Tareas y capacidades matemáticas con el uso de GeoGebra en la clase de Análisis Matemático

Betina Williner[1] Adriana Favieri[1]

[1]*Universidad Nacional de La Matanza*

bwilliner@unlam.edu.ar, afavieri@unlam.edu.ar

Resumen

Este artículo trata sobre el diseño e implementación de tareas con software GeoGebra en el aula universitaria y las capacidades puestas en juego cuando los alumnos las realizan. Forma parte de una investigación cuyo propósito general es analizar qué tipo de tareas diseñar para que el alumno gradualmente incorpore el software a su actividad matemática sin necesidad de la guía del profesor. Mediante una experiencia basada en tareas matemáticas con uso de GeoGebra y lápiz y papel con un orden creciente de demanda cognitiva y de interacción del alumno con el software, se analizaron diferentes capacidades matemáticas. El análisis de los resultados muestra que, en las tareas con demanda cognitiva media y consigna guiada para su resolución, es posible evidenciar capacidades matemáticas específicas desarrolladas por los estudiantes. Sin embargo, el resultado es adverso en las que la demanda cognitiva y la interacción alumno-software es alta.

Palabras Clave: tareas-capacidades-GeoGebra-Cálculo

Introducción

Este artículo trata sobre la implementación de tecnología en el aula de matemática universitaria a través de tareas con el software GeoGebra (GG). Más específicamente se centra en el diseño y puesta en marcha de dos tareas y en las capacidades puestas en juego cuando los alumnos las realizaron.

En la actualidad ya no es cuestionada la incorporación de software matemático en procesos de enseñanza aprendizaje. Son numerosas las investigaciones que dan cuenta de las ventajas que esto conlleva ([1], [2], [3]). A pesar de esto, la Educación Matemática sigue demandando estudios empíricos sobre cómo implementarlas para lograr aprendizaje en los estudiantes ([4]).

Uno de los instrumentos que se vale el docente para enseñar son las tareas. Se entiende por tarea matemática a toda situación de aprendizaje propuesta por el profesor como detonante de la actividad matemática del alumno la cual está formada por una secuencia de momentos didácticos, los que incluyen desde la planificación de las actividades hasta los procesos comunicativos y la resolución ([5]).

Diferentes tareas implican distintos niveles de demanda cognitiva. Al respecto se analizaron en la bibliografía las características de tareas realizadas con software GG y se encontró que, en su mayoría, poseen una demanda cognitiva baja o media. En general consisten en un applet diseñado por el docente o una serie de preguntas en las que se le indica al alumno qué acciones realizar con el programa. Ejemplos de éstas se pueden encontrar en [6], [7] y [8].

Dadas las potencialidades que tiene GG surge como inquietud si, luego de que el estudiante realiza tareas con las características descriptas anteriormente, es capaz de efectuar otro tipo de manipulación con el software y resolver tareas con demanda cognitiva más alta. Se tiene como pregunta: *¿qué tipo de tareas diseñar para que el alumno gradualmente incorpore el software a su actividad matemática sin necesidad de realizar los pasos que le indica el profesor?* Se procura que el estudiante ante un problema o ejercicio, por sí mismo (sin una guía del docente) realice acciones con GG que le permitan comprender la consigna del ejercicio, resolverlo o conjeturar sobre distintas situaciones. Es un gran desafío, ya que por un lado se tiene que introducir al alumno en el uso de GG a través de recursos diseñados para que lo comience a incorporar como herramienta de trabajo y luego tratar, de cierta manera, que ese uso se haga cotidiano y que vaya más allá de graficar.

En la cátedra de Análisis Matemático I de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, Argentina, se comenzó una investigación en la que se tiene como objetivo diseñar e implementar tareas con el propósito anteriormente planteado.

A su vez, el marco teórico elegido para analizar y evaluar el aprendizaje matemático de los estudiantes luego de haber realizado las tareas con el software es el de competencia matemática ([9], [10] y [11])

Se presenta en este artículo la descripción de dos de las tareas con uso de GG diseñadas e implementadas y los resultados obtenidos.

Marco Teórico

Sobre el software GeoGebra

GG es uno de los softwares de geometría dinámica más difundido en las últimas dos décadas como herramienta auxiliar para la enseñanza de la matemática que tiene la ventaja de ser de código abierto y adaptable a todos los niveles educativos ([12]). Incluye geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo con la posibilidad de incorporar actividades dinámicas. Su interfaz es de fácil uso y cuenta con poderosas herramientas. Ofrece a los docentes la oportunidad de crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web o applets, por lo que también es una herramienta de autoría.

A su vez se ha convertido en una comunidad con millones de usuarios en casi todos los países del mundo en la que comparten sus recursos y experiencias en apoyo a la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas. Esto contribuye a la innovación en la enseñanza y aprendizaje en casi todas las latitudes ([13]).

Además, GG brinda una serie de aplicaciones para usar en el celular que son gratuitas y disponibles para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook y Linux, lo que asegura la utilización en diversos dispositivos.

Tareas matemáticas

Clasificación a través de niveles de dificultad

Se toma la postura de [14] que, citando a Smith y Stein (1998), clasifica las tareas acordes a su demanda cognitiva en:

- Nivel 1: consisten en reproducir fórmulas, reglas y procedimientos ya aprendidos o ya establecidos. No son ambiguas, implican reproducir con exactitud algo visto anteriormente.
- Nivel 2: son algorítmicas. Utilizan procedimientos cuyo uso es obvio acorde a la información dada. No requieren explicaciones.
- Nivel 3: se usan procedimientos con el fin de lograr la comprensión en el estudiante. Se utilizan diferentes representaciones (gráfica, analítica, etc.) y los alumnos deben involucrarse con ideas conceptuales.

- Nivel 4: apelan a un pensamiento complejo y no algorítmico. Requieren que los estudiantes exploren y comprendan procesos matemáticos, que verifiquen, que comuniquen las ideas producidas.

Diseño de tareas matemáticas con software

En cuanto al diseño de tareas matemáticas con software, varios autores ([6], [12], [15]) coinciden en que existe una fase de exploración en la que predomina la habilidad visual y manipulativa y el alumno puede realizar conjeturas. Luego se pasa a una fase de formalización o institucionalización de los contenidos y acá es primordial la presencia del docente. A su vez [16] sintetiza las conclusiones del Seminario sobre enseñar matemática con GG que organizó el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) en 2015. Entre ellas se recomienda que las tareas tengan dos momentos: un primer momento exploratorio con el software para favorecer la comprensión de la tarea y la aplicación eficaz de la técnica; y un momento posterior que consista en la resolución con lápiz y papel para favorecer la consolidación de lo realizado.

Competencia matemática. Capacidades fundamentales.

A la hora de evaluar el aprendizaje de los estudiantes se toma la corriente que se enfoca en el desarrollo de la competencia matemática ([9], [10] y [11]). "La competencia matemática es la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, herramientas y hechos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos" ([10], p.64). Esta competencia global se articula con siete capacidades fundamentales: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, uso de operaciones y lenguaje simbólico y uso de herramientas.

Se definen las que se usan en este artículo:

- *Comunicación (C):* la lectura e interpretación de enunciados, preguntas, tareas u objetos le permite al estudiante formar un modelo mental de la situación. Durante el proceso de resolución, puede ser necesario resumir y presentar los resultados intermedios o finales.
- *Representación (R):* la competencia matemática suele implicar la selección, interpretación, traducción y la utilización de una variedad de representaciones (gráficos, tablas, diagramas, imágenes, materiales concretos, fórmulas y ecuaciones) para plasmar una situación, interactuar con un problema o para presentar un trabajo propio.
- *Razonamiento y argumentación (RA):* implica procesos de pensamiento que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada, o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas.
- *Utilización de operaciones y lenguaje simbólico y formal (UOL):* implica la comprensión, interpretación, manipulación y utilización de expresiones simbólicas en un contexto matemático y utilización de constructos formales basados en definiciones, reglas y propiedades.
- *Uso de herramienta (UH)*: implica conocer y saber utilizar herramientas (físicas o tecnológicas)

como ayuda a la actividad matemática y ser conscientes de sus limitaciones.

Metodología

En la primera etapa de la investigación se elaboraron tareas matemáticas con uso de GG y lápiz y papel, teniendo en cuenta el marco teórico y el propósito inicial de la investigación: tratar de lograr paulatinamente mayor independencia del alumno sobre el uso del software. A tal efecto se llama interacción alumno-software al conjunto de acciones llevadas a cabo por el estudiante cuando lo utiliza.

Como resultado de esta etapa se pudieron diseñar tipos de tareas con un orden creciente de demanda cognitiva y de interacción del alumno con el software. Haciendo un paralelo con el marco teórico se tiene:

- Nivel 1: consisten en actividades donde el docente, junto a los alumnos, reproduce fórmulas, reglas y procedimientos, explica algún concepto nuevo usando el software a través del televisor del aula o computadora. Los estudiantes lo pueden seguir (o no) en sus dispositivos móviles. No son ambiguas, implican reproducir con exactitud lo que hace el profesor. Por ejemplo: el docente explica el concepto de recta tangente usando GG.
- Nivel 2: son algorítmicas. Utilizan procedimientos cuyo uso es obvio acorde a la información dada. No requieren explicaciones. Por ejemplo: se solicita a los alumnos que calculen a través del programa las asíntotas de una función dada.
- Nivel 3: se usan procedimientos con el fin de lograr la comprensión en el estudiante. Se utilizan diferentes representaciones (gráfica, analítica, etc.) y los alumnos deben involucrarse con ideas conceptuales a través de pasos guiados por la consigna de la tarea o un applet diseñado por el docente. Por ejemplo: la tarea 1 presentada en este trabajo.
- Nivel 4: requieren un pensamiento complejo y no algorítmico. Demandan que los estudiantes exploren diversas situaciones con el software, comprendan procesos matemáticos, que verifiquen y que comuniquen las ideas producidas. Por ejemplo: la tarea 2 presentada en este trabajo.

Además, para analizar el aprendizaje de los estudiantes en términos de las capacidades fundamentales, se realizó un análisis preliminar de cada tarea.

Descripción de la experiencia

En el segundo cuatrimestre de 2022, en una de las comisiones de Análisis Matemático I, se implementaron tareas con uso de GG de diferentes niveles. Primero las tareas se realizaron en el aula y consistieron en la presentación del programa, el uso de los primeros comandos y las posibilidades de configuración (nivel 1). Esto se hizo a través del televisor del aula y de los dispositivos móviles de los alumnos. Luego se llevaron a cabo tareas algorítmicas para realizar cálculos en el momento de trabajo en conjunto en la clase (nivel 2). Al finalizar el cuatrimestre se propusieron dos tareas para ser entregadas en equipos de tres o cuatro integrantes correspondientes a los niveles 3 y 4. Las consignas y las producciones de los alumnos fueron entregadas en la plataforma MIeL (Materias Interactivas en Línea) de la universidad. El plazo de entrega fue de una semana.

A continuación, se presenta la consigna de cada una de estas tareas y el análisis preliminar de las capacidades promovidas.

Tarea 1

Consigna

¿Cuál es el área máxima que puede tener un rectángulo que tiene 2 vértices sobre la parábola $y = 12 - x^2$ y dos vértices sobre el eje x?

Trabajo con GeoGebra: Para interpretar el problema acceder al Applet de GeoGebra en https://www.geogebra.org/m/kc8yauyj

1. Muevan el punto A vértice del rectángulo que se forma atendiendo a la consigna, y observen cómo cambia el rectángulo y el área de éste a medida que este punto cambia (el cálculo del área se encuentra “dentro” del rectángulo).

2. Estimen, observando lo anterior, cuál sería el valor de la abscisa del punto A que hace que el área de ese rectángulo sea máxima. Hagan captura de pantalla de esta situación.

3. Planteen la función que nos permite calcular analíticamente la abscisa encontrada en forma gráfica. Calculen su máximo y revisen si coincide con lo visto en GeoGebra. Adjunten esta solución en el archivo.

4. Tilden el casillero que dice “Función área” y “Máximo de la función área”. Verifiquen si dicha función y su máximo coincide con lo que ustedes obtuvieron en el punto 3.

Descripción de la tarea

Esta tarea reúne las condiciones de diseño ya que existe primero una etapa de manipulación y visualización con el programa y otra en entorno de lápiz y papel para formalizar lo estudiado. Se considera que es nivel 3. En efecto: se utilizan diferentes representaciones (esquema de la situación, gráfico y representación analítica), los alumnos se involucran con un problema de optimización a través de preguntas guiadas y deben utilizar procedimientos conocidos para justificar analíticamente lo visto en GG

Análisis preliminar de capacidades específicas

En la tabla 1 se analizan capacidades específicas que promueve la tarea y se aclara a qué capacidad fundamental contribuye:

Capacidad específica	Capacidad fundamental
Estimación de la abscisa del máximo enviando captura de pantalla	UH
Planteo de la función a optimizar	RE
Cálculo la abscisa del máximo (deriva-busca PC-aplica método)	UOL
Verificación lo realizado en LP con el software	UH

Tarea 2

Consigna

Estudiar, usando GeoGebra, cómo cambian los extremos y puntos de inflexión de la función $f: R \to R / f(x) = x^3 + a\,x^2 + a\,x$, a medida que varía el parámetro a en el conjunto de números reales.

Trabajo con GeoGebra: es libre, pero damos las siguientes sugerencias:

1. Para explorar con GeoGebra pueden definir un deslizador llamado “a” que tome valores positivos y negativos e ir observando los elementos pedidos de la función. También pueden estudiar la situación para valores de “a” particulares. Otra posibilidad es graficar su función derivada.

2. Envíen el archivo en GeoGebra (formato ggb con nombre GrupoN_UT4) donde trabajaron este ejercicio. En ese archivo tiene

que estar todo lo que hicieron con el programa para poder resolverlo.

3. En papel escriban con palabras lo que fueron haciendo y qué posibilidades obtuvieron.

4. Justificar analíticamente en papel lo obtenido.

Descripción de la tarea

Se considera que esta tarea tiene un nivel 4 en cuanto a su demanda cognitiva y uso de GG. En efecto, requiere que los estudiantes exploren diversas situaciones con el software en forma libre (no pautada), comprendan y relacionen conceptos matemáticos, que verifiquen y que comuniquen las ideas producidas. A su vez existe primero una etapa de manipulación y visualización con el programa, otra de establecer conjeturas y una última, en entorno de lápiz y papel, para formalizar lo analizado.

Como resultado los alumnos debían obtener que para valores de $a \in (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$ la función tiene dos extremos relativos y para valores de $a \in [0,3]$ la función no tiene extremos. Para cualquier valor de $a \in R$ la función tiene un punto de inflexión.

Análisis preliminar de capacidades específicas

En la tabla 2 se analizan capacidades específicas que promueve la tarea y se aclara a qué capacidad fundamental contribuye:

Capacidad específica	Capacidad fundamental
Ingreso del deslizador (parámetro de la función) en GG para estudiar la situación planteada	UH
Ingreso en GG de la función a estudiar	UH
Análisis de los extremos relativos a medida que varía el parámetro usando GG	UH
Estudio de los puntos de inflexión a medida que varía el parámetro usando GG	UH
Comunicación en forma clara y precisa de la conjetura que extrajo sobre extremos/sobre puntos de inflexión	C – RA - R
Fundamentación en forma analítica en lápiz y papel de lo conjeturado (extremos/puntos de inflexión)	RA-UOL

Resultados

Se analizaron las producciones de 13 equipos, cada uno formado por tres o cuatro alumnos. Cada grupo debía enviar dos archivos: uno formado por imágenes extraídas del programa y respuestas en lápiz y papel a los ítems de la tarea (todo en formato PDF) y otro en extensión ggb con todo lo realizado en GG.

Resultados tarea 1

Fueron 11 los equipos que evidenciaron todas las capacidades específicas indicadas en la tabla 1. Un equipo planteó la función a optimizar, la derivó, buscó sus raíces y concluyó, sin método, que el valor obtenido correspondía a la abscisa del máximo. El otro equipo planteó la función a optimizar y directamente indicó cuál es el valor del máximo.

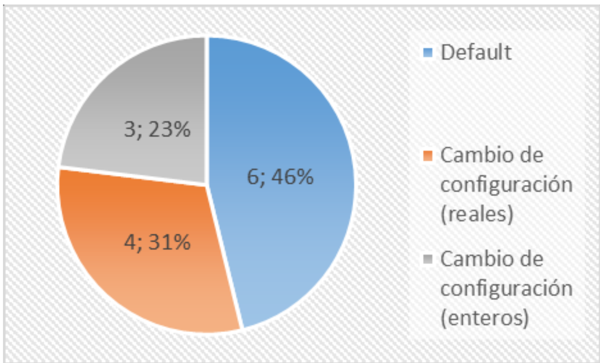
Resultados tarea 2

A continuación, se muestra, por cada capacidad específica, las opciones y frecuencias obtenidas. En algunos casos se brindan gráficos para exponer los resultados.

Capacidad específica: ingreso del deslizador.

Al analizar las producciones enviadas por los equipos, se obtuvieron tres posibilidades: deslizador por default, deslizador con cambio de configuración en donde se usaron valores reales y con cambio de configuración donde se usaron solamente valores enteros.

Se indican los resultados gráficamente (frecuencias absolutas/relativas):

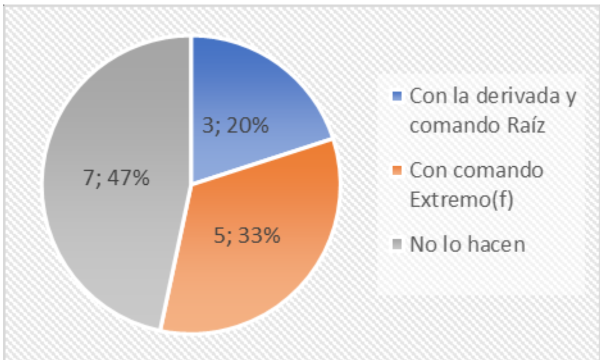


Capacidad específica: ingreso de la función genérica con parámetro

Todos los equipos evidenciaron esta capacidad salvo uno que sólo entró el caso particular para $a = 0$.

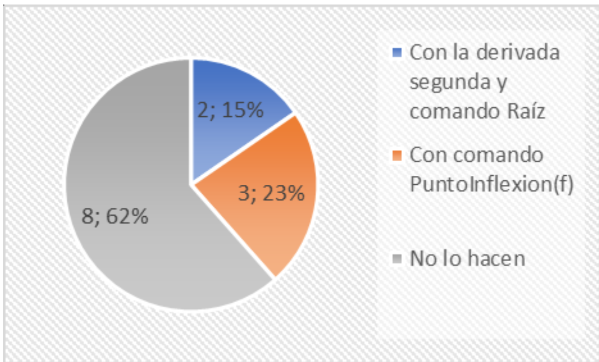
Capacidad específica: análisis de los extremos relativos de la función a medida que varía el parámetro usando GG

Fueron siete los equipos que no evidenciaron esta capacidad. De los restantes, uno estudió los extremos a través de la derivada primera (derivaron con el software) y el comando Raíz. Fueron tres los equipos que usaron el comando Extremo(f) y dos equipos que realizaron en forma conjunta las dos acciones anteriores.



Capacidad específica: estudio de los puntos de inflexión a medida que varía el parámetro usando GG

Siendo las opciones similares a las anteriores se obtuvo:



Capacidad específica: comunicación en forma clara y precisa de la conjetura que se extrajo

En el caso de los extremos de la función: dos equipos escribieron bien todos los casos posibles; cuatro equipos omitieron uno de los casos o lo escribieron mal (por ejemplo, corchetes en vez de paréntesis o uno de los equipos que trabajó con números enteros identifica los tres casos, pero con ese tipo de números). Fueron tres los grupos que sólo dieron un caso; tres que extrajeron conclusiones erróneas y uno no lo hizo.

Respecto al punto de inflexión: fueron tres los equipos que explicaron todos los casos posibles, dos omitieron un caso, cuatro se equivocaron en sus conclusiones y cuatro no dieron respuesta a este ítem.

Capacidad específica: fundamentación en forma analítica en lápiz y papel de lo conjeturado (extremos)

Ningún equipo fundamentó en forma correcta todas las posibilidades de extremos en forma genérica. Un equipo hizo bien dos casos, dos fundamentaron uno solo y tres realizaron mal la justificación.

Algunos equipos (cuatro) hicieron esta justificación tomando casos particulares (un valor de "a" por posibilidad). Fueron dos los equipos que estudiaron dos casos y uno que analizó sólo uno.

Capacidad específica: fundamentar en forma analítica en lápiz y papel lo conjeturado (puntos de inflexión)

Dos equipos fundamentaron en forma genérica bien para todos los valores del parámetro y uno lo hizo regular. Fueron tres equipos que analizaron casos particulares bien y dos que lo hicieron en forma regular ya que les faltó alguna posibilidad. Los demás (cinco) no justificaron.

Otras capacidades específicas ligadas al uso de la herramienta

Durante el análisis de las producciones de los equipos se evidenciaron algunas capacidades específicas ligadas al uso del GG. Entre ellas: cambio de configuración de las funciones (en color y grosor). Solo dos equipos desarrollaron esta capacidad. Un equipo usó texto y casillas de control para mostrar lo que habían estudiado. Tres equipos utilizaron puntos (con sus etiquetas) para mostrar los extremos y el punto de inflexión de la curva.

Discusión de los resultados

Sintetizando las producciones de los 13 equipos acorde a su desempeño en la capacidad fundamental UH en la tarea 2, se pudieron categorizar en:

- *Nivel básico de uso del software:* lo evidenciamos en las producciones de seis equipos y podemos dar cuenta de dos casos. En el primero sólo ingresaron un deslizador llamado "a" y la función a estudiar (dos equipos). En el segundo, manifestado en cuatro equipos, ingresaron el deslizador, la función a estudiar y la función derivada escrita por ellos. No hay cambios de configuración de ningún tipo.

- *Nivel intermedio de uso del software:* incluimos dos posibilidades: además del deslizador y la función, los estudiantes derivaron con el software obteniendo la primera y segunda derivada (esto se manifiesta en un equipo). Otro caso en el que además del deslizador y la función usaron los comandos Extremo o PuntoInflexión o Raíz (esto se evidenció en las producciones de dos equipos) En ningún caso cambiaron la configuración de colores o etiquetas o usaron texto.

- *Nivel más avanzado de uso del software:* evidenciado en cuatro equipos. Además del deslizador y la función genérica, trabajaron con sus derivadas marcando puntos (por ejemplo, las raíces o combinando comandos Extremo con comando Raíz o comando PuntoInflexión con comando Raíz) Algunos marcaron los puntos con distintos colores o los denominaron con etiquetas como MAX o MIN. En uno de estos casos utilizaron casilla de control para ir viendo primero todo lo relativo a la función original, luego a la derivada primera y luego a la derivada segunda.

Sobre los archivos en entorno de lápiz y papel, acorde a la exposición en el punto anterior, se tuvieron resultados muy heterogéneos, lo que no indujo a crear categorías al respecto.

Sólo un equipo logró escribir las conclusiones en forma correcta y completa. Para justificarla derivaron la función dada en forma genérica, buscaron las raíces de la derivada primera (a lo que indicaron como función del parámetro a y la llamaron $r(a)$) impusieron discriminante no negativo sin justificar por qué lo hicieron, resolvieron esa desigualdad y concluyeron que la función tiene extremos para valores de $a < 0$ o $a > 3$. Después derivaron bien dos veces y explicaron que siempre tiene punto de inflexión.

Cuatro equipos realizaron la justificación tomando valores particulares del parámetro (uno por cada opción).

Uno de los equipos que trabajó sólo con parámetros enteros sacó la conclusión sobre los extremos, pero para valores enteros entre -8 y -4 y entre 4 y 8. Este es otro caso en donde se evidencia problemas sobre conjuntos numéricos. Luego justificaron probando casos particulares.

Los otros siete equipos restantes obtuvieron conclusiones erróneas o confusas. Algunos confundieron la variable x con el parámetro a, otro estudió el crecimiento del máximo, otro dividió los casos en valores mayores o menores a $a = 0$, etc.

Conclusiones

Todos los equipos, salvo dos, evidenciaron las capacidades específicas involucradas en la tarea 1 clasificada como nivel 3. Sin embargo, en la segunda tarea, de nivel 4, donde no hay guía del docente, los resultados difieren notablemente del anterior. Casi la mitad de los equipos evidenciaron una interacción muy pobre con el software. Este desempeño también se reflejó en la capacidad de comunicar lo analizado y más aún en fundamentar analíticamente.

Existe una dependencia por parte del estudiante de la guía del profesor, ya sea en el uso del software como en las conjeturas y justificaciones en lápiz y papel. A pesar del trabajo intenso en el aula con el programa, muchos equipos no pudieron siquiera trabajar con las funciones derivadas de la función de la tarea 2 para establecer conjeturas sobre sus extremos y/o punto de inflexión. Algunos grupos sólo pensaron en valores enteros para el parámetro, dificultad notable para emprender el estudio del Cálculo.

Como indica [17] usar las herramientas de forma interactiva requiere algo más que el simple acceso a la herramienta y la habilidad técnica requerida para manejar la situación. Esto implica comprender la manera en que uno puede interactuar y cómo puede usarse para alcanzar las metas planteadas. En este sentido, continúa: “una herramienta no es solamente un mediador pasivo, es un instrumento para un diálogo activo entre el individuo y su ambiente” (p.9).

También se reconoce que en el aula se trabajó con tareas de nivel 1, 2 y 3. En un futuro se incorporará alguna tarea que incluya ítems en los cuales los alumnos deban justificar, en lápiz y papel, lo realizado en el software; como así también, conjeturar sobre diferentes situaciones al variar algún parámetro en particular.

Uno de los objetivos propuesto por la mayoría de los docentes es lograr que los alumnos adquieran independencia y autonomía en su aprendizaje, incorporando herramientas tecnológicas. Por eso es preciso diseñar e implementar tareas, en este caso con GG, que apunten a dicha meta. Ante un futuro tan cambiante tanto en el aspecto tecnológico como científico, es necesario que los docentes colaboren en el desarrollo de alumnos autosuficientes y responsables de su aprendizaje.

Bibliografía

[1] Y. A. Wassie y G.A. Zergaw, Capabilities and Contributions of the Dynamic Math Software, GeoGebra—a Review, *North American GeoGebra Journal,* vol. 7 (1), pp. 68-86, 2018.

[2] S. Rubio-Pizzorno, C.L. Salinas, D. García-Cuéllar y J. L. Prieto, Matemática Educativa en la era digital: recursos educativos abiertos integrando prácticas y tecnologías digitales, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* vol. 32 (2), pp. 693-700, 2019.

[3] C. Gonzáles, K. Vigo, N. Saravia y E. Advíncula, Una secuencia didáctica para la comprensión del concepto de derivada mediada por el software GeoGebra, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* vol. 31 (2), pp. 1352-1358, 2019.

[4] M. García López, I. Romero Albaladejo y F. Gil Cuadra, Efectos de trabajar con GeoGebra en el aula en la relación afecto-cognición, *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 39 (3), pp. 177-198, 2021.

[5] M. Pochulu y V. Font Moll, Herramientas y constructos del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje. En M. Rodríguez, M. Pochulu y F. Espinosa (coordinadores), *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Volumen 2,* pp. 15-48, 2022.

[6] F. Barahona, O. Barrera, B. Vaca y B. Hidalgo, GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil, *Revista Tecnológica ESPOL (RTE)*, vol. 28 (5), pp. 121-132, 2015.

[7] D. García Cuéllar, M. Martínez Miraval y J. Flores Salazar, Genesis instrumental de la razón de cambio instantánea mediada por GeoGebra, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 31 (2), pp. 1876-1883, 2018.

[8] M. Garelik y F. Montenegro, Un problema de movimiento parabólico en Cálculo con uso de GeoGebra, *VI Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación Virtual y a Distancia,* 2015.

[9] J. L. Lupiáñez y L. Rico, Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares, *PNA,* vol. 3 (1), pp. 35-48, 2008.

[10] OCDE, *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*, Versión preliminar, OECD Publishing, Paris, 2017.

[11] CONFEDI, *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en La República Argentina "libro rojo de CONFEDI"*, 2018.

[12] M. Campos Nava y A.A. Torres Rodríguez, A. A., Diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático con GeoGebra: Mecanismos Articulados, *Pädi. Boletín Científico del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería,* vol. 10, pp. 80-85. https://doi.org/10.29057/icbi.v5i10.2939, 2018.

[13] GeoGebra. (2020). *¿Qué es GeoGebra?* https://www.geogebra.org/about

[14] C. L. O. Groenwald, Educación Matemática y Tecnología: planificación de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes, *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* vol. 63, pp. 1- 16, 2021.

[15] J. Fiallo y S. Parada, Curso de precálculo apoyado en el uso del GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional, *Revista Científica*, vol. 20, pp. 56-71, 2014.

[16] J. Muñoz-Escolano, Crónica del encuentro: Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados. *Revista Suma*, vol. 81, 2016.

[17] OCDE, La definición y selección de competencias claves. Resumen ejecutivo, extraído de https://www.deseco.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf, 2005.