de Tissot* se reduce a una circunferencia de círculo.

Consideremos finalmente (fig. del n° 4) las dos direcciones A'P' y A'P'' de la superficie original, que son reproducidas en la otra superficie por las direcciones a'p' y a'p'' y para las cuales el ángulo 2β es reproducido por el ángulo 2φ con *deformación máxima*.

Según se vió en el n° 6, se tiene para tal caso :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad (m_2 < m_1)$$

aplicando entonces para tales direcciones a'p' y a'p'' (fig. del n° 4) la última forma, se tendrá :

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \operatorname{sen}^2 \varphi_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

y se tendrá, pues, para el *módulo lineal* :

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{m_1^2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{m_2^2} = \frac{1}{m_1 m_2} = \frac{1}{m_z^2}$$

Es decir, que el *módulo lineal* correspondiente a tales direcciones será igual a la raíz cuadrada del *módulo areal*, o sea media geométrica (o media proporcional), entre los *módulos lineales* máximo y mínimo.

9. Para encontrar los ángulos ( $z_1$ ) y ( $z_2$ ) correspondientes a las direcciones de los ejes de la *elipse de Tissot*, que son las direcciones para las cuales el *módulo lineal* ( $m_z$ ) es máximo para una y mínimo para la otra, no hay más que derivar la (8) con respecto a la variable ( $z$ ) e igualar a *cero* el resultado; y se obtiene así :

$$\left[ \left( \frac{\cos^2 \psi}{m_{\varphi_1}^2} + \frac{1}{m_{\varphi}^2} \right) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \psi} - \frac{1}{m_{\varphi_1}^2} \right] \operatorname{sen} 2z - \frac{2 \cot \psi}{m_{\varphi_1}^2} \cos 2z = 0$$

de donde sale :

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{\operatorname{sen} 2\psi}{\cos 2\psi + \frac{m_{\varphi_1}^2}{m_{\varphi}^2}} \quad (9)$$

Si  $z_1$  es un valor que satisface a la ecuación que antecede, también lo será ( $z_2 = z_1 + 90^\circ$ ), pues :

$$\operatorname{tg} 2z_1 = \operatorname{tg} 2(z_1 + 90^\circ) = \operatorname{tg}(2z_1 + 180^\circ) = \operatorname{tg} 2z_2$$

Con (9), la (8) nos dará entonces para ( $m_1$ ) y ( $m_2$ ):

$$\frac{1}{m_1^2} = \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \psi} \left[ \left( \frac{1}{m_{\varphi_1}^2} + \frac{1}{m_{\varphi}^2} \right) - \sqrt{\left( \frac{1}{m_{\varphi_1}^2} + \frac{1}{m_{\varphi}^2} \right)^2 - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \psi}{m_{\varphi_1}^2 \cdot m_{\varphi}^2}} \right]$$

$$\frac{1}{m_2^2} = \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \psi} \left[ \left( \frac{1}{m_{\varphi_1}^2} + \frac{1}{m_{\varphi}^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{1}{m_{\varphi_1}^2} + \frac{1}{m_{\varphi}^2} \right)^2 - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \psi}{m_{\varphi_1}^2 \cdot m_{\varphi}^2}} \right]$$

El producto de estas dos nos comprueba la (2), y su suma nos comprueba luego la (1); lo cual nos permite también poner :

$$2m_1 = \sqrt{m_{\varphi_1}^2 + m_{\varphi}^2 + 2m_{\varphi_1}m_{\varphi} \operatorname{sen} \psi} + \sqrt{m_{\varphi_1}^2 + m_{\varphi}^2 - 2m_{\varphi_1}m_{\varphi} \operatorname{sen} \psi}$$

$$2m_2 = \sqrt{m_{\varphi_1}^2 + m_{\varphi}^2 + 2m_{\varphi_1}m_{\varphi} \operatorname{sen} \psi} - \sqrt{m_{\varphi_1}^2 + m_{\varphi}^2 - 2m_{\varphi_1}m_{\varphi} \operatorname{sen} \psi}$$

**10.** Cuando se recurre a un cono o a un cilindro para facilitar el modo de establecer las fórmulas de transformación, se denomina a la proyección *cónica* o *cilíndrica*. Cuando se pasa directamente a un plano, suele denominarse *azimutal*.

De modo que puede hablarse de una proyección *cónica* o *cilíndrica*, y a la vez *conforme* o *equivalente*. Pero, naturalmente, no siempre es posible comprender dentro de tan restringida clasificación a todos los innumerables sistemas ideados para tal fin.

Muchos de ellos sólo tienen hoy un valor histórico, estimándose que el que en realidad satisface a las exigencias de una *cartografía de precisión* es solamente el método *conforme*.

El método *conforme* es, al fin y al cabo, la labor que realiza el topógrafo al trasladar fielmente al plano los datos del terreno en zonas restringidas, para las cuales puede considerarse como *constante e igual* para todas las direcciones al *módulo lineal*.

Por ello, pues, puede decirse que el *dibujo topográfico* es una representación *conforme* establecida *in situ*.

En cambio, el *dibujo cartográfico*, que abarca ya extensas zonas expresadas en escalas cuyo denominador no baja de 200.000, es obra de *gabinete*. Y en tal clase de dibujo es manifiestamente visible la deformación que experimentan ángulos y distancias, por la imposibilidad de evitar la influencia de la curvatura de la superficie original.

## CAPITULO III

### Representación conforme

1. El advenimiento de la cartografía como ciencia puede decirse que tuvo lugar recién a mediados del siglo XVI con Mercator, aun cuando algo más de veinte siglos antes ya existían rudimentarias cartas, mejor dicho esquicios, en los cuales la dirección *norte-sur* figuraba para todos los lugares por medio de líneas rectas paralelas entre sí, y la dirección *este-oeste* por otras tantas líneas rectas normales a las primeras.

Tal sistema de cartas se lo hace remontar a la época de Anaximandro, discípulo de Thales de Mileto (550 años antes de J. C.), y fué también utilizado por los geógrafos de la antigüedad: Hecateo, Eratóstenes, Estrabón, etc.

Los *portolanos*, empleados por los genoveses a principios del siglo XIV y denominados por ellos de *proyección plana euadrada*, también son cartas de ese sistema; pero que por su mayor riqueza en datos geográficos y precisión en las posiciones relativas de los mismos, marcan la etapa final del estado embrionario de la cartografía, la cual asciende a la categoría de ciencia en la segunda mitad del siglo XVI con Gerardo Kremer, Mercator, el verdadero padre de la cartografía moderna.

Mercator, sin abandonar el sistema de reticulado rectangular para representar a los meridianos y paralelos, le asigna *un mismo valor* para el *módulo lineal* en ambos sentidos para cada punto; y crea con ello la carta *conforme* que aun lleva su nombre y está en uso.

Tal tipo de carta especialmente destinada a satisfacer las necesidades de la navegación, digamos *carta marina*, goza de la propiedad fundamental de que toda curva que en la superficie original corte a los meridianos bajo un mismo ángulo  $\alpha$  (curva *loxodrómica*), tiene como *representante* en la carta a una *línea recta*. Pues por ser la carta *conforme* y aparecer en ella los meridianos como líneas rectas *paralelas*, la *representante* de la *loxodrómica* que debe también cortarlos bajo el mismo ángulo  $\alpha$ , debe ser, pues, una *línea recta*.

Conocida entonces por el marino la ruta más conveniente a seguir en un viaje, marca en la carta una serie de puntos de dicha ruta. Luego, a cada tramo comprendido entre dos puntos consecutivos lo reemplaza por la *loxodrómica* que los une, y el *ángulo de ruta* para navegar con *rumbo constante* lo saca *directamente* de la carta, por modo tan sencillo como lo es el de determinar el ángulo que forman *dos rectas* que se cortan.

Tratándose de una superficie de revolución como lo es la esfera y el elipsoide de revolución, el ecuador en la representación Mercator queda representado por una *recta*, y los paralelos figuran también en la misma forma y paralelos al ecuador. En cuanto a los meridianos, vienen representados por rectas perpendiculares al ecuador y distanciados entre sí tanto cuanto es el desarrollo de arco de ecuador que los separa en la superficie original.

Vale decir que, si enrollamos la carta sobre la superficie que representa de modo de hacer coincidir sus ecuadores, tal coincidencia se realiza *punto por punto* y queda la carta afectando la forma de un *cilindro recto*, tangente a la superficie en el ecuador de ella y con su eje también coincidente con su eje de revolución.

Cada meridiano de la carta (línea recta) será una generatriz de dicho cilindro y quedará colocado precisamente en el plano meridiano correspondiente. Por esa razón a este sistema de representación se le denomina *proyección cilíndrica conforme de Mercator*.

En un elipsoide de revolución engendrado por una elipse que gira alrededor de su eje menor ( $2b$ ), siendo ( $a$ ) el semi-eje mayor y por lo tanto el radio del ecuador, y  $\left(e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$  la excentricidad, se tiene como radio de curvatura del meridiano a la latitud ( $\varphi$ ) (fig. 1):

$$R_{\varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

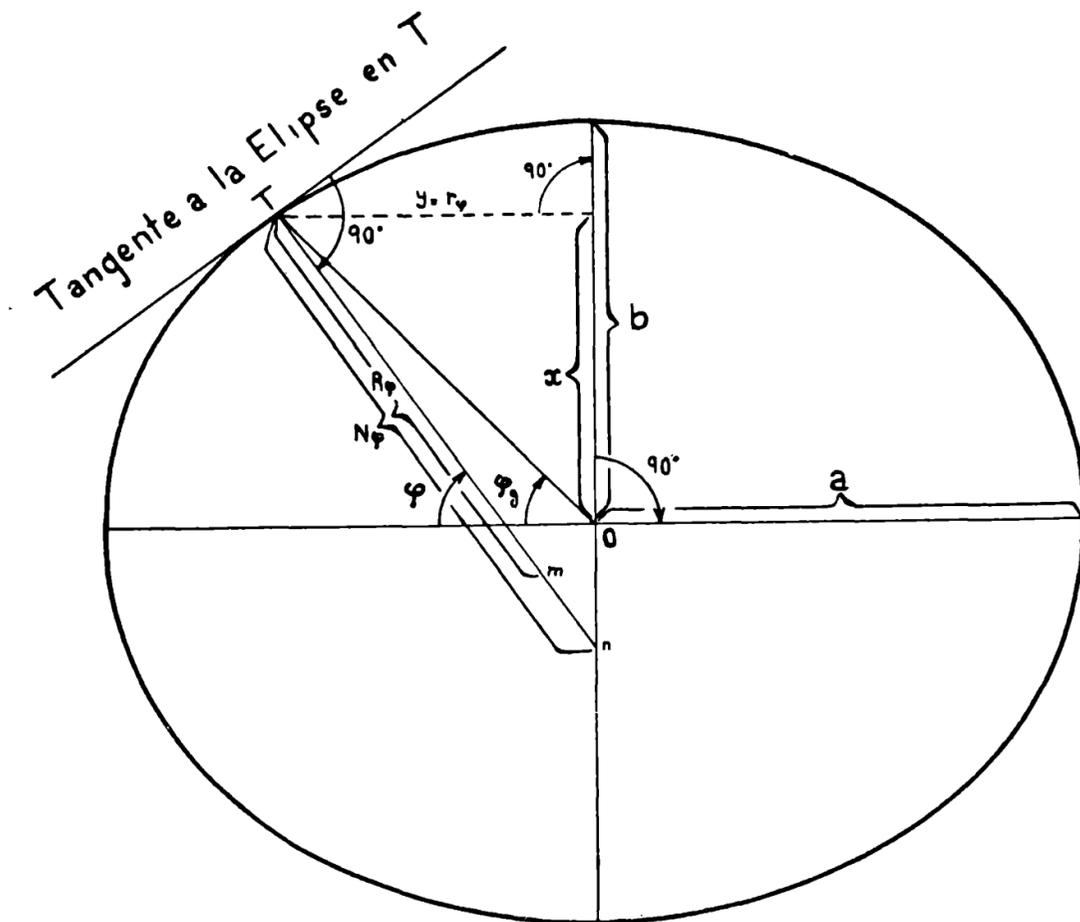
y como radio del paralelo a esa latitud:

$$r_{\varphi} = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

El desarrollo de la circunferencia del paralelo de latitud ( $\varphi$ ) que es ( $r_{\varphi} \cdot 2\pi$ ), aparece en tal representación como la del ecuador que es ( $a \cdot 2\pi$ ). De modo que aparece *umentada* en la relación  $\left(\frac{a}{r_{\varphi}}\right)$ , que por lo tanto es el *módulo lineal* que rige para todo ese paralelo.

Siendo ( $h$ ) la distancia desde el ecuador hasta ese paralelo en la

carta, para un aumento ( $d\varphi$ ) en la latitud, el arco elemental de meridiano ( $R_\varphi \cdot d\varphi$ ) queda representado por el elemento ( $dh$ ), que es la distancia en la carta entre ese paralelo y el de latitud ( $\varphi + d\varphi$ ).



Latitud  $\varphi$       Latitud geocéntrica  $\varphi_g$

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| O. Centro de la Elipse.         | T. m. Radio de curvatura a la latitud $\varphi = R_\varphi$ . |
| a. Semi-eje mayor.              | T. n. Normal mayor a la lat. $\varphi = N_\varphi$ .          |
| b. Semi-eje menor.              | $r_\varphi$ . Radio del paralelo a la lat. $\varphi = y$ .    |
| T. mn. Normal a la elipse en T. |   |

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi_g = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$R_\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^3}}, \quad N_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad y = r_\varphi = N_\varphi \cos \varphi$$

Figura 1

Pero como el *módulo lineal* del meridiano allí debe ser igual al del paralelo, es decir  $\left(\frac{a}{r_\varphi}\right)$ , deberá tenerse, pues:

$$dh = \frac{a}{r_\varphi} \cdot R_\varphi \cdot d\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

que integrada da:

$$h_\varphi = a \cdot \log_{\text{nep}} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}} \cdot \left( \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right\} =$$

$$= a \cdot \log_{\text{nep}} \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \right] \cdot \left( \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}$$

y también :

$$h_{\varphi} = a \left\{ [\log_{\text{nep}} (45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi)] - e^2 \operatorname{sen} \varphi - \frac{e^4 \operatorname{sen}^3 \varphi}{3} - \dots \right\}$$

A toda la expresión dentro de la llave  $\{ \dots \}$  se la denomina *latitud creciente elipsóidica*. Si se pone :

$$n = 1 - e^2 \operatorname{sen} \varphi + e^4 \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 \varphi}{3} \right) - e^6 \left( \frac{\operatorname{sen}^3 \varphi}{6} - \frac{\operatorname{sen}^4 \varphi}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 \varphi}{5} \right) - \dots$$

se tendrá :

$$h_{\varphi} = a \cdot \log_{\text{nep}} \cdot n \operatorname{tg} (45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi)$$

y poniendo

$$\operatorname{tg} (45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi') = n \operatorname{tg} (45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi) = \left( \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^e \cdot \operatorname{tg} (45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi)$$

según una conocida fórmula se tendrá :

$$45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi' = 45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi + \frac{n-1}{n+1} \cdot \operatorname{sen} 2 (45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi) + \frac{1}{2} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \operatorname{sen} 4 (45^{\circ} + \frac{1}{2} \varphi) + \dots$$

y una vez hechas las reducciones, será :

$$\begin{aligned} \varphi' = \varphi - \left( \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 + \frac{3}{32} e^6 \dots \right) \operatorname{sen} 2\varphi + \\ + \left( \frac{5}{48} e^4 + \frac{7}{80} e^6 \dots \right) \operatorname{sen} 4\varphi - \left( \frac{13}{480} e^6 \dots \right) \operatorname{sen} 6\varphi \dots \end{aligned}$$

y con un error inferior a 0''5 (o sea unos 15 metros en el caso del elipsoide terrestre), se podrá poner :

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

o sea, que  $(\varphi')$  puede considerarse como la *latitud geocéntrica*.

Y con tal aproximación, la *latitud creciente elipsóidica* para la latitud  $(\varphi)$  en el elipsoide, será igual a la *latitud creciente esférica* para la latitud  $(\varphi')$  en la esfera.

Existen calculadas tablas para la *latitud creciente esférica*. Dichas tablas también se llaman de *partes meridionales* y para utilizarlas en el caso del elipsoide de revolución, no hay más que entrar en ellas con la latitud  $(\varphi')$  en vez de la latitud  $(\varphi)$ .

Si al confeccionar la carta reducimos las cosas en la proporción de (uno) a (E), diremos entonces que la *escala* de dicha carta es  $\left( \frac{1}{E} \right)$ .

Y como ya lo dijimos anteriormente, tal escala en rigor sólo se cumplirá para el ecuador, por ser allí el *módulo lineal* la unidad.

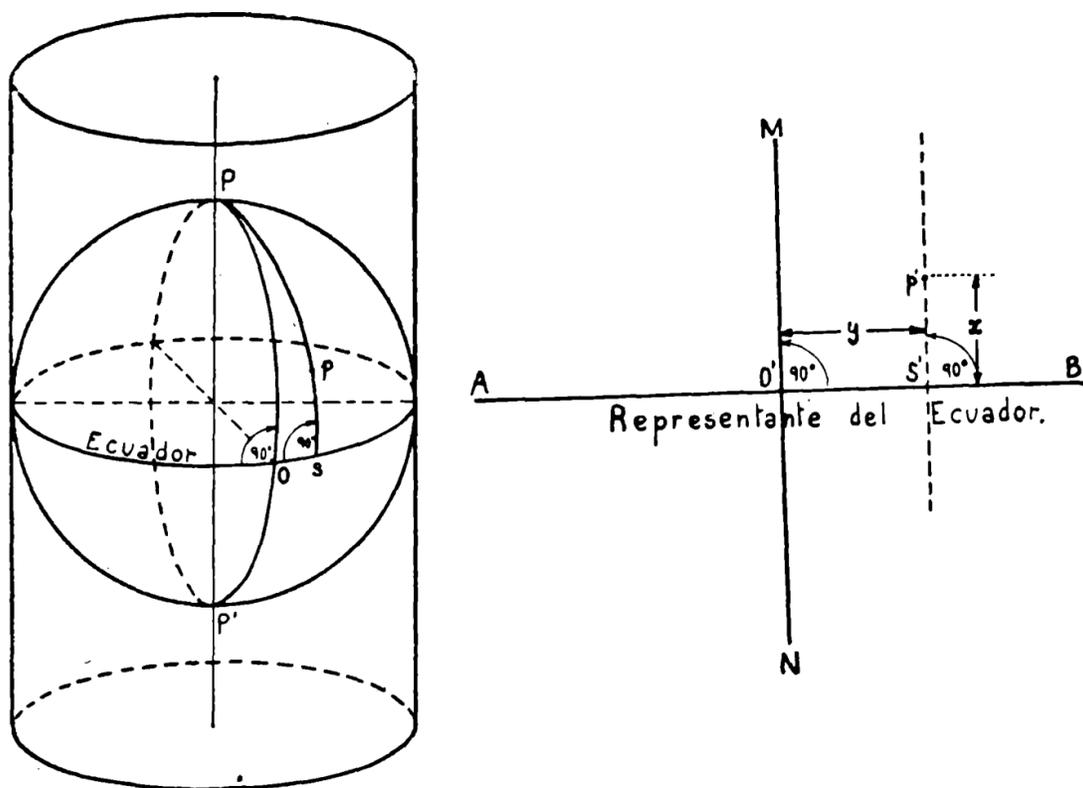
Como para la latitud ( $\varphi$ ) el módulo lineal es

$$M_{\varphi} = \frac{a}{r_{\varphi}} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

cuando en tal carta se aprecie una dimensión, dicha dimensión debe multiplicarse, no por E sino por :

$$E \frac{1}{M_{\varphi}} = \frac{E \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

para obtener la dimensión real que corresponde *sobre* el elipsoide.



$$y = a \cdot \omega$$

$$x = a \cdot \operatorname{lg}_{nep} \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi}} - a \cdot e \cdot \operatorname{lg}_{nep} \sqrt{\frac{1 + e \cdot \operatorname{sen} \varphi}{1 - e \cdot \operatorname{sen} \varphi}}$$

Figura 2

Para ( $\varphi = 60^\circ$ ), ya ( $M_{\varphi}$ ) alcanza a ser igual a (2). Para las regiones polares, el módulo hace aparecer exageradamente ampliadas las zonas, pues ya para ( $\varphi = 80^\circ$ ), ( $M_{\varphi}$ ) casi alcanza a *sextuplicar* las dimensiones.

Si designamos, pues, con  $L(\varphi')$  a la *latitud creciente esférica*, para la latitud ( $\varphi'$ ), podremos poner :

$$h_{\varphi} = a L(\varphi')$$

Puesto que para ( $\varphi = 90^\circ$ ), ( $h_{\varphi} = \infty$ ); este sistema de representación no es apto para aplicarlo a *todo* un *hemisferio*.

La representación *mercator* del elipsoide (fig. 2) sobre el plano, queda como lo indica la figura de la derecha.

El ecuador del elipsoide viene representado por la línea recta (AB). Al meridiano que pasa por (O) en el elipsoide y desde el cual se cuentan las longitudes, lo representa la línea recta (MO'N) normal en (O') a la (AB). Los representantes de los polos pasan en el plano *al infinito*, por ser ( $\sin \varphi = 1$ ).

Al punto  $p$  de la superficie del elipsoide, de coordenadas latitud ( $\varphi$ ) y longitud ( $\omega$ ), lo representa en el plano el punto ( $p'$ ) y tiene como coordenadas rectangulares las que se indican más arriba. El meridiano ( $sp$ ) del elipsoide queda representado, pues, por la recta ( $s'p$ ) normal a (AB).

En el caso de la esfera de radio ( $a$ ), la excentricidad ( $e$ ) desaparece y se podrá poner entonces también, pues sería  $\left[ \varphi = \frac{\arcsin \left( \frac{ps}{a} \right)}{a} \right]$ :

$$y = \arcsin (os)$$

$$x = a \log_{\text{nep}} \sqrt{\frac{1 + \sin \left( \frac{\arcsin ps}{a} \right)}{1 - \sin \left( \frac{\arcsin ps}{a} \right)}} = a \log_{\text{nep}} \operatorname{tg} \left[ 45^\circ + \frac{1}{2} \frac{\arcsin ps}{a} \right]$$

Este sistema de representación, además de su finalidad como *carta marina*, es apto para representar regiones que, cruzadas por la línea del ecuador, sean extensas en ese sentido; es decir, para fajas comprendidas entre paralelos poco distantes del ecuador, tanto hacia el norte como hacia el sur.

Siendo  $\varphi$  la latitud extrema (de sólo algunos grados), puede desarrollarse el *módulo lineal* en función de ella y da (desconsiderando  $e^4$ )...

$$M\varphi = \frac{a}{r_\varphi} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} = 1 + \frac{(1 - e^2)}{2} \varphi^2 + \frac{5 + 2e^2}{24} \cdot \varphi^4 \dots$$

Y limitando este desarrollo a sus dos primeros términos, el error que se comete al *estimar* el valor del *módulo lineal* aun para fajas de un ancho de 20 grados ( $10^\circ$  a cada lado del ecuador), sólo afecta a dicha estimación en:

$$\frac{1}{4000}$$

Para ( $\varphi$ ) igual a ( $10^\circ$ ), el *módulo lineal* alcanza a ser:

$$1 + \frac{1}{64}$$

La normal mayor ( $N_\varphi$ ) y el radio de curvatura ( $R_\varphi$ ), tienen por expresiones :

$$N_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad R_\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Se denomina *curvatura absoluta* a la expresión :

$$K_\varphi = \frac{1}{N_\varphi \cdot R_\varphi} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}{a^2 (1 - e^2)}$$

Para el ecuador será :

$$K_{(\varphi=0)} = \frac{1}{a^2 (1 - e^2)}$$

y es fácil ver que se tiene :

$$M_\varphi = 1 + \frac{(1 - e^2) \varphi^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{[(1 - e^2) \varphi]^2}{(1 - e^2)} = 1 + \frac{1}{2} \frac{[a(1 - e^2) \varphi]^2}{a^2 [1 - e^2]}$$

Con un error no superior a :

$$\frac{1}{7000}$$

se puede poner :

$$\varphi^2 = \left( \frac{s}{R_\varphi} \right)^2$$

designando con ( $s$ ) a la *distancia* del punto al ecuador, estimada dicha distancia a lo largo del meridiano ; y ( $R_\varphi$ ) al radio de curvatura del meridiano en su cruce con el ecuador, o sea :

$$R_{\varphi_0} = a(1 - e^2)$$

Por ello, puede pues ponerse también :

$$M_\varphi = 1 + \frac{1}{2} \frac{(a(1 - e^2) \varphi)^2}{a^2 (1 - e^2)} = 1 + \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot K_0$$

Con esto, siempre estamos dentro de la *precisión gráfica necesaria y suficiente*, pues los elementos que sobre la carta *vuelca la topografía* ya vienen afectados de una imprecisión del orden de :

$$\frac{1}{1500}$$

que luego los movimientos propios del papel en que dicha carta es reproducida, la alteran ora en más ora en menos.

Puede, sí, conocerse la distancia geodésica entre dos puntos dados por sus *coordenadas angulares elipsóidicas* (latitud y longitud), con tanta precisión cuanta sea la precisión con que se conocen dichas *coordenadas*. Pero ese asunto ya no es *problema gráfico*.

Cuando en vez la distancia ha de sacarse *directamente de la carta*, la cuestión cambia de aspecto, y su precisión tiene como *límite* la que puede esperarse del *procedimiento gráfico*, que es parangonable con la precisión topográfica, que al fin y al cabo es un procedimiento de esa índole.

Si al tratar un problema con elementos tomados de una carta geográfica se prescinde del *módulo lineal*, no se procede correctamente.

Ahora bien, cuando la faja ecuatorial sólo abarca unos 4 grados (2° a cada lado del ecuador), el *módulo lineal* puede alcanzar apenas a :

$$1 + \frac{1}{1640}$$

y entonces sí puede prescindirse de dicho *módulo lineal*, considerándolo constante para toda la faja, e igual a :

$$1 + \frac{1}{3280},$$

pues el error en más o menos sólo puede alcanzar a :

$$\frac{1}{3280}$$

2. Si se compara la latitud  $\varphi$  de un punto P en el elipsoide con la latitud  $\varphi'$  de un punto P' en la esfera, es fácil comprobar que P' es la representación de P del elipsoide en sistema *conforme*.

En efecto, consideremos al elipsoide y a una esfera de radio ( $a$ ), ambos tangentes entre sí, a lo largo de sus ecuadores, y con la línea de los polos comunes, por lo tanto.

Las coordenadas de (P) serán ( $\varphi$ ,  $\omega$ ) y las de (P') serán ( $\varphi'$ ,  $\omega$ ). Consideremos un triángulo rectángulo elemental con sus catetos sobre el meridiano y el paralelo. Dichos catetos serán :

$$R_{\varphi} \cdot d\varphi \quad \text{y} \quad r_{\varphi} \cos \varphi d\omega.$$

Los catetos del triángulo rectángulo elemental, representante sobre la esfera del triángulo elemental del elipsoide, serán :

$$ad\varphi' \quad \text{y} \quad a \cos \varphi' d\omega.$$

Para que la representación sea *conforme*, debe verificarse la *semejanza*.

$$\frac{R_{\varphi} d\varphi}{ad\varphi'} = \frac{r_{\varphi} \cos \varphi d\omega}{a \cos \varphi' d\omega} = \frac{r_{\varphi} \cos \varphi}{a \cos \varphi'}$$

de donde sale :

$$\frac{R_{\varphi} d\varphi}{r_{\varphi} \cos \varphi} = \frac{d\varphi'}{\cos \varphi'}$$

y para el caso del elipsoide será:

$$\frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} = \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

que integrada da:

$$\text{Lg}_n \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi' \right) = \log_n \left[ \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \cdot \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

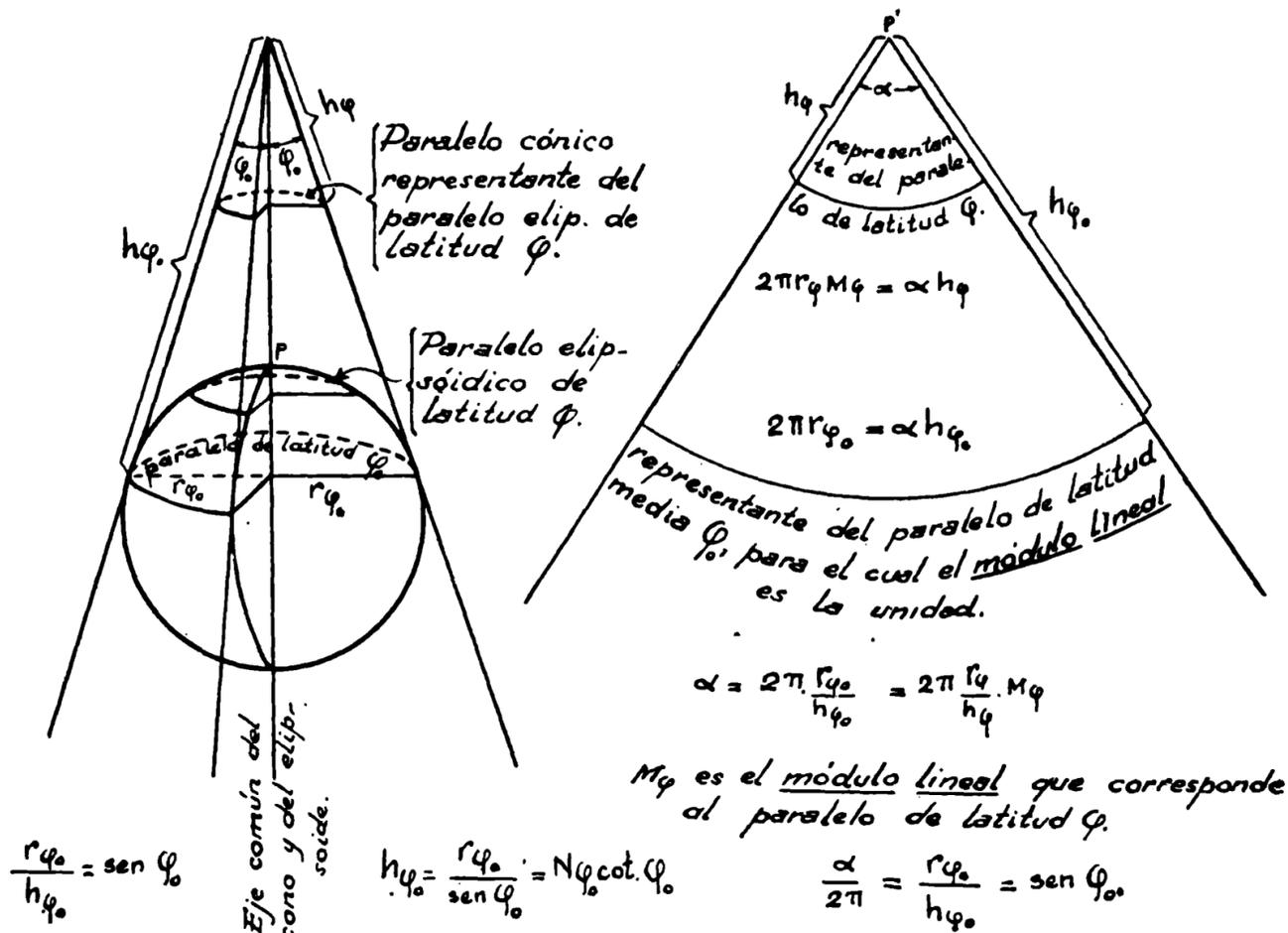


Figura 3

o sea, pues:

$$\text{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi' \right) = \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \cdot \text{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right)$$

que es la fórmula encontrada anteriormente. Lo cual comprueba lo enunciado más arriba.

Y dentro de la aproximación de 1/2 segundo de arco, que en el caso del elipsoide terrestre sólo alcanza a 15 metros, puede ponerse como se vió:

$$\text{tg} \varphi' = (1 - e^2) \text{tg} \varphi,$$

o sea que proyectando la superficie del elipsoide desde su centro sobre la esfera concéntrica con él queda éste proyectado de modo conforme sobre aquélla. Puede entonces considerarse que ( $\varphi'$ ) no será otra que la *latitud geocéntrica* ( $\varphi_g$ ).

3. Pasemos a ocuparnos ahora de la denominada *proyección ortomorfa cónica de Lambert*, vulgarizada por Gauss (año 1772).

Consideremos un cono recto con su eje en coincidencia con el eje de revolución del elipsoide y tangente a éste a lo largo de un paralelo a cuya latitud ( $\varphi_0$ ) denominaremos *latitud media* (fig. 3).

Representemos a los puntos de cada arco de meridiano sobre la generatriz del cono contenida en el plano de dicho meridiano y según la misma ley de correspondencia para todos los meridianos.

Es evidente que entonces cada paralelo elipsóidico, que es una circunferencia de círculo, quedará representado en la superficie del cono por una circunferencia del círculo cuyo plano será normal al eje y tendrá su centro sobre él. A esta circunferencia bien puede denominársela *paralelo cónico*.

Desarrollando luego el cono sobre el plano, afectará la forma de la figura de la derecha. De modo que *únicamente* para el polo (P), la representación no será *conforme*, puesto que dos meridianos que se cortan allí con un ángulo ( $e$ ), en la *representación*, lo harán con un ángulo  $\left(e \cdot \frac{\alpha}{2\pi}\right)$ .

Todos los meridianos quedarán representados por líneas rectas concurrentes en el punto P' (*representante* del polo P).

Cada paralelo cónico representante del paralelo elipsóidico tendrá la forma de un arco de circunferencia con centro en P', y de amplitud  $\alpha$ .

El paralelo correspondiente a la *latitud media* aparecerá en su total desarrollo, vale decir que el *módulo lineal* a lo largo de él será la *unidad*.

El paralelo de latitud ( $\varphi$ ) aparecerá en el plano con el desarrollo ( $h_\varphi \cdot \alpha$ ). Y se tendrá que el *módulo lineal* ( $M_\varphi$ ) correspondiente a dicho paralelo, será, pues :

$$M_\varphi = \frac{\alpha \cdot h_\varphi}{2\pi \cdot r_\varphi},$$

siendo ( $r_\varphi$ ) el radio del paralelo *elipsóidico*.

Para un *aumento* de latitud ( $d\varphi$ ), ( $h_\varphi$ ) *disminuirá* en ( $dh_\varphi$ ). El *módulo lineal* para el meridiano, allí será, pues :

$$M_\varphi = \frac{-dh_\varphi}{Rd\varphi},$$

designando con ( $R_\varphi$ ) al radio de curvatura del meridiano. Comparando las dos fórmulas que anteceden, se tendrá :

$$\frac{\alpha \cdot h_\varphi}{2\pi r_\varphi} = \frac{-dh_\varphi}{Rd\varphi},$$

de donde resulta :  $\left(\frac{\alpha}{2\pi} = \text{sen } \varphi_0\right)$

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \frac{R_\varphi d\varphi}{r_\varphi} = -\operatorname{sen} \varphi_0 \cdot \frac{R_\varphi d\varphi}{r_\varphi} = \frac{dh_\varphi}{h_\varphi}.$$

Para el caso del elipsoide de revolución, según se vió en el número anterior, se tendrá, integrando :

$$\log_{\text{nep}} h_\varphi = -\operatorname{sen} \varphi_0 \left\{ \log_{\text{nep}} \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) - e^2 \operatorname{sen} \varphi - e^4 \frac{\operatorname{sen}^3 \varphi}{3} \dots \right\} + K,$$

designando con (K) una constante de integración a determinar : si de acuerdo a lo establecido en el número anterior, ponemos :

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi_0' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi_0,$$

utilizando las *latitudes crecientes esféricas* resultará :

$$\log_{\text{nep}} h_\varphi = \log_{\text{nep}} h_{\varphi_0} - \operatorname{sen} \varphi_0 \{ L(\varphi') - L(\varphi_0') \}.$$

Con lo cual la constante de integración queda tomada en cuenta. Las latitudes ( $\varphi_0'$  y  $\varphi'$  serán las *latitudes geocéntricas* correspondientes a ( $\varphi_0$  y  $\varphi$ ). En cuanto al trazado de los meridianos en este sistema de representación, no hay más que dividir el ángulo ( $\alpha$ ) en tantas partes iguales cuantos sean los meridianos igualmente espaciados en el elipsoide.

Es decir, que si dos meridianos consecutivos en el elipsoide están separados por una diferencia de longitud igual a  $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ , en la representación formarán entre sí en P' un ángulo igual a  $\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ ; o sea igual a  $\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \operatorname{sen} \varphi_0\right)$ .

Al meridiano que divide en partes iguales al ángulo ( $\alpha$ ) se lo denomina *meridiano central*.

Este sistema de representación, que es apto para países extendidos más en longitud que en latitud, es especialmente indicado también para cartas topográficas de *precisión*. En este sentido es utilizado en Francia para sus cartas topográficas a escala (1 : 20.000).

Para determinar el *módulo lineal* se tiene diferenciando el logaritmo de la 1ª que da dicho módulo :

$$\frac{d \log M_\varphi}{d\varphi} = \frac{d \log h_\varphi}{d\varphi} - \frac{d \log r_\varphi}{d\varphi},$$

o sea, también :

$$\frac{d \log M_\varphi}{d\varphi} = -\operatorname{sen} \varphi' \frac{R_\varphi}{r_\varphi} - \frac{d \log r_\varphi}{d\varphi},$$

la cual para el elipsoide de revolución, da :

$$\frac{d \log M_{\varphi}}{d\varphi} = \frac{-(1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi_0}{(1 - e \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi - \frac{e^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

que simplificada da :

$$\frac{d \log M_{\varphi}}{d\varphi} = \frac{(1 - e^2) (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos \varphi}.$$

Sea una faja de territorio comprendida entre dos paralelos de latitudes  $(\varphi_0 + \delta)$  y  $(\varphi_0 - \delta)$ , siendo  $(\varphi_0)$  la *latitud media*.

Desarrollando la fórmula anterior, poniendo :

$$\varphi = \varphi_0 + \tau$$

se encuentra desconsiderando los términos en  $(e^4)$  y  $(\tau^3)$  :

$$\frac{d \log M_{\varphi}}{d\varphi} = \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0)} \cdot \left( \tau + \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \tau^2}{2} \right) = \frac{d \log M_{\varphi}}{d\tau},$$

la cual integrada nos dará luego :

$$M_{\varphi} = 1 + \frac{(1 - e^2)}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0} \cdot \left( \frac{\tau^2}{2} + \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{6} \tau^3 \right) + \varepsilon.$$

Y aun para fajas de unos  $20^{\circ}$  ( $10^{\circ}$  al Norte y  $10^{\circ}$  al Sur) del paralelo de  $57^{\circ}$  de latitud) en la expresión anterior ( $\varepsilon$ ) no alcanza a  $\left(\frac{1}{2800}\right)$ .

Designando con (S) a la distancia del punto al paralelo de *latitud media* ( $\varphi_0$ ), pondremos :

$$\tau^2 = \left( \frac{S}{R_{\varphi_0}} \right)^2, \quad \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0} \cdot \frac{\tau^2}{2} = \frac{R_{\varphi_0}}{N_{\varphi_0}} \cdot \frac{1}{2} \frac{S^2}{(R_{\varphi_0})^2} = \frac{1}{2} S^2 K_{\varphi_0},$$

designando con  $(K_{\varphi_0})$  a la curvatura absoluta para la latitud ( $\varphi_0$ ).

Y la expresión de  $(M_{\varphi})$ , será, pues :

$$M_{\varphi} = 1 + \frac{1}{2} K_{\varphi_0} \cdot S^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \varphi_0 \frac{S}{R_{\varphi_0}} \right).$$

Para el caso de una carta reducida a un ancho de unos 4 grados en latitud (2 grados a cada lado de la latitud media) la expresión anterior puede limitarse a :

$$M_{\varphi} = 1 + \frac{1}{2} K_{\varphi_0} \cdot S^2.$$

De modo que este sistema de representación, tan sencillo y, diríamos, casi tan lógico, pues representa a los meridianos en línea recta y a los paralelos como arcos de circunferencias de círculo, sa-

tisface tanto como cualquier otro de la más alta categoría, a las exigencias máximas de una cartografía topográfica que pueda considerar constante al módulo lineal dentro de toda una faja ; cosa a que aspira al tipo de carta. Pues, para ( $\tau \cong 2^\circ$ ) :

$$M = 1 + \frac{1}{1640}.$$

Cuando ( $\varphi_0 = 0$ ), el cono tiene su vértice en el infinito, o sea es un cilindro y el sistema de representación viene a ser el *mercator*.

Si ( $\varphi_0 = 90^\circ$ ), el vértice del cono coincide con el polo, y se transforma en el plano tangente allí. El sistema de representación en este caso (tratándose de la esfera) es el sistema de proyección *estereográfico polar*, que veremos más adelante.

4. Como casos particulares de la representación, conforme de la superficie de la esfera sobre el plano, merecen citarse las denominadas : *proyección cilíndrica ortomorfa de Lambert o cilíndrica inversa*, y la *proyección estereográfica*.

La proyección cilíndrica ortomorfa de Lambert consiste simplemente en suponer un cilindro recto tangente a la esfera a lo largo de un meridiano.

Sobre ese cilindro se efectúa la representación *mercator* de la superficie de la esfera, considerando a dicho meridiano como si fuera ecuador, y luego se desenrolla el cilindro, extendiéndolo sobre el plano (fig. 4).

En esa forma el meridiano ( $P_1OP_2$ ), denominado *central*, y sobre el cual es tangente el cilindro a la esfera, aparecerá en el plano en línea recta ; y del mismo modo aparecerá el ecuador ( $E_1OE_2$ ), pues el plano de éste corta al cilindro a lo largo de dos aristas ( $AOB$ ) y ( $CO_1D$ ), por contener a su eje ( $E_1E_2$ ), el cual corta a la esfera en el ecuador de ésta en dos puntos ( $E_1$ ) y ( $E_2$ ), colocados a  $90^\circ$  de diferencia de longitud con el plano del meridiano central.

Estos puntos pasan a desempeñar el papel de *polos*, por ocupar el mencionado meridiano central el lugar de ecuador, y en la proyección *mercator* que luego se efectúa en esas condiciones, dichos puntos van al *infinito*.

Un punto ( $p$ ) en la superficie de la esfera, de coordenadas [latitud ( $\varphi$ ) y longitud ( $\omega$ )], tendrá como representante en el plano un punto ( $p'$ ) (figura de abajo), de coordenadas ( $x, y$ ). Para mayor simplicidad supondremos que el radio de la esfera es la *unidad*.

Unamos el punto ( $p$ ) de la superficie de la esfera por medio de un arco de círculo máximo, con los  $E$  y  $E_1$ . Dicho arco cortará normal-

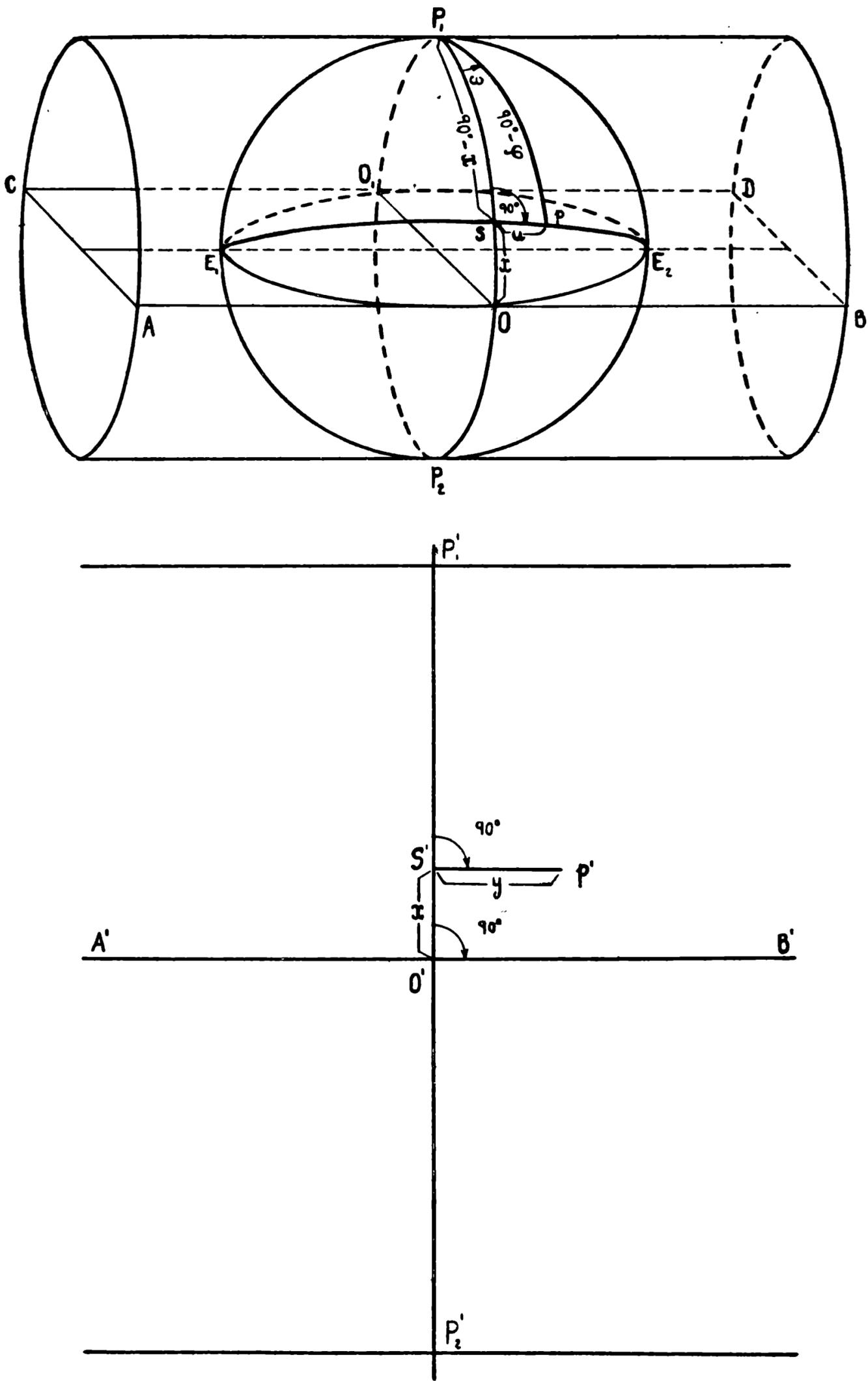


Figura 4

mente al meridiano central en el punto (s) y quedará formado el triángulo esférico rectángulo ( $P_1sp$ ), que nos dará :

$$\cotg . x = \cot \varphi . \cos \omega, \quad \text{sen } u = \cos \varphi \text{ sen } \omega, \quad \cos u = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } x}.$$

De modo que las coordenadas planas *conformes* serán :

$$x = \text{arc} (\cot = \cot \varphi \cos \omega)$$

$$y = \log_{\text{nep}} \sqrt{\frac{1 + \text{sen } u}{1 - \text{sen } u}} = \text{sen } u + \frac{\text{sen}^3 u}{3} + \frac{\text{sen}^5 u}{5} \dots$$

La idea de representar la superficie esférica de modo *conforme* sobre un cilindro tangente a ella a lo largo de un meridiano, de manera que dicho meridiano aparezca en la carta en forma de línea de recta con *módulo lineal* igual a la *unidad* a lo largo de todo él; fué extendido por *Gauss* al caso del elipsoide de revolución, cosa que trataremos en detalle al ocuparnos de tal sistema de representación.

Las fórmulas que anteceden, expresadas en función de ( $\varphi$ ) y ( $\omega$ ), serían designando ( $\text{tg } \varphi$ ) con ( $t$ ):

$$x = \varphi + \frac{(\omega \cos \varphi)^2}{2} \cdot t + \frac{(\omega \cos \varphi)^4}{24} t (5 - t^2) +$$

$$+ \frac{(\omega \cos \varphi)^6}{720} t (61 - 58t^2 + t^4) + \dots$$

$$y = (\omega \cos \varphi) + \frac{(\omega \cos \varphi)^3}{6} (1 - t^2) + \frac{(\omega \cos \varphi)^5}{120} (5 - 18t^2 + t^4) + \dots$$

**5.** La representación *estereográfica de la esfera* es el único sistema *conforme*, que es propiamente una *proyección*.

En esencia, dicho sistema consiste en proyectar desde un punto (P) de la esfera la superficie de ésta sobre un plano tangente a la misma en el punto (P') diametralmente opuesto a (P), o sobre un plano cualquiera paralelo al plano tangente en P, que desde luego es paralelo al tangente en ( $\varphi'$ ) (fig. 5).

Cuando el punto desde el cual se proyecta es un *polo*, la proyección se denomina *estereográfica polar*; cuando se proyecta desde un punto del *ecuador* se denomina *estereográfica meridiana*, y cuando el punto de proyección es un punto cualquiera de la esfera, la proyección se denomina *estereográfica oblicua*.

Parece ser que la proyección estereográfica fué inventada por *Hiparco* (130 años antes de J. C.) con el nombre de *planisferio* y también *astrolabio de Gemma*. Su nombre actual le fué dado por el padre jesuíta *d'Aguillon*.

La propiedad más interesante de esta proyección es que toda circunferencia de círculo trazada sobre la esfera es reproducida en el plano de proyección, también como una circunferencia de círculo.

La mencionada propiedad admite la demostración elemental siguiente:

Sea (P) el punto de la esfera desde el cual se proyecta a la superficie de ésta sobre un plano  $(t_2p't_1)$  paralelo al plano  $(T_2PT_1)$  tangente a la esfera en (P). Sea (p) un punto de la superficie de la esfera y

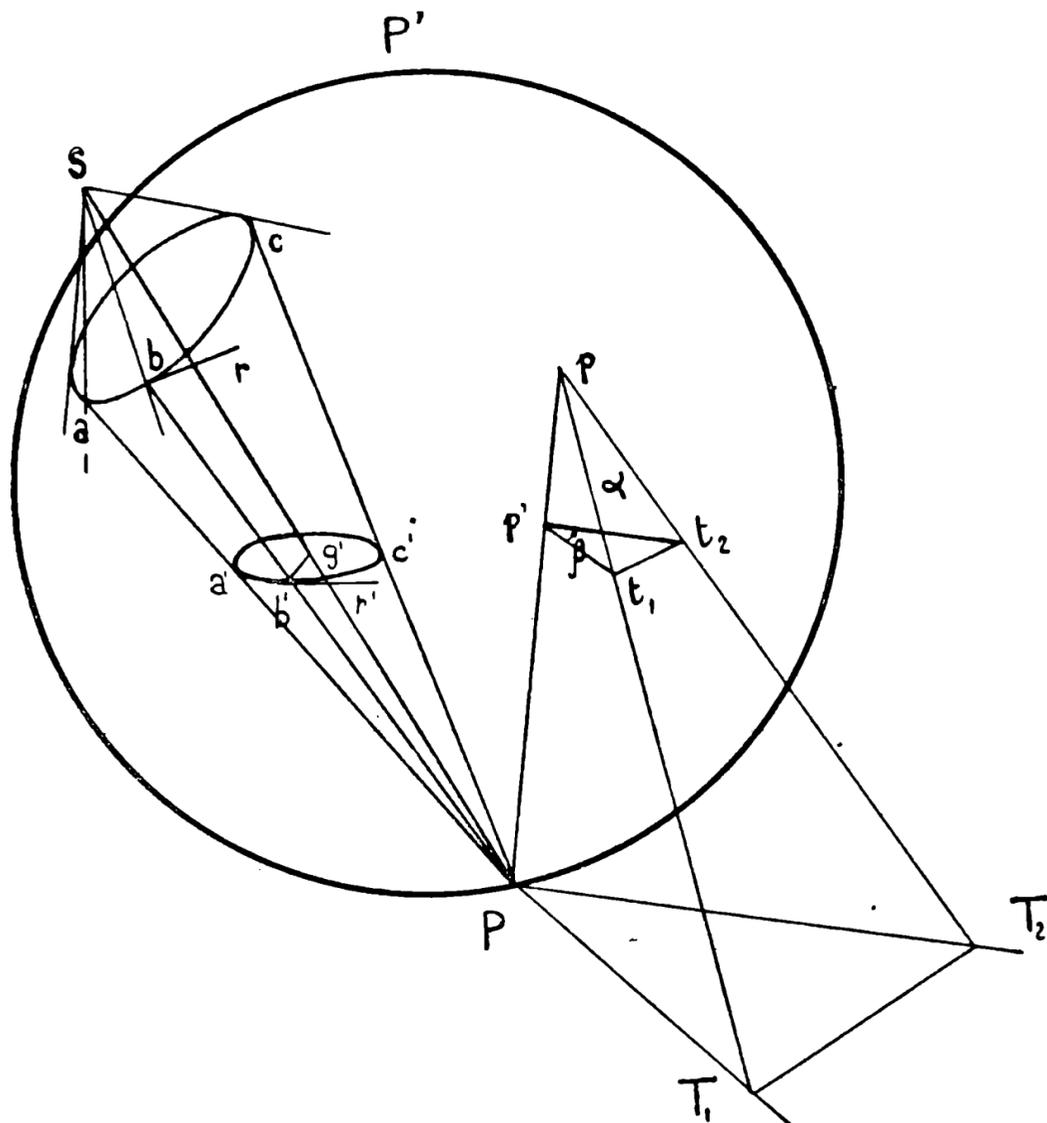


Figura 5

( $p'$ ) su proyección sobre el plano  $(t_2p't_1)$ . Sean ( $pT_1$ ) y ( $pT_2$ ) dos tangentes a la esfera en el punto ( $p$ ) de la misma y que se cortan allí con un ángulo ( $\alpha = T_2pT_1$ ).

Las mencionadas tangentes se proyectan sobre el plano de proyección según un ángulo ( $\beta = t_2p't_1$ ), que a su vez es igual al  $(T_2PT_1)$ , por ser el plano de proyección  $(t_2p't_1)$  paralelo al plano  $(T_2PT_1)$  tangente a la esfera en (P).

Ahora bien  $(T_2P)$  y  $(T_1P)$  son tangentes a la esfera por estar en el plano tangente a la misma en (P), de modo que será  $(T_1P = T_1p)$ , por ser ambas tangentes a la esfera desde un mismo punto ( $T_1$ ). Por

la misma razón será ( $T_2P = T_2p$ ). Y como además en los triángulos ( $T_1T_2p$ ) y ( $T_1T_2P$ ) el lado ( $T_1T_2$ ) es común, dichos triángulos serán iguales; por lo cual será:

$$\sphericalangle T_2PT_1 = \sphericalangle T_2pT_1 = \alpha.$$

Pero como también es

$$\sphericalangle T_2PT_1 = \sphericalangle t_2pt_1 = \beta,$$

será, pues ( $\alpha = \beta$ ). Lo que significa que la proyección es *conforme*.

Sea ahora un punto (S) en el espacio, vértice de un cono circunscrito a la esfera, a la cual, como sabemos, será tangente a lo largo de una circunferencia de círculo ( $a, b, c \dots$ ).

Toda tangente ( $br$ ) a la circunferencia en un punto ( $b$ ), por ejemplo, será tangente a la esfera y normal a la arista ( $Sb$ ) del cono, que también es tangente a la esfera en ( $b$ ). Ese par de tangentes ( $Sb$ ) y ( $rb$ ) normales entre sí deben aparecer en el plano de proyección ( $S'b'$ ) y ( $b'r'$ ) también normales entre sí.

Pero ( $r'b'$ ) debe ser tangente en ( $b'$ ) a la curva ( $a'b'c' \dots$ ), proyección de la circunferencia ( $abc \dots$ ); y  $S'b'$  normal a ella en ( $b'$ ) debe pasar por el punto fijo ( $S'$ ), que es la proyección del vértice (S) del cono. Vale decir, pues, que la curva ( $a'b'c'$ ) debe ser también una circunferencia de círculo y su centro es ( $S'$ ).

Cuando se proyecta la superficie de la esfera desde un punto cualquiera del espacio, la proyección también es *conforme*; pero entonces una parte de la superficie de ésta resulta la proyección *conforme* de la otra parte y viceversa.

En efecto, sea M el punto de proyección colocado en la prolongación de un diámetro.  $P_1OP_2$  (fig. 6).

El cono tangente a la esfera con vértice en M, la separa en dos partes ( $C_1C_2C_3C_4P_1$ ) y ( $C_1C_2C_3C_4P_2$ ). Tiremos desde M una recta que perforará a la esfera en  $p$  y  $p'$ . Los planos tangentes a la esfera en dichos puntos se cortarán en el espacio según una línea recta  $mn$ . Un plano ( $pp'Ma$ ) determinará en los planos tangentes, las tangentes a la esfera ( $t_1a$  y  $t_1'a$ ), que deben de ser iguales, por cuanto desde cualquier punto del espacio el largo de las tangentes a la esfera es el mismo e igual al largo de la arista del cono tangente a la misma; por ello, pues, será ( $t_1a = t_1'a$ ). Otro plano ( $pp'Mb$ ) determinará otro par de tangentes ( $t_2b = t_2'b$ ).

Luego, pues, las dos triángulos ( $pab$ ) y ( $p'ab$ ) son *iguales* por tener sus tres lados iguales (uno de ellos ( $ab$ ) común); por lo tanto el ángulo formado por las tangentes en  $p$  ( $pt_1$  y  $pt_2$ ) será *igual* al ángulo

proyectado sobre el plano tangente en  $p'$  ( $t_1'p't_2'$ ). Vale decir que toda la parte de la esfera ( $C_1C_2C_3C_4P_2$ ) es reproducida de modo *conforme* sobre la otra parte, y viceversa.

6. La proyección estereográfica permite representar todo un hemisferio dentro de una circunferencia de círculo.

En el caso de la representación estereográfica *polar*<sup>1</sup>, un polo aparece en el centro (O) de la circunferencia, del cual emergen en forma de líneas rectas los meridianos, formando entre sí los mismos ángu-

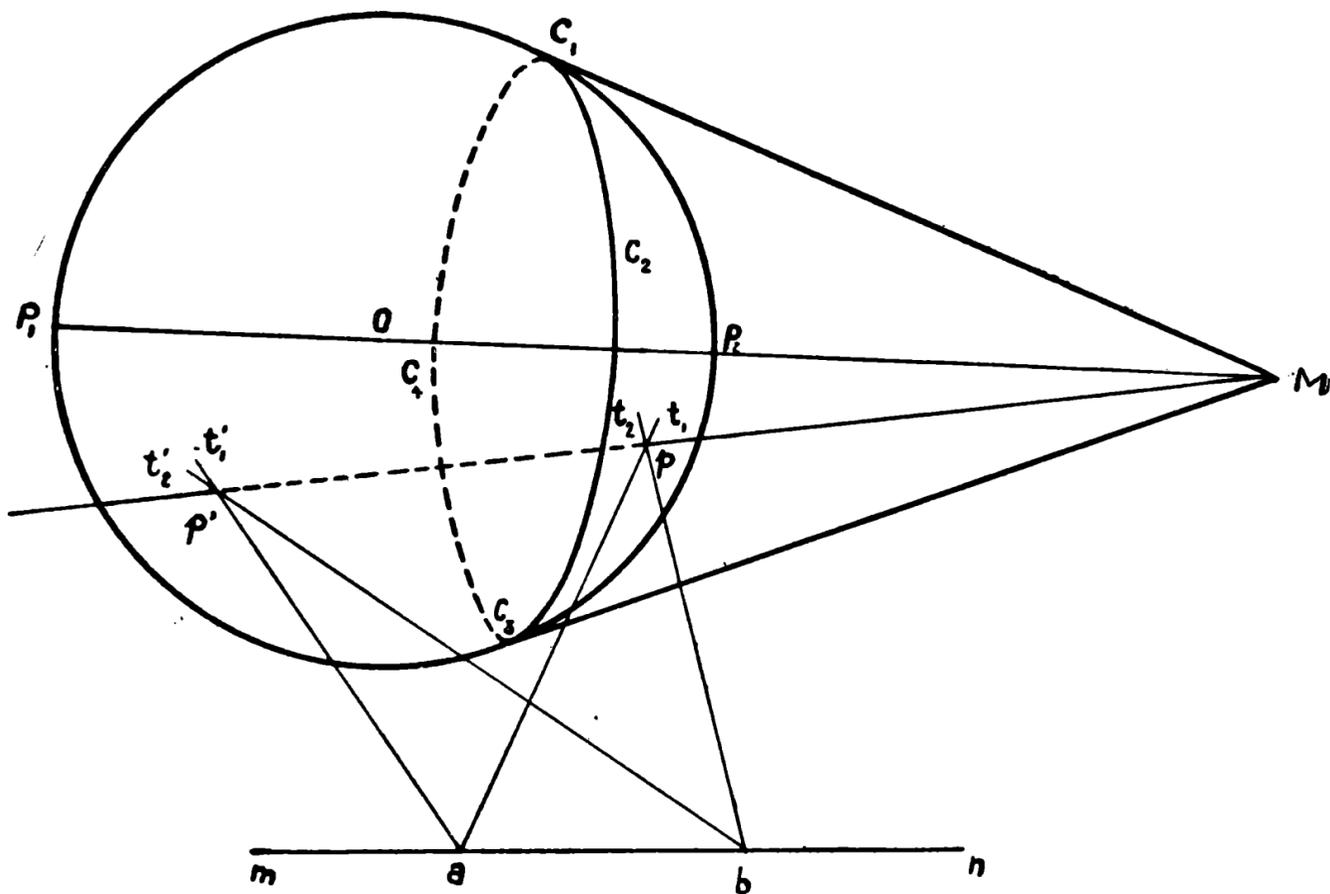


Figura 6

los que forman en el polo de la esfera. Los paralelos aparecen en forma de circunferencias de círculos concéntricos (con centro en O).

Tomando como radio de la esfera la *unidad*, y proyectando desde el polo Sur, sobre el plano del ecuador, éste aparecerá, pues, tal cual es y su centro vendrá a resultar el polo Norte.

Consideremos un plano meridiano. Un punto  $p$  de él aparecerá en  $p'$  y  $Op'$ , será, pues, el radio del paralelo correspondiente a la latitud de  $p$ , o sea ( $\varphi$ ), y se tendrá (fig. 7).

$$Op' = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$$

El punto O pasa a ser el polo Norte, con centro en O y radio igual a  $[Op' = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)]$ , se traza la circunferencia de círculo que

<sup>1</sup> Al final de este capítulo haremos una aplicación de esta proyección a un problema de astronomía de posición.

representará al paralelo de latitud ( $\varphi$ ). Y en tal forma se trazan los demás paralelos. Los meridianos serán, como se dijo, líneas rectas emergentes de O, etc.

Para el caso de la proyección estereográfica *meridiana*, tanto los meridianos como los paralelos aparecerán en el plano de proyección (un plano meridiano) como arcos de circunferencias de círculo. El punto de proyección colocado en el ecuador vendrá a hacer las veces de polo del plano de proyección.

Como el arco de circunferencia que represente al paralelo de latitud ( $\varphi$ ), debe ser normal a todos los meridianos, debe serlo por lo tanto a la circunferencia de círculo que representa al meridiano del *plano de proyección*, al cual debe cortar normalmente a la latitud  $\varphi$ .

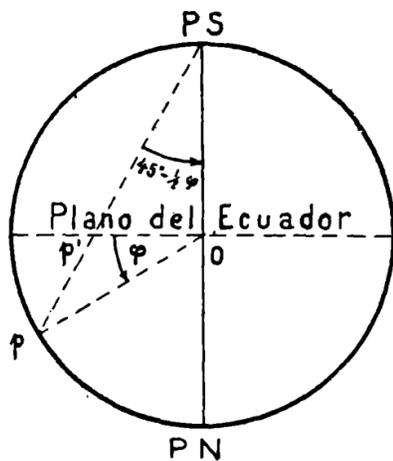


Figura 7

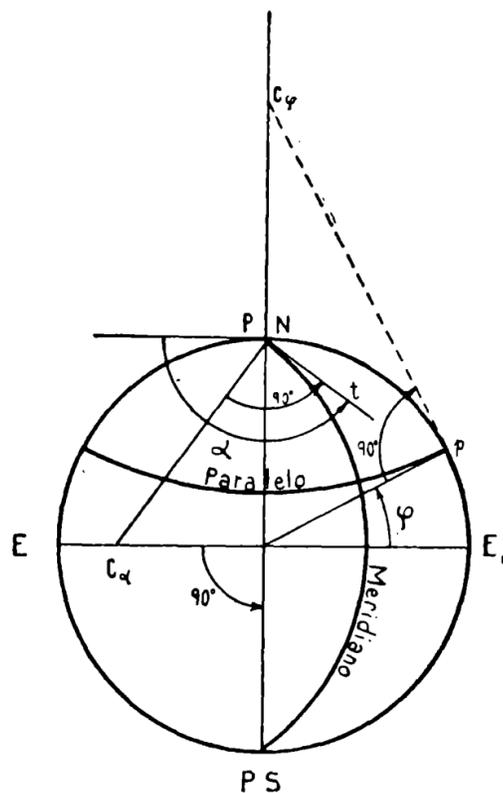


Figura 8

Luego, pues, se tira desde el centro O la línea Op con ángulo  $\varphi$  (fig. 8), con respecto a la línea EOE<sub>1</sub> (que representará al ecuador).

Luego por p, siendo ( $Op = 1$ ), se tira la normal pC $\varphi$  hasta encontrar a la línea de los polos en C $\varphi$ . El radio del paralelo será (C $\varphi$ , p) y el centro de la circunferencia de círculo que representa al paralelo de latitud  $\varphi$ , será C $\varphi$ .

Para trazar el meridiano de longitud ( $\alpha$ ) con respecto al plano origen (PNEPS), se traza la línea Pnt, por PN se le tira la normal PNC $\alpha$ , hasta encontrar al ecuador EE<sub>1</sub>; C $\alpha$  será el centro de la circunferencia de círculo que representa al meridiano y su radio será C $\alpha$ PN.

Tratándose del elipsoide, empleando la *latitud geocéntrica* como se dijo, queda con ello proyectado de modo *conforme* sobre la esfera (con la aproximación, ya antes indicada) y luego aplicando la proyección estereográfica, podrá representárselo por hemisferios completos.

7. Una vez efectuada una *representación conforme*, podemos a ella transformarla sobre el plano sin que pierda su condición de tal, y eso de infinidad de modos.

Para esto, sean  $(x)$  e  $(y)$  las coordenadas rectangulares de un punto  $p$ , y  $(X)$  e  $(Y)$  las coordenadas rectangulares de su *transformado*  $p'$ , pero que satisfagan a una relación de la forma:

$$X + \sqrt{-1} \cdot Y = F(x + \sqrt{-1} \cdot y) = F(z), \quad z = x + \sqrt{-1} y$$

donde  $(F)$  es una función arbitraria cualquiera que admita siempre una derivada.  $X$  será el conjunto de términos en  $(x)$  e  $(y)$  *reales* que tiene el desarrollo de  $F(x + \sqrt{-1} y)$ , y asimismo  $(Y)$  es el conjunto de términos en  $(x)$  e  $(y)$  que tienen por factor a  $(\sqrt{-1})$ .

Puesto que la función es derivable, se tendrá:

$$\frac{dF(z)}{dz} = F'(z) = \frac{dF(x + \sqrt{-1} \cdot y)}{dx + \sqrt{-1} dy} = F'(x + \sqrt{-1} \cdot y) = M + \sqrt{-1} \cdot N,$$

fórmula en la cual  $(M)$  es el conjunto de términos reales en  $(x)$  e  $(y)$  que tiene el desarrollo de  $F'(x + \sqrt{-1} \cdot y)$ , y  $(N)$  es el conjunto de términos en  $(x)$  e  $(y)$  con factor  $(\sqrt{-1})$ .

De modo que será:

$$\begin{aligned} \frac{dF(x + \sqrt{-1} \cdot y)}{dx + \sqrt{-1} \cdot dy} &= \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot dy + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot dy \right)}{dx + \sqrt{-1} \cdot dy} = \\ &= M + \sqrt{-1} \cdot N, \end{aligned}$$

de donde resultará:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot dy + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot dy \right) &= \\ &= (Mdx - Ndy) + \sqrt{-1} (Ndx + Mdy). \end{aligned}$$

Igualando entre ambos miembros las partes reales entre sí y análogamente las imaginarias; y suprimiendo los factores  $(dx)$  y  $(dy)$  se tendrá la *condición fundamental*:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = M, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} = -N.$$

Sean ahora 3 puntos  $(p_1, p_2, p_3)$  en el plano, que en esta transformación estén representados por otros 3 puntos  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  respectivamente.

Sean las coordenadas cartesianas de los puntos ( $p$ ) las siguientes :

$$\begin{aligned} \text{de } p_1 & \quad x_1 = x, & \quad y_1 = y \\ \text{de } p_2 & \quad x_2 = x + dx, & \quad y_2 = y \\ \text{de } p_3 & \quad x_3 = x + dx, & \quad y_3 = y + dy. \end{aligned}$$

La línea ( $p_1 p_3$ ) formará con la ( $p_1 p_2$ ), paralela al eje de las ( $x$ ), un ángulo ( $\mu$ ) :

$$\text{tg } \mu = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{dy}{dx}.$$

Las coordenadas cartesianas de los puntos ( $p'$ ), en su sistema particular, sean :

$$\begin{aligned} \text{de } p_1' & \quad X_1 = X & \quad Y_1 = Y \\ \text{de } p_2' & \quad X_2 = X + \frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx & \quad Y_2 = Y + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot dx \\ \text{de } p_3' & \quad X_3 = X + \frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot dy & \quad Y_3 = Y + \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot dy. \end{aligned}$$

La línea ( $p_2' p_1'$ ) formará con el eje de las ( $X$ ), el ángulo ( $\alpha$ ) :

$$\text{tg } \alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx}{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}}.$$

Para un ángulo ( $\alpha + \mu$ ), se tendrá :

$$\text{tg } (\alpha + \mu) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \mu}{1 - \text{tg } \alpha \text{ tg } \mu} = \frac{\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}} + \frac{dy}{dx}}{1 - \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial X}{\partial x} \cdot dy}{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx - \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dy}.$$

Pero como se tiene (según se vió anteriormente) :

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = - \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$

se tendrá también :

$$\text{tg } (\alpha + \mu) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot dy}{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot dy}.$$

Ahora bien ; la línea  $(p_1' p_3')$  forma con el eje de las  $(X)$  un ángulo  $(\beta)$  :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot dy}{\frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot dy},$$

de modo que comparando ésta con la anterior, resultará  $(\beta = \alpha + \mu)$  y por lo tanto  $(\mu = \beta - \alpha)$ .

Es decir que las  $(p_3' p_1')$  y  $(p_2' p_1')$  se cortan en  $(p_1')$ , bajo el *mismo ángulo*  $(\mu)$  con que se cortan en  $(p_1)$  las líneas  $(p_3 p_1)$  y  $(p_2 p_1)$ . La transformación, pues, es *conforme*.

**8.** Tomemos, por ejemplo, la función  $(i = \sqrt{-1})$  :

$$X + iY = \frac{k}{x + iy} = \frac{k(x - iy)}{x^2 + y^2},$$

resultará :

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{-ky}{x^2 + y^2}, \quad \frac{X}{Y} = -\frac{x}{y}, \quad X^2 + Y^2 = \frac{k^2}{x^2 + y^2}.$$

Denominando  $(d)$  a la distancia del punto  $(p)$  a su origen de coordenadas, y  $(D)$  a la del punto  $(p')$  a la del suyo ; se tendrá :

$$D^2 \cdot d^2 = k^2$$

Ahora bien, si ambos orígenes son los mismos y dejamos como ejes los mismos también, y luego tomamos un punto  $(p'')$  *simétrico* del  $(p')$  con respecto al eje de las  $(X)$ , resultará que  $(p)$  y  $(p'')$  estarán alineados con el origen, y uno será la transformación del otro por *radios vectores recíprocos* :

$$D \cdot d = k \dots (\text{constante}).$$

La transformación por *radios vectores recíprocos* goza de las propiedades siguientes :

- a) la transformada de una recta que *no pasa por el origen de transformación*, es una circunferencia de círculo que *pasa por dicho origen* ;
- b) la transformada de una recta que *pasa por el origen*, es la *misma recta* ;
- c) la transformada de una circunferencia de círculo que *pasa por el origen*, es una recta ;
- d) la transformada de cualquier circunferencia de círculo que *no pasa por el origen*, es otra circunferencia de círculo que *tampoco pasa por dicho origen*.

Los propiedades que acabamos de enumerar son consecuencia de las fórmulas de transformación, cuya demostración omitimos por ser elemental.

**9.** Imaginemos ahora que aplicamos al elipsoide de revolución la representación plana *conforme* denominada *cónica ortomorfa de Lambert*.

A dicha representación apliquemos la transformación *conforme* del número anterior, tomando como origen para dicha transformación el punto (O) de intersección entre la prolongación del *meridiano central* y la circunferencia de círculo — parte de la cual ( $E_1 E_3 E_2$ ) representa al ecuador y cuyo radio al *cuadrado* ( $h_0^2$ ) lo tomaremos como ( $k$ ) (fig. 9).

La superficie del elipsoide quedará representada de modo *conforme*, por el sistema denominado *proyección ortomorfa de Lagrange*.

Y será :

1° El meridiano central será el mismo pero prolongado desde el polo (P) que figura en la *proyección Lambert*, que quedará como *polo norte* en ésta, hasta el origen (O) que hemos elegido para la transformación. Dicho punto (O) vendrá a ser el *polo sur*, que en la *representación Lambert* estaba en el *infinito*.

2° El ecuador que en la *proyección Lambert* es el arco de circunferencia de círculo ( $E_1 E_3 E_2$ ), aparecerá en línea *recta* ( $E'_1 E'_3 E'_2$ ) normal al meridiano central al que dividirá por la mitad, siendo a su vez dividido del mismo modo por él.

3° Cada meridiano aparecerá como un arco de circunferencia de círculo que pasará por los puntos (P) y (O), cuyo centro estará sobre la línea ( $E'_1 E'_2$ ) o su prolongación.

Para determinar el *meridiano* correspondiente al (PM), por ejemplo, se une el punto ( $m$ ) *simétrico* de (M) con respecto a  $PE_3$ ; con el punto (O).

Dicha línea (o  $m$ ) cortará a ( $E'_1 E'_2$ ) en un punto (M'). El arco de circunferencia que buscamos pasará por (P, O y M').

Como la tangente en (P) al arco (PM'O) forma con la línea recta (PO) — por ser *conforme* la transformación — un ángulo igual al ( $E_3 PM$ ), la normal a (Pm) en el punto (P), o sea la recta ( $PM_1$ ) cortará a ( $E'_1 E'_2$ ) o su prolongación en un punto ( $M_1$ ), que será el *centro* del arco (PM'O).

Se determinan así los *centros* ( $N_1$  y  $N_2$ ) de los arcos ( $PE'_1 O$ ) y ( $PE'_2 O$ ).

4° Los *paralelos* aparecerán también en forma de arcos de circunferencia de círculo con centros ubicados sobre meridiano central.

Para trazar, por ejemplo, el *paralelo* correspondiente a la latitud ( $\varphi$ ), se une el punto ( $a_2$ ) con (O).

El punto ( $a_1$ ) en que ( $a_2 O$ ) corta el arco ( $PE'_1 O$ ), lo unimos con ( $N_1$ ), que es el centro de dicho arco.

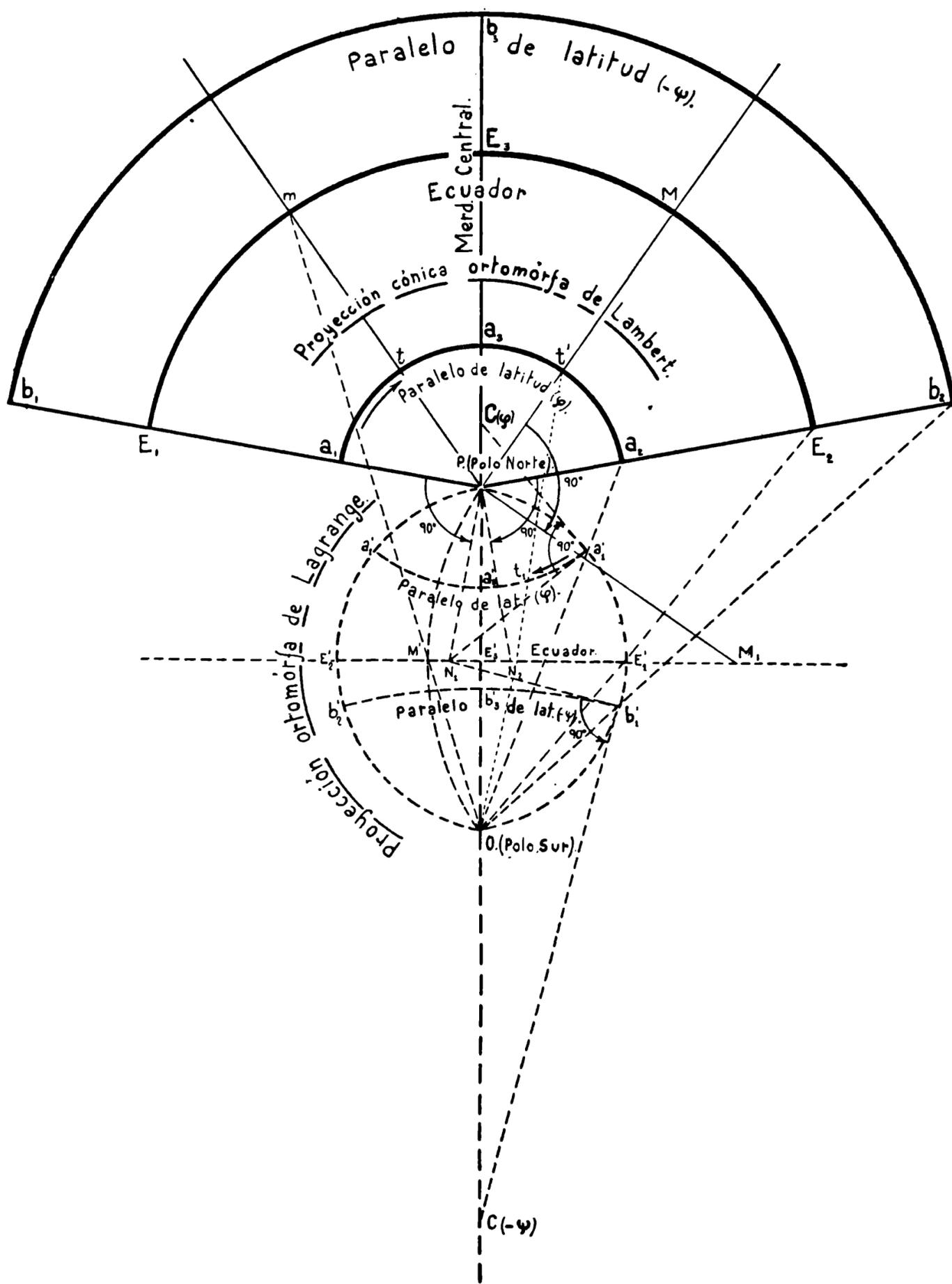


Figura 9

Se tira por  $(a_1)$  la línea recta  $(C_\varphi a_1)$  normal a  $(N_1 a'_1)$ , y el punto  $(C_\varphi)$  será el centro de la circunferencia de círculo  $(a'_1 a'_2 a'_3)$  que corresponde al *paralelo* de latitud  $(\varphi)$ .

5° Finalmente, para determinar en la *proyección ortomorfa de Lagrange* la situación  $(t_1)$ , que corresponde a un punto  $(t)$  de latitud  $(\varphi)$



A su vez, para tal caso, la *proyección ortomorfa de Lagrange* pasa a ser la *proyección estereográfica meridiana*.

11. La *proyección estereográfica polar*, permite resolver gráficamente el *triángulo de posición* de la astronomía esférica.

Supongamos que se dispone de tal sistema de proyección, sobre el cual se han ubicado las posiciones de un determinado número de estrellas.

El centro del círculo que representa el ecuador es el punto (O), el cual representa al *polo sur*.

Sea (OT) la posición del meridiano del lugar en un instante dado (fig. 10):

(OT) = unidad del radio del ecuador celeste en la proyección ;

(N) = proyección del zenit del lugar de latitud ( $\varphi$ );

(z) = distancia zenital de la estrella observada (E);

(E) = posición de la estrella de declinación ( $\delta$ );

(V) = centro del círculo que representa al *almicantarat* de distancia zenital (z) — (círculo de igual distancia zenital);

(VR<sub>1</sub>) = (VR<sub>2</sub>) = (VE) = radio del *almicantarat*.

Se tiene entonces :

$$ON = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right)$$

$$OE = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \delta \right)$$

$$OR_1 = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} z \right)$$

$$OR_2 = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} z \right)$$

$$OV = \frac{1}{2} (OR_1 + OR_2)$$

$$VR_1 = VR_2 = VE = \frac{1}{2} (OR_2 - OR_1)$$

Si el punto está en el hemisferio *sur*, naturalmente ( $\varphi$ ) será *negativa*. Y asimismo, si la estrella está en el hemisferio *austral*, deberá tomarse ( $\delta$ ) *negativa*.

Dos de los lados del *triángulo de posición*, quedan reproducidos en la proyección, por líneas *rectas*, que son las que van del polo al zenit

del lugar y del polo a la estrella, y forman en (O) un ángulo *igual* al ángulo *horario* ( $t$ ) del *triángulo de posición*.

El tercer lado, del zenit a la estrella, queda reproducido en forma de arco de círculo (EmN), *normal* al *almicantarat* en E, como lo es en la esfera; pues todo arco *de vertical* corta *normalmente* a todo *almicantarat*.

Quiere decir que la línea (EV) que es *normal* al *almicantarat* por ser su *radio*, es *tangente* al arco (EmN) por ser éste también *normal* al *almicantarat*. El ángulo (VEO) será, pues, el ángulo *paraláctico* del *triángulo de posición*.

Si (Na) la trazamos *tangente* en (N) al arco (NmE), ella será entonces la reproducción de la *tangente* en el zenit al arco vertical que contiene la estrella, y por lo tanto el ángulo (ONa) será el *azimut* (A) del *triángulo de posición*.

Pero las tangentes en (E) y en (N) al arco (NmE), deben estar *igualmente* inclinadas sobre la cuerda (EN), de modo que el ángulo (VEN) debe ser *igual* al ángulo (ENa).

Si prolongamos entonces la línea (EN) hasta que corte nuevamente al *almicantarat* en un punto (E'), el ángulo (TVE') será *igual* al ángulo (ONa), pues deben ser *iguales* los ángulos (ENa) y (EE'V). Y por lo tanto, siendo *iguales* (ENa) y (EE'V), por ser ambos *iguales* a (VEN), las líneas (E'V) y (Na) serán *paralelas*.

Designando con ( $\tau$ ) al ángulo (VEN) igual al (ENa), el triángulo (OEN) nos da:

$$\sphericalangle ONE + \sphericalangle NEO + \sphericalangle EON = 180^\circ$$

o sea:

$$A - \tau + p - \tau + t = 180^\circ.$$

de donde:

$$2\tau = A + p + t - 180^\circ = \textit{exceso esférico},$$

es decir, que el ángulo (VEN) será el *semi-exceso esférico* del *triángulo de posición*.

## CAPITULO IV

### La representación conforme

(continuación)

#### PROYECCIÓN GAUSS Y PROYECCIÓN POR FAJAS MERIDIANAS

(proyección Gauss-Krüger)

1. El método de proyección del cual pasamos a ocuparnos, consiste en colocar un cilindro tangente al elipsoide de revolución a lo largo de un meridiano, y luego representar sobre la superficie del cilindro la del elipsoide, de modo que el *módulo lineal* a lo largo del meridiano de tangencia sea *constante e igual a la unidad*. A dicho meridiano se lo denomina: *central*.

Para establecer las fórmulas de transformación, partiremos de la proyección *mercator* de la superficie del elipsoide de revolución sobre el plano.

Sean  $(\gamma, x)$  en el plano las coordenadas ortogonales correspondientes al punto de la superficie del elipsoide, de coordenadas ( $\omega =$  longitud) ( $\varphi =$  latitud); se tiene, como ya se vió:

$$\gamma = a \cdot \omega, \quad x = a \cdot \lg_{ncp} \left( \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \right)^{1/2} - a \cdot e \cdot \log_{ncp} \left( \frac{1 + e \operatorname{sen} \varphi}{1 - e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{1/2},$$

o sea:

$$x = \int \frac{a}{r_{\varphi}} \cdot R_{\varphi} \cdot d\varphi.$$

Apliquemos ahora la transformación *conforme*.

$$X + i \cdot Y = F(x + iy), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Desarrollando el 2º miembro por la fórmula de Taylor, tendremos:

$$X + iY = F(x) \cdot + \frac{dF(x)}{dx} \cdot iy + \frac{d^2F(x)}{dx^2} \cdot \frac{(iy)^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3F(x)}{dx^3} \frac{(iy)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

e igualando (X) con la parte real del 2º miembro, formada por las potencias *pares* de  $(i)$ , y por lo tanto (Y) con la que tiene por factor  $(i)$  y las potencias *impares* de  $(i)$ , será:

$$X = F(x) - \frac{d^2F(x)}{dx^2} \cdot \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^4F(x)}{dx^4} \cdot \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$

$$Y = \frac{dF(x)}{dy} \gamma - \frac{d^3F(x)}{dx^3} \frac{\gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^5F(x)}{dx^5} \cdot \frac{\gamma^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

Para ( $y=0$ ) será, pues (*meridiano central*):

$$X = F(x).$$

Y si a lo largo de todo el *meridiano central* el *módulo lineal* debe ser igual a la *unidad*, deberemos poner (en función de la latitud  $\varphi$ ):

$$F(x) = X = \int R_\varphi d\varphi \quad dX = R_\varphi d\varphi.$$

Por otra parte, en la *proyección mercator*, se tiene diferenciando  $x$ :

$$dx = \frac{a}{r_\varphi} \cdot R_\varphi \cdot d\varphi = \frac{a}{r_\varphi} \cdot dX = \frac{a}{r_\varphi} \cdot \frac{dF(x)}{dx} \cdot dx,$$

de donde será (prescindiendo del índice  $\varphi$ ):

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dX}{dx} = \frac{r}{a} = \frac{N \cos \varphi}{a}, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{r}{a \cdot R} = \frac{N \cos \varphi}{a} \cdot \frac{1}{R}$$

Para el caso del elipsoide de revolución se tiene:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \quad R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Diferenciando entonces  $F(x)$ , se tiene:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{d \frac{N \cos \varphi}{a}}{dx} = \frac{d \frac{N \cos \varphi}{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d \frac{N \cos \varphi}{a}}{d\varphi} \cdot \frac{N \cos \varphi}{a} \cdot \frac{1}{R}$$

Pero:

$$\frac{dN}{d\varphi} = \frac{ae^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$\frac{d \frac{N \cos \varphi}{a}}{d\varphi} = \frac{e^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{\sin \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = - \frac{\sin \varphi (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

de donde:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = - \frac{\sin \varphi (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot \frac{\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{(1 - e^2) a} = - \frac{N \sin \varphi \cos \varphi}{a^2}$$

y también:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = - \frac{N \cos^2 \varphi}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

y poniendo para mayor comodidad :

$$\operatorname{tg} \varphi = t, \quad r_1^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \cos^2 \varphi ;$$

se encuentra diferenciando sucesivamente :

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{N \cos \varphi}{a}, \quad \frac{d^2F(x)}{dx^2} = - \frac{N \cos^2 \varphi}{a^2} \cdot t$$

$$\frac{d^3F(x)}{dx^3} = - \frac{N \cos^3 \varphi}{a^3} (1 + r_1^2 - t^2)$$

$$\frac{d^4F(x)}{dx^4} = - \frac{N \cos^4 \varphi}{a^4} \cdot t \cdot (t^2 - [5 + 9r_1^2 + 4r_1^4])$$

$$\frac{d^5F(x)}{dx^5} = - \frac{N \cos^5 \varphi}{a^5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} - 5 + 18t^2 - (14 - 58t^2)r_1^2 \\ - (13 - 64t^2)r_1^4 \\ - (4 - 24t^2)r_1^6 \end{array} \right\}$$

$$\frac{d^6F(x)}{dx^6} = - \frac{N \cos^6 \varphi}{a^6} \cdot t \cdot \left\{ \begin{array}{l} 61 - 58t^2 + t^4 - (330t^2 - 270)r_1^2 \\ - (580t^2 - 445)r_1^4 \\ - (600t^2 - 324)r_1^6 \\ - (240t^2 - 40)r_1^8 \end{array} \right\}$$

Poniendo entonces en las fórmulas anteriores ( $a \cdot \omega$ ) en lugar de ( $y$ ). Y tomando como origen de las  $X$  el *polo sur*, y designando con ( $S_\varphi = F(x)$ ) al desarrollo del meridiano desde el *polo sur* hasta el punto de latitud ( $\varphi$ ); tendríamos para el sistema de *proyección de Gauss* :

$$Y = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{\omega}{a} - \frac{d^3F(x)}{dx^3} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{\omega^3}{6} + \frac{d^5F(x)}{dx^5} \cdot \frac{1}{a^5} \cdot \frac{\omega^5}{120} - \dots$$

$$X = F(x) - \frac{d^2F(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{d^4F(x)}{dx^4} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{\omega^4}{24} - \frac{d^6F(x)}{dx^6} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot \frac{\omega^6}{720} + \dots$$

**2.** Para fines puramente cartográficos y tomando como origen de las ( $Y$ ) y de la longitud ( $\omega$ ) el meridiano central, basta con poner los primeros términos, los que simplificados nos darán :

$$Y = (\omega \cos \varphi) \cdot N + \frac{(\omega \cos \varphi)^3}{6} \cdot N (1 - t^2)$$

$$X = S_\varphi + \frac{(\omega \cos \varphi)^2}{2} N \cdot t + \frac{(\omega \cos \varphi)^4}{24} \cdot N \cdot t (5 - t^2).$$

Y estas fórmulas son suficientemente exactas *gráficamente* (con error menor de 1 décimo de milímetro *en la carta*); ya sea :

1° Para representar a toda la República Argentina en escala de

1 : 1.000.000, con meridiano central de longitud ( $-63^\circ$ ) con respecto a Greenwich ;

2° Para expresar toda una provincia o territorio federal a escala 1 : 200.000, y

3° Para la cartografía topográfica de precisión en fajas meridianas hasta de ( $4^\circ$ ) de ancho en longitud (2 grados a cada lado del meridiano central de la faja) y en escala aun de 1 : 10.000.

Para este caso de fajas hasta de ( $4^\circ$ ) de ancho puede prescindirse del término en  $(\omega \cos \varphi)^4$ .

3. La idea de expresar la cartografía topográfica de precisión de los países muy extensos en latitud, por fajas meridianas, es debida al geodesta L. Krüger, del Instituto de Postdam, y a tal sistema de fajas meridianas se lo denomina *proyección Gauss-Krüger*.

En nuestro país se utilizan fajas cuyos meridianos centrales están espaciados de tres en tres grados en longitud.

Al meridiano central de la 1ª faja (de longitud  $-72^\circ$  de Greenwich) se le asigna la ordenada ( $Y = 1\,500\,000$  mts).

Las demás fajas son :

Faja	Longitud correspondiente al meridiano central	Ordenada asignada al meridiano central
2ª . . . . .	$-69^\circ$ de Greenwich	$Y_0 = 2\,500\,000$ mts.
3ª . . . . .	$-66^\circ$ »	$Y_0 = 3\,500\,000$ »
4ª . . . . .	$-63^\circ$ »	$Y_0 = 4\,500\,000$ »
5ª . . . . .	$-60^\circ$ »	$Y_0 = 5\,500\,000$ »
6ª . . . . .	$-57^\circ$ »	$Y_0 = 6\,500\,000$ »
7ª . . . . .	$-54^\circ$ »	$Y_0 = 7\,500\,000$ »

Puesto que los puntos más distantes del meridiano central en cada faja no lo están a más de *dos* grados en longitud (menos de 250 000 mts), resultará así que la ordenada de un punto cualquiera de la faja estará *caracterizada* por el *mismo número entero* de millones de metros que corresponde a la ordenada asignada al meridiano central de la faja, lo cual permite inmediatamente saber por la ordenada del punto la faja en que está.

Como todo meridiano (M) que figure en una faja estará expresado en ella con la concavidad (aunque muy débil) hacia el meridiano central de la faja, resulta que dos fajas contiguas *no pueden unirse* en toda su extensión de Norte a Sur, por cuanto el mismo meridiano (M) aparece en ellas con su concavidad en sentido contrario (en una con respecto a la otra). Vale decir, que las fajas son sistemas de proyección *independientes* entre sí, que no pueden, pues, unirse por sus bordes.

Para que, *correctamente*, se pueda disponer entonces de la cartografía de la región en los alrededores de un punto cualquiera, al menos en un ancho de un grado en longitud (medio grado al Este y medio grado al Oeste), las fajas abarcan 2 grados en longitud a cada lado de su meridiano central, lo que produce una superposición de un grado en longitud entre dos fajas contiguas.

La región que cubre tal zona de superposición, debe pues ser *expresada* en los dos sistemas de proyección correspondientes a dichas fajas contiguas.

Siendo (L) la longitud del punto con respecto a Greenwich, puede ponerse :

$$L = - 75^{\circ} + n \cdot 3^{\circ} + \omega,$$

donde ( $\omega$ ) en valor absoluto será igual o menor a ( $2^{\circ}$ ) y las fórmulas del n° 2 serán entonces :

$$Y = n \cdot 1\,000\,000 + 500\,000 + (\omega \cos \varphi) N + \frac{(\omega \cos \varphi)^3}{6} N (1 - t^2)$$

$$X = S_{\varphi} + \frac{(\omega \cos \varphi)^2}{2} N \cdot t + \frac{(\omega \cos \varphi)^4}{24} \cdot N \cdot t (5 - t^2).$$

4. En este sistema de proyección se estila emplear además del reticulado de meridianos y paralelos, otro, pero *cuadrículado* y cuyas líneas se espacian en un mismo número entero de kilómetros. En esa forma se mejora la estimación de distancias entre puntos de la carta, reduciéndose al *mínimum* el efecto de los movimientos deformantes del papel.

Pues dichos movimientos al desplazar de sus verdaderos sitios a los puntos, también desplaza a los cuadrados donde ellos se encuentran por estar dibujados en la carta. De modo que al determinar (gráficamente) las coordenadas rectangulares de los puntos, se hace intervenir la *apreciación gráfica* solamente limitada al cuadrado donde cada punto se encuentra. En esa forma, pues, se mejora la apreciación de distancias sobre la carta, pero naturalmente tal procedimiento no altera la precisión con que la topografía interviene en ella, por cuanto ya eso lo trae de las operaciones realizadas en el terreno. Y seguramente tal precisión es del orden de :

$$\frac{1}{1500},$$

siendo también de ese orden el aumento que produce el *módulo lineal* para los elementos lineales más alejados del *meridiano central* (unos dos grados en longitud), como lo veremos a continuación.

5. Un elemento de paralelo ( $\Delta\omega$ ) tiene como dimensión sobre la superficie del elipsoide :

$$\Delta d = N \cos \varphi \cdot \Delta\omega \quad (\Delta d)^2 = (N \cos \varphi \Delta\omega)^2.$$

Deteniéndonos en los primeros términos de las fórmulas finales del número 3, tendremos :

$$\Delta Y = N \cos \varphi \Delta\omega + \frac{1}{2} \omega^2 \cos^3 \varphi N (1 - t^2) \cdot \Delta\omega$$

$$\Delta X = \omega \cos^2 \varphi N \cdot t \cdot \Delta\omega + \dots$$

y elevando al cuadrado :

$$(\Delta Y)^2 = (N \cos \varphi \Delta\omega)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2 \varphi (1 - t^2) \dots \right\}^2$$

$$(\Delta Y)^2 = (N \cos \varphi \Delta\omega)^2 \{ 1 + \omega^2 \cos^2 \varphi (1 - t^2) \dots \}$$

$$(\Delta X)^2 = (N \cos \varphi \Delta\omega)^2 (\omega^2 \cos^2 \varphi \cdot t^2).$$

Sumando y designando con  $(\Delta D)$  al elemento lineal en la carta :

$$(\Delta D)^2 = (\Delta Y)^2 + (\Delta X)^2 = (N \cos \varphi \Delta\omega)^2 \{ 1 + \omega^2 \cos^2 \varphi \dots \}$$

$$(\Delta D)^2 = (\Delta d)^2 (1 + \omega^2 \cos^2 \varphi)$$

y designando con  $M_{\varphi, \omega}$  al *módulo lineal*, será :

$$M_{\varphi, \omega} = \frac{\Delta D}{\Delta d} = (1 + \omega^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \dots = 1 + \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2 \varphi$$

$$\text{y para } \omega \leq 2^\circ; \quad (M_{\varphi, \omega}) \leq \left( 1 + \frac{1}{1620} \right).$$

Designando con  $(y)$  a la distancia del punto hasta el meridiano central, será :

$$Y = (\omega \cos \varphi) N + \dots$$

de donde

$$\frac{Y^2}{N^2} = (\omega \cos \varphi)^2,$$

por lo cual podremos poner *aproximadamente* :

$$M_{\varphi} \cdot \omega = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{N^2}.$$

6. Para poder obtener en este sistema de proyección las coordenadas planas conformes de los diversos vértices de la triangulación, de modo concordante con la manera de expresar las coordenadas geográficas elipsóidicas (latitud y longitud), el milésimo y a veces el diezmilésimo de segundo de arco, ya no es lícito limitar las fórmulas a sus primeros términos y es necesario contemplar los de orden más elevado.

En el 1<sup>er</sup> caso (el milésimo de segundo de arco), significa que la triangulación *calcula* los lados de sus triángulos a los *tres centímetros*; en el 2<sup>do</sup> caso (el diezmilésimo de segundo de arco) se va en los cálculos hasta los *tres milímetros*.

Y más allá del *centímetro* puede decirse que ya es un asunto puramente *formal* de cálculo, y que equivale a los *tres diezmilésimos de segundo de arco* en las coordenadas geográficas elipsóidicas.

Una lista de coordenadas planas Gauss-Krüger al centímetro equivale, pues, a una lista de coordenadas geográficas elipsóidicas a los *tres diezmilésimos de segundo de arco*.

Se denominan *fórmulas fundamentales* para el cálculo de coordenadas planas (hasta  $\omega = 2^\circ$ ) a las siguientes [en las cuales se desconsideran los términos de orden superior a  $\eta^2$  a partir de  $\left(\frac{d^4F(x)}{dx^4}\right)$ ]:

$$Y = n \cdot 1.000.000 + 500.000 + (\omega \cos \varphi) \cdot N + \frac{(\omega \cos \varphi)^3}{6} N (1 - t^2 + \eta^2) \\ + \frac{(\omega \cos \varphi)^5}{120} \cdot N (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \dots$$

$$X = S_\varphi + \frac{(\omega \cos \varphi)^2}{2} \cdot N t + \frac{(\omega \cos \varphi)^4}{24} N \cdot t (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ + \frac{(\omega \cos \varphi)^6}{720} \cdot N \cdot t (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2 \dots).$$

con estas fórmulas se va hasta el *milímetro*.

Cuando se considera suficiente aproximación el *centímetro*, se emplean las fórmulas siguientes:

$$Y = n \cdot 1\,000\,000 + 500\,000 + (\omega \cos \varphi) \cdot N + \frac{(\omega \cos \varphi)^3}{6} N (1 - t^2 + \eta^2) \\ X = S_\varphi + \frac{(\omega \cos \varphi)^2}{2} N \cdot t + \frac{(\omega \cos \varphi)^4}{24} N \cdot t (5 - t^2 + 9\eta^2).$$

Designando con  $(Y_0)$  a la ordenada atribuída al meridiano central, se tiene:

$$Y_0 = n \cdot 1\,000\,000 + 500\,000.$$

Y llamando  $(\varphi_0)$  a la latitud correspondiente al punto de coordenadas  $(X, Y_0)$ , será:

$$X = S_{\varphi_0}.$$

y poniendo

$$t_0 = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad N_0 = N_{\varphi_0}, \quad \eta_0^2 = \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - e^2}.$$

se encuentran como *fórmulas inversas* de las últimas :

$$\omega = \frac{(Y - Y_0)}{N_0 \cos \varphi_0} - \frac{(Y - Y_0)^3}{6N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2t_0^2 + r_0^2) \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{(Y - Y_0)^2 t_0}{2N_0^2} (1 + r_0^2) + \frac{(Y - Y_0)^4 t_0}{24N_0^4} \cdot (5 + 3t_0^2) \dots$$

Con estas fórmulas, partiendo de las coordenadas planas al centímetro, se obtienen las coordenadas geográficas elipsóidicas al milésimo de segundo de arco.

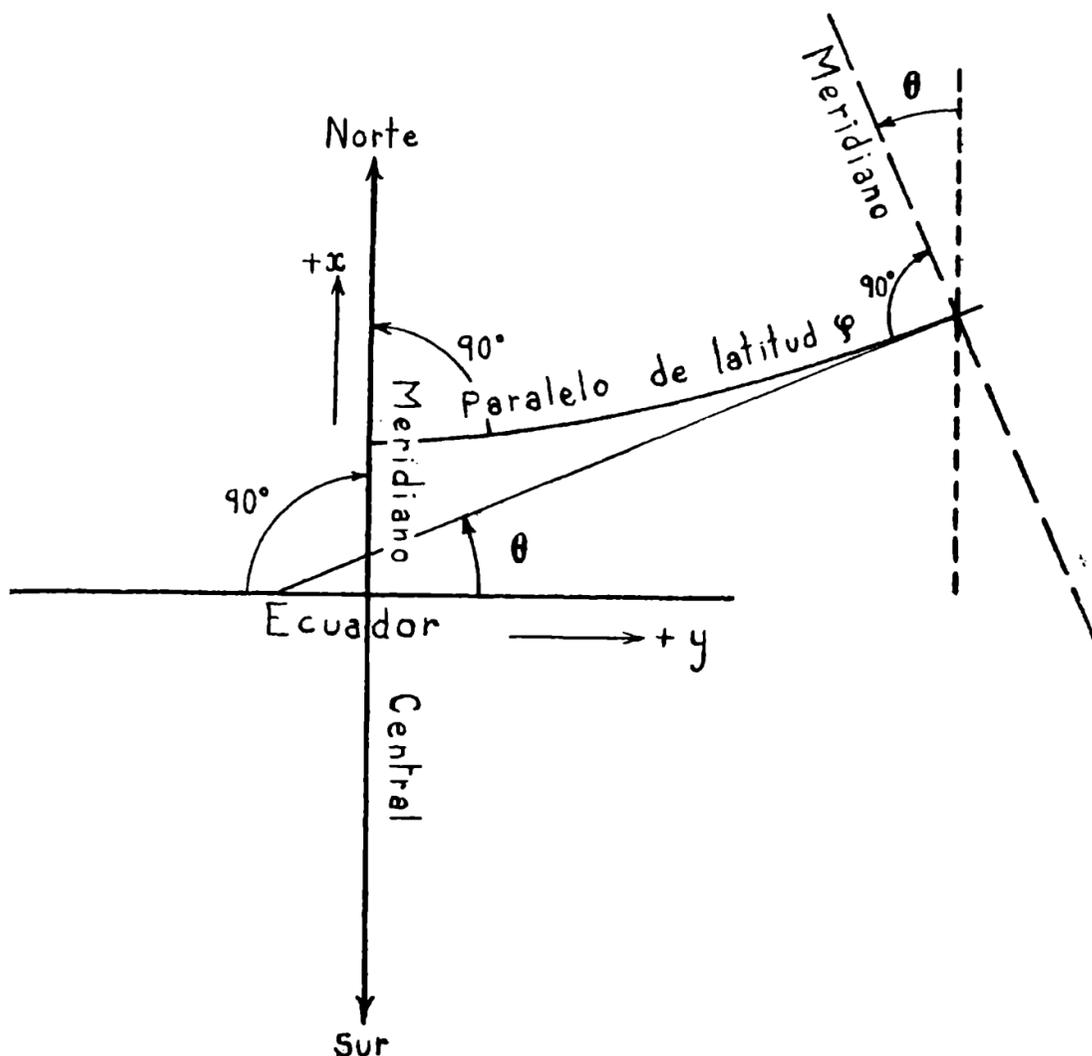


Figura 1

7. Si se considera ( $\varphi$ ) constante ( $X$  e  $Y$ ) serán las coordenadas planas de la curva que en la carta representa al paralelo de latitud ( $\varphi$ ) (fig. 1).

Derivando ( $X$  e  $Y$ ) con respecto a ( $\omega$ ) se tendrá entonces para la tangente a la curva, denominando  $\theta$  al ángulo que forma con el eje de las  $Y$  :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dX}{dY} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \omega}}{\frac{\partial Y}{\partial \omega}}, \quad \theta = \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta \dots$$

de donde resultará, efectuando las operaciones :

$$\theta = \omega \operatorname{sen} \varphi + \frac{\omega^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3r_1^2).$$

Dicho ángulo, en función de las coordenadas (X, Y) del punto, será también

$$\theta = \frac{(Y - Y_0) t_0}{N_0} - \frac{(Y - Y_0)^3 t_0}{3N_0^3} (1 + t_0^2 - r_0^2),$$

fórmula en la cual ( $N_0$ ,  $t_0$  y  $r_0$ ) están referidas como en las fórmulas inversas del número anterior, para la latitud ( $\varphi_0$ ), dada por :

$$X = S \varphi_0.$$

En estas fórmulas ( $Y_0$ ) es la ordenada correspondiente al *meridiano central*.

Como la representación es *conforme*, en todo punto de la carta el meridiano corta el paralelo a ( $90^\circ$ ); de modo que ( $\theta$ ) será el ángulo que forma el meridiano en la paralela al eje de las (X).

El ángulo ( $\theta$ ) se considera *positivo*, medido *hacia la izquierda*.

En el hemisferio Sur (latitud negativa) el ángulo ( $\theta$ ) será negativo para ( $\omega$  positiva), es decir que la dirección (hacia el Norte) del meridiano estará *girada* hacia el Este para los puntos colocados al Este del meridiano central, y hacia el Oeste para los puntos colocados al Oeste del meridiano central (fig. 2).

Al ángulo ( $\theta$ ) se lo denomina *convergencia plana de meridianos*.

8. Para determinar correctamente el valor del *módulo lineal* y la forma en que queda representada una línea *geodésica*, consideraremos esta proyección desde otro punto de vista que hará resaltar notables propiedades de la misma.

Sean dos líneas *geodésicas* trazadas sobre una superficie curva: MN y MP normales entre sí.

Por un punto M' de la geodésica MP, siendo MM' infinitamente pequeña, tracemos la geodésica M'N', normal también a la geodésica MP (fig. 3).

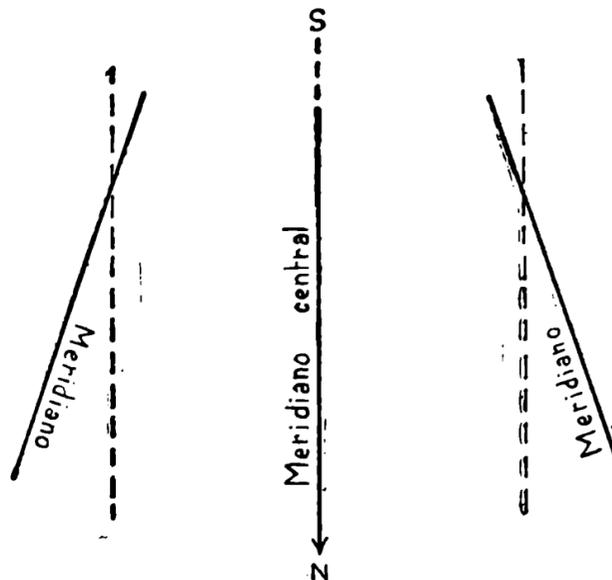


Figura 2

Tracemos por A (distante  $b$  de M) un *elemento* de geodésica normal a la MN en el punto A, y sea B el punto en que dicho *elemento* de geodésica corta a la M'N'. Sea M'' un punto de la línea M'N' infinitamente próximo de B.

El exceso sobre  $(2\pi)$  de la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero geodésico MABM', según el *teorema de Gauss*, es:

$$\int k dz,$$

siendo  $k$  la *curvatura absoluta* correspondiente al *elemento de super-*

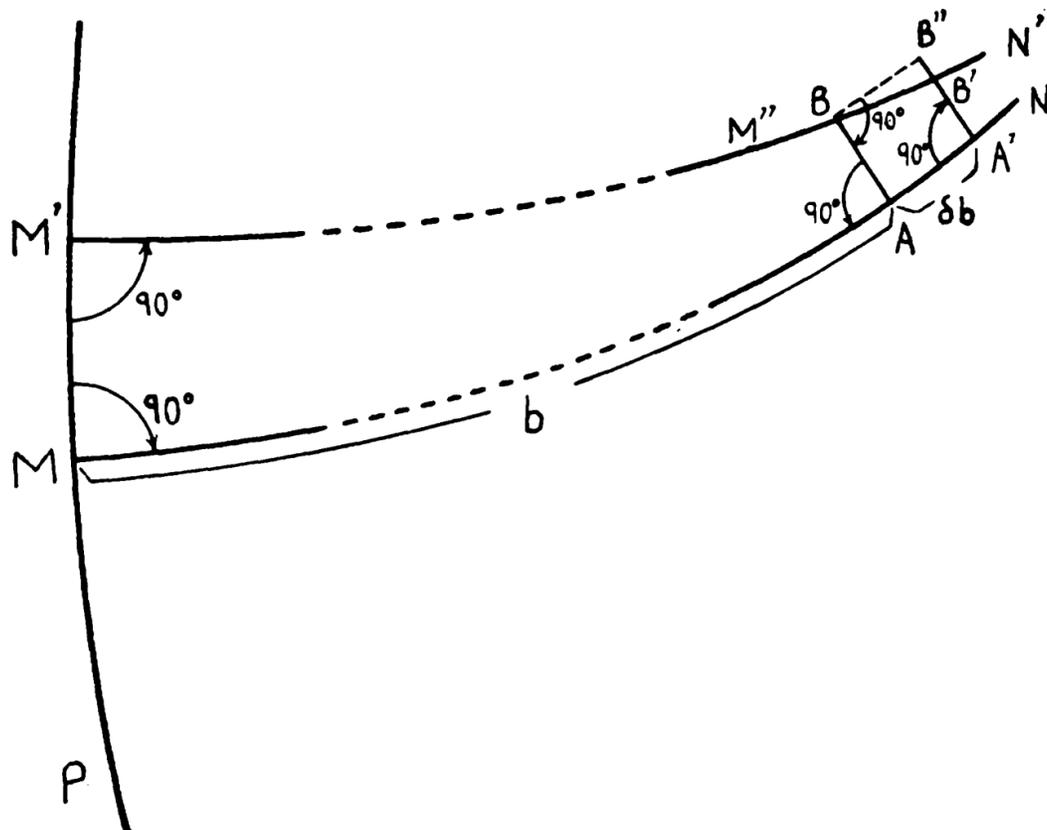


Figura 3

*ficie*  $dz$ , y extendida la integración a toda la superficie del cuadrilátero MABM'.

La *curvatura absoluta* es la recíproca del producto de los radios de curvatura principales  $\rho_1$  y  $\rho_2$  de la superficie:

$$k = \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2}.$$

Se tendrá entonces:

$$\sphericalangle ABM'' = 90^\circ + \int k dz.$$

Tracemos por B la línea BB'' normal a la AB, y se tendrá

$$\sphericalangle ABM'' = 90^\circ + \int k \delta z = 180^\circ - (90^\circ - \sphericalangle B''BB') = 90^\circ + \sphericalangle B''BB'$$

y por lo tanto:

$$\sphericalangle B''BB' = \int k dz.$$

al valor de la *curvatura absoluta* para cualquier punto dentro del cuadrilátero MABM', la podemos considerar como función de la distancia geodésica  $b$ , hasta MM', de modo que para el punto A pondremos :

$$k_b = f(b).$$

Pongamos además — siendo  $(m_b)$  una cierta función de  $(b)$  — :

$$AB = MM' m_b.$$

Para otro punto A' infinitamente próximo del A, será :

$$MA' = MA + AA' = b + \delta b$$

y se tendrá entonces :

$$A'B' = MM' \cdot m_{b+\delta b} = MM' \left\{ m_b + \frac{\partial m_b}{\partial b} \cdot \delta b + \dots \right\}$$

$$A'B' = MM' m_b + MM' \frac{\partial m_b}{\partial b} \cdot \delta b = AB + MM' \frac{\partial m_b}{\partial b} \cdot \delta b$$

y por lo tanto

$$B'B'' = A'B'' - A'B' = AB - A'B' = - MM' \frac{\partial m_b}{\partial b} \cdot \delta b.$$

Por otra parte podemos poner :

$$dz = AB \cdot AA' = MM' \cdot m_b \delta d$$

y será pues :

$$\sphericalangle B''BB' = \int k dz = \int k_b MM' m_b db = MM' \int k_b m_b \cdot db$$

y también

$$B'B'' = BB'' \text{ sen } B''BB' = \delta b \cdot MM' \int k_b m_b \cdot db.$$

Comparando con el valor anterior de B'B'', luego de dividir por  $(MM' \delta b)$ , resultará la *fórmula fundamental* :

$$-\frac{\partial m_b}{\partial b} = \int k_b m_b \cdot db.$$

La integración va de *cero* hasta  $(b)$ . Para  $(b=0)$  será, pues :

$$\left( \frac{\partial m_b}{\partial b} \right)_{b=0} = 0$$

y desde luego :

$$(m_b)_{b=0} = 1.$$

Diferenciando la *fórmula fundamental*, se tendrá

$$\frac{\partial^2 m}{\partial b^2} = - k_b \cdot m_b$$

$$\frac{\partial^3 m}{\partial b^3} = - \frac{\partial k_b}{\partial b} \cdot m_b - k_b \frac{\partial m_b}{\partial b}$$

$$\frac{\partial^4 m}{\partial b^4} = - \frac{\partial^2 k_b}{\partial b^2} \cdot m_b - 2 \frac{\partial k_b}{\partial b} \cdot \frac{\partial m_b}{\partial b} - \frac{k_b \partial^2 m_b}{\partial b^2}$$

y para ( $b=0$ ), teniendo en cuenta los anteriores :

$$\left(\frac{\partial^2 m_b}{\partial b^2}\right)_{b=0} = - k_{b(b=0)},$$

$$\left(\frac{\partial^3 m_b}{\partial b^3}\right)_{b=0} = - \left(\frac{\partial k_b}{\partial b}\right)_{b=0}$$

$$\left(\frac{\partial^4 m_b}{\partial b^4}\right)_{b=0} = (k_{b^2})_{b=0} - \left(\frac{\partial^2 k_b}{\partial b^2}\right)_{b=0}.$$

Suprimiendo el índice ( $b=0$ ) y poniendo simplemente (0), la función ( $m_b$ ) desarrollada en serie será :

$$m_b = 1 - \frac{b^2 \cdot k_0}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{b^3 dk_b}{db_0} + \frac{b^4}{24} \left( k_0^2 - \frac{d^2 k_b}{db_0^2} \right) + \dots$$

Si se trata de una superficie de *revolución* y MP es un *meridiano* (línea *geodésica*), tanto la función ( $k_b$ ) como ( $m_b$ ) deben ser funciones *pares* de  $b$ , por ser simétricas para ambos lados del *meridiano* MP, y en este caso será, pues :

$$\frac{dk_b}{db_0} = 0$$

y se tendrá :

$$m_b = 1 - \frac{b^2 k_0}{2} + \frac{b^4}{24} \left( k_0^2 - \frac{d^2 k_b}{db_0^2} \right) \dots$$

Si la curvatura absoluta fuera *constante*, en ese caso sería (caso de la esfera):

$$m_b = 1 - \frac{b^2 k}{2} + \frac{b^4}{24} k^2 \dots = \cos(b\sqrt{k}).$$

**9.** Sentado esto, consideremos una superficie de *revolución* transportada al plano en proyección *conforme*, y cuyo *módulo lineal* sea *constante* e igual a la unidad a lo largo de un *meridiano central* OP, reproducido en el plano por la línea recta OX (eje de las X) (fig. 4).

Los puntos de la superficie curva son dados por el sistema de coordenadas geodésicas ortogonales y sus representantes en el plano por coordenadas planas ortogonales. Al eje de las X le atribuiremos la ordenada ( $Y_0 = 0$ ).

Puntos en la superficie (coordenadas)	Puntos en el plano (coordenadas)
1... $a, b$	1'... $X, Y$
2... $a + \delta a, b$	2'... $X + \frac{\partial X}{\partial a} \cdot \delta a, Y + \frac{\partial Y}{\partial a} \cdot \delta a$
3... $a + \delta a, b + \delta b$	3'... $X + \frac{\partial X}{\partial a} \cdot \delta a + \frac{\partial X}{\partial b} \cdot \delta b, Y + \frac{\partial Y}{\partial a} \cdot \delta a + \frac{\partial Y}{\partial b} \cdot \delta b$

Puesto que la superficie es de *revolución*, ella es simétrica (sus características) con respecto a un meridiano *cualquiera*. Y como el

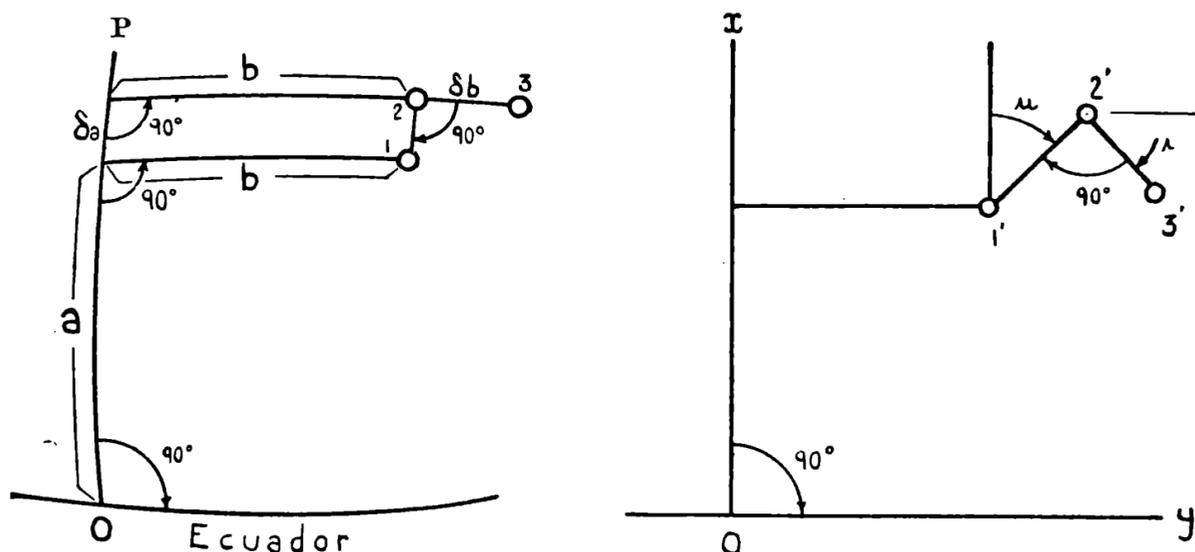


Figura 4

*meridiano central* OP queda reproducido por la línea recta OX, las coordenadas X e Y — funciones de ( $a$  y  $b$ ) — deberán ser de la forma:

$$X = a + A_1 b^2 + A_2 b^4 + \dots$$

$$Y = b + B_1 b^3 + B_2 b^5 + \dots$$

donde ( $A_1, A_2, \dots B_1, B_2 \dots$ ) serán funciones *únicamente* de la variable ( $a$ ).

Siendo rectángulo en (2) el triángulo elemental (1, 2, 3), también el representante (1', 2', 3') será rectángulo en (2'), y tendremos la relación :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{Y_2' - Y_1'}{X_2' - X_1'} = \frac{X_2' - X_3'}{Y_3' - Y_2'}$$

o sea :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\frac{\partial Y}{\partial a}}{\frac{\partial X}{\partial a}} = - \frac{\frac{\partial X}{\partial b}}{\frac{\partial Y}{\partial b}}$$

de donde se tendrá :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{b^3 \frac{\partial B_1}{\partial a} + b^5 \frac{\partial B_2}{\partial a} \dots}{1 + b^2 \frac{\partial A_1}{\partial a} + b^4 \frac{\partial A_2}{\partial a} \dots} = - \frac{2bA_1 + 4b^3A_2 \dots}{1 + 3b^2B_1 + 5b^4B_2 \dots}$$

Para que se realice tal igualdad, debe ser :

$$A_1 = 0, \quad \frac{1}{4} \frac{\partial B_1}{\partial a} = -A_2.$$

De modo que X e Y serán de la forma :

$$\begin{aligned} X &= a + A_2 b^4 + \dots \\ Y &= b + B_1 b^3 + B_2 b^5 + \dots \end{aligned}$$

La condición de *conforme* exige que se tenga para el *módulo lineal* (M) correspondiente al triángulo elemental :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1'2'}{12}\right)^2 &= \left(\frac{2'3'}{23}\right)^2 = M^2 \\ M^2 &= \frac{(2'3')^2}{(23)^2} = \left(\frac{\partial Y}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial b}\right)^2 = (1 + 3B_1 b^2 + 5B_2 b^4 \dots)^2 + (4A_2 b^3 + \dots)^2 \\ M^2 &= \left(\frac{1'2'}{12}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^2 \delta^2 a + \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^2 \delta^2 a}{m^2 \delta \alpha^2} = \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^2}{m^2} \\ M^2 &= \frac{\left(b^3 \frac{\partial B_1}{\partial a} + b^5 \frac{\partial B_2}{\partial a} \dots\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial A_2}{\partial a} \cdot b^4 \dots\right)^2}{m^2} \end{aligned}$$

Y deteniéndonos en la cuarta potencia de (b), y extrayendo la raíz cuadrada :

$$M = 1 + 3B_1 b^2 + 5B_2 b^4 \dots = \frac{1 + \frac{\partial A_2}{\partial a} \cdot b^4}{m}.$$

Poniendo en lugar de (m) el valor encontrado anteriormente, será :

$$M = 1 + 3B_1 b^2 + 5B_2 b^4 = \frac{1 + \frac{\partial A_2}{\partial a} \cdot b^4}{1 - \frac{b^2}{2} k_0 + \frac{b^4}{24} \left(k_0^2 - \frac{\partial^2 k}{\partial b_0^2}\right) \dots}$$

y resultará :

$$B_1 = + \frac{k_0}{6}.$$

Y como se tiene (según se vió ya):

$$A_2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial B_1}{\partial a},$$

será:

$$A_2 = -\frac{1}{24} \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial a} \right)_{b=0}$$

y también:

$$B_2 = \frac{k_0^2}{24} + \frac{1}{120} \left( \frac{\partial^2 k}{\partial b_0^2} - \left( \frac{\partial^2 k}{\partial a^2} \right)_{b=0} \right).$$

Para el caso del elipsoide se tiene:

$$k_\varphi = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}{A^2 (1 - e^2)} = k(a)_{(b=0)},$$

fórmula en la cual designamos con (A) al semi-eje mayor.

$$k(\varphi + \Delta\varphi) = k_\varphi - \frac{2e^2 \operatorname{sen} 2\varphi (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}{A^2 (1 - e^2)} \cdot \Delta\varphi \dots = k(a + \delta a)_{(b=0)}$$

y siendo

$$\delta a = R \Delta\varphi \dots, \quad R = \frac{A (1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}},$$

se tendrá, pues:

$$\frac{\partial k}{\partial a_{(b=0)}} = -\frac{2e^2 \operatorname{sen} 2\varphi (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}{A^3 (1 - e^2)}$$

Y como aproximadamente puede ponerse

$$b = \omega \cos \varphi \cdot N_\varphi = \omega \cos \varphi \cdot A,$$

será simplificando:

$$A_2 b^4 = \frac{e^2 \cdot \omega^4 \cos^4 \varphi \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi}{6} \cdot A \quad \left\{ \begin{array}{l} e^2 = \frac{1}{150} \\ A = 6\,300\,000 \text{ mts.} \end{array} \right\}.$$

El máximo de esta expresión tiene lugar para  $\left(\frac{1}{5} = \operatorname{tg}^2 \varphi\right)$  y para  $(\omega = 2^\circ)$ , será:

$$A_2 b^4 = \frac{1}{150} \cdot \left(\frac{1}{28,65}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 6\,300\,000 < 0,0035 \text{ mts.}$$

Deteniéndonos, pues, en el *centímetro*, podremos poner aún para puntos distantes  $(2^\circ)$  del meridiano central:

$$\begin{aligned} X &= a \\ Y &= b + \frac{b^3}{6} k_0 + \frac{b^5 k_0^2}{24}. \end{aligned}$$

pues por la misma razón puede limitarse ( $B_2$ ) al primer término de la derecha.

Vale decir, que toda línea geodésica *normal* al *meridiano central* aparecerá en esta clase de proyección como una *línea recta normal* al eje de la  $X$ , que representa en el plano al meridiano central.

Para (M) tendremos :

$$M = \frac{1}{m} = 1 + 3B_1b^2 + 5B_2b^4 \dots = 1 + b^2 \frac{k_0}{2} + \frac{5}{24} b^4 k_0^2 \dots$$

y también

$$M = \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} y^2 k_0 + \frac{1}{24} y^4 k_0^2 \dots$$

y aun para ( $y = 210$  Km) con un error del orden de (1 : 20 000 000)

$$M = \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} y^2 k_0.$$

**10.** Consideremos la figura del n° 9. El exceso esférico del cuadrilátero geodésico (trirectángulo) será según el teorema de Gauss :

$$\varepsilon = \int km \delta a \cdot \delta b = \delta a \int km \delta b.$$

Ahora bien, si ( $b$ ) fuera de 200 Km y ( $\delta a$ ) fuera de 100 Km, aproximadamente sería ( $\varepsilon = 100''$ ).

La *curvatura absoluta* ( $k$ ) a lo largo del meridiano (OP) variará aproximadamente en :

$$\delta k = \delta a \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial a} \right)_{b=0} = \delta a \left( \frac{-2e^2}{A^3} \right) = -\delta a \cdot 2e^2 k \cdot \frac{1}{A} = -2e^2 \frac{\delta a}{A} \cdot k,$$

de modo que, *relativamente* variará en :

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta \cdot a}{k} \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial a} \right)_{b=0} = -\frac{2}{150} \cdot \frac{100}{6300} < \frac{1}{4500}.$$

El considerar constante ( $k$ ) para ( $\delta a < 100$  Km), afectará, pues, a la estimación del monto de ( $\varepsilon$ ) en :

$$\frac{\varepsilon}{4500} = \frac{100''}{4500} < 0''023.$$

Para ( $\delta a < 50$  Km), el error no alcanzará a ( $0''006$ ).

Sean entonces dos líneas geodésicas normales al meridiano central e infinitamente próximas, a las cuales corta otra línea *geodésica*, bajo los ángulos ( $\tau$ ) y ( $\tau + \delta\tau$ ) (fig. 5).

El ángulo ( $\delta\tau$ ) será precisamente el exceso esférico del cuadrilá-

tero (1 2 3 4), que según el teorema de Gauss nos dará (considerando  $k$  constante):

$$\delta\tau = \delta a k \int m \delta b = k \delta a \int \left[ 1 - \frac{b^2}{2} k + \dots \right] \delta b$$

$$\delta\tau = \delta a k \left[ b - \frac{b^3}{6} k \right]$$

y con igual aproximación:

$$\delta\tau = \delta a k \left[ y - \frac{y^3}{6} k - \frac{y^3}{6} k \dots \right] = \delta a k \left[ y - \frac{y^3}{3} k \right].$$

En la proyección aparecerán las dos geodésicas (1, 4) y (2, 3) como líneas rectas *normales* a la línea recta que representa al meridiano central, y tendremos entonces (fig. 6).

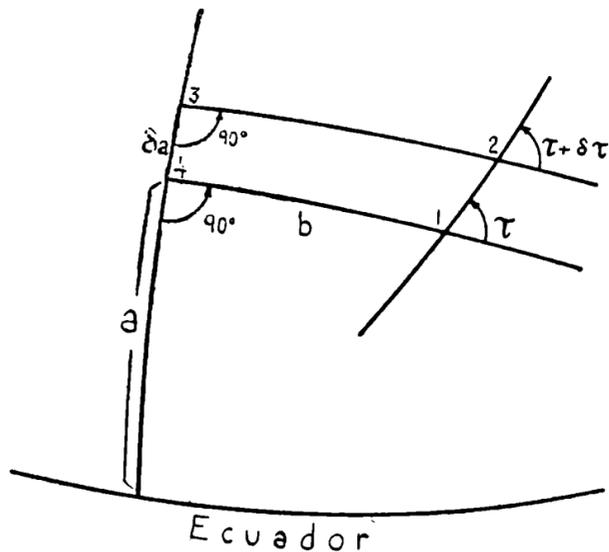


Figura 5

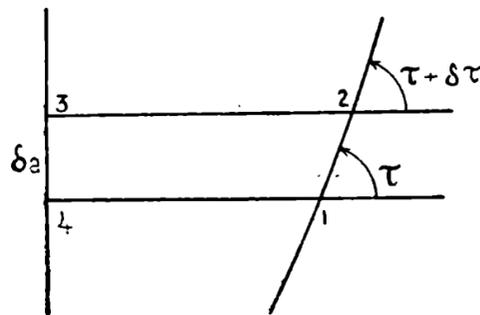


Figura 6

Si denominamos ( $\delta s$ ) al elemento de curva (1, 2), en la carta, que *representa* al elemento de geodésica, y designamos con ( $\rho$ ) al radio de curvatura de dicho elemento, podemos poner ( $\delta a = \delta s \text{ sen } \tau$ ):

$$\delta\tau = \frac{\delta s}{\rho} = \delta s \cdot \text{sen } \tau \cdot k y \left( 1 - \frac{y^2}{3} k \right),$$

de donde

$$\frac{1}{\rho} = \text{sen } \tau \cdot k \cdot y \left( 1 - \frac{y^2}{3} k \right).$$

Para los puntos (1,) y (2,) será, pues:

$$\frac{1}{\rho_1} = \text{sen } \tau \cdot k \cdot y_1 \left( 1 - \frac{y_1^2}{3} k \right), \quad \frac{1}{\rho_2} = \text{sen } (\tau + \delta\tau) k y_2 \left( 1 - \frac{y_2^2}{3} k \right).$$

Consideremos ahora al elemento ( $\delta s$ ) de curva (1, 2), referido a la tangente a ella en (1) y con origen allí.

Dicho elemento puede considerarse equivalente a la cuerda (1, 2), pues para ( $\delta s < 100 \text{ Km}$ ) y ( $\tau < 100''$ ) la diferencia sólo alcanzaría a 1 milímetro.

Las coordenadas ( $y'$ ,  $x'$ ) en función del arco de curva y del radio de curvatura y sus derivadas correspondientes al punto (1), serán (fig. 7):

$$y' = \frac{(\delta s)^2}{2\rho_1} + \frac{(\delta s)^3}{6} \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho} \right)_1 \dots$$

$$x' = (\delta s) - \frac{(\delta s)^3}{6\rho_1^2}.$$

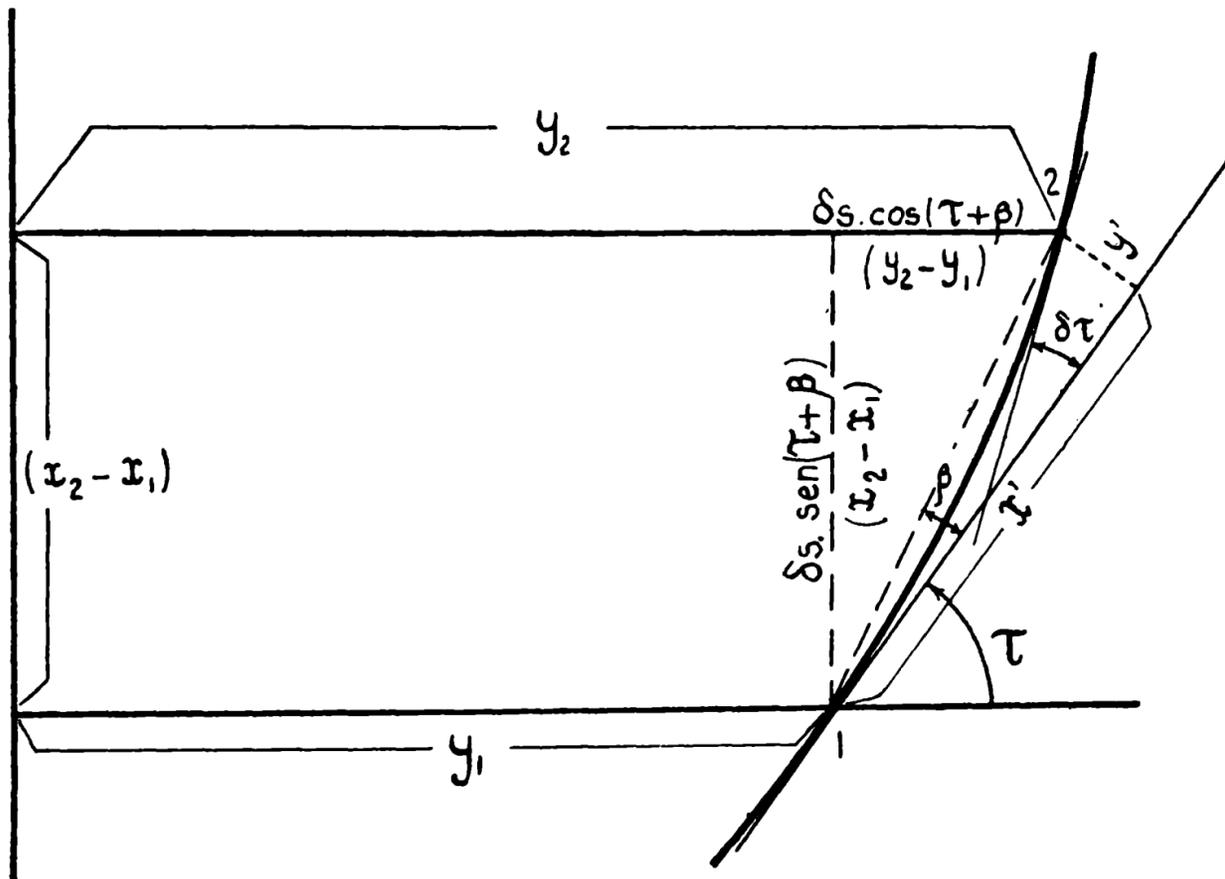


Figura 7

Para el ángulo ( $\delta\tau$ ) formado por las tangentes en (1) y (2), tendremos (derivando estas expresiones con respecto al arco):

$$\delta\tau = \frac{\frac{(\delta s)}{\rho_1} + \frac{(\delta s)^2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right)_1}{1 - \frac{(\delta s)^2}{2\rho_1^2} \dots} = \frac{(\delta s)}{\rho_1} + \frac{1}{2} (\delta s)^2 \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho} \right)_1 \dots$$

Para el ángulo ( $\beta$ ) formado por la cuerda (1, 2) y la tangente a la curva en (1), se tendrá:

$$\beta = \frac{y'}{x'} = \frac{(\delta s)}{2\rho_1} + \frac{(\delta s)^2}{6} \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho} \right)_1 \dots$$

Pero podemos poner

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1} + (\delta s) \cdot \left( \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial s} \right)_1 \dots$$

de donde resultará :

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \delta s \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta s}{\rho_1} + \frac{\delta s}{\rho_2} \right] \\ \beta &= \delta s \left[ \frac{1}{2\rho_1} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\delta s}{\rho_1} + \frac{\delta s}{\rho_2} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\delta s}{\rho_1} - \frac{\delta s}{\rho_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

De acuerdo a las expresiones anteriores de  $(\rho_1$  y  $\rho_2)$ , podremos poner :

$$\begin{aligned} \frac{\delta s}{\rho_1} &= \delta s \operatorname{sen} \tau k y_1 \left( 1 - \frac{y_1^2}{3} k \right) = \\ &= [\delta s \operatorname{sen} (\tau + \beta) k y_1 - \delta s \cos (\tau + \beta) \cdot k y_1 \beta] \left[ 1 - \frac{y_1^2}{3} k \right] \\ \frac{\delta s}{\rho_1} &= [(x_2 - x_1) k y_1 - (y_2 - y_1) k \cdot y_1 \beta] \left[ 1 - \frac{y_1^2}{3} k \right] \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \frac{\delta s}{\rho_2} &= [\delta s \operatorname{sen} (\tau + \beta) k y_2 + \delta s \cos (\tau + \beta) k y_2 (\delta\tau - \beta)] \left[ 1 - \frac{y_2^2}{3} k \right] \\ \frac{\delta s}{\rho_2} &= [(x_2 - x_1) k y_2 + (y_2 - y_1) k y_2 (\delta\tau - \beta)] \left[ 1 - \frac{y_2^2}{3} \cdot k \right]. \end{aligned}$$

Y poniendo simplemente

$$\frac{\delta s}{\rho_1} = k (x_2 - x_1) y_1, \quad \frac{\delta s}{\rho_2} = k (x_2 - x_1) y_2$$

el error angular de  $(\delta\tau)$  se acrecentaría hasta 0''08 para líneas de 100 Km. De modo que para líneas hasta de 50 Km, sin producir luego error mayor de *un centímetro*, podemos poner :

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \frac{1}{2} (x_2 - x_1) (y_2 + y_1) k \\ \beta &= \frac{1}{4} (x_2 - x_1) \left[ (y_2 + y_1) + \frac{1}{3} (y_1 - y_2) \right] \cdot k. \end{aligned}$$

**11.** De la fórmula final del número (9), para  $(y < 200$  Km), resultará con un error del orden de (1 : 5 000 000)

$$\frac{1}{M} = m = 1 - \frac{1}{2} y^2 \cdot k.$$

De acá resulta que a una línea de longitud (D) sobre la carta, correspondería una línea de longitud ( $d$ ) sobre el elipsoide, y sería:

$$d = D \left[ 1 - \frac{1}{6} (y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) k \right]$$

$$D = d \left[ 1 + \frac{1}{6} (y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) k \dots \right]$$

De modo que para líneas hasta de 50 Km el error no pasaría de *un centímetro*.

Suponiendo ahora que al *meridiano central* se le atribuye la ordenada ( $y_0$ ), las fórmulas que hemos establecido serán, en definitiva:

$$d_{1.2} = D_{1.2} \left[ 1 - \frac{1}{6} \{ (y_1 - y_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) \} k \right]$$

$$D_{1.2} = d_{1.2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \{ (y_1 - y_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) \} k \right]$$

$$\beta_{1.2} = \frac{1}{4} [x_2 - x_1] \left\{ (y_2 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3} (y_1 - y_2) \right\} k.$$

Para la *curvatura absoluta*, basta adoptar la correspondiente al punto ( $x_1, y_0$ ), o más correctamente la correspondiente al punto: [ $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ,  $y = y_0$ ].

Cuando se dispone de tablas que den el valor de ( $S_\varphi = x$ ) de minuto en minuto de latitud, basta tomar para latitud de  $k$  la más próxima (*al minuto*) que corresponda a [ $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ].

**12.** Pasemos a aplicar estas últimas fórmulas para resolver algunos problemas que como casos eventuales, es decir, *de emergencia*, pueden presentarse, y para los que ha de considerarse como precisión suficiente el décimo de segundo de arco (sexagesimal) en los ángulos azimutales.

*1<sup>er</sup> problema:* En base a las coordenadas Gauss-Krüger se determina el ángulo formado en el punto (1) por las líneas rectas 1.2 y 1.3. A este ángulo lo denominaremos de *cuadrícula* y lo designaremos:

$$(2.1.3)_c,$$

al cual supondremos medido *hacia la derecha*, que es como se estila medir los ángulos azimutales.

Designaremos con  $(2.1.3)_g$  al ángulo que sobre la superficie del elipsoide forman en 1 las geodésicas que van de 1 a 2 y de 1 a 3. La relación para pasar de un ángulo  $c$  al otro  $g$  será:

$$(2.1.3)g = (2.1.3)c - \beta_{1.2} + \beta_{1.3},$$

o sea :

$$(2.1.3)g = (2.1.3)c - \frac{1}{4}(x_2 - x_1) \left\{ (y_2 - y_0) + (y_1 - y_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(y_1 - y_2) \right\} k + \frac{1}{4}(x_3 - x_1) \left\{ (y_3 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1 - y_3) \right\} k.$$

2° *problema* : Se conocen las coordenadas Gauss-Krüger de dos puntos, 1 y 2, y se trata de determinar las coordenadas de un tercer punto 3, para lo cual se han medido sobre el elipsoide la distancia  $d_{1.3}$  y el ángulo \*  $(2.1.3)g$ .

1° Se determinan las coordenadas *aproximadas* del punto (3), suponiendo :

$$D1.3 = d1.3, \quad (2.1.3)c = (2.1.3)g.$$

2° En base a las coordenadas *aproximadas* de (3) se determinan

$$D1.3 = d1.3 \left[ 1 + \frac{1}{6} \left\{ (y_1 - y_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (y_1 - y_0)(y_3 - y_0) \right\} k \right] \\ (2.1.3)c = (2.1.3)g + \frac{1}{4}(x_2 - x_1) \left\{ (y_2 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1 - y_2) \right\} k \\ - \frac{1}{4}(x_3 - x_1) \left\{ (y_3 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1 - y_3) \right\} k.$$

y con los valores correctos de  $D1.3$  y  $(2.1.3)c$ , se determinan las coordenadas correctas de (3).

3<sup>er</sup> *problema* : Se conocen las coordenadas Gauss-Krüger de tres puntos (2, 3, y 4) y se trata de determinar las coordenadas Gauss-Krüger de un punto (1), en base a las mediciones sobre el elipsoide, \*\* de los ángulos  $(2.1.3)g$  y  $(3.1.4)g$  (*problema de la carta*).

1° Se resuelve el *problema de la carta* como si fueran :

$$(2.1.3)g = (2.1.3)c, \quad (3.1.4)g = (3.1.4)c;$$

2° Una vez determinadas en esa forma, las coordenadas *aproximadas* del punto (1) se determinan :

\* y \*\* En rigor las mediciones se efectúan sobre la *superficie física del terreno*, pero como se vió en capítulo anterior, la *Geodesia* enseña qué *correcciones* es necesario efectuar para pasar de tales mediciones a las que corresponden sobre la *superficie del elipsoide*. Y de tales correcciones no es *lícito* prescindir si se pretende conservar el *décimo de segundo* para los ángulos azimutales.

$$(2.1.3) c = (2.1.3) g + \frac{1}{4}(x_2 - x_1) \left\{ (y_2 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1 - y_2) \right\} k \\ - \frac{1}{4}(x_3 - x_1) \left\{ (y_3 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1 - y_3) \right\} k$$

$$(3.1.4) c = (3.1.4) g + \frac{1}{4}(x_3 - x_1) \left\{ (y_3 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1 - y_3) \right\} k \\ - \frac{1}{4}(x_4 - x_1) \left\{ (y_4 - y_0) + (y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1 - y_4) \right\} k$$

y con los valores correctos de (2.1.3)  $c$  y (3.1.4)  $c$ , se determinan las coordenadas correctas de (1).

En análoga forma se procedería para otros problemas simples topográficos, como ser: determinación de un tercer punto visado desde otros dos de coordenadas conocidas, problema de Hansen, etc.

En todos estos casos, se resuelven los problemas de modo a obtener las coordenadas *aproximadas* de nuevos puntos. Y con tales coordenadas se pasa (1<sup>er</sup> problema) de los ángulos medidos sobre la superficie del elipsoide a los que le corresponden en la carta (*ángulos de cuadrícula*). Estos cálculos *provisorios* es suficiente realizarlos a cinco cifras decimales logarítmicas y disponer de las coordenadas *aproximadas* de los nuevos puntos a los veinte metros.

**13.** Para facilitar la tarea de campaña de la labor topográfica se subdivide la carta en hojas manuable limitadas por paralelos y meridianos, cuyas formas trapezoidales prácticamente pueden considerárselas como cuadriláteros de lados rectilíneos.

Si se dispone entonces de tablas que nos den los valores de  $x$  e  $y$  para los sucesivos valores de  $\varphi$  y de  $\omega$ , correspondientes a las *esquinas de las hojas*, valores que por la finalidad esencialmente gráfica de la cuestión basta con que estén tabuladas al metro la determinación de las coordenadas planas correspondientes a un punto P. comprendido dentro de la hoja, de coordenadas geográficas elipsóidicas conocidas, es un problema de sencilla interpolación.

Designemos con los números 1, 2, 3 y 4 a las *esquinas* de la hoja, y sean :

nº del punto	$x,$	$y,$	latitud	longitud al Este del meridiano central
1.....	$x_1,$	$y_1$	$-(\varphi)$	$+ l$
2.....	$x_2,$	$y_2$	$-(\varphi)$	$+ l + \Delta l$
3.....	$x_3,$	$y_3$	$-(\varphi + \Delta\varphi)$	$+ l$
4.....	$x_4,$	$y_4$	$-(\varphi + \Delta\varphi)$	$+ l + \Delta l$
P.....	$x_P,$	$y_P$	$-(\varphi + \delta\varphi)$	$+ l + \delta l$

Las coordenadas del punto P serán dadas por las fórmulas :

$$x_P = x_1 - (x_1 - x_2) \frac{dl}{\Delta l} - (x_1 - x_3) \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} - [(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)] \cdot \frac{\delta l}{\Delta l} \cdot \frac{\delta \varphi}{\Delta \varphi}$$

$$y_P = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{\delta l}{\Delta l} - (y_1 - y_3) \frac{\delta \varphi}{\Delta \varphi} - [(y_2 - y_4) - (y_1 - y_3)] \cdot \frac{\delta l}{\Delta l} \cdot \frac{\delta \varphi}{\Delta \varphi}.$$

Si se tratara de hojas colocadas *al oeste* del meridiano central, las fórmulas no se modifican, pues entonces debemos tomar a  $(l, \Delta l$  y  $\delta l)$  con *signos negativos*, y los factores :

$$\frac{\delta l}{\Delta l}, \quad \frac{\delta \varphi}{\Delta \varphi}$$

serán *siempre positivos* ; pero en este caso  $y_2$  será *menor* que  $y_1$ , etc.

14. Para finalizar este capítulo, diremos que puede ponerse de manifiesto de modo sencillo en la carta *conforme* el valor del *módulo lineal*, por medio de líneas para las cuales el valor de dicho módulo sea el mismo.

Tales líneas prácticamente son rectas paralelas al meridiano central, tratándose de la *proyección Gauss*.

Para el caso del mapa total de la República Argentina, el valor del *módulo lineal* pasa de la *unidad* (para el meridiano central), a 1,014 en los extremos este y oeste de la carta.

Si se trazan en la carta las líneas correspondientes a igual valor del módulo lineal, de milésimo en milésimo, con tales líneas puede entonces, por simple interpolación, conocerse el *aumento* con que es reproducido todo elemento de superficie del elipsoide en cualquier región de la carta. Y con tal recurso la utilización de ella se la lleva al máximo de eficacia, pudiéndose estimar las superficies con tanta precisión cuanta sea la precisión con que pueda conocerse el valor del *módulo lineal*, cuyo *cuadrado* será el valor del *módulo areal*.

Como ya lo dijimos al final del número (1) del capítulo anterior, no es correcto prescindir del valor del *módulo*, lo cual puede significar desconsiderar el hecho de aparecer exageradas (las superficies) hasta en un tres por ciento ; cosa que sucedería para la región de Misiones, en la carta *conforme Gauss* de la República Argentina con meridiano central de *longitud* ( $-63^\circ$ ).

## CAPITULO V

### Representación equivalente

1. Este sistema de representación, como dijimos anteriormente, conserva *constante* el *módulo areal* en toda la carta; o sea, conserva la misma proporcionalidad entre la superficie original y la que la representa, cualquiera que sea su extensión.

Puede decirse que fué tema de alta preocupación de los geógrafos, el obtener cartas que gozaran de tal condición para representar sobre ellas las características de los fenómenos generales que a la geografía interesan, y que ésta considera como directamente vinculados a la extensión superficial, la que por tanto conviene expresar sin alteración, aun a costa de deformaciones angulares.

Tales son, entre otros, los diversos regímenes meteorológicos considerados de modo global, o sea afectados a grandes extensiones superficiales.

Pero no siempre tal condición ha prevalecido, especialmente en cartas marinas, en las que interesa que los rumbos de los vientos y corrientes marinas reinantes en las diversas zonas sean expresados correctamente, sin deformación angular, a lo cual sólo satisface la representación *conforme*.

Los sistemas *equivalentes* ideados son innumerables, mereciendo especial mención uno de ellos, en el cual se ha contemplado la conveniencia de satisfacer a la condición de poder ser utilizado directamente por la topografía tanto como el *conforme*, al menos en zonas restringidas. Tal es el denominado *proyección de Bonne* o del *Depósito de Guerra* (utilizado para la carta general de *Francia* a escala 1: 80.000) (carta del *Estado Mayor*).

Para mapas globales, o sea para representar a todo o gran parte del esferoide terrestre en *proyección equivalente*, los sistemas más empleados son: el denominado *sinusoidal de Sanson* (impropiamente llamado de *Flamsteed*) y el de *Mollweide*, llamado también *Homalo-gráfico de Babinet*.

Antes de ocuparnos de los sistemas citados, haremos presente que tratándose de un *mapa global*, cuya escala ha de ser de un denomi-

nador del orden de 20.000.000 para que sea *manuable*, puede ya prescindirse del achatamiento de los polos y sólo considerar a la *Tierra* como esférica.

2. Sea sobre la superficie de un elipsoide de revolución, un cuadrilátero curvilíneo de lados elementales formados por dos *paralelos de latitudes* ( $\varphi$ ) y ( $\varphi + d\varphi$ ), y dos *meridianos de longitudes* ( $\omega$ ) y ( $\omega + d\omega$ ).

Siendo ( $R$ ) el radio de curvatura del *meridiano* y ( $r$ ) el del *paralelo*, la superficie ( $ds$ ) del cuadrilátero elemental será :

$$ds = r \cdot d\omega \cdot R d\varphi = R \cdot r \cdot d\omega \cdot d\varphi$$

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares ( $x, y$ ), sobre un plano en el cual *representaremos* a la superficie del elipsoide.

A los puntos de la superficie del elipsoide que constituyen los vértices del cuadrilátero elemental, los denominaremos (1, 2, 3 y 4); y (1', 2', 3' y 4') a sus *representantes* sobre el plano.

A los puntos de la superficie del elipsoide los designaremos por sus *coordenadas angulares* : latitud ( $\varphi$ ) y longitud ( $\omega$ ).

Las coordenadas ( $x, y$ ) de los puntos del plano, *representantes* de los puntos de la superficie del elipsoide serán, desde luego, funciones de ( $\varphi$ ) y de ( $\omega$ ). Y se tendrá :

Superficie del elipsoide		Superficie en el plano	
punto	coordenadas	punto	coordenadas
1...	$\varphi, \quad \omega$	$y_1' = y$	$x_1' = x$
2...	$\varphi, \quad \omega + d\omega$	$y_2' = y + \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega$	$x_2' = x + \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega$
3...	$\varphi + d\varphi, \quad \omega + d\omega$	$y_3' = y + \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$	$x_3' = x + \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$
4...	$\varphi + d\varphi, \quad \omega$	$y_4' = y + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$	$x_4' = x + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$

La superficie ( $ds'$ ) del cuadrilátero plano elemental (1', 2', 3', 4'), expresada en forma de determinante, es :

$$2ds' = \begin{vmatrix} x_3' - x_1', & y_3' - y_1' \\ x_4' - x_2', & y_4' - y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi, & \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi - \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi - \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega \end{vmatrix}$$

Restando la 2ª línea de la 1ª y dividiendo por (2), será :

$$ds' = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega, & \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi - \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega \end{array} \right|$$

y sumando la 1ª línea a la 2ª, resultará :

$$ds' = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega, & \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \end{array} \right| = \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} \right) \cdot d\omega \cdot d\varphi.$$

Y para que la *representación* sea *equivalente*, deberá tenerse, designando con ( $k$ ) una *constante* :

$$ds' = k \cdot ds$$

o sea, comparando ( $ds'$ ) con ( $ds$ ) :

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} = k \cdot Rr \dots [\text{función de la latitud } (\varphi)]$$

**3.** Nos ocuparemos primeramente del caso en que a los *paralelos* se los represente por líneas rectas paralelas al eje de las ( $x$ ).

Puesto que tanto ( $y$ ) como ( $x$ ) son funciones de ( $\varphi$ ) y de ( $\omega$ ), para que ( $y$ ) permanezca *constante* para ( $\varphi = \varphi_0$ ), ( $y$ ) sólo será, pues, función de ( $\varphi$ ) e independiente de ( $\omega$ ) y el sistema resultará :

$$x = f(\varphi, \omega) \quad y = F(\varphi)$$

La fórmula final del número anterior se reducirá entonces a :

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot F'(\varphi) = k \cdot R \cdot r [\text{función de la latitud } (\varphi)]$$

de modo que deberá tenerse :

$$x = \frac{\omega \cdot k \cdot R \cdot r}{F'(\varphi)}, \quad y = F(\varphi)$$

siendo  $F(\varphi)$  una función cualquiera.

El *meridiano central* ( $\omega = 0$ ) estará representado por el eje de las ( $y$ ).

De las fórmulas que anteceden se deduce :

$$\frac{x}{\omega} = \frac{k \cdot R \cdot r}{F'(\varphi)} \dots [\text{función exclusiva de } (\varphi)]$$

Y como ( $y$ ) también es función exclusiva de ( $\varphi$ ), poniendo :

$$\frac{k \cdot R \cdot r}{F'(\varphi)} = f(y) = \frac{k \cdot R \cdot r}{\frac{dy}{d\varphi}} = \frac{k \cdot R \cdot r \cdot d\varphi}{dy}$$

se tendrá como *ecuación del meridiano de longitud* ( $\omega$ ) :

$$x - \omega f(y) = 0$$

*Construído un meridiano*, fácilmente podrán construirse los demás, pues para un mismo valor de ( $y$ ), las abscisas ( $x$ ) de dos *meridianos* son entre sí como sus longitudes  $\omega$ . Los *meridianos* cortan al *ecuador* a distancias del *meridiano central*, proporcionales a la diferencia de longitud con él.

**3a.** Si uno de los meridianos ( $\omega_0$ ), afecta la forma de una *circunferencia de círculo* de radio ( $b$ ), la función  $f(y)$  deberá ser :

$$f(y) = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}$$

y se tendrá :

$$x - \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \sqrt{b^2 - y^2} = 0$$

o sea, también :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\omega b}{\omega_0}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación que para ( $\omega = \omega_0$ ) representa un *círculo* de radio ( $b$ ), y para otro cualquiera valor de ( $\omega$ ) representa una *elipse*.

De modo que en este caso todos los demás meridianos serán, pues, *elipses*.

Si tomamos el caso del elipsoide de revolución de *semi-eje menor* ( $b$ ), y de excentricidad ( $e$ ), se tendrá para el *meridiano circular* ( $\omega_0$ ).

$$f(y) = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{b^2 - y^2} = \frac{k \cdot R \cdot r \cdot d\varphi}{dy}$$

y también :

$$\left(\sqrt{b^2 - y^2}\right) dy = k\omega_0 \cdot R r d\varphi = \frac{k\omega_0 b^2 (1 - e^2) \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} \cdot d\varphi$$

Poniendo :

$$y = b \operatorname{sen} \tau$$

se tendrá :

$$b \cos \tau \cdot b \cos \tau d\tau = b^2 \cos^2 \tau d\tau = \frac{b^2 k \omega_0 \cdot (1 - e^2) \cos \varphi \cdot d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}$$

que integrada (una vez divididos ambos miembros por  $b^2$ ), nos dará :

$$2\tau + \operatorname{sen} 2\tau = 4k\omega_0(1 - e^2) \left[ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{e} \log_{\text{nep}} \cdot \left( \frac{1 + e \operatorname{sen} \varphi}{1 - e \operatorname{sen} \varphi} \right) \right]$$

o sea, también, desarrollando :

$$2\tau + \operatorname{sen} 2\tau = 4k\omega_0(1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi \left[ 1 + \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{e^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \varphi}{2 \cdot (2n + 1)} + \dots \right]$$

Para el caso particular de la esfera ( $e = 0$ ), tomando  $\left( \omega_0 = \frac{\pi}{2} \right)$ ; se tendrá :

$$2\tau + \operatorname{sen} 2\tau = 2k\pi \operatorname{sen} \varphi.$$

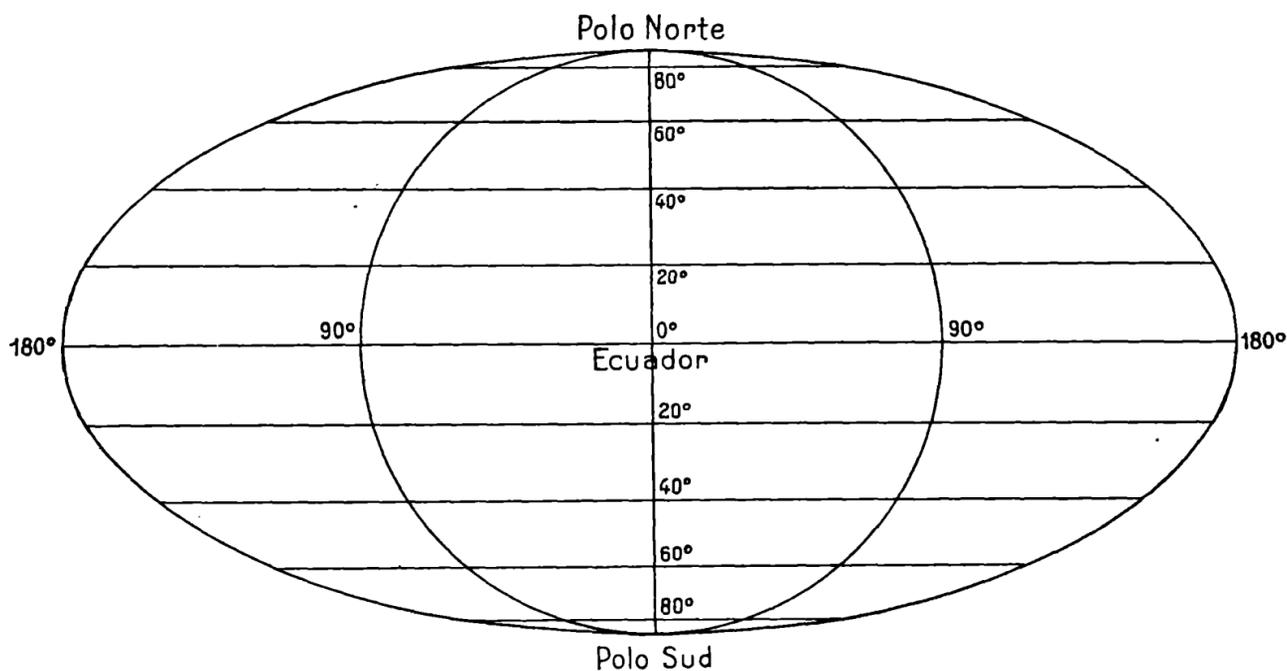


Figura 1

Como un hemisferio de la esfera tiene como superficie :

$$S = 2\pi b^2$$

y queda representado en el plano por la superficie del círculo completo :

$$S' = \pi b^2$$

se deberá tener :

$$k = \frac{S'}{S} = \frac{\pi b^2}{2\pi b^2} = \frac{1}{2}$$

y tendremos finalmente :

$$2\tau + \operatorname{sen} 2\tau = \pi \operatorname{sen} \varphi$$

A este sistema de proyección se lo denomina *proyección de Molweide*<sup>1</sup> u *homalográfica de Babinet* (fig. 1).

<sup>1</sup> Este sistema de proyección fué imaginado en 1805 por el profesor de Halle, C. B. Mollweide.

**3 b.** Si tomamos para ( $y$ ) la función :

$$y = b \cdot \varphi = F(\varphi)$$

será :

$$F'(\varphi) = b$$

Y para el caso de la esfera de radio ( $b$ ), según las fórmulas establecidas al final del n° 3 de este capítulo, se tendrá :

$$x = \frac{\omega kb^2 \cos \varphi}{b} = \omega kb \cos \varphi$$

Si tomamos ( $b = 1$ ), ( $k\omega_0 = 1$ ) y consideramos como origen el polo, y

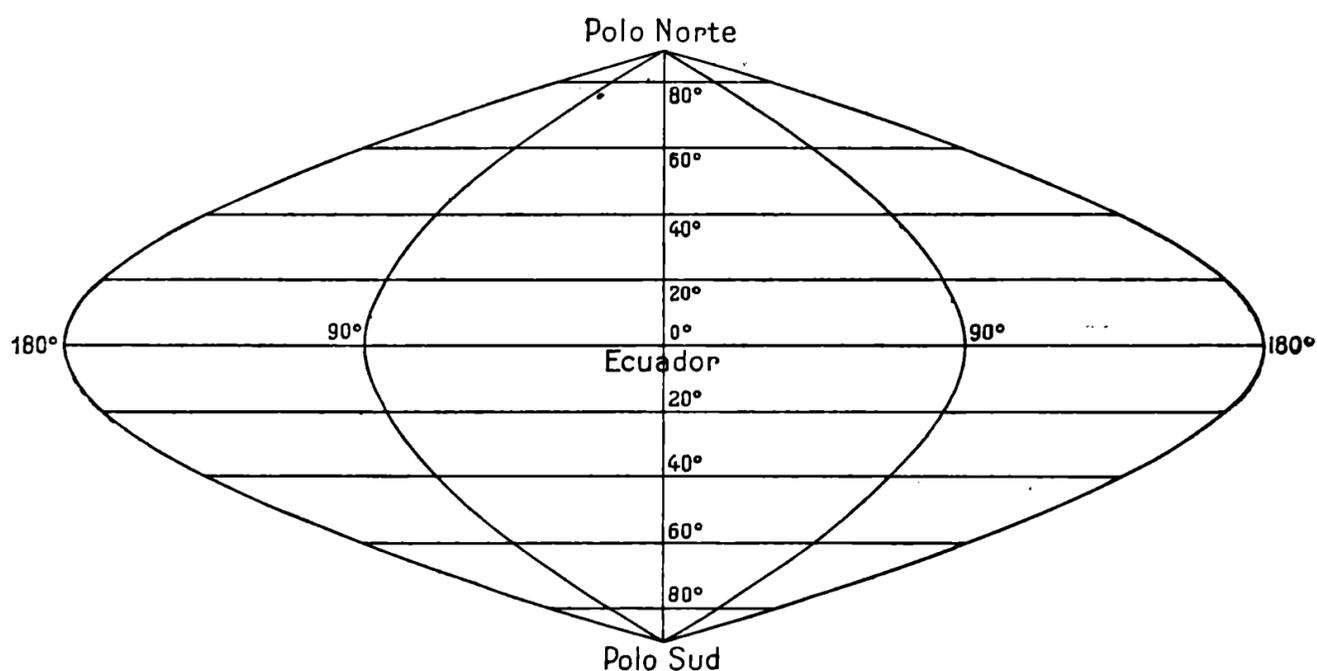


Figura 2

la *colatitud* ( $\lambda$ ) en lugar de la latitud ( $\varphi$ ), la ecuación del *meridiano* de longitud ( $\omega_0$ ) será :

$$\lambda = 90^\circ - \varphi \quad x = \text{sen } \lambda$$

De modo que ese meridiano ( $\omega_0$ ) afectará en esta representación la forma de una *sinusoide*.

Por tal causa, a este sistema de representación se lo denomina *sinusoidal de Sansón*<sup>1</sup>, e impropriamente se lo llama también de *Flamsteed*.

Su forma es la indicada en la figura 2.

**3 c.** Como otro caso de *representación* de la esfera de radio igual a la unidad, con *paralelos* en forma de rectas paralelas al ecuador, mencionaremos el denominado *proyección isocilíndrica de Lambert*.

<sup>1</sup> Este sistema fué imaginado en 1650 por el geógrafo francés Nicolás Sansón.

Para este sistema, se toma :

$$y = \text{sen } \varphi = F(\varphi), \quad F'(\varphi) = \cos \varphi$$

donde resulta :

$$x = \frac{\omega \cdot k \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi} = \omega \cdot k$$

vale decir, que los meridianos aparecerán como líneas rectas *normales*, al ecuador.

Las deformaciones que se producen en este sistema son rápidas, por lo cual sólo es apto para las zonas próximas al ecuador.

Este sistema se denomina *isocilíndrico* porque en realidad es una proyección de la superficie de la esfera sobre un cilindro que le es tangente a lo largo del ecuador, siendo los rayos de proyección líneas que pasando por el eje (línea de los polos) son paralelas al plano del ecuador.

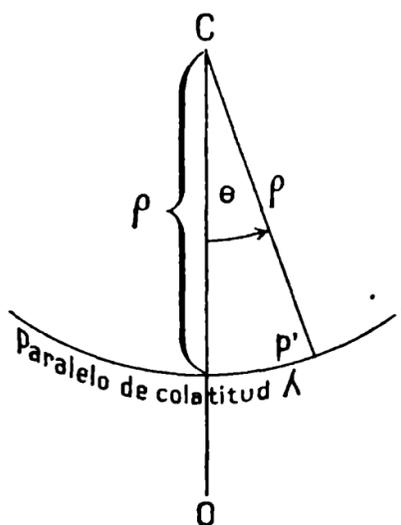


Figura 3

4. Consideraremos ahora los sistemas equivalentes en los cuales los *paralelos* del elipsoide de revolución son representados en el plano por arcos de círculos concéntricos.

Sea (C) el centro común de dichos círculos, y la *línea recta* (CO) la *representante* del *meridiano central* (fig. 3).

Consideremos el punto (p) del elipsoide de coordenadas angulares : *colatitud* ( $\lambda = 90^\circ - \varphi$ ) y *longitud* ( $\omega$ ) contada desde el meridiano central.

Su representante en el plano será el punto (p') de coordenadas polares ( $\rho, \theta$ ).

Un cuadrilátero elemental (1, 2, 3, 4) de la superficie del elipsoide comprendido entre los meridianos de longitudes ( $\omega$ ) y ( $\omega + d\omega$ ) y los paralelos de colatitudes ( $\lambda$ ) y ( $\lambda + d\lambda$ ); tendrá como superficie ( $ds$ ) :

$$ds = r \cdot R \cdot d\omega \cdot d\lambda$$

Puesto que los paralelos son arcos de círculo con centro en (C), ( $\rho$ ) será función solamente de ( $\lambda$ ) y viceversa, e independiente de ( $\omega$ ).

El cuadrilátero elemental estará *representado* por un paralelogramo plano elemental (1', 2', 3', 4') de altura ( $d\rho$ ) y de base ( $\rho \cdot d\theta$ ). Su superficie ( $ds'$ ) será :

$$ds' = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

De modo que para que la representación sea *equivalente*, siendo ( $k$ ) una *constante*, deberá tenerse :

$$ds' = k \cdot ds; \quad \rho d\theta \cdot d\rho = k \cdot r \cdot R d\omega \cdot d\lambda$$

y resultará :

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{k \cdot r \cdot R}{\rho \cdot \frac{d\rho}{d\lambda}} \dots [\text{función exclusiva de } (\lambda)]$$

e integrando :

$$\theta = \omega \cdot \frac{k \cdot r \cdot R}{\rho \frac{d\rho}{d\lambda}}$$

Si ponemos, pues :

$$\frac{k \cdot r \cdot R}{\rho \frac{d\rho}{d\lambda}} = f(\rho)$$

La ecuación del *representante* en el plano del meridiano elipsóidico de longitud ( $\omega$ ), será en coordenadas polares ( $\theta, \rho$ ):

$$\theta - \omega \cdot f(\rho) = 0.$$

4 a. Para el caso en que (C) sea el *representante* del polo, y se tenga :

$$f(\rho) = \frac{1}{m} \dots (\text{constante})$$

los meridianos serán rectas que pasan por el punto (C), polo, y forman allí un ángulo ( $m$ ) veces menor que el que forman los meridianos correspondientes en el polo de la superficie original.

Para el caso de la esfera de radio igual a la unidad, se tendrá :

$$f(\rho) = \frac{k \cdot \text{sen } \lambda}{\rho \cdot \frac{d\rho}{d\lambda}} = \frac{1}{m}$$

de donde será :

$$\rho \cdot \frac{d\rho}{d\lambda} = mk \cdot \text{sen } \lambda$$

que nos dará :

$$\rho^2 = 2mk(1 - \cos \lambda), \quad \rho = 2\sqrt{mk} \cdot \text{sen } \frac{1}{2}\lambda$$

Este sistema de representación es denominado *proyección isosférica estenotera de Lambert*, y evidentemente es una *proyección cónica*.

El cono es tangente a la esfera a lo largo del paralelo de *colatitud* ( $\lambda_0$ ), y se tiene ·

$$m = \cos \lambda_0$$

$$k = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda_0}{\cos \lambda_0}, \quad \rho_0 = \operatorname{tg} \lambda_0$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tg} \lambda_0}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \lambda_0} \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} \lambda$$

4 b. Para ( $m = 1$ ) se tiene ( $\lambda_0 = 0$ ), y el cono se reduce al plano tangente en el polo.

La representación en este caso es denominada *proyección isosférica isómera de Lambert*.

4 c. Consideremos el caso en que el punto (C) (fig. 3), centro de los círculos que representan a los *paralelos*, ya no sea *representante* del polo y que tomemos ( $k = 1$ ), y además :

$$\rho = a + fRd\lambda = a + l$$

designando con ( $a$ ) una *constante*, con ( $R$ ) al radio de curvatura del meridiano y con ( $l$ ) al desarrollo de dicho arco desde el polo hasta la *colatitud* ( $\lambda$ ). Se tendrá, entonces :

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = R, \quad (a + l) \cdot R = \rho \cdot \frac{d\rho}{d\lambda} = \rho \cdot R$$

y como según se vió en el n° 4, debe ser :

$$\theta = \frac{\omega \cdot rR}{\rho \frac{d\rho}{d\lambda}}$$

será, pues :

$$\theta = \frac{\omega \cdot rR}{\rho R} = \frac{\omega r}{\rho}$$

y por lo tanto se tendrá la relación :

$$\rho\theta = r\omega$$

Esta fórmula nos dice que *cada paralelo* aparecerá en el plano en su *verdadero desarrollo* en el arco de círculo que lo representa.

Además, en la línea recta (CO) que representa al *meridiano central*, éste aparecerá también en su *verdadero desarrollo*.

Como la relación de ( $r$ ) a ( $\rho$ ) es *función* de la *colatitud* ( $\lambda$ ), ya ( $\theta$ )

no permanecerá proporcional a  $(\omega)$  a lo largo de todo el meridiano de longitud  $(\omega)$ ; vale decir, pues, que el *representante plano* de dicho meridiano ya *no será* una línea recta con vértice en (C).

Este sistema de representación es el denominado *proyección de Bonne*.

Si para una *colatitud*  $(\lambda_0)$  que denominaremos *colatitud media*, designamos con  $(\rho_0)$  al radio vector desde (C) y con  $(l_0)$  al desarrollo del

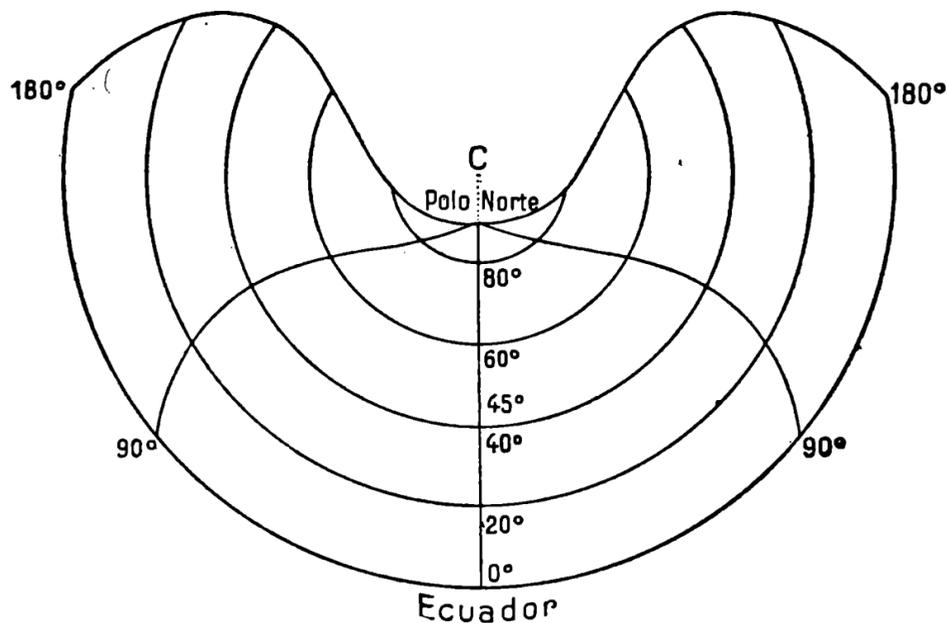


Figura 4

arco de meridiano desde el polo hasta dicha *colatitud*  $(\lambda_0)$ , tendremos:

$$\rho = \rho_0 + (l - l_0) = a + l$$

es decir, que habremos tomado:

$$a = \rho_0 - l_0$$

Pongamos ahora:

$$\rho_0 = \frac{r_0}{\cos \lambda_0} = N_0 \operatorname{tg} \lambda_0$$

siendo  $(N_0)$  la *normal mayor* de la elipse meridiana correspondiente a la *colatitud*  $(\lambda_0)$ .

El aspecto de la *proyección Bonne* (desde el polo hasta el ecuador) para la *colatitud media*  $(\lambda_0 = 45^\circ)$ , es el indicado en la figura 4.

Tenemos:

$$\rho = N_0 \operatorname{tg} \lambda_0 + l - l_0$$

y diferenciando:

$$d\rho = dl$$

El ángulo ( $\mu$ ) que forma en  $p'$  (fig. 3) el meridiano con el radio vector ( $Cp'$ ), está dado por la expresión :

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \operatorname{tg} \mu$$

donde ( $d\theta$ ) es el incremento de ( $\theta$ ) para ( $\omega$ ) constante.

De la expresión ( $\rho\theta = r\omega$ ), se saca entonces :

$$\frac{d\rho\theta}{d\rho} = \rho \frac{d\theta}{d\rho} + \theta = \frac{dr\omega}{d\rho} = \omega \cdot \frac{dr}{d\rho} = \frac{\omega dl \cos \lambda}{dl} = \omega \cos \lambda$$

de donde :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \omega \cos \lambda - \theta = \omega \left( \cos \lambda - \frac{N \operatorname{sen} \lambda}{N_0 \operatorname{tg} \lambda_0 + l - l_0} \right)$$

Esta expresión nos permite conocer en un punto dado, la deformación ( $\mu$ ) que experimenta el ángulo *recto* que en la superficie original forman el meridiano con el paralelo.

Para el caso de la esfera de radio igual a la unidad, se pondría entonces :

$$\operatorname{tg} \mu = \omega \left[ \cos \lambda - \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{tg} \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)} \right]$$

y tratándose de puntos próximos al meridiano central y a la colatitud media ( $\lambda_0$ ), aproximadamente sería :

$$\mu = \omega (\lambda_0 - \lambda) \operatorname{sen} \frac{\lambda_0 + \lambda}{2}$$

Así, para ( $\omega = 2^\circ$ ) y ( $\lambda = \lambda_0 \pm 2^\circ$ ) sería, pues :

$$|\mu| \cong 4'$$

lo cual desde el punto de vista de la labor topográfica en campaña, puede tolerarse.

Para la carta de Francia, con colatitud media ( $\lambda_0 = 43^\circ 30'$ ), en los extremos *este* y *oeste* de la carta se llega a ( $\mu = 10'30''$ ). Y una distancia allí puede alterarse hasta en :

$$\frac{1}{650}$$

de su magnitud, lo cual sucedería próximamente para un azimut de  $45^\circ$  a ambos lados del meridiano.

## CAPITULO VI

### Proyecciones policónicas

1. Nos ocuparemos en este capítulo de los sistemas de representación denominados *policónicos*, ideados con el plausible propósito de representar del mejor modo posible grandes zonas territoriales, anchas tanto en latitud cuanto en longitud.

Es claro que en forma absoluta no puede resolverse el problema de proporcionar el *mejor modo* de representación en cada caso, pues es tarea que escapa al rigor científico el *plantear* debidamente la cuestión.

La deformación de conjunto, desde luego, es inevitable. Si se trata de la proyección *conforme*, por ejemplo, contemplada ópticamente una gran región representada, el diverso *aumento del módulo* en zonas limítrofes — si es acentuado — las presenta *aparentemente* como desplazadas dentro del conjunto, porque no otra cosa sugiere el diverso y a veces exagerado agrandamiento de superficies; y eso da la impresión de *deformación*.

En la representación *equivalente*, las deformaciones angulares son efectivamente reales, no solamente en el aspecto del conjunto, sino también en el detalle.

Ocurre, pues, que no siendo posible plantear de modo riguroso el problema, tal como lo es un problema geométrico o algebraico exclusivamente, es difícil esperar conseguir una solución perfecta y *única*, y por fuerza la solución se la busca dentro de un limitado grupo de métodos de representación (entre los más divulgados), haciéndose abstracción, por falta de información, de otros tan buenos o mejores.

Tal hecho ha ocurrido hasta el presente, con el ponderable método de *proyección de Gauss por fajas meridianas*, hoy adoptado oficialmente en la República Argentina; método que puede decirse sólo se lo menciona y *estudia* en la bibliografía de origen alemán.

2. Comenzaremos por la *proyección policónica ordinaria*.

El meridiano central queda representado en el plano en forma de línea *recta* y en su *verdadero desarrollo* ( $P_1P_2$ ). El punto ( $P_1$ ) es un *polo* y ( $P_2$ ) el otro *polo*.

El ecuador queda representado también en su *verdadero desarrollo* y en forma de línea *recta* ( $E_1OE_2$ ), normal al meridiano central ( $P_1P_2$ ) en el punto medio ( $O$ ), que también es el punto medio de ( $E_1E_2$ ) (fig. 1).

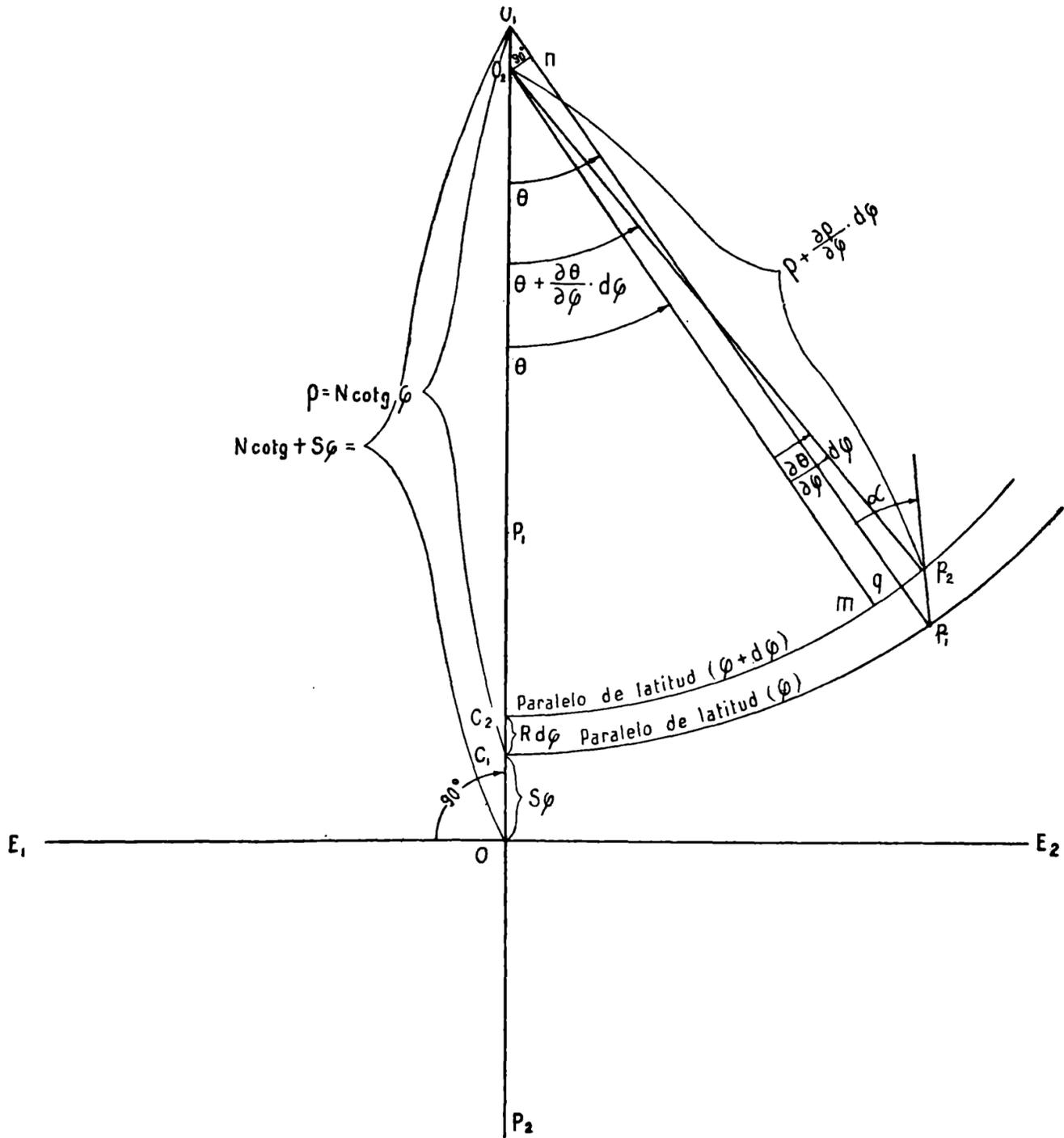


Figura 1

Cada paralelo queda representado en su *verdadero desarrollo* en forma de arco de círculo con centro en la línea de los polos ( $P_1P_2$ ).

El paralelo de latitud ( $\varphi$ ) corta al meridiano central en la representación, en un punto ( $C_1$ ) a una distancia ( $S\varphi$ ) del ecuador ( $E_1E_2$ ), igual al arco de meridiano del elipsoide desde el ecuador hasta el punto de latitud ( $\varphi$ ). Como radio ( $\rho$ ) del arco de círculo con centro en ( $O_1$ ), que representa a dicho paralelo, se toma el valor de la gene-

matriz del cono tangente al elipsoide a lo largo de ese paralelo; es decir (siendo  $N$  la *normal mayor*):

$$\begin{aligned}\rho &= O_1C_1 = N \cot \varphi \\ OO_1 &= \rho + S_\varphi\end{aligned}$$

Un punto de la superficie del elipsoide de coordenadas  $(\varphi, \omega)$ , queda representado en el plano por un punto  $(p_1)$  de coordenadas  $(\theta, \rho)$ , y siendo  $(r)$  el radio del paralelo elipsoidal; se debe tener:

$$\rho\theta = N \cot \varphi \cdot \theta = r\omega = N \cos \varphi \omega$$

de donde sale:

$$\theta = \omega \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Un punto de coordenadas  $(\varphi + d\varphi, \omega)$ , quedará representado por un punto  $(p_2)$  de coordenadas  $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot d\varphi, \omega\right)$ .

El centro del círculo estará en  $(O_2)$  y cortará al meridiano central en un punto  $(C_2)$ , y será:

$$\begin{aligned}OC_2 &= S_\varphi + R d\varphi \\ O_2C_2 &= \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \\ OO_2 &= \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + S_\varphi + R d\varphi\end{aligned}$$

de donde será:

$$O_1O_2 = O_1O - O_2O = \rho + S_\varphi - \left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} d\varphi + S_\varphi + R d\varphi\right] = -\left[\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R\right] d\varphi$$

Tiremos desde  $(O_2)$  la línea recta  $(O_2n)$  normal a  $(O_1p_1)$ , y se tendrá:

$$O_1n = -\left[\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R\right] d\varphi \cos \theta, \quad O_2n = -\left[\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R\right] d\varphi \operatorname{sen} \theta.$$

El ángulo en el vértice  $(O_2)$  pasará a ser  $\left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} d\varphi\right)$  en lugar de  $(\theta)$ ; de modo que tirando  $(O_2m)$  paralela a  $(O_1p_1)$  y desconsiderando cantidades muy pequeñas de 2º orden, se podrá poner:

$$\begin{aligned}\text{ángulo } (p_2O_2m) &= \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \\ mp_2 &= (O_2p_2) \cdot (p_2O_2m) = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} d\varphi\right) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = \rho \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \dots \\ mq &= O_2n\end{aligned}$$

$$qp_2 = mp_2 - mq = \left[ \rho \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R \right) \text{sen } \theta \right] d\varphi$$

Además se tiene, tomando  $\left( \cos \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right] = 1 \right)$ :

$$nq = O_2m = O_2p_2 = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$$

de donde:

$$O_1p_1 = \rho = nq + qp_1 + O_1n = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} d\varphi + qp_1 - \left[ \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot + R \right] \cos \theta d\varphi$$

resultando:

$$qp_1 = - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \left[ \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R \right] \cos \theta d\varphi$$

La línea  $(p_1p_2)$  será la *representante* del meridiano de longitud  $(\omega)$ , y formará con el radio vector  $(O_1p_1)$  un ángulo  $(\alpha)$ , cuya tangente es dada por la fórmula:

$$\text{tg } \alpha = \frac{qp_2}{qp_1} = \frac{\rho \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R \right) \text{sen } \theta}{- \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R \right) \cos \theta}$$

Tal ángulo  $(\alpha)$  es, pues, la *deformación* que experimenta el ángulo de  $(90^\circ)$  con que se cortan el meridiano de longitud  $(\omega)$  con el paralelo de latitud  $(\varphi)$ .

Para el caso particular de la esfera, se tiene:

$$\rho \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \cot \varphi \cdot \omega \cos \varphi = \cot^2 \varphi \omega \text{sen } \varphi = \cot^2 \varphi \cdot \theta$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} + 1 = - \cot^2 \varphi \quad - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi}$$

y como  $(\theta = \omega \cdot \text{sen } \varphi)$ , llevando estas expresiones a  $(\text{tg } \alpha)$ , se llega a:

$$\text{tg } \alpha = \frac{(\theta - \text{sen } \theta) \cos^2 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \cos \theta} = \frac{(\theta - \text{sen } \theta) \cot^2 \varphi}{1 + \frac{1}{2} (\omega \cos \varphi)^2 \left( \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \theta}{\frac{1}{2} \theta} \right)^2}$$

Para la zona próxima al meridiano central, por ejemplo  $(\omega = 12^\circ)$ , será (aproximadamente):

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{6} \frac{\theta^3 \cot^2 \varphi}{1 + \frac{1}{2} (\omega \cos \varphi)^2} < \frac{1}{6} \cdot \omega^3 \text{sen } \varphi \cos^2 \varphi < \frac{\omega^3 2\sqrt{3}}{6 \cdot 9} < 2'$$

y por lo tanto, puede en tal caso desconsiderarse la diferencia entre la *unidad* y  $\cos \alpha$ , y ponerse simplemente :

$$p_1q = p_1p_2 = \left[ 1 + \frac{1}{2}(\omega \cos \varphi)^2 \right] \cdot d\varphi$$

De modo que la razón de aumento del *elemento de meridiano* a la longitud ( $\omega$ ) sería :

$$1 + \frac{1}{2}(\omega \cos \varphi)^2$$

igual al *módulo areal*, pues el *elemento del paralelo* no experimenta alteración.

En la proyección *conforme de Gauss por fajas meridianas*, el aumento lineal, igual para cualquier dirección, es también :

$$1 + \frac{1}{2}(\omega \cos \varphi)^2$$

y el *módulo areal* es, pues :

$$1 + (\omega \cos \varphi)^2$$

es decir, que el agrandamiento areal es *doble*.

Desde tal punto de vista es, pues, superior la proyección *policónica ordinaria* a la *ortomorfa de Gauss*.

Pero toda vez que se ha de tomar una distancia, que es el problema corriente, esta última supera a la *policónica*, por cuanto sólo exige una corrección que es *independiente de la dirección*; cosa que no sucede para la otra.

Ahora bien; para ( $\omega$ ) muy grande, el *módulo lineal* en la *proyección Gauss* se agranda enormemente hasta hacerse *infinito* (en el caso de la esfera para  $\omega = 90^\circ$ ).

En la *policónica ordinaria*, el *módulo areal* no pasa de :

$$1 + \frac{1}{2}(\omega \cos \varphi)^2$$

pues  $\left( \frac{\text{sen } \frac{1}{2}\theta}{\frac{1}{2}\theta} \right)$  se mantiene *igual o inferior* a la *unidad*.

De modo que para ( $\varphi = 0$ ,  $\omega = \pi$ ), el *módulo areal* llegará próximamente a agrandar hasta *seis veces* las superficies elementales.

**3.** Pasemos ahora a ocuparnos de la *proyección policónica rectangular*.

En esta proyección, tanto el meridiano central cuanto el ecuador están representados del mismo modo que en la *policónica ordinaria*. Los paralelos son los mismos que en la anterior, pero en el arco de

círculo correspondiente *no van representados ya en su verdadero desarrollo*. Los meridianos son todos *trayectorias* que cortan *normalmente a todos los paralelos*.

El ángulo ( $\alpha$ ) — figura anterior — debe ser *nulo*, pues, y esto exige que el *numerador* de ( $\operatorname{tg} \alpha$ ) lo sea; de modo que debe tenerse:

$$\rho \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R \right) \operatorname{sen} \theta = 0$$

Para el caso de la esfera se tiene, entonces:

$$\cot \varphi \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \cot^2 \varphi \operatorname{sen} \theta = 0$$

de donde sale:

$$\frac{\partial \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \cot \varphi \cdot \partial \varphi$$

ecuación diferencial que integrada nos dará:

$$\operatorname{lg} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{lg} \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{lg} k \quad (k = \text{constante})$$

o sea:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sen} \varphi$$

El arco de paralelo — figura anterior — será, entonces, para ( $\varphi$ ) *infinitamente pequeño*:

$$\rho \theta = 2k \operatorname{sen} \varphi \cot \varphi = 2k \cos \varphi = \operatorname{arco} (C_1 p_1)$$

Para el ecuador ( $\varphi = 0$ ) será, pues:

$$2k \cos \varphi = 2k = \omega$$

Y pondremos finalmente:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\omega}{2} \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Dejando ( $\varphi$ ) constante, e incrementando a ( $\omega$ ) en ( $d\omega$ ), se incrementará ( $\theta$ ) en ( $d\theta$ ); y se tendrá:

$$\frac{\frac{1}{2} d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{d\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi, \quad d\theta = d\omega \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

El *elemento* de arco de paralelo será en la esfera ( $d\omega \cdot \cos \varphi$ ), y queda representado en la proyección por ( $\rho \cdot d\theta$ ), o sea:

$$\rho d\theta = \cot \varphi \cdot d\omega \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \frac{\theta}{2} = d\omega \cos \varphi \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{d\omega \cos \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{d\omega \cdot \cos \varphi}{1 + \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2}$$

Quiere decir que dicho *elemento* de paralelo, aparecerá disminuído (achicado), pues el *módulo lineal* en la dirección del paralelo, denominándolo ( $M\omega$ ), será el *módulo mínimo* :

$$\frac{\rho d\theta}{d\omega \cos \varphi} = M\omega = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2}$$

El *elemento* de arco de meridiano que en la esfera es ( $d\varphi$ ), aparecerá en la representación igual a :

$$p_1 q = -\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + R\right) \cos \theta d\varphi$$

y para el caso de la esfera :

$$p_1 q = \frac{1 - \cos^2 \varphi \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot d\varphi = \left(1 + 2 \cot^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \left(\frac{1}{2} \theta\right)\right) \cdot d\varphi$$

y también :

$$p_1 q = \left(\frac{1 + 2 \cot^2 \varphi \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2}\right) d\varphi = \frac{1 + \left(\frac{1}{2} \omega\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \omega \cos \varphi\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2} d\varphi$$

De modo que el *módulo lineal* a lo largo del meridiano ( $M\varphi$ ) será (*módulo máximo*) :

$$\frac{p_1 q}{d\varphi} = M\varphi = \frac{1 + \left(\frac{1}{2} \omega\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \omega \cos \varphi\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Y el *módulo areal* resultará :

$$M\omega \cdot M\varphi = \frac{1 + \left(\frac{1}{2} \omega\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \omega \cos \varphi\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

La *relación* de los dos módulos lineales, *máximo* y *mínimo*, es :

$$\frac{M\varphi}{M\omega} = 1 + \left(\frac{1}{2} \omega\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \omega \cos \varphi\right)^2$$

y tal *relación* es la que da precisamente la inmediata impresión de *deformación*.

Dicha deformación será tanto mayor cuanto más alejada esté la zona del meridiano central, y acrecerá para las vecindades del ecuador.

Ahora bien; como para ( $\omega = 60^\circ$ ) tal relación no pasa de (1,5), se considera que este sistema de proyección es apto para representar sin deformaciones considerables, aun grandes zonas, como por ejemplo ambas *Américas*, que abarcan una amplitud de unos ciento veinte grados ( $120^\circ$ ) en longitud, o sea, unos sesenta grados a ambos lados del meridiano central ( $\omega = 60^\circ$ ).

4. A principios del presente siglo tuvo lugar en *Londres* una conferencia internacional con el propósito de establecer bases uniformes para construir una carta denominada *mundial al millonésimo*.

El resultado fué: 1º, dividir la superficie del elipsoide en *husos* (fajas meridianas) de seis grados de amplitud en longitud (tres grados a cada lado del meridiano central del huso); 2º, adoptar para cada faja meridiana la *proyección policónica ordinaria*; 3º, dividir cada faja en trapecios de cuatro grados de amplitud en latitud, y 4º, reemplazar luego en cada trapecio los arcos de los meridianos extremos por sus cuerdas, y algunas otras pequeñas modificaciones.

Creemos que las actividades de los diversos países que intervinieron en tal conferencia no han prosperado gran cosa.

Pero cabe observar que posiblemente por falta de información o por otra causa de índole política, tal vez, se pasó por alto a un sistema de representación tan ponderable como lo es el *conforme de Gauss por fajas meridianas*, el cual, como ya se ha dicho, ha sido adoptado, plausiblemente, en nuestro país.

Sobre tal sistema, que diríamos *policónico ordinario modificado*, nos limitamos a esta breve información.

5. Puesto que, como hemos dicho, los sistemas de representación ideados en diversas épocas y con diversa finalidad, son casi innumerables, no será de maravillar la omisión que en estas líneas hayamos hecho de algunos de ellos.

Y simplemente por su sencillez y valor histórico, terminaremos con una reseña de los sistemas denominados *perspectivos*.

Tres son los más comunes, y todos ellos referentes a la esfera: el *estereográfico*, que ya ha sido estudiado en capítulos anteriores; el *ortográfico*, que supone el centro de proyección en el *infinito*, y el *gnomónico*, que sitúa dicho centro coincidente con el centro de la esfera. En los dos últimos sistemas, el trazado de meridianos y paralelos es elemental cuando el plano de proyección es el ecuador.

## CAPITULO VII

### Curvatura de meridianos y paralelos en la proyección plano-conforme

**1.** Dedicaremos este capítulo al estudio de las proyecciones *conformes*, en las cuales tanto los paralelos como los meridianos de la superficie de revolución quedan representados en el plano por arcos de circunferencias de círculos.

Un punto ( $p$ ) de la superficie de coordenadas ( $\varphi$ ) *latitud* y ( $\omega$ ) *longitud* queda representado en el plano por un punto (P) de coordenadas rectangulares cartesianas (X) e (Y).

Por comodidad, emplearemos la *latitud creciente* ( $\psi$ ) en lugar de la latitud ( $\varphi$ ), definida, como se dijo al estudiar la *proyección mercator*, por la relación diferencial (Cap. III, n° 1):

$$d\psi = \frac{Rd\varphi}{r},$$

donde (R) significa el radio de curvatura del meridiano en la superficie original y ( $r$ ) el radio del paralelo.

Designando con (N) a la *normal mayor* se tiene:

$$r = N \cos \varphi.$$

Las nuevas coordenadas ( $\psi, \omega$ ) pasan a ser las coordenadas planas *conformes* en la proyección *mercator*, pues un azimut ( $\alpha$ ) está definido por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{rd\omega}{Rd\varphi} = \frac{d\omega}{d\psi}.$$

El empleo de la *latitud creciente* ( $\psi$ ) permite reducir el estudio de las superficies de revolución al simple caso de la esfera.

**2.** Utilizaremos, pues, las coordenadas ( $\psi, \omega$ ) en la superficie original y pondremos:

En la superficie original	En el plano (representantes)
punto      coordenadas	punto      coordenadas
$p \dots \dots \psi, \omega$	$P \dots X(\psi, \omega), Y(\psi, \omega)$

3. Si dejamos ( $\psi = \psi_0$ ) constante, la ecuación de la curva que representa al paralelo de esa latitud será:

$$X(\psi_0, \omega) \quad Y(\psi_0, \omega)$$

y su curvatura (recíproca del radio de curvatura), será (suprimiendo por comodidad los índices):

$$\frac{1}{\rho(\psi_0, \omega)} = \frac{\frac{d^2Y}{dX^2}}{\left(1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Pero en este caso, por quedar ( $\psi = \psi_0$ ) constante, será:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial \omega} \cdot d\omega, \quad dX = \frac{\partial X}{\partial \omega} \cdot d\omega$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \omega}}{\frac{\partial X}{\partial \omega}}$$

y por lo tanto:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{dY}{dX}}{\frac{\partial X}{\partial \omega}} = \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\frac{\partial Y}{\partial \omega}}{\frac{\partial X}{\partial \omega}}}{\frac{\partial X}{\partial \omega}} = \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial X}}{\frac{\partial X}{\partial \omega}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \omega}}$$

o sea:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 X}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega}}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^3}$$

y también:

$$\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{3/2} = \frac{\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^3}$$

y finalmente, dividiendo la anterior por ésta:

$$\frac{1}{\rho(\psi_0, \omega)} = \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 X}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega}}{\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1)$$

4. Si dejamos ( $\omega = \omega_0$ ) *constante*, la ecuación de la curva que representa al meridiano de esa longitud será:

$$X(\psi, \omega_0) \quad Y(\psi, \omega_0)$$

y se encontrará de análogo modo, para su *curvatura*:

$$\frac{1}{\rho(\psi, \omega_0)} = \frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial \psi} - \frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \psi}}{\left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial \psi} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (2)$$

5. Cuando la representación es *conforme*, se debe tener, como se vió anteriormente (Cap. III, n° 7):

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = \frac{\partial X}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \psi} = - \frac{\partial X}{\partial \omega} \quad (3)$$

las cuales, diferenciadas, nos dan:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial \psi \partial \omega} = - \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} \quad (4)$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} = 0$$

y del mismo modo:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \psi \partial \omega} = \frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2} = - \frac{\partial^2 X}{\partial \omega^2} \quad (5)$$

y también, pues:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2} = 0$$

es decir que tanto (X) como (Y) deben satisfacer a la *ecuación de Laplace*.

6. En el caso de la representación *conforme*, teniendo en cuenta las fórmulas (4) y (5), podremos poner, pues, la (1) bajo la forma:

$$\frac{1}{\rho(\psi_0, \omega)} = \frac{\frac{\partial^2 X}{\partial \psi \partial \omega} \cdot \frac{\partial X}{\partial \omega} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi \partial \omega} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega}}{\left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^2 \right]^{3/2}},$$

o sea también:

$$\frac{1}{\rho(\psi_0, \omega)} = - \frac{\partial \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^2 \right]^{-1/2}}{\partial \psi}.$$

Y análogamente, la (2) la podremos poner bajo la forma:

$$\frac{1}{\rho(\psi_0, \omega)} = \frac{-\frac{\partial^2 X}{\partial \omega \partial \psi} \cdot \frac{\partial X}{\partial \psi} - \frac{\partial^2 Y}{\partial \omega \partial \psi} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \psi}}{\left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial \psi} \right)^2 \right]^{3/2}},$$

o sea también:

$$\frac{1}{\rho(\psi, \omega_0)} = \frac{\partial \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial \psi} \right)^2 \right]^{-1/2}}{\partial \omega}$$

y como por ser *conforme* la representación, se tiene:

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^2 = \left( \frac{\partial X}{\partial \psi} \right)^2, \quad \left( \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right)^2 = \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^2.$$

Si ponemos:

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^2 = [f(\psi, \omega)]^{-2} \dots \quad (6)$$

también será:

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial \psi} \right)^2 = [f(\psi, \omega)]^{-2} \dots \quad (6)$$

Y resultará como *curvatura* del paralelo en el plano para el punto de coordenadas  $(\psi, \omega)$ :

$$\frac{1}{\rho_{\text{paralelo}}} = -\frac{\partial f(\psi, \omega)}{\partial \psi} \dots \quad (7)$$

y como *curvatura* del meridiano en el plano para el mismo punto:

$$\frac{1}{\rho_{\text{meridiano}}} = \frac{\partial f(\psi, \omega)}{\partial \omega} \dots \quad (8)$$

7. De estas fórmulas resulta que si todos los paralelos son arcos de círculo, la curvatura será *constante* en cada uno de ellos, e *independiente* por lo tanto de la longitud  $(\omega)$ ; de modo que la (7) deberá ser, pues, *independiente* de  $(\omega)$  y *diferenciándola* con respecto a ella, el resultado debe ser *nulo*, o sea:

$$\frac{\partial^2 f(\psi, \omega)}{\partial \omega \cdot \partial \psi} = 0 \dots \quad (9)$$

Y esto trae como consecuencia que (8) debe ser a su vez independiente de  $(\psi)$ , pues *diferenciada* con respecto a ella, debe *reproducir* a (9):

$$\frac{\partial^2 f(\psi, \omega)}{\partial \psi \cdot \partial \omega} = \frac{\partial^2 f(\psi, \omega)}{\partial \omega \cdot \partial \psi} = 0.$$

Esto nos permite formular el siguiente notable teorema debido a Lagrange: *Si en la representación conforme, los paralelos aparecen en el plano en forma de arcos de círculos, en la misma forma aparecerán los meridianos, y viceversa.*

**8.** Antes de seguir adelante con este estudio, estableceremos una *premisa* previa.

Sean  $(\psi, \omega)$  variables reales,  $(i = \sqrt{-1})$  y pongamos:

$$X + iY = F(\psi + i\omega), \quad (10)$$

donde designamos con  $(F)$  a una función arbitraria real o *imaginaria*, cuyo conjunto de términos *reales* designamos con  $(X)$  y con  $(iY)$  al conjunto de términos imaginarios.

*Siempre existe otra función*  $(F_1)$  de la variable *conjugada* de  $(\psi + i\omega)$ , la que a su vez es *conjugada* de  $[F(\psi + i\omega)]$ ; para la cual se verifica, pues:

$$X - iY = F_1(\psi - i\omega). \quad (11)$$

En efecto, pongamos, siendo  $(p$  y  $q)$  cantidades reales

$$\begin{aligned} \psi &= p \cos q & \omega &= p \sin q \\ z = \psi + i\omega &= pe^{iq} & z_1 = \psi - i\omega &= pe^{-iq}. \end{aligned}$$

Desarrollemos  $(F)$  en serie de potencias de  $(z)$ :

$$\begin{aligned} X + iY = F(\psi + i\omega) &= F(z) = \sum A_n e^{i\mu_n} \cdot p^n e^{nq} = \sum A_n p^n \cdot e^{i(\mu_n + nq)} \\ &= \sum A_n p^n \cos(\mu_n + nq) + i \sum A_n p^n \sin(\mu_n + nq). \end{aligned}$$

Tanto las  $(A)$ , como las  $(\mu)$  son cantidades *reales*.

Se tendrá, pues:

$$X = \sum A_n p^n \cos(\mu_n + nq), \quad Y = \sum A_n p^n \sin(\mu_n + nq).$$

Ahora bien; desarrollemos la función  $(F_1)$  en serie de potencias de  $(z_1)$ , bajo la forma:

$$\begin{aligned} F_1(\psi - i\omega) = F_1(z_1) &= \sum A'_n e^{i\mu'_n} p^n e^{-inq} = \sum A'_n p^n e^{-i(nq - \mu'_n)} \\ &= \sum A'_n p^n \cos(nq - \mu'_n) - i \sum A'_n p^n \sin(nq - \mu'_n). \end{aligned}$$

Si tomamos:

$$A'_n = A_n, \quad \mu'_n = \mu_n$$

será:

$$F_1(\psi - i\omega) = \sum A_n p^n \cos(nq + \mu_n) - i \sum A_n p^n \sin(nq + \mu_n)$$

o sea también:

$$F_1(\psi - i\omega) = X - iY,$$

que es la *premisa* que queríamos establecer.

9. Se tendrá, *incrementando* (10) y (11) :

$$\begin{aligned}\Delta X + iY &= (\Delta\psi + i\Delta\omega) F'(\psi + i\omega) \\ \Delta X - i\Delta Y &= (\Delta\psi - i\Delta\omega) F_1'(\psi - i\omega)\end{aligned}$$

y multiplicando entre sí los miembros de la izquierda, y análogamente los de la derecha, resultará :

$$(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 = [(\Delta\psi)^2 + (\Delta\omega)^2] \cdot F'(\psi + i\omega) F_1'(\psi - i\omega).$$

Pero designando con (M) al *módulo lineal* entre la proyección y la *mercator*, será :

$$\frac{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}{(\Delta\psi)^2 + (\Delta\omega)^2} = M^2 = F'(\psi + i\omega) F_1'(\psi - i\omega).$$

Ahora bien, el elemento de paralelo *mercator* ( $\Delta\omega$ ) estará representado en el plano por :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 (\Delta\omega)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2 (\Delta\omega)^2 = \frac{1}{f^2(\psi, \omega)} \cdot (\Delta\omega)^2 = M^2 (\Delta\omega)^2$$

y será por lo tanto :

$$\frac{1}{f(\psi, \omega)} = M = \sqrt{F'(\psi + i\omega) F_1'(\psi - i\omega)}.$$

Pongamos :

$$\frac{1}{\sqrt{F'(\psi + i\omega)}} = g(\psi + i\omega), \quad \frac{1}{\sqrt{F_1'(\psi - i\omega)}} = g_1(\psi - i\omega) \quad (12)$$

y tendremos :

$$f(\psi, \omega) = g(\psi + i\omega) \cdot g_1(\psi - i\omega) = \frac{1}{M} \quad (13)$$

En el caso en que meridianos y paralelos quedan representados como arcos de círculo, según se vió en el número (7), deberá tenerse diferenciando la (13) :

$$\frac{\partial^2 f(\psi, \omega)}{\partial \psi \partial \omega} = 0 = g''(\psi + i\omega) g_1(\psi - i\omega) - g(\psi + i\omega) \cdot g_1''(\psi - i\omega)$$

lo que exige :

$$\frac{g''(\psi + i\omega)}{g(\psi + i\omega)} = \frac{g_1''(\psi - i\omega)}{g_1(\psi - i\omega)} = k$$

donde ( $k$ ) será *constante*.

Esta ecuación diferencial, integrada nos da :

$$g(\psi + i\omega) = ae^{\sqrt{k}(\psi + i\omega)} + be^{-\sqrt{k}(\psi + i\omega)}, \quad (14)$$

siendo ( $a$ ) y ( $b$ ) constantes arbitrarias y ( $e$ ) la base de los logaritmos neperianos. Y análogamente para ( $g_1$ ), pero con constantes ( $a_1$ ) y ( $b_1$ ).

De modo que la (12) nos dará :

$$F'(\psi + i\omega) = \frac{1}{g^2(\psi + i\omega)} = \frac{1}{(ae^{\sqrt{k}(\psi+i\omega)} + be^{-\sqrt{k}(\psi+i\omega)})^2} \dots$$

que integrada (siendo  $k$  constante arbitraria) dará :

$$F(\psi + i\omega) = X + iY = \frac{-\frac{1}{2a\sqrt{k}} e^{-\sqrt{k}(\psi+i\omega)}}{ae^{\sqrt{k}(\psi+i\omega)} + be^{-\sqrt{k}(\psi+i\omega)}} + K.$$

Y análogamente tendremos para la otra función *conjugada* :

$$F_1(\psi - i\omega) = X - iY = \frac{-\frac{1}{2a_1\sqrt{k}} \cdot e^{-k(\psi-i\omega)}}{a_1 e^{\sqrt{k}(\psi-i\omega)} + b_1 e^{-k(\psi-i\omega)}} + K_1.$$

**10.** Dejando de lado a las cantidades *constantes* arbitrarias ( $K$ ) y ( $K_1$ ), puesto que podemos considerarlas *conjugadas* entre sí, las expresiones de ( $F$ ) y ( $F_1$ ) podemos ponerlas bajo la forma :

$$X + iY = \frac{-1}{2a^2\sqrt{k}e^{2\sqrt{k}(\psi+i\omega)} + 2ab\sqrt{k}}$$

$$X - iY = \frac{-1}{2a_1^2\sqrt{k}e^{2\sqrt{k}(\psi-i\omega)} + 2a_1b_1\sqrt{k}}.$$

Y poniendo :

$$\frac{-X^2}{X^2 + Y^2} = U \quad \frac{Y}{X^2 + Y^2} = V.$$

Las *recíprocas* de las anteriores serán, pues, *conjugadas*, y nos darán :

$$\frac{1}{X + iY} = \frac{-X + iY}{X^2 + Y^2} = U + iV = \frac{1}{2a^2\sqrt{k}e^{2\sqrt{k}(\psi+i\omega)} + 2ab\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{X - iY} = \frac{-X - iY}{X^2 + Y^2} = U - iV = \frac{1}{2a_1^2\sqrt{k}e^{2\sqrt{k}(\psi-i\omega)} + 2a_1b_1\sqrt{k}}.$$

**11.** Pongamos, considerando el caso general :

$$2\sqrt{k} = \alpha + i\beta \quad 2a^2\sqrt{k} = me^{in} \quad 2ab\sqrt{k} = p + iq$$

$$2a_1^2\sqrt{k} = m_1e^{-in} \quad 2a_1b_1\sqrt{k} = p_1 + iq_1$$

y será :

$$\sqrt{k}(\psi + i\omega) = (\alpha + i\beta)(\psi + i\omega) = (\alpha\psi - \beta\omega) + i(\alpha\omega + \beta\psi)$$

$$\sqrt{k}(\psi - i\omega) = (\alpha + i\beta)(\psi - i\omega) = (\alpha\psi + \beta\omega) + i(\beta\psi - \alpha\omega)$$

y tendremos :

$$\begin{aligned} U + iV &= m \cdot e^{(\alpha\psi - \beta\omega)} \cdot e^{i(\beta\psi + \alpha\omega + n)} + p + iq \\ U - iV &= m_1 e^{(\alpha\psi + \beta\omega)} e^{i(\beta\psi - \alpha\omega - n_1)} + p_1 + iq_1. \end{aligned}$$

Para que estas expresiones sean *conjugadas*, cualesquiera que sean  $(\psi, \omega)$ , debe tenerse *necesariamente* :

$$\beta = 0, \quad m = m_1, \quad n = n_1, \quad p = p_1, \quad q = -q_1.$$

De modo que  $(2\sqrt{k})$  debe *necesariamente* ser *real* ( $\alpha$ ); y poniendo :

$$p + iq = s \cdot e^{it}$$

resultará :

$$\begin{aligned} U + iV &= m \cdot e^{\alpha \cdot \psi} e^{i(\alpha\omega + n)} + se^{it} \\ U - iV &= m e^{\alpha\psi} e^{-i(\alpha\omega + n)} + se^{-it} \end{aligned}$$

y esto exige que finalmente se tenga :

$$a = ge^{ih}, \quad a_1 = ge^{-ih}, \quad b = ce^{id}, \quad b_1 = ce^{-id}.$$

12. Por lo tanto se tendrá :

$$X + iY = \frac{-1}{\alpha g^2 e^{2ih} e^{\alpha(\psi + i\omega)} + \alpha g c^{i(h+d)}} + P + iQ \quad (15)$$

como ecuación general de transformación *conforme* para que aparezcan meridianos y paralelos como arcos de círculos.

Se tendrá, pues :

$$\begin{aligned} g(\psi + i\omega) &= ge^{ih} \cdot e^{\frac{1}{2}\alpha(\psi + i\omega)} + ce^{id} \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha(\psi + i\omega)} \\ g_1(\psi - i\omega) &= ge^{-ih} e^{\frac{1}{2}\alpha(\psi - i\omega)} + ce^{-id} e^{-\frac{1}{2}\alpha(\psi - i\omega)} \end{aligned}$$

Y con éstas la (13) nos da :

$$\frac{1}{M} = g^2 e^{\alpha\psi} + c^2 e^{-\alpha\psi} + 2gc \cos(\alpha\omega + [h-d]). \quad (16)$$

Y teniendo en cuenta las (7) y (8) : los radios de paralelos y meridianos serán :

$$\frac{1}{\rho_{\text{paralelo } \psi}} = -\frac{\partial \frac{1}{M}}{\partial \psi} = -\alpha g^2 e^{\alpha\psi} + \alpha c^2 e^{-\alpha\psi}$$

radio del círculo representante del paralelo de latitud *creciente*  $\psi$ .

$$\frac{1}{\rho_{\text{meridiano } \omega}} = \frac{\partial \frac{1}{M}}{\partial \omega} = -2\alpha gc \operatorname{sen}(\alpha\omega + [h - d])$$

radio del meridiano de longitud  $\omega$ .

**13.** Supongamos  $(\alpha)$  *positiva*. Como  $(\psi)$  [*colatitud*] varía de  $(+\infty)$  para el *polo norte* a  $(-\infty)$  para el *polo sur*, se tendrá:

$$\begin{aligned} X_{P.N} &= P & Y_{PN} &= Q \\ X_{P.S} &= P + \frac{\cos(h + d)}{\alpha gc}, & Y_{PS} &= Q - \frac{\operatorname{sen}(h + d)}{\alpha gc}. \end{aligned}$$

Establecidos en el plano los dos puntos que representan a los *polos*, el trazado de círculos que representan a los meridianos es cosa sencilla conociendo el *radio*, pues todos ellos deben pasar por los polos.

Los *centros* de los círculos que representan a dichos meridianos se encuentran, pues, sobre la *normal* trazada a la línea de los polos en su punto medio.

Además, los círculos que representan a los paralelos, por ser *trajectorias* ortogonales al primer sistema de círculos, tendrán *sus centros* sobre la línea de los polos.

## CAPITULO VIII

### Coordenadas curvilíneas e isotermas

1. Brevemente nos ocuparemos ahora de las coordenadas o curvas denominadas *isotermas*, en mérito a que se hace frecuente mención de ellas en la bibliografía cartográfica.

Sea un punto cualquiera ( $p$ ) de una superficie curva definida en función de dos *parámetros* ( $u, v$ ), considerados como variables independientes (reales).

Pondremos, pues, las coordenadas rectangulares cartesianas del punto ( $p$ ):

$$x = f_1(v, u), \quad y = f_2(v, u) \quad z = f_3(u, v).$$

Para otro punto ( $p'$ ) de la superficie, infinitamente próximo del ( $p$ ), las coordenadas serán :

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz$$

y los parámetros serán ( $v + dv$ ) ( $u + du$ ); y se tendrá :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du.$$

El *elemento lineal* infinitamente pequeño ( $pp'$ ), denominándolo ( $ds$ ) será :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

o sea :

$$(ds)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial u} du \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial u} du \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial u} du \right)^2$$

Y poniendo como es usual :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 &= E \\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} &= F \\ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 &= G \end{aligned}$$

efectuando las operaciones, se tendrá :

$$(ds)^2 = E (dv)^2 + 2F . dv . du + G (du)^2.$$

Si hacemos ( $u = u_0$ , constante) y ( $v$ ) variable, se establecerá con ello una *relación* entre ( $x$ ) e ( $y$ ), lo que determinará una cierta curva sobre la superficie.

De modo que para diversos valores ( $u = u_0$ ,  $u = u_1 \dots u = u_2 \dots$  constantes) se determinará una *familia de curvas* sobre la superficie.

Si ahora hacemos ( $v = v_0$  constante), luego ( $v = v_1$ ,  $v = v_2$  etc. constantes) y dejamos ( $u$ ) variable, determinaremos con ello sobre la superficie, otra *familia de curvas*, la que formará con la *familia* anterior un *reticulado* de curvas sobre la superficie.

A los *parámetros* ( $u, v$ ) se los denomina generalmente *coordenadas curvilíneas*, pero naturalmente no quiere esto significar que ellos sean *entes lineales*.

Así cuatro puntos ( $p_1, p_2, p_3, p_4$ ) de la superficie, dadas por las coordenadas curvilíneas:  $p_1 (u, v)$ ,  $p_2 (u + \Delta u, v)$ ,  $p_3 (u, v + \Delta v)$  y  $p_4 (u + \Delta u, v + \Delta v)$ ; nos darán para los *elementos lineales* de la superficie de acuerdo a la fórmula general que da ( $ds$ ) en función de ( $dv$ ) y ( $du$ ), cambiados éstos por ( $\Delta v$ ) y ( $\Delta u$ ):

$$\begin{aligned} \overline{p_1 p_2}^2 &= G \Delta u^2 && \text{por ser } \Delta v = 0, (v = \text{constante}) \\ \overline{p_1 p_3}^2 &= E \Delta v^2 && \text{por ser } \Delta u = 0, (u = \text{constante}) \\ \overline{p_2 p_3}^2 &= E \Delta v^2 + 2F \Delta v . \Delta u + G \Delta u^2. \end{aligned}$$

El elemento constante ( $p_1 p_2$ ) está sobre la línea ( $v = \text{constante}$  y el elemento ( $p_1 p_3$ ) está sobre la línea ( $u = \text{constante}$ ).

Si denominamos ( $\omega$ ) al ángulo que forman entre sí ambas líneas, medido dicho ángulo a partir de la *dirección* de la línea ( $u = \text{constante}$ ), hacia la derecha, se tendrá :

$$\overline{p_2 p_3}^2 = \overline{p_1 p_3}^2 + \overline{p_1 p_2}^2 + 2 \overline{p_1 p_2} . \overline{p_1 p_3} . \cos \omega,$$

o sea :

$$\overline{p_2 p_3}^2 = E \Delta v^2 + G \Delta u^2 + 2 \sqrt{E . G} . \Delta v . \Delta u . \cos \omega$$

y pasando a las *diferenciales*, y comparando con el anterior desarrollo de ( $ds^2$ ), será

$$\sqrt{E . G} . \cos \omega = F$$

de donde podremos poner :

$$ds^2 = E dv^2 + G du^2 + 2 \sqrt{E} dv . \sqrt{G} du . \cos \omega$$

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \text{sen } \omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}, \quad \text{tg } \omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{F}$$

Tratándose de superficies *reales*, queda sobreentendido que el ángulo ( $\omega$ ) será *real*.

2. Si para todos los puntos de la superficie se verifica la condición ( $F=0$ ), será ( $\omega=90^\circ$ ) y el sistema de líneas será *ortogonal*, pues las curvas de una familia cortarán *normalmente* a las curvas de la otra familia.

El elemento lineal de la superficie será entonces :

$$ds^2 = E dv^2 + G du^2$$

y merece especial mención cuando (E) y (G) son de la forma :

$$E = \lambda(v, u) \varphi^2(v), \quad G = \lambda(v, u) \psi^2(u).$$

Pues tomando como nuevos *parámetros* :

$$\begin{aligned} v_1 &= \int \varphi(v) dv, & u_1 &= \int \psi(u) du \\ \text{se tendrá:} & & & \\ dv_1 &= \varphi(v) dv, & du_1 &= \psi(u) du \end{aligned}$$

y el elemento lineal será :

$$ds^2 = \lambda(v, u) (dv_1^2 + du_1^2)$$

y poniendo entonces

$$[\lambda(v, u) = \lambda_1(v_1, u_1)]$$

resultará designando con ( $E_1$ ,  $G_1$  y  $F_1$ ) los nuevos valores de (E, G y F):

$$E_1 = G_1 = \lambda_1(v_1, u_1), \quad F_1 = 0.$$

Si consideramos en el plano como coordenadas rectangulares cartesianas ( $v_1, u_1$ ), el *elemento lineal en el plano* denominándolo ( $ds_1$ ), será:

$$ds_1^2 = dv_1^2 + du_1^2,$$

de modo que se tendrá :

$$ds^2 = \lambda_1(v_1, u_1) \cdot ds_1^2.$$

Es decir que quedará *representada* la superficie de modo *conforme*, por cuanto la *relación de proporcionalidad o módulo lineal*, entre el elemento lineal de la superficie y elemento lineal que lo *representa* en el plano, sólo es función ( $\lambda_1(v_1, u_1)$ ) de las coordenadas ( $v_1, u_1$ ) del punto. Cualquiera que sea la *dirección* del elemento.

Al sistema de familias ortogonales correspondiente a parámetros  $(v_1, u_1)$ , para los cuales  $(E_1)$  y  $(G_1)$  son iguales, se lo llama *sistema isoterma*, como también a tales *parámetros*.

**3.** Y hay una infinidad de sistemas *isotermos*.

En efecto, consideremos dos nuevos parámetros  $(u_2, v_2)$ , vinculados a los  $(u_1, v_1)$  por una relación de la forma :

$$v_2 + iu_2 = F(v_1 + iu_1),$$

siendo (F) una función arbitraria *diferenciable* y designando con  $(i)$  al símbolo imaginario  $(\sqrt{-1})$ .

Evidentemente, se tendrá también otra relación inversa, a su vez *diferenciable* :

$$v_1 + iu_1 = \psi(v_2 + iu_2) = P(v_2, u_2) + iQ(v_2, u_2),$$

en la cual designamos con  $(P(v_2, u_2))$  al conjunto de términos *reales* y con  $(iQ(v_2, u_2))$  al conjunto de términos *imaginarios*.

Se tendrán entonces dos relaciones :

$$v_1 = P(v_2, u_2), \quad u_1 = Q(v_2, u_2)$$

y podremos poner :

$$\lambda_1(v_1, u_1) = \lambda_2(v_2, u_2).$$

Diferenciando se tendrá :

$$\frac{d(v_1 + iu_1)}{d(v_2 + iu_2)} = \frac{dv_1 + idu_1}{dv_2 + idu_2} = \frac{d\psi(v_2 + iu_2)}{d(v_2 + iu_2)} = M + iN,$$

designando con (M) al conjunto de términos *reales*, y con  $(iN)$  al conjunto de términos *imaginarios*. Lo que exige :

$$dv_1 + idu_1 = d(v_2 + iu_2)(M + iN) = (dv_2 + idu_2)(M + iN).$$

Y expresando  $(dv_1)$  y  $(du_1)$  en función de  $(v_2)$  y  $(u_2)$ , será :

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial v_2} dv_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \cdot du_2$$

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \cdot dv_2 + \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \cdot du_2.$$

Y por lo tanto se tendrá :

$$\frac{\partial v_1}{\partial v_2} dv_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \cdot du_2 + i \left( \frac{\partial u_1}{\partial v_2} dv_2 + \frac{\partial u_1}{\partial u_2} du_2 \right) = (Mdv_2 - Ndu_2)$$

$$+ i(Ndv + Mdu_2)$$

lo que exige :

$$\frac{\partial v_1}{\partial v_2} = \frac{\partial u_1}{\partial u_2} = M, \quad - \frac{\partial v_1}{\partial u_2} = \frac{\partial u_1}{\partial v_2} = N,$$

lo cual nos dará :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u_2} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial v_1}{\partial v_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_2}\right)^2 &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial u_2}\right)^2 = \varphi(v_2, u_2), \end{aligned}$$

designando con  $\varphi(v_2, u_2)$  una cierta función de  $(v_2, u_2)$ .

Y se tendrá entonces :

$$dv_1^2 + du_1^2 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial v_2} dv_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} du_2\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_2} dv_2 + \frac{\partial u_1}{\partial u_2} du_2\right)^2$$

y efectuando las operaciones indicadas, con las relaciones anteriores, será :

$$d^2v_1 + d^2u_1 = \varphi(v_2, u_2) (d^2v_2 + d^2u_2).$$

Y el elemento lineal de la superficie pasará a ser :

$$ds^2 = \lambda_1(v_1, u_1) (dv_1^2 + du_1^2) = \lambda_2(v_2, u_2) \cdot \varphi(v_2, u_2) (d^2v_2 + d^2u_2).$$

De modo que a los nuevos parámetros  $(v_2, u_2)$  corresponderá en la superficie un sistema de familias ortogonales, que serán *isotermas*. Pues tomadas en el plano como coordenadas cartesianas corrientes  $(v_2, u_2)$ , la superficie quedará representada en él de modo *conforme*, por cuanto la relación de *proporcionalidad* o *módulo lineal*  $[\lambda_2(v_2, u_2) \cdot \varphi(v_2, u_2)]$ , sólo es función de las coordenadas  $(v_2, u_2)$  del punto, cualquiera que sea la *dirección* del elemento lineal.

Diferenciando (M y N) con respecto a  $(v_2, u_2)$  se tiene :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial v_2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial v_2^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial u_2 \partial v_2}, & \quad \frac{\partial M}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial v_2 \partial u_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial u_2^2}, \\ \frac{\partial N}{\partial v_2} = - \frac{\partial^2 v_1}{\partial u_2 \partial v_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial v_2^2}, & \quad \frac{\partial N}{\partial u_2} = - \frac{\partial^2 v_1}{\partial u_2^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial v_2 \partial u_2}, \end{aligned}$$

de donde resultará :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial v_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial u_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial v_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial u_2^2} = 0,$$

y análogamente se tendrá :

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial v_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial v_1^2} = 0.$$

De modo que tanto los parámetros  $(v_1, u_1)$  con respecto a los  $(v_2, u_2)$ , como los  $(v_2, u_2)$  con respecto a los  $(v_1, u_1)$  satisfacen a la *ecuación de Laplace*.

Y de ahí la denominación de *parámetros isotermos* dados por *Lamé*.

Pues se demuestra en la teoría matemática del calor, que si los puntos de un plano están en equilibrio de temperatura, es decir, si la temperatura (T) en cada punto es función solamente de las coordenadas corrientes  $(v, u)$  del punto y no del tiempo, la función (T) de  $(v)$  y de  $(u)$  satisface a la *ecuación de Laplace*.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} = 0.$$

4. Supongamos establecidos dos parámetros  $(v, u)$  que definan a la superficie. Para representarla en el plano de modo *conforme*, el problema consiste en la determinación de un par de parámetros *isotermos*  $(v_1, u_1)$ .

Según se vió al final del n° 1 de este capítulo, se tiene :

$$ds^2 = E dv^2 + G du^2 + 2\sqrt{E} dv \cdot \sqrt{G} du \cos \omega,$$

expresión que equivale a :

$$ds^2 = (\sqrt{E} dv + \sqrt{G} du \cos \omega + i\sqrt{G} du \operatorname{sen} \omega) (\sqrt{E} dv + \sqrt{G} du \cos \omega - i\sqrt{G} du \operatorname{sen} \omega).$$

Siendo  $(m)$  y  $(n)$  funciones reales, si se tiene :

$$\begin{aligned} (m + in) (\sqrt{E} dv + \sqrt{G} du \cos \omega + i\sqrt{G} du \operatorname{sen} \omega) &= \\ &= d(v_1 + iu_1) = dv_1 + idu_1. \end{aligned}$$

serán :

$$\begin{aligned} m (\sqrt{E} dv + \sqrt{G} \cos \omega du) - n \sqrt{G} \operatorname{sen} \omega du &= dv_1 \\ n (\sqrt{E} dv + \sqrt{G} \cos \omega du) + m \sqrt{G} \operatorname{sen} \omega du &= du_1 \end{aligned}$$

y se tendrá también :

$$\begin{aligned} (m - in) [\sqrt{E} dv + \sqrt{G} du \cos \omega - i\sqrt{G} du \operatorname{sen} \omega] &= \\ &= dv_1 - idu_1 = d(v_1 - iu_1). \end{aligned}$$

De modo que la cuestión consiste en determinar *un factor integrante*  $(m + in)$ , de

$$\sqrt{E} dv + \sqrt{G} du \cos \omega + i\sqrt{G} du \operatorname{sen} \omega$$

para expresarla en forma de diferencial total

$$d(v_1 + iu_1).$$

Una vez resuelto el problema,  $(m - in)$  será también *factor integrante* de:

$$\sqrt{E} dx + \sqrt{G} du \cos \omega - i\sqrt{G} du \sin \omega$$

a la cual transformará en la diferencial total

$$d(v_1 - u_1)$$

y se tendrá entonces:

$$d^2s = \frac{d(v_1 + iu_1) \cdot d(v_1 - iu_1)}{(m + in) \cdot (m - in)} = \frac{d^2v_1 + d^2u_1}{(m^2 + n^2)}$$

con lo cual el problema quedará resuelto.

**5.** Terminaremos estudiando el caso del elipsoide a tres ejes, dado por su ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Tomaremos dos parámetros  $(u, v)$  vinculados a las coordenadas cartesianas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 + v} + \frac{y^2}{b^2 + v} + \frac{z^2}{c^2 + v} - 1 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Consideremos la ecuación de 3<sup>er</sup> grado en  $(\tau)$ :

$$\frac{x}{\tau} + \frac{y^2}{\tau + (b^2 - a^2)} + \frac{z^2}{\tau + (c^2 - a^2)} = 1.$$

Por valores dados de  $(x, y, z)$  que satisfagan a las ecuaciones anteriores, las raíces de esta ecuación serán:

$$\tau_1 = a^2, \quad \tau_2 = a^2 + v, \quad \tau_3 = a^2 + u.$$

Su producto será, pues:

$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 = a^2 (a^2 + v) (a^2 + u).$$

Por otra parte, efectuando los cálculos de la ecuación en  $(\tau)$ , sale:

$$\begin{aligned} (\tau - \tau_1) (\tau - \tau_2) (\tau - \tau_3) &= \tau^3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \tau^2 + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) \tau \\ &\quad - \tau_1 \tau_2 \tau_3 = \tau^3 - \tau^2 [b^2 + c^2 - 2a^2 - x^2 - y^2 - z^2] \\ &\quad + \tau [(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) - (b^2 + c^2 - 2a^2)x^2 - (c^2 - a^2)y^2 - (b^2 - a^2)z^2] \\ &\quad - x^2 [b^2 - a^2] [c^2 - a^2], \end{aligned}$$

de donde resultará :

$$a^2(a^2 + v)(a^2 + u) = x^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) = \tau_1\tau_2\tau_3$$

y por lo tanto será :

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 + v)(a^2 + u)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(a^2 + v)(a^2 + u)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

y fórmulas análogas para  $(y^2)$ ,  $(z^2)$ .

A tales *parámetros*  $(v, u)$  descubiertos por Chasles y Jacobi, Lamé los denominó *coordenadas elípticas*.

De estas dos ecuaciones, y la del elipsoide, sale, pues :

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2(a^2 + v)(a^2 + u)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y^2 &= \frac{b^2(b^2 + v)(b^2 + u)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \\ z^2 &= \frac{c^2(c^2 + v)(c^2 + u)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned}$$

Tomando logaritmos y derivando, se tendrá :

$$\begin{aligned} 2 \frac{dx}{x} &= \frac{dv}{a^2 + v} + \frac{du}{a^2 + u} \\ 2 \frac{dy}{y} &= \frac{dv}{b^2 + v} + \frac{du}{b^2 + u} \\ 2 \frac{dz}{z} &= \frac{dv}{c^2 + v} + \frac{du}{c^2 + u}. \end{aligned}$$

Y pasando a las *derivadas parciales* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1}{4} \frac{x^2}{(a^2 + v)(a^2 + u)} = \frac{a^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{4} \frac{y^2}{(b^2 + v)(b^2 + u)} = \frac{b^2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} = \frac{-b^2(a^2 - c^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{1}{4} \frac{z^2}{(c^2 + v)(c^2 + u)} = \frac{c^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

Pero :  $[a^2(b^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0]$ , y por lo tanto será :

$$\frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = F = 0$$

es decir, que el sistema de curvas correspondientes a estos *parámetros* será *ortogonal*.

Se tiene:

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{x^2}{(a^2+v)^2} + \frac{y^2}{(b^2+v)^2} + \frac{z^2}{(c^2+v)^2}$$

$$4\mathbf{E} = \frac{+a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \cdot \frac{a^2+u}{a^2+v} +$$

$$+ \frac{+b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \cdot \frac{b^2+u}{b^2+v} + \frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \cdot \frac{c^2+u}{c^2+v}$$

Si fuera ( $u = v$ ), esta cantidad sería *nula*, pues sería igual a (F), según es fácil comprobarlo, de modo que deberá tenerse:

$$4\mathbf{E} = (u - v) \psi(v),$$

puesto que ( $u$ ) sólo está como exponente (1).

Poniendo entonces ( $u = v + \Delta u$ ), resultará

$$\psi(v) \Delta v = \frac{a^2 \Delta v}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2+v)} + \frac{b^2 \Delta v}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)(b^2+v)} +$$

$$+ \frac{c^2 \Delta v}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2+v)}$$

De modo que haciendo:

$$(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v) = \mathbf{N}$$

se tendrá:

$$\psi(v) = \frac{a^2(b^2-c^2)(b^2+v)(c^2+v) - b^2(a^2-c^2)(a^2+v)(c^2+v) +}{\mathbf{N}}$$

$$\frac{+ c^2(a^2-b^2)(a^2+v)(b^2+v)}{\mathbf{N}}$$

El numerador será de la forma

$$m + nv + pv^2.$$

Ahora bien, para ( $v = 0$ ), el numerador será:

$$a^2 b^2 c^2 [(b^2 - c^2) - (a^2 - c^2) + (a^2 - b^2)] = 0$$

y por lo tanto será ( $m = 0$ ).

Se tiene:

$$p = a^2(b^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$n = a^2(b^2 - c^2)(b^2 + c^2) - b^2(a^2 - c^2)(a^2 + c^2) + c^2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Pero esta expresión se anula para  $(a^2=b^2)$ ,  $(a^2=c^2)$ ,  $(b^2=c^2)$ ; y como para  $(c=0)$ , sería

$$n = a^2b^4 - b^2a^4 = (b^2 - a^2) a^2b^2,$$

se tendrá :

$$n = - (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$$

y resultará

$$\psi(v) = \frac{-v}{(a^2 + v)(b^2 + v)(c^2 + v)}$$

y por lo tanto

$$4E = \frac{v(u-v)}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)} = \frac{v(v-u)}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}$$

y análogamente será :

$$4G = \frac{u(u-v)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}.$$

De modo que poniendo :

$$v_1 = \int \sqrt{\frac{v}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}} \cdot dv$$

$$u_1 = \int \sqrt{\frac{-u}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} du.$$

El elemento lineal de la superficie del elipsoide será :

$$ds^2 = E dv^2 + G du^2 = \frac{1}{4}(v-u) \cdot [d^2v_1 + d^2u_1]$$

y los parámetros  $(v_1, u_1)$  serán pues *isotermos*, de modo que tomados como coordenadas cartesianas corrientes en el plano, quedará representada en él la superficie del elipsoide a tres ejes, de modo *conforme*.

Y con esto damos por terminados estos *Elementos de geografía matemática*.



# INDICE

---

INTRODUCCIÓN .....	VII
--------------------	-----

## CAPITULO I

Mediciones sobre la superficie terrestre.....	1
a) Fundamentos de la geodesia.....	1
b) Problema fundamental de la triangulación (Representación elip- soidal).....	6

## CAPITULO II

Representación de una superficie sobre otra.....	17
Módulo lineal.....	18
Deformación angular.....	22
Elipse indicadora de Tissot.....	25

## CAPITULO III

Representación conforme.....	30
Mercator.....	30
Ortomorfa cónica de Lambert.....	38
Cilíndrica ortomorfa de Lambert.....	42
Estereografía.....	44
Transformación general conforme.....	49
Proyección ortomorfa de Lagrange.....	52

## CAPITULO IV

Proyección Gauss.....	57
Proyección por fajas meridianas : Gauss-Krüger.....	57
Problemas de triangulación.....	76

## CAPITULO V

Representación equivalente.....	80
Sistemas diversos.....	85

**CAPITULO VI**

**Proyecciones policónicas..... 91**

**CAPITULO VII**

**Curvatura de meridianos y paralelos en la proyección conforme..... 99**

**CAPITULO VIII**

**Coordenadas curvilíneas o isotermas ..... 108**  
**Representación plano-conforme de la superficie del elipsoide a tres ejes.. 114**

