UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA ★ FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS ★ DEPARTAMENTO DE MATEMATICA - BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

"Sobre residuos esenciales y evaluadores asociados a funciones meromorfas"

TESIS

Jorge Eduardo Solomin

1977

a mis padres

Quiero expresar mi profundo reconocimiento al Prof. Miguel Herrera, inspirador y director de este trabajo, y a mi compañero Nicolás Coleff. La paciente y eficaz guía del primero y las valiosas sugerencias de ambos posibilitaron la concreción del mismo.

Quiero, además, agradecer a los profesores del Departamento de Matemática el amistoso apoyo que en todo momento me han brindado.

INDICE

Capítulo I - Preliminares .....pág 1.

1.1 - Formas semimeromorfas .....pág 1.

1.2 - Trayectorias admisibles .....pág 1.

1.3 - Las cadenas T^p_{ζ} y D^p_{ζ} .....pág 2.

1.4 - Las corrientes residuo y residuo-valor principal .....pág 3.

1.5 - La variedad esencial .....pág 4.

1.6 - El residuo logarítmico .....pág 5.

1.7 - Continuidad de la fibra integral .....pág 6.

1.8 - Evaluadores generalizados de Speer .....pág 6.

1.9 - Resultados principales .....pág 8.

Notación .....pág 10.

Capítulo II - Trayectorias admitidas .....pág 13.

Capítulo III - El ciclo esencial .....pág 36.

Capítulo IV - Aplicaciones .....pág 52.

4.1 - Continuidad de la fibra integral esencial .....pág 52.

4.2 - El residuo logarítmico .....pág 54.

4.3 - Evaluadores ampliados .....pág 57.

Bibliografís .....pág 60.

Capítulo I - Preliminares

1.1 - Formas semimeromorfas.

Dado un abierto W en $\mathbb{C}^n$, denotaremos, como es habitual, con $\mathcal{E}^{\cdot}(W)$ al conjunto de formas C^∞ sobre W y con $\mathcal{D}^{\cdot}(W)$ al de las formas de $\mathcal{E}^{\cdot}(W)$ con soporte compacto. Así mismo, $\mathcal{H}(W)$ será el conjunto de las funciones holomorfas sobre W.

Si Y es un conjunto analítico de W, de codimensión compleja 1, una ecuación de Y en el abierto U de W es una función $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ tal que $V(\varphi) = Y \cap U$. (No se supone que φ genere al ideal $\mathcal{Y}$ de Y).

Una forma $\tilde{\omega} \in \mathcal{E}^{\cdot}(W-Y)$ se dice semimeromorfa en W, con polos en Y, si, $\forall\ z \in Y$, existen W_z entorno de z, una forma ω perteneciente a $\mathcal{E}^{\cdot}(W_z-Y)$ y una ecuación φ de Y en W_z tales que, sobre W_z-Y,

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\varphi}$$

Denotaremos con $\mathcal{D}'_{//}(*Y)$ al conjunto de las formas semimeromorfas de W, con polos en Y, a soporte compacto.

1.2 - Trayectorias admisibles.

Escribamos $\mathbb{R}^p_> = \left\{ (x_1,\dots,x_p) / \ x_i \in \mathbb{R}^+, i=1,\dots,p \right\}$.

Una trayectoria admisible en $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, es una aplicación analítica

$$\underset{\sim}{\delta} = (\delta_1(\delta), \ldots, \delta_p(\delta)) \quad (0,1) \longrightarrow R^p_> \qquad 2^\circ$$

tal que $\lim_{\delta \to 0} \delta_p(\delta) = 0$ y

$$\lim_{\delta \to 0} \delta_j(\delta)/\delta_{j+1}^p(\delta) = 0, \quad 1 \le j \le p-1,$$

para todo $q \in N$. [2]

1.3 - Las cadenas $T^p_{\underset{\sim}{\delta}}$ y $D^p_{\underset{\sim}{\delta}}$.

Sea $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p): W \to \mathbb{C}^p$ una aplicación analítica tal que ninguna de las funciones φ_j $(j=1,\ldots,p)$ se anule idénticamente sobre ninguna componente conexa de W.

Para cada $x = (x_1, \ldots, x_p) \in R^p_>$, podemos tomar los conjuntos

$$|T^p_x(\varphi)| = \{z \in W \mid |\varphi_j(z)| = x_j,\ 1 \le j \le p\},$$

$$|D^p_x(\varphi)| = \{z \in W \mid |\varphi_j(z)| = x_j,\ 1 \le j \le p-1,\ |\varphi_p(z)| > x_p\}$$

Como la aplicación

$$|\varphi| = (|\varphi_1|, \ldots, |\varphi_p|)\ W - Y \longrightarrow R^p_> \quad \left(Y = \bigcup_{i=1}^{\circ} V(\varphi_i)\right),$$

es analítica y dado que, si $\underset{\sim}{\delta}$ es una trayectoria admisible

$$\dim |T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\varphi)| \le 2n-p$$

y

$$\dim |D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\varphi)| \le 2n-p+1 \ ,$$

para δ suficientemente chico [2], se pueden definir, para tales δ las cadenas semianalíticas

$$T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\varphi) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} |\varphi|^{-1}[\underset{\sim}{\delta}]$$

y

$$D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(\varphi) = (-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} |\varphi|^{-1}([\underset{\sim}{\delta}] \times [x_p > \delta_p]),$$

donde $[\underset{\sim}{\delta}]$, $[\delta']$, $[x_p > \delta_p]$ denotan a los puntos $\underset{\sim}{\delta}$, $\underset{\sim}{\delta}' = (\delta_1, \ldots, \delta_{p-1})$ y al intervalo $(x_p > \delta_p)$ provistos de sus orientaciones canónicas [1]. (La imagen inversa por $|\varphi|$ de una cadena semianalítica ha sido definida en [2] ,[9]

En el caso particular p=1, $\varphi_1 = z_1$, $T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(z_1)$ se reduce al círculo $|z_1| = \delta_1$ con su orientación usual (antihorario) y $D^p_{\underset{\sim}{\delta}}(z_1)$ al abierto $|z_1| > \delta_1$, con su orientación compleja.

1.4 - Las corrientes residuo y residuo-valor principal.

En las condiciones del parágrafo anterior, Coleff-Herrera [2] han definido las aplicaciones

$$R^p_Y : \mathcal{D}^{2n-p}_W(*Y) \longrightarrow \mathbb{C}$$

y

$$R^{p-1}P^p_Y : \mathcal{D}^{2n-p+1}_W(*Y) \longrightarrow \mathbb{C},$$

p-residuo y (p-1)-residuo-valor principal, respectivamente, como los límites

$$R^p_Y[\tilde{\alpha}] = \lim_{\delta \to 0} \int_{T^\varepsilon_Y(\varphi)} \tilde{\alpha}$$

$$R^{p-1}P_Y^p[\tilde{\omega}] = \lim_{\delta \to 0} \int_{D_Y^p(\varphi)} \tilde{\omega}$$

Ambos son independientes de las particulares ecuaciones de $Y_1,\ldots,Y_p$ consideradas. ($Y_i = V(\varphi_i)$, $i=1,\ldots,p$).

1.5 - La variedad esencial

Sin ninguna hipótesis acerca de $\dim \varphi^{-1}(0)$, Coleff-Herrera [2] han asociado a la aplicación φ de 1.3 un conjunto analítico complejo $V_e(\varphi)$, la variedad esencial de φ, tal que

a) $\operatorname{sop} R_Y^p \subset V_e(\varphi) \subset \varphi^{-1}(0)$;

b) $V_e(\varphi) = \emptyset$ ó es de dimensión pura (compleja) n-p.

Tal conjunto puede ser definido, inductivamente, como sigue:

$$V_e(\varphi_1) = \varphi_1^{-1}(0) .$$

Si se supone definido $V_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})$, $1 \leq s-1 \leq p-1$, se toma

$$V_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_s) = \tilde{V}_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}) \cap \varphi_s^{-1}(0) ,$$

donde $\tilde{V}_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})$ es la unión de las componentes de $V_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})$ sobre las que no se anula idénticamente la función φ_s.

Proposición [2] :

a) Si $\underset{\sim}{\delta}$ es una trayectoria admisible,

$V_e(\varphi) = \{ z \in W : \forall$ abierto $A : z \in A \subset W, \exists\ \delta_A \in (0,1)$:

$$0 < \delta < \delta_A \Rightarrow U \cap \varphi^{-1}(\dot{y}) \neq \emptyset,\ \forall\ \dot{y} \in |T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(i)| \ \},$$

donde

$$|T^p_{\underset{\sim}{\delta}}(i)| = \{ i \in C^p : |z_j| = \delta_j, 1 \leq j \leq p \}.$$

b) $V_e(\varphi) = \emptyset$ si $p > n$.

c) $V_e(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ si $\dim \varphi^{-1}(0) = n-p$.

d) Si U es un abierto de W,

$V_e(\varphi / U) = V_e(\varphi) \cap U$.

1.6 - El residuo logarítmico.

En el caso de intersección completa, es decir cuando $\dim_{\mathbb{C}} \varphi^{-1}(0) = n-p$, se puede tomar la imagen inversa por φ del ciclo puntual $[0]$ (siguiendo con la notación de 1.3, notación que adoptaremos en lo que sigue, $[0]$ es el punto $0 \in \mathbb{C}^p$ munido de su orientación canónica). En tal caso, se verifica (cf. [2])

$$R^p_Y\left[\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha\right] = (2\pi i)^p \int_{\varphi^{-1}[0]} \alpha, \quad \forall\ \alpha \in \mathcal{D}^{2(n-p)}(W),$$

donde $\dfrac{d\varphi}{\varphi} = \dfrac{d\varphi_1}{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \dfrac{d\varphi_p}{\varphi_p}$

Nota: Si bien los resultados expuestos hasta aquí valen aún cuando W es un espacio analítico complejo reducido [2], los hemos enunciado para el caso en que W es un abierto de $\mathbb{C}^n$ por ser éste el marco en que desarrollaremos el presente trabajo.

1.7 - Continuidad de la fibra integral.

Para φ como en 1.3, sea $X = \{x \in \mathbb{C}^p : \dim_{\mathbb{C}} \varphi^{-1}(x) \leq n-p\}$

La aplicación

$$I_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$I_\alpha(x) = \int_{\varphi^{-1}[x]} \alpha$$

es continua, $\forall \alpha \in \mathcal{D}^{2(n-p)}(W)$ (cf [7]).

En efecto, si $T: \mathcal{D}^{2n}(W) \longrightarrow \mathbb{C}$ es la corriente de integración definida por

$$T(\omega) = \int_{[W]} \omega ,$$

$I_\alpha(x)$ es entonces igual a $\langle T, \varphi, x \rangle (\alpha)$, "slicing" de T por φ en x [9].

Ahora bien. En $\mathcal{D}^{2(n-p)}(W)$ podemos tomar la norma = $\|\alpha\|$ = masa de α (cf. [3]). Si en su dual topológico $'\mathcal{D}^{2(n-p)}(W)$ tomamos la topología débil, la aplicación $\langle T, \varphi, \cdot \rangle : X \to {}'\mathcal{D}^{2(n-p)}(W)$ resulta continua como consecuencia del teorema 4-3 de [4] . Por tanto, para cada $\alpha \in \mathcal{D}^{2(n-p)}(W)$, $I_\alpha = \langle T, \varphi, \cdot \rangle (\alpha) : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua.

1.8 - Evaluadores generalizados de Speer.

Para cada entero $L > 0$, y $(\lambda_1, \ldots, \lambda_L) \in \mathbb{C}^L$, sea

$$J_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L) = \prod_{K \in \mathcal{K}} \left(\sum_{l \in K} (\lambda_l - 1) \right) ;$$

donde $\mathcal{K} = \{ K \subset \{1,\ldots,L\} \ , \ K \neq \emptyset \}$

Para cada $\varepsilon > 0$, sea

$$U_{L,\varepsilon} = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_L) : |\lambda_1 - 1| < \varepsilon, \ 1=1,\ldots,L\}$$

y, si $\underline{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_L)$,

$$\mathcal{A}_{L,\varepsilon} = \{ f(\underline{\lambda});\ f(\underline{\lambda}).J_L(\underline{\lambda}) \text{ es holomorfa en } U_{L,\varepsilon} \}$$

En $\mathcal{A}_{L,\varepsilon}$ se puede definir la familia de seminormas

$$\| f \|_m = \sup_{\underline{\lambda} \in U_{L,(1-1/m)\varepsilon}} | f(\underline{\lambda}).J_L(\underline{\lambda}) |$$

1.8.1 - Definición [10] :

Sea $\mathcal{A}_L = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{A}_{L,\varepsilon}$

Una familia de aplicaciones $\omega = \{\omega_L : \mathcal{A}_L \to \mathbb{C}$, L entero positivo$\}$ es un evaluador generalizado si para todo L se verifican las siguientes propiedades:

W1) ω_L es lineal.

W2) Si $f \in \mathcal{A}_L$ y es analítica en $(1,\ldots,1)$, entonces $\omega_L(f) = f(1,\ldots,1)$.

W3) $\forall \varepsilon > 0$, ω_L es continua en $\mathcal{A}_{L,\varepsilon}$.

W4) Si σ es una permutación $\{1,\ldots,L\}$, $f \in \mathcal{A}_L$ y $f_\sigma \in \mathcal{A}_L$ está definida por $f_\sigma(\lambda_1,\ldots,\lambda_L) = f(\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(L)})$, entonces $\omega_L(f) = \omega_L(f_\sigma)$.

W5) Si $f \in \mathcal{A}_L$ es independiente de $\lambda_{L'+1},\ldots,\lambda_L$ $(L'<L)$, entonces $\omega_L(f) = \omega_{L'}(f)$.

W6) Si $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_L$, f_1 independiente de $\lambda_1,\ldots,\lambda_{L'}$, f_2 independiente de $\lambda_{L'+1},\ldots,\lambda_L$, entonces

$$\omega(f_1 \cdot f_2) = \omega(f_1) \cdot \omega(f_2).$$

1.8.2 - Ejemplo [10]:

Si $f \in \alpha_{L,\varepsilon}$, sea

$$\omega_L(f) = \frac{1}{L!} \sum_{\sigma \in S_L} \frac{1}{(2\pi i)^L} \left\{ \frac{f(\lambda)}{(\lambda_1 - 1)\ldots(\lambda_L - 1)} d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_L, \right.$$
$$\left. |\lambda_i - 1| = R_{\sigma(i)} \right.$$

donde S_L es el conjunto de las permutaciones de $\{1,\ldots,L\}$ y los R_i son tales que $0 < R_1 < \ldots < R_L < \varepsilon$, $R_i > \sum_{j=1}^{i-1} R_j$.

Es sencillo ver que $\omega = \{\omega_L, L \text{ entero positivo}\}$ es un evaluador generalizado.

1.9 - Resultados principales.

Sean W y φ como en 1.3 y sea U un abierto relativamente compacto tal que $U \subset \bar{U} \subset W$. Probaremos en 2.19 el siguiente

1.9.1 - Teorema:

Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, si $\gamma : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ está definida por $\gamma(t) = (t^{n_1},\ldots,t^{n_p})$, con $n_j \in \mathbb{N}$, $\frac{n_i}{n_{i+1}} > q$, $i = 1,\ldots,p-1$, $n_p > q$; entonces

$$R^p_\gamma[\tilde{\omega}] = \lim_{t \to 0} \left\{ \int_{T^{p*}_{\gamma(t)}(\varphi^{-1}(0))} \tilde{\omega} \right., \quad \forall\, \tilde{\omega} \in \mathcal{D}^{n-p}_U(*Y)$$

1.9.2 - En 3.1, sin hacer ninguna hipótesis sobre $\dim_{\mathbb{C}} \varphi^{-1}(0)$, asociamos a φ un ciclo analítico $C_e(\varphi)$, el ciclo esencial de φ, que tiene las siguientes propiedades (demostradas en 3.2 y 3.12):

1) Si $\dim_{\mathbb{C}} \varphi^{-1}(0) = n-p$, entonces $C_e(\varphi) = \varphi^{-1}[0]$

2) El soporte de $C_e(\varphi)$ es $V_e(\varphi)$.

3) Los $n_1,\ldots,n_p$ de 2.19 (cf. 1.9.1) verifican además: si $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1,\ldots,\tilde{\gamma}_p) : (0,1) \longrightarrow \mathbb{C}^p$ es tal que

a) $|\tilde{\gamma}_j(t)| = t^{n_j}$, $\forall\, t \in (0,1)$, $j = 1, \ldots, p$;

b) $\tilde{\gamma}((0,1))$ es un conjunto semianalítico real en R^{2p},

entonces

$$\partial(\varphi/_U)^{-1}(\beta_t) = C_e(\varphi/_U) - (\varphi/_U)^{-1}[\tilde{\gamma}(t)],$$

donde β_t es el conjunto $\tilde{\gamma}((0,t))$ orientado de modo que

$$\partial\, \beta_t = [0] - \tilde{\gamma}(t)$$

1.9.3 - En 4.1, extendemos lo expuesto en 1.7 en el siguiente sentido:

Si $\alpha \in \mathcal{D}^{2(n-p)}(W)$, U es un abierto relativamente compacto tal que $\operatorname{sop} \alpha \subset U \subset \bar{U} \subset W$ y $\tilde{\gamma}$ es como en el parágrafo anterior, probamos que

$$\lim_{t \to 0} \int_{(\varphi/_U)^{-1}[\tilde{\gamma}(t)]} \alpha = \int_{C_e(\varphi)} \alpha \,.$$

1.9.4 - En 4.2, establecemos una fórmula, para el residuo logarítmico, que generaliza la de 1.6 en cuanto es válida aún para el caso en que φ no tenga intersección completa. Tal fórmula es

$$R^p_Y\left[\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha\right] = (2\pi i)^p \int_{C_e(\varphi)} \alpha \,, \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{D}^{2(n-p)}(W)$$

1.9.5 - En 4.3, extendemos el dominio de los evaluadores generalizados de 1.8 al conjunto de las funciones semimeromorfas en algún entorno de $(1,\ldots,1)$ en $\mathbb{C}^L$. (Una función se dice semimeromorfa si localmente se puede expresar como el cociente de una función C^∞ por una analítica). Utilizaremos las trayectorias de 1.2

Notación:

De aquí en adelante, utilizaremos la siguiente notación (además de la introducida en el capítulo I):

N designará el conjunto de los enteros no negativos.

Para $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ y $a=(a_1,\ldots,a_n)\in N^n$, escribiremos

$$\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_n),\ \text{con}\ \rho_i=|z_i|\ ,$$

$$z^a=\prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i}\ ,\quad \rho^a=\prod_{i=1}^{n}\rho_i^{a_i}\ .$$

Con $\wedge(p,n)$ denotaremos a la familia de los conjuntos $I=\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{1,\ldots,n\}$, tales que $1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n$.

Para $I\in\wedge(p,n)$, escribiremos

$$z_I=\prod_{i\in I} z_i\ ,\quad z_I^a=\prod_{i\in I} z_i^{a_i}\ ,\quad \rho_I^a=\prod_{i\in I}\rho_i^{a_i}\ .$$

Si $J=\{j_1,\ldots,j_{n-p}\}=\{1,\ldots,n\}-I$, $1\leq j_1<\ldots<j_{n-p}\leq n$,

$$z(I)=(z_{j_1},\ldots,z_{j_{n-p}})\ ,\quad z(I)^a=\prod_{j\in J} z_j^{a_j}\ .$$

$M_{p,n}(N)$ será el conjunto de las matrices de p filas y n columnas con elementos N.

Si $\alpha\in M_{p.n}(N)$, entonces:

α_{ij} será el elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna de α;

$\alpha_i = (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in})$ la i-ésima fila de α ;

α_I denotará a la matriz cuadrada $(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j\in I}}$.

Si $\alpha \in M_{p+1,n}(N)$, $\alpha(p+1)$ será la p x n matriz obtenida de α al suprimirle su última fila y escribiremos $\alpha_I(p+1) = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j\in I}}$.

Para una matriz cuadrada α , escribiremos:

$\Delta(\alpha)$= determinante de α ;

$\Delta_{ij}(\alpha)$= menor complementario de α_{ij};

$\tilde{\Delta}_{ij}(\alpha) = sg\ \Delta(\alpha)\ \Delta_{ij}(\alpha)$.

Utilizaremos, además, la notación:

$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}_I = d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}$,

$d\omega_I = dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{i_p}$.

Si $A \subset \{1,\ldots,n\}$, $|A|$ designará su cardinal.

Una forma $\omega \in \mathcal{E}^{2n-p}(\mathbb{C}^n)$, $0 \leq p \leq n$, admite una representación única, <u>la expresión canónica de ω</u>,

$$\omega = \sum_{A,B,M} f_{ABM}(z,\bar{z})\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M ,$$

con A, B, M subconjuntos ordenados de $\{1,\ldots,n\}$, disjuntos dos a dos y tales que $|A| + |B| + |M| = 2n-p$.

sop ω será el soporte de ω.

Una matriz $\alpha \in M_{p,p}(N)$, con $\Delta(\alpha)\neq 0$, se dice <u>normal</u> , si puede ser transformada en triangular superior mediante una permutación de sus columnas.

$\alpha \in M_{p,p+1}(N)$ es <u>normal</u> si $\alpha_{p+1}=0$ y $\alpha(p+1)$ es normal.

Sean $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_{p-1}) \in R^{p-1}_{>}$, $c>0$, $\gamma' = (\gamma_1,\ldots,\gamma_{p-1},c)$.

Para φ como en 1.3, escribiremos:

$$|D^p_{\gamma,c}(\varphi)| = |D^p_{\gamma'}(\varphi)|,$$

$$D^p_{\gamma,c}(\varphi) = D^p_{\gamma'}(\varphi) \ . \ (\text{cf. } 1.3)$$

Además, $|T^p_\gamma(i)| = \{x \in \mathbb{C}^p : |x_j| = \gamma_j, j=1,\ldots,p\}$, para γ perteneciente a $R^p_>$;

$$T^p_\gamma(i) = |T^p_\gamma(i)| \quad \text{orientado con el producto}$$

de las orientaciones canónicas de $|x_j| = \gamma_j$.

En general, si β es una cadena semianalítica, designaremos con $|\beta|$ a su conjunto soporte.

Dada una función f, designaremos con V(f) al conjunto donde $f \equiv 0$, es decir, V(f)= variedad de f.

Capítulo II - Trayectorias admitidas

Supondremos, en todo este capítulo, que hemos fijado un abierto conexo W en $\mathbb{C}^n$ y una aplicación analítica $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_{p+1}) : W \to \mathbb{C}^{p+1}$ tal que ninguna de las φ_j se anula idénticamente sobre W.

Nuestro propósito es demostrar que, si U es un abierto relativamente compacto contenido en W, es posible obtener los operadores R y RP de 1.4 reemplazando las trayectorias admisibles de 1.2 por trayectorias semianalíticas.

2.1 - Lema:

Sea U un abierto relativamente compacto tal que $U \subset \overline{U} \subset W$.

Existen: $V_1,\ldots,V_r$; $D_1,\ldots,D_r$ abiertos contenidos en W;

$\pi_k : W_k \to D_k$ resolución de singularidades del producto $\varphi_1 \ldots \varphi_{p+1}$ sobre D_k, para $k=1,\ldots,r$;

$U_1^k,\ldots,U_{s(k)}^k$ entornos coordenados de W_k

que verifican:

$$\text{i) } U = \bigcup_{k=1}^{r} V_k \ ,$$

$$\text{ii) } \overline{V_k} \subset D_k \ , \quad k=1,\ldots,r \ ,$$

$$\text{iii) } \pi_k^{-1}(\overline{V_k}) = \bigcup_{i\equiv 1}^{s(k)} U_1^k \ ; \quad k=1,\ldots,r$$

y de modo que, sobre cada U_1^k se puede hallar un sistema de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ tal que :

a) Si $x=(x_1,\ldots,x_n) \in U_1^k$, entonces $|x_j|<1$, para $j=1,\ldots,n$;

b) $\varphi_i \circ \pi_k / U_1^k = h_i \, x^{\alpha_i}$, con h_i holomorfa so

bre U_1^k , $\alpha_i = (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}) \in N^n$; $i=1,\ldots,p+1$;

c) Existen $m(k,1)$, $M(k,1) \in R$: $0 < m(k,1) \leq \sup_{U_1^k}(h_i) \leq M(k,1)$, para $i=1,\ldots,p+1$;

d) Si $\operatorname{rang}(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}} = p$, entonces $h_1 \equiv \ldots \equiv h_p \equiv 1$.

Demostración:

Para todo $z \in W$, sea D_z un entorno de z sobre el cuál existe una resolución del producto $\varphi_1 \ldots \varphi_{p+1}$ [6].

$\bar{U}$ compacto $\Rightarrow \exists\ z_1,\ldots,z_r \in W$: $\bar{U} \subset \bigcup_{k=1}^{r} D_k$, donde $D_k = D_{z_k}$.

En lo que resta de esta demostración, consideraremos $k=1,\ldots,r$; $i=1,\ldots,p+1$; $j=1,\ldots,n$.

Sean $V_1', \ldots, V_r'$ abiertos relativamente compactos tales que $\bar{V}_k' \subset D_k$, $U \subset \bigcup V_k'$. Tomemos $V_k = V_k' \cap U$. Resulta: $\bar{V}_k \subset D_k$, $U = \bigcup V_k$.

Sea $\pi_k : W_k \longrightarrow D_k$ una resolución del producto de las φ_i.

$\forall\, y \in W_k$, $\exists\ U_i^k$, entorno de y, y un sistema de coordenadas sobre U_y^k, $(x_1,\ldots,x_n)$, que verifica b). Achicando eventualmente el entorno U_y^k, el sistema $(x_1,\ldots,x_n)$ verifica también a), c) y d). (Es trivial lo referente a a) y c). Para una demostración de b) ver [2] lema 2-15).

Dado que π_k es propia, $\pi_k^{-1}(\bar{V}_k)$ es compacto y, en consecuencia, $\exists\ y_1,\ldots,y_{s(k)} \in \pi_k^{-1}(\bar{V}_k)$ tales que

$$\pi_k^{-1}(\bar{V}_k) \subset \bigcup_{l=1}^{s(k)} U_{y_l}^k .$$

Tomando $U_1^k = U_{y_1}^k \cap \pi_k^{-1}(V_k)$ obtenemos el lema.

Nota: Puesto que $\bar{U}_1^k \subset \pi_k^{-1}(\bar{V}_k)$, los U_1^k son relativamente compactos.

2.2 - Definiciones:

Una colección de conjuntos $\mathcal{F} = \{U_l^k\}_{\substack{k=1,\ldots,r \\ l=1,\ldots,s(k)}}$ en las condiciones del lema anterior será llamada familia finita asociada a φ sobre el abierto U.

A la matriz $\alpha=(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p+1 \\ j=1,\ldots,n}}$, con α_{ij} como en 2.1b), la llamaremos matriz de exponentes asociada a U_l^k.

Para cada familia finita $\mathcal{F}$ definimos el conjunto:

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) = \{ \alpha : \alpha \text{ es la matriz de exponentes asociada a } U_l^k,\ U_l^k \in \mathcal{F} \}.$$

Diremos que $(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p$ verifica la propiedad H si $\exists\ j_0$, $1 \leq j_0 \leq p$:

1) $x_j = 0$ si $1 \leq j < j_0$

2) $x_{j_0} > 0$.

A continuación, reescribiremos convenientemente un resultado de Coleff-Herrera. (Para su demostración, ver lema 2-5 de [2]). $\mathcal{F}$ denotará una familia finita asociada a φ sobre U.

2.3 - Lema:

a) Sea $G_1(\mathcal{F}) = \bigcup_{j=1}^{p} G_1^j(\mathcal{F})$, con

$G_1^j(\mathcal{F}) = \{ (x_1,\ldots,x_p) / x_i = \tilde{\Delta}_{ij}(\alpha_A(p+1)), \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F}), A \in \Lambda(p,n),$ $\alpha_A(p+1)$ normal $\}$.

Si $(x_1,\ldots,x_p) \in G_1(\mathcal{F})$, entonces, verifica la propiedad H.

b) Sean $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $A \in \Lambda(p,n)$ tales que rang $\alpha_A(p+1) = p$.

Si $\alpha_A(p+1)$ no es normal, $\exists$ $j(\alpha,A)$, $1 \leq j(\alpha,A) \leq p$:

$(-\tilde{\Delta}_{1j(\alpha,A)}(\alpha_A(p+1)), \ldots, -\tilde{\Delta}_{pj(\alpha,A)}(\alpha_A(p+1)))$ verifica la propiedad H.

Con esta notación, definamos el conjunto

$$G_2(\mathcal{F})=\Big\{(x_1,\dots,x_p):\ x_i=-\widetilde{\Delta}_{ij(\alpha,A)}(\alpha_A(p+1));\alpha\in\mathcal{M}(\mathcal{F}),\ A\in\wedge(p,n),$$

$$\operatorname{rang}\alpha_A(p+1)=p,\alpha_A(p+1)\text{ no normal}\Big\}.$$

2.4 - Lema:

Sean $\alpha\in\mathcal{M}(\mathcal{F})$, $A,B\subset\{1,\dots,n\}$, $|A\cup B|=p$, $A\cap B=\emptyset$, tales que $\alpha_{A\cup B}(p+1)$ es normal.

Para cada $I\subsetneq A\cup B$, existe un conjunto finito S, no vacio, de p-uplas reales que verifican la propiedad H, tal que :

$\forall$ f medible y acotada sobre $\mathbb{C}^n$, $\forall\ \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_p)\in(0,1)^p$, y $\forall\ c\in(0,1)$, se verifica

$$J_{\gamma c}=\left|\int_{D^{p+1}_{\gamma,c}(\varphi_0\pi_k/U_1^k)} z_I^{-1}\ f(z,\bar z)\ dz_A\wedge d\bar z_B\wedge d\omega_M\right|\leq d(f)\sum_{(x_1,\dots,x_p)\in S}\gamma_1^{x_1}\cdot\gamma_p^{x_p},$$

toda vez que $\dim D^{p+1}_{\gamma,c}(\varphi_0\pi_k/U_1^k)\leq 2n-p$ y $M\cap(A\cup B)=\emptyset$, con d(f) una constante que depende sólo de f.(Hemos identificado a U_1^k, via su sistema de coordenadas, con un entorno del origen en $\mathbb{C}^n$, con coordenadas $(z_1,\dots,z_n)$).

Demostración:

Podemos suponer $A\cup B=\{1,\dots,p\}$, $\alpha_{A\cup B}(p+1)$ triangular superior y, por tanto, $\Delta=\Delta(\alpha_{A\cup B}(p+1))>0$.

Sea $u\in A\cup B-I$. Escribamos

$$\sigma_j=\alpha_{uj}\,\Delta_{uu}(\alpha_{A\cup B}(p+1))+\dots+\alpha_{pj}\,\Delta_{pu}(\alpha_{A\cup B}(p+1)),\ p+1\leq j\leq n;$$

llamemos σ_{r_i}, $i=1,\dots,s$, a los $\sigma_j\geq 0$ y σ_{q_i}, $i=1,\dots,n-p-s$, a los $\sigma_j<0$.

Si $\gamma'=\gamma_u^{\Delta_{uu}(\alpha_{A\cup B}(p+1))}\dots\gamma_p^{\Delta_{pu}(\alpha_{A\cup B}(p+1))}$

y

$$\gamma'' = \gamma_{q_1}^{-\sigma_{q_1}} \dots \gamma_{q_{n-p-s}}^{-\sigma_{q_{n-p-s}}} ,$$

se tiene (cf demostración del lema 2-10 de [2]), salvo una constante que depende de f,

$$J_{\gamma,c} \leq \gamma'^{\frac{1}{\Delta}} \int_{\widetilde{D}^{\sigma}_{\gamma',\gamma''}} \prod_{i=1}^{s} \rho_{r_i}^{1-\frac{\sigma_i}{\Delta}} \, d\rho_{r_1} \dots d\rho_{r_s} , \qquad (1)$$

donde $\widetilde{D}^{\sigma}_{\gamma',\gamma''} = \left\{ (\rho_{r_1}, \dots, \rho_{r_s}) \in R^s : 0 < \rho_{r_i} < 1, \prod_{i=1}^{s} \rho_{r_i}^{\sigma_{r_i}} > \gamma' \gamma'' \right\}$.

Probaremos, por inducción sobre m, que para toda expresión de la forma

$$J = \gamma'^{a} \gamma''^{a-1/\Delta} \int_{\widetilde{D}^{\sigma}_{\gamma'\gamma''}} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{1-a\sigma_i} \, d\rho_1 \dots d\rho_m ,$$

con $a > 0$, $\sigma_i \geq 0$, $1 \leq m \leq s$, existe un conjunto S de m-uplas en las condiciones enunciadas.

Para m=1:

$$J = \gamma'^{a} \gamma''^{a-1/\Delta} \int_{\gamma'\gamma'' < \rho^{\sigma_1} < 1} \rho^{1-a\sigma_1} \, d\rho .$$

Si $1-a\sigma_1 \neq -1$,

$$J = \gamma'^{a} \gamma''^{a-1/\Delta} \left(1-(\gamma'\gamma'')^{(1/\sigma_1)(2-a\sigma_1)}\right) =$$

$$= \gamma'^{a} \gamma''^{a-1/\Delta} - \gamma'^{2/\sigma_1} \gamma''^{2/\sigma_1-1/\Delta} .$$

Si $1-a\sigma_1 = -1$, $\sigma_1 = 2/a$. Sobre el dominio de integración, $\rho^{1-a\sigma_1} = \rho^{-1} < (\gamma'\gamma'')^{-a/2}$ y, en consecuencia

$$J \leq \gamma'^{a-a/2} \gamma''^{a-a/2-1/\Delta} .$$

En ambos casos se verifica la tesis, teniendo en cuenta que el

exponente de γ_u en γ' es positivo.

Supongamos válido el resultado para m-1, $1 < m \leq p$, y sea

$$J = \gamma'^{a}\,\gamma''^{a-1/\Delta} \int_{D^{\sigma}_{\gamma'\gamma''}} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{1-a\sigma_i}\, d\rho_1 \ldots d\rho_m \ .$$

Si $1-a\sigma_m \neq -1$, integrando respecto de ρ_m obtenemos:

$$J = \gamma'^{a}\,\gamma''^{a-1/\Delta} \int_{D^{\sigma}_{\gamma'\gamma''}} \prod_{i=1}^{m-1} \rho_i^{1-a\sigma_i}\, d\rho_1 \ldots d\rho_{m-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\gamma'^{2/\sigma_m} - \gamma''^{2/\sigma_m} \right]^{-1/\Delta} \int_{D^{\sigma}_{\gamma'\gamma''}} \prod_{i=1}^{m-1} \rho_i^{1-2\sigma_i/\sigma_m}\, d\rho_1 \ldots d\rho_{m-1} \cdot$$

Si $1-a\sigma_m = -1$, sobre el dominio de integración se verifica que

$$\rho_m^{1-a\sigma_m} = \rho_m^{-1} \leq (\gamma'\gamma'')^{-a/2} \prod_{i=1}^{m-1} \rho_i^{a\sigma_i/2}$$

y por tanto,

$$J \leq \gamma'^{a/2}\,\gamma''^{a/2-1/\Delta} \int_{D^{\sigma}_{\gamma'\gamma''}} \prod_{i=1}^{m-1} \rho_i^{1-a\sigma_i/2}\, d\rho_1 \ldots d\rho_{m-1} \ .$$

En ambos casos, se deduce el resultado de la hipótesis inductiva. (Podemos aplicarla dado que $2/\sigma_m > 0$).

Tomando $a = 1/\Delta$, el lema se deduce inmediatamente de (1).

Para cada cuaterna (α, A, B, I), con $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, que verifique las hipótesis del lema anterior, elegimos un conjunto S en las condiciones de dicho lema, lo denotamos $S^{\alpha}_{A\cup B}(I)$ y definimos

$$G_3(\mathcal{F}) = \bigcup (S^{\alpha}_{A\cup B}(I),\ \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F}), A\cup B \in \Lambda(p,n), I \neq A\cup B,$$
$$\alpha_{A\cup B}(p+1) \text{ normal }).$$

2.5 - Lema:

Sea $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Si $\operatorname{rang} \alpha(p+1) < p$, existe $(x_1,\dots,x_p) \in R^p$ que verifica la propiedad H y tal que

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i = 0$$

Demostración:

Inmediata.

Para cada matriz $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ tal que $\operatorname{rang} \alpha(p+1) < p$, elegimos una p-upla $(x_1(\alpha),\dots,x_p(\alpha))$ en las condiciones del lema anterior y definimos

$$G_4(\mathcal{F}) = \left\{ (x_1(\alpha),\dots,x_p(\alpha)) : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F}),\ \operatorname{rang} \alpha(p+1) < p \right\}.$$

2.6 - Lema:

Para cada $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, sea

$$\mathcal{N}(\alpha) = \left\{ A/A \subset \{1,\dots,n\};\ \text{si } B \subset A \text{ y } |B| = p, \alpha_B \text{ no normal} \right\}.$$

Si $A \in \mathcal{N}(\alpha)$, existe r, $1 \leq r \leq p$, y existen $k_{r+1},\dots,k_{p+1} \in N$ tales que $\alpha_{rj} \leq k_{r+1}\alpha_{r+1\,j} + \dots + k_{p+1}\alpha_{p+1\,j}$, para todo $j \in A$.

Demostración:

Sea $A \in \mathcal{N}(\alpha)$, $|A| \geq p$. Para $s=1,\dots,p$, consideremos

el conjunto $I_s = \{ j \in A : \alpha_{sj} > 0, \alpha_{s+1\,j} = \ldots = \alpha_{p+1\,j} = 0 \}$.
Dado que $A \in \mathcal{N}^p(\alpha)$, $\exists$ r, $1 \leq r \leq p$: $I_r = \emptyset$ y en consecuencia podemos hallar $k_{r+1}, \ldots, k_{p+1}$ en las condiciones requeridas.(cf. la demostración del lema 2-2-3 de [2]).

Si $A \subset \{1, \ldots, n\}$ y $|A| = q < p$, necesariamente $A \in \mathcal{N}^p(\alpha)$. En tal caso, sea $A' = \{1, \ldots, q+1\}$. Si $(\alpha_{ij})_{\substack{i \in A' \\ j \in A}}$ no es normal, la demostración es análoga a la del caso anterior. Si es normal, $\alpha_{q+1\,j} = 0$, para todo $j \in A$; esto implica que podemos tomar $r = q+1$, $k_{r+1} = \ldots = k_{p+1} = 1$.

Para cada par (α, A), con $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ y $A \in \mathcal{N}^p(\alpha)$, hacemos una elección de $r, k_{r+1}, \ldots, k_{p+1}$ en las condiciones del lema anterior, los denotamos $r(\alpha, A)$, $k_j(\alpha, A)$, $j = r+1, \ldots, p+1$, escribimos

$$x_i(\alpha, A) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i < r(\alpha, A) \\ -1 & \text{si } i = r(\alpha, A) \\ -k_i & \text{si } r(\alpha, A) < i \leq p \end{cases}$$

y definimos el conjunto

$$G_5(\mathcal{F}) = \{ (x_1(\alpha, A), \ldots, x_p(\alpha, A)) : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F}),\ A \in \mathcal{N}^p(\alpha) \}.$$

2.7 - Sea $n(\mathcal{F})$ el máximo del siguiente subconjunto finito de N:

$\{ k_{p+1}(\alpha, A) : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F}), A \in \mathcal{N}^p(\alpha) \}$ ($k_{p+1}(\alpha, A)$ como en 2.6).

Sea $G(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{5} G_i(\mathcal{F})$, con $G_i(\mathcal{F})$ según 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6.

Lema:

$\exists\, q(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}$ tal que, si $n_1, \ldots, n_p \in N$ y verifican

$n_i/n_{i+1} > q(\mathcal{F})$, $n_p > q(\mathcal{F})$, entonces, $\forall$ $(x_1,\ldots,x_p) \in G(\mathcal{F})$,

$$\sum_{i=1}^{p} n_i x_i > n(\mathcal{F}) \quad (\geq 0).$$

Demostración:

Sea $G^i(\mathcal{F}) = \{ (x_1,\ldots,x_p) \in G(\mathcal{F}) : x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0, x_i > 0 \}$.

(Resulta $G(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{p} G^i(\mathcal{F})$). Para $j=2,\ldots,p$, sea

$$q_j(\mathcal{F}) = \sup \left\{ \frac{|x_j|}{x_i} : (x_1,\ldots,x_p) \in G^i(\mathcal{F}), i < j \right\},$$

y sea

$$q'(\mathcal{F}) = \sup \left\{ \frac{n(\mathcal{F})}{x_i} : (x_1,\ldots,x_p) \in G^i(\mathcal{F}), i=1,\ldots,p \right\}.$$

Notemos que, por ser $G(\mathcal{F})$ finito, tanto $q_j(\mathcal{F})$ como $q'(\mathcal{F})$ son números finitos.

Tomemos $q(\mathcal{F}) \in N$ de modo que

$$q(\mathcal{F}) \geq \text{máx} \left(\sum_{j=2}^{p} q_j(\mathcal{F}) + 1,\ q'(\mathcal{F}) \right).$$

Veremos que así elegido $q(\mathcal{F})$ verifica la tesis. Sean, pues, $n_1,\ldots,n_p$ en las condiciones del enunciado y $(x_1,\ldots,x_p) \in G(\mathcal{F})$. Para i tal que $(x_1,\ldots,x_p) \in G^i(\mathcal{F})$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{n_{i+1}|x_{i+1}|+\ldots+n_p|x_p|+|n(\mathcal{F})|}{x_i} &\leq n_{i+1}\left(\sum_{j=i+1}^{p} q_j(\mathcal{F}) + q'(\mathcal{F})\right. \\ &\leq n_{i+1}\left(\sum_{j=2}^{p} q_j(\mathcal{F})\right) + n_p \\ &\leq n_{i+1}\left(\sum_{j=2}^{p} q_j(\mathcal{F})+1\right) \leq n_{i+1}\, q < n_i \,. \end{aligned}$$

Por tanto, $n_i\, x_i > \sum_{j=i+1}^{p} n_j |x_j| + n(\mathcal{F})$, es decir,

$$n_i\, x_i - \sum_{j=i+1}^{p} n_j\, |x_j| > n(\mathcal{F}) \ .$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{p} n_j x_j = \sum_{j=i}^{p} n_j x_j > n_i x_i - \sum_{j=i+1}^{p} n_j\, x_j > n(\mathcal{F}) \ .$$

2.8 - Definición:

Una trayectoria admitida por φ sobre U, inducida por la familia $\mathcal{F}$, es una aplicación

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p) : (0;1) \longrightarrow R^p$$

definida por

$$\gamma(t) = (t^{n_1}, \ldots, t^{n_p})$$

con $n_1, \ldots . n_p$ como en el lema anterior.

En los que resta del capítulo, supondremos fijada una trayectoria γ admitida por φ sobre U, inducida por la familia $\mathcal{F}$. Por otra parte, como hemos hecho en 2.4, identificaremos a cada $U_1^k \in \mathcal{F}$, via su sistema de coordenadas, con un entorno del origen en $\mathbb{C}^n$, de coordenadas $z_1, \ldots, z_n$.

Así mismo, fijado un $U_1^k \in \mathcal{F}$, α designará la matriz de exponentes asociada a él, y φ^* denotará la función $\varphi \circ \pi_k / U_1^k$.

2.9 - Lema:

Existe $t_0 \in (0,1)$ tal que, para todo $c > 0$ y para todo $U_1^k \in \mathcal{F}$ con $\operatorname{rang} \alpha(p+1) < p$,

$$0 < t < t_0 \Rightarrow |D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)| = \emptyset .$$

Demostración:

$$\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{F}),\ \operatorname{rang} \alpha(p+1) < p \Rightarrow$$

$$\exists\ (x_1,\ldots,x_p) \in \mathcal{G}_4(\mathcal{F}) : \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i = 0 \quad \text{(cf. 2.5)} .$$

$$z \in |D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \Rightarrow |h_i z^{\alpha_i} = t^{n_i},\ 1 \leq i \leq p \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{p} |h_i z^{\alpha_i}|^{x_i} = \prod_{i=1}^{p} |h_i|^{x_i} |z|^{\sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i} = \prod_{i=1}^{p} |h_i|^{x_i} = t^{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i} .$$

$$(x_1,\ldots,x_p) \in \mathcal{G}(\mathcal{F}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} n_i x_i > 0 \text{ , de donde, } \forall\ \varepsilon > 0,$$

$$\exists\ t(\varepsilon) \in (0,1) : 0 < t < t(\varepsilon) \Rightarrow t^{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i} < \varepsilon .$$

Sea $m_i'(k,1) = \min(m(k,1)^{x_i}, M(k,1)^{x_i})$. Como $\prod_{i=1}^{p} |h_i|^{x_i} \geq \prod_{i=1}^{p} m_i'(k,1)$ sobre U_1^k, tomando

$$\varepsilon = \min \left\{ \prod_{i=1}^{p} m_i'(k,1) ; k=1,\ldots,r; 1=1,\ldots,s(k) \right\},$$

se obtiene el lema haciendo $t_0 = t(\varepsilon)$.

2.10 - Lema:

a) $\forall\ c > 0$, $\exists\ t_0 \in (0,1)$: si $U_1^k \in \mathcal{F}$ y $\forall\ A \in \Lambda(p,n)\ \alpha_A$ no es normal, entonces

$$0 < t \leq t_0 \Rightarrow |D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)| = \emptyset .$$

b) $\exists\ t_1 \in (0,1) : 0 < t < t_1 \Rightarrow \left| D^{p+1}_{\gamma(t),t}(\varphi^*) \right. = \emptyset$, para U_1^k como en a).

Demostración:

$\forall\ A \in \wedge(p,n)\ \alpha_A$ no normal $\Rightarrow \{1,\ldots,n\} \in \mathcal{N}(\alpha)$ (cf. 2.6) $\Rightarrow \exists\ r, k_{r+1}, \ldots, k_{p+1} \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq p$, tales que $\alpha_r \geqslant k_{r+1}\alpha_{r+1} + \ldots + k_{p+1}\alpha_{p+1}$, y $\exists\ (x_1,\ldots,x_p) \in \sigma_5(\mathcal{F})$ (cf. 2.6):

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i < r \\ 1 & \text{si } i = r \\ -k_i & \text{si } r < i \leq p \end{cases}.$$

Sea $E = \left\{ m(k,1), M(k,1) \ / \ k,1 : U_1^k \in \mathcal{F},\ \{1,\ldots,n\} \in \mathcal{N}(\alpha) \right\}$.

Denotemos $m = \text{mín } E$, $M = \text{máx } E$.

$$z \in \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| \Rightarrow \begin{cases} |h_i z_i^{\alpha_i}| = t^{n_i}, & 1 \leq i \leq p \\ |h_{p+1} z^{\alpha_{p+1}}| > c \end{cases} \Rightarrow$$

$$t^{n_r} = |h_r z^{\alpha_r}| \geqslant m(k,1) \left| z^{k_{r+1}\alpha_{r+1} + \ldots + k_{p+1}\alpha_{p+1}} \right| \geqslant$$

$$\frac{m}{M^{k_{r+1}+\ldots+k_{p+1}}} \left| h_{r+1}^{k_{r+1}} \ldots h_{p+1}^{k_{p+1}} \ z^{k_{r+1}\alpha_{r+1} + \ldots + k_{p+1}\alpha_{p+1}} \right| \geqslant$$

$$\frac{m}{M^{k_{r+1}+\ldots+k_{p+1}}} \ t^{n_{r+1}k_{r+1} + \ldots + n_p k_p} \ c^{k_{p+1}}$$

Por tanto, $t^{n'} \geqslant \dfrac{m}{M^{k_{r+1}+\ldots+k_{p+1}}} \ c^{k_{p+1}} \geqslant c'$, donde

$$c' = \frac{m}{M^{k_{r+1}+\ldots+k_{p+1}}} \ \text{mín} \left\{ c^{k_{p+1}(\alpha, \{1,\ldots,n\})} : \alpha : \forall A \in \wedge(p,n),\ \alpha_A \text{ no es normal} \right\}$$

y, $n' = n_r - n_{r+1}k_{r+1} - \ldots - n_p k_p$.

Como $n' > 0$, $\exists\ t_0 \in (0,1) : 0 < t < t_0 \Rightarrow t^{n'} < c'$.

Tal t_0 satisface lo requerido en a).

Razonando análogamente, llegamos a que

$$z \in \left| D^{p+1}_{\gamma(t),t}(\varphi^*) \right| \Rightarrow t^{n'-k_{p+1}} \geq \frac{m}{M^{k_{r+1}+\ldots+k_{p+1}}} .$$

Puesto que $n' > n(\mathcal{F}) \geq k_{p+1}$ (cf. 2.7), obtenemos b) de la desigualdad anterior.

2.11 - Lema:

$$\exists\, t_0 \in (0,1) \text{ tal que, } \forall\ U_1^k \in \mathcal{F},$$

a) $0 < t < t_0 \Rightarrow \dim \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| \leq 2n-p$, $\forall\ c > 0$;

b) $0 < t < t_0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} (\varphi_1,\ldots,\varphi_p)^{-1}(x) \leq n-p$, $\forall\ x \in \left| T^p_{\gamma(t)}(i) \right|$.

(Es decir $\forall\ x = (x_1,\ldots,x_p)$: $|x_j| = \gamma_j(t)$):

Demostración:

Sea t_0 como en el lema 2.9, esto es, tal que

$$\operatorname{rang} \alpha(p+1) < p \Rightarrow \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| = \emptyset \text{ , para } 0 < t < t_0.$$

Si $\operatorname{rang} \alpha(p+1) = p$, entonces

$$\left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| = \left\{ z \in U_1^k : |z^{\alpha_i}| = t^{n_i},\ 1 \leq i \leq p, |h_{p+1} z^{\alpha_{p+1}}| > c \right\}.$$

Es claro que en ambos casos, $\dim \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| \leq 2n-p$.

De igual modo, obtenemos b).

2.12 - Lema:

Sea $U_1^k \in \mathcal{F}$, $\operatorname{rang} \alpha(p+1) = p$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que

$$V(z^\beta) \subset \bigcup_{i=1}^{p+1} V(\varphi_i^*),$$

Si $h\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M \in \mathcal{E}^{2n-p}(U_1^k)$, $c; t \in (0,1)$;

$\dim \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| \leq 2n-p$; entonces

$$\int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} z^{-\beta}\ h\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M = 0 ,$$

toda vez que en la expresión canónica se tenga $|M| > n-p$, ó $|M| = n-p$ y $\Delta(\alpha_{A\cup B}(p+1)) = 0$.

Demostración:

Ver [2], lema 2-7.

2.13 - En lo que sigue, convendremos en que, dado $U_1^k \in \mathcal{F}$, cuando escribamos

$$\int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} z^{-}\ h\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M$$

supondremos:

a) $h\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M \in \mathcal{E}^{2n-p}(U_1^k)$ aparece en su forma canónica, $|M| = n-p$ (y, por tanto, $|A\cup B| = p$).

b) $\operatorname{rang} \alpha_{A\cup B}(p+1) = p$

c) $\beta \in N^n$: $V(z^\beta) \subset \bigcup_{i=1}^{p+1} V(\varphi_i^*)$

d) $0 < c < 1$, $0 < t < t_0$, con t_0 como en el lema 2.11.

Lema:

Sea f una función medible y acotada sobre U_1^k, con $U_1^k \in \mathcal{F}$.
$\forall\, I, A, B$: $I \nsubseteq A\cup B \subset \{1,\dots,n\}$, $\forall\, c \in (0,1)$,

$$\lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} z_I^{-1}\ f(z,\bar{z})\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M = 0$$

Demostración:

a) $\alpha_{A\cup B}(p+1)$ es normal.

Según 2.4, si llamamos J_t a la integral del enunciado,

$$|J_t| \leq d(f) \sum_{(x_1,\ldots,x_p)\in S^{\alpha}_{A\cup B}(I)} \gamma_1(t)^{x_1}\ldots\gamma_p(t)^{x_p} =$$

$$d(f) \sum_{(x_1,\ldots,x_p)\in S^{\alpha}_{A\cup B}(I)} t^{n_1x_1+\ldots+n_px_p} ,$$

donde d(f) es una constante que depende de f y $S_{A\cup B}(I) \subset G_3(\mathcal{F})$.

Sea $\epsilon > 0$, $(x_1,\ldots,x_p)\in G_3(\mathcal{F}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} n_i x_i > 0$. Por ser $S^{\alpha}_{A\cup B}(I)$ finito, $\exists\ t_0\in(0,1)$: $0<t<t_0$ =>

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_p)\in S^{\alpha}_{A\cup B}(I)} t^{n_1x_1+\ldots+n_px_p} < \epsilon/d(f).$$

En consecuencia, $\lim_{t\to 0} J_t = 0$.

b) $\alpha_{A\cup B}(p+1)$ no es normal.

Supongamos $A\cup B = \{1,\ldots,p\}$.

$\exists\ j_o\in\{1,\ldots,p\}$, $(x_1,\ldots,x_p)\in G_2(\mathcal{F})$ tales que $x_i = -\tilde{\Delta}_{ij_o}(\alpha_{A\cup B}(p+1))$ (cf. 2.3).

$z\in |D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)| \Rightarrow \rho^{\alpha_i} = t^{n_i}$, $i=1,\ldots,p$. Resolviendo el sistema, obtenemos

$$1 > \rho_{j_o} = t^{n'}/\rho(A\cup B)^{\lambda} \qquad (1)$$

donde $n' = -\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = -\sum_{i=1}^{p} x_i\alpha_i$.

Pueden darse dos casos:

b_1) $\forall\ r\in\{p+1,\ldots,n\}$, $\lambda_r \geq 0 \Rightarrow \rho(A\cup B)^{\lambda} < 1$, pues $\rho_j < 1$ para $j=1,\ldots,n \Rightarrow t^{n'} < 1$. Pero $n' < 0$, dado que $(x_1,\ldots,x_p)$ pertenece a $G(\mathcal{F})$, así que

$\exists\ t_0\in(0,1)$: $0<t<t_0 \Rightarrow t^{n'} > 1$.

De (1) se deduce que $|D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)| = \emptyset$ si $0<t<t_0$ y, por tanto, $J_t = 0$ para tales t.

$b_2)$ $\exists\ r \in \{p+1,\dots,n\} : \lambda_r < 0.$

Sean $r_1,\dots,r_s$ tales índices.

Si $V'(t)=\left\{(\rho_{p+1},\dots,\rho_n) \in (0,1)^{n-p} ; \prod_{i=1}^{} \rho_{r_i}^{\lambda_{r_i}} > t^{n'}\right\}$,

$$|J_t| \leq \int_{V'(t)} d\rho_{p+1}\dots d\rho_n \text{ , salvo una constante} \qquad (2)$$

(cf. la demostración del lema 2-10 de [7]).

Ahora bién, $0 < t_1 < t_2 < 1 \Rightarrow V'(t_1) \subset V'(t_2)$, pues n' es negativo, y por la misma razón, $\bigcap_{t\in(0,1)} V'(t) = \emptyset$ (3).

Por otra parte , $V'(t) \subset (0,1)^{n-p}$, $\forall\ t \in (0,1)$, lo que implica que, si μ es la medida de Lebesgue en R^{n-p}, $\mu(V'(t)) < \infty$.

De (3) se obtiene, en consecuencia,

$$\lim_{t\to 0} \mu(V'(t)) = \mu\Big(\bigcap_{t\in(0,1)} V'(t)\Big) = 0 .$$

Por (2), $\lim_{t\to 0} J_t = 0$.

2.14 - Enunciamos a continuación un resultado de Coleff-Herrera (cf. lema 2-9 de [2]).

Lema:

Si $g \in \mathcal{E}^0(U_1^k)$, con $U_1^k \in \mathcal{F}$, es independiente de las variables z_j y $\bar{z}_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$, entonces,

a) $j \in B\cup M \Rightarrow \int_{D^{p+1}_{\delta(\xi),c}(\psi)} z_j^{-\beta}\ z_j^r\ \bar{z}_j^s\ g\ dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M = 0$.

b) $j \in A \Rightarrow$ la integral es nula si $s > 0$ ó si $s=0$ y $r < \beta_j - 1$.

2.15 - Lema:

Sea $U_1^k \in \mathcal{F}$. Si $B \neq \emptyset$, entonces, $\forall\ c \in (0,1)$

$$\lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} k\, dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge d\omega_M = 0 .$$

Demostración:

Análoga a la del lema 2-12 de [2], tomando como resultados auxiliares los lemas 2.13 y 2.14 de este capítulo en lugar de 2-10 y 2-9 de [2], utilizados allí, respectivamente.

2.16 - Lema:

Sea $f \in \mathcal{E}^0(\bar{U}_1^k)$, con $U_1^k \in \mathcal{F}$, una función independiente de las variables $z_i, \bar{z}_i$, para $i \in A < \{1,\dots,n\}$. Escribamos $\eta = z(A)^{-\beta} z_A^{-1} f\, dz_A \wedge d\omega_M$. Se cumple entonces,

$$\lim_{c\to 0}\lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} \eta = \lim_{\delta_{p+1}\to 0} \lim_{\delta\to 0} \int_{D^{p+1}_{\underline{\delta},\delta_{p+1}}(\varphi^*)} \eta ,$$

donde $\underline{\delta}$ es una trayectoria admisible.

Demostración:

a) $\propto_A$ no es normal.

El límite de la derecha vale, en este caso, 0 [2]. Obtendremos igual valor para el de la izquierda.

a_1) $\propto_A(p+1)$ no puede transformarse en una matriz triangular superior mediante una permutación de sus columnas. $\exists\, j_0 \in A$, $(x_1,\dots,x_p) \in G_2(\mathcal{F})$ tales que, para $i = 1,\dots,p$, $x_i = -\tilde{\Delta}_{i j_0}(\propto_A(p+1))$. (cf. 2.3). Si $n' = -\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$ y $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) = -\sum_{i=1}^{p} x_i \propto_i$, $z \in \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| \Rightarrow \rho(A)^{\lambda} > t^{n'}$ (1) (cf. demostración de 2.13, parte b)).

Dado que $n' < 0$, $\left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| = \emptyset$ para t suficientemente pequeño, si $\lambda(A) > 0$. Es decir,

$$\lambda(A) > 0 \Rightarrow \forall c > 0, \lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} \eta = 0 .$$

Si $\exists\ j \in \{1,\dots,n\} - A$: $\lambda_j < 0$, sean $j_1,\dots,j_q$ tales índices. Por el lema 2-4 de , podemos escribir

$$f = \sum_{i=p+1}^{n} \Big(\sum_{r+s<\beta_i} z_i^r\ \bar{z}_i^s\ g_{rs}^i \Big) + F \qquad (2)$$

donde $F = \sum_{\nu+\mu=\beta} F_{\nu\mu}\ z^\nu\ \bar{z}^\mu$, con g_{rs}^i, $F_{\nu\mu} \in C^\infty(\bar{U}_1^k)$ e independientes de las variables z_j, $\bar{z}_j$, para $j \in A$. (Notemos que las $F_{\nu\mu}$ son acotadas sobre U_1^k, pues U_1^k es relativamente compacto).

La contribución de los términos de la forma $z(A)^{-\beta} z_A^{-1}\ z_i^r\ \bar{z}_i^s\ g_{rs}^i\ dz_A \wedge d\omega_M$ a la integral en cuestión es nula, de acuerdo a 2.14.

Sea $J_{tc} = \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} z(A)^{-\beta} z_A^{-1}\ F\ dz_A \wedge d\omega_M$.

Si integramos respecto de las variables z_j, con $j \in A$, obtenemos, salvo una constante,

$$\lim_{t\to 0} |J_{tc}| \le \lim_{t\to 0} \Big| \int_{V_{tc}} z(A)^{-\beta}\ F\ d\omega_M \Big| , \quad \forall\ c > 0 \qquad (3)$$

donde V_{tc} es un abierto de U_1^k tal que

$$z \in V_{tc} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(A)^{\alpha_i} > t^{n_i} , & i=1,\dots,p \\ \rho(A)^{\alpha_{p+1}} > c . \end{cases}$$

Así pues, si $z \in V_{tc}$, por (1)

$$\prod_{i=1}^{q} \rho_{j_i}^{\lambda_{j_i}} \ge \rho(A)^{\lambda} > t^{n'} .$$

Por tanto, si $a \ge \sum_{i=1}^{q} \lambda_{j_i}$, $\big(\prod_{i=1}^{q} \rho_{j_i}\big)^a < t^{-n'}$, lo que implica

$$V_{tc} \subset \bigcup_{i=1}^{q} \{ z \in U_1^k \, ; \, 0 < |z_{j_i}| < t^{-n'/q\alpha} \}.$$

Como $-n'/q\alpha > 0$, la medida de V_{tc} tiende a 0 cuando $t \to 0$. Por ser $z(A)^{-\beta} F$ acotada sobre U_1^k, de (3) se deduce:

$$\lim_{t \to 0} J_{tc} = 0 \, , \, \forall \, c > 0 \, .$$

$a_2) \alpha_A(p+1)$ es, salvo permutación de columnas, triangular superior.

$\exists \, k \in A : \alpha_{p+1\,k} \neq 0$. Sea $\Delta = \Delta(\alpha_A(p+1))$. Por el lema 2.3, $\exists \, (x_1, \ldots, x_p) \in G(\mathcal{F}) : x_i = \tilde{\Delta}_{ik}(\alpha_A(p+1))$.

$z \in \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right| \Rightarrow \rho^{\alpha_i} = t^{n_i}$, $i = 1, \ldots, p \Rightarrow \rho_k^{|\Delta|} = t^{n'/\rho(A)^{\lambda}}$, con $n' = n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p$, y λ como en a_1).

Por otra parte, $\rho_k \geq \rho_k^{\alpha_{p+1\,k}} \geq \prod_{j \in A} \rho_j^{\alpha_{p+1\,j}} > c/m(k,1)\, \rho(A)^{\alpha_{p+1}}$, si $z \in \left| D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*) \right|$. Resulta, entonces,

$$\rho(A)^{\alpha_{p+1}|\Delta| - \lambda} > t^{-n'} (m(k,1)/c)^{|\Delta|} \, .$$

Pero $(x_1, \ldots, x_p) \in G(\mathcal{F}) \Rightarrow n' > 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} t^{-n} \equiv \infty$.

Razonando como a partir de (2) en a_1), obtenemos

$$\lim_{t \to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi^*)} \eta = 0 \, , \, \forall \, c \in (0,1) \, .$$

b) α_A es normal.

$\forall \, j \in \{1, \ldots, p\}$, $\exists \, (x_1^j, \ldots, x_p^j) \in G_1^j(\mathcal{F})$ tal que $x_i^j = \tilde{\Delta}_{ij}(\alpha_A(p+1))$ (cf. 2.3).

Sea $(j_1, \ldots, j_p)$ la permutación de los elementos de A que transforma a la matriz $\alpha_A(p+1)$ en triangular superior. Es evidente que el signo de tal permutación es el mismo que el de $\Delta = \Delta(\alpha_A(p+1))$. Así, pues,

$$J_{tc} = sg\,\Delta \int_{D^{p+1}_{\gamma(L),c}(\varphi^*)} z(A)^{-\beta} f \frac{dz_{j_1}}{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{j_p}}{z_{j_p}} \wedge d\omega_M .$$

Integrando respecto de $z_{j_1},\ldots,z_{j_p}$, resulta :

$$J_{tc} = sg\,\Delta\,(2\pi i)^p \int_{V_{tc}} z(A)^{-\beta} f \; d\omega_M ,$$

donde V_{tc} es un abierto de U_1^k tal que

$$z \in V_{tc} \Rightarrow \begin{cases} \rho(A)^{\lambda_j} > t^{n'j} , & j=1,\ldots,p \\ \rho(A)^{\alpha_{p+1}} > c , \end{cases}$$

con $n'_j = \sum_{i=1}^{p} n_i x_i^j$, $\lambda_j = \sum_{i=1}^{p} x_i^j \alpha_i$.

$(x_1^j,\ldots,x_p^j) \in G(\mathcal{F}) \Rightarrow n'_j > 0$, para $j=1,\ldots,p \Rightarrow \lim_{t\to 0} t^{n'j} = 0$.

En consecuencia, si tomamos el desarrollo (2) de f, obtenemos

$$\lim_{t\to 0} J_{tc} = sg\,\Delta\,(2\pi i)^p \int_{\rho(A)^{\alpha_{p+1}} > c} z(A)^{-\beta} F \, d\omega_M .$$

Como $z(A)^{-\beta}F$ está acotada sobre U_1^k, resulta

$$\lim_{c\to 0}\lim_{t\to 0} J_{tc} = sg\,\Delta\,(2\pi i)^p \int_{U_1^k} z(A)^{-\beta} F \, d\omega_M .$$

Dado que éste es el valor de $\lim_{\delta_{p+1}\to 0} \lim_{c\to 0} J_{\delta\delta_{p+1}}$ (lema 2-11 de [2]), queda demostrado el lema.

2.17 - Lema:

Sea $U_1^k \in \mathcal{T}$, $\beta \in N^n$: $V(z^\beta) \subset \bigcup_{i=1}^{p+1} V(\varphi_i^*)$. Si ξ es una trayectoria admisible, entonces, $\xi \in \mathcal{E}^{2n-p}(U_1^k)$,

$$\lim_{c\to 0}\lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t_i),c}(\varphi^*)} z^{-\beta}\,\omega = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{D^{p+1}_{\delta,\delta_{p+1}}(\varphi^*)} z^{-\beta}\,\omega \quad \forall \omega \in \mathcal{E}^{2n-p}(U_1^k) \quad (1)$$

Demostración:

a) $\omega = b\, dz_A \wedge d\omega_M$, con $|M| = n-p$, $\Delta(\alpha_A(p+1)) \neq 0$.

Razonando como en la demostración del lema 2-13 de [2], obtenemos (1), utilizando los lemas 2.13, 2.14 y 2.16 de este capítulo.

b) ω no es de la forma entedicha.

En este caso, ambos miembros de (1) se anulan: el de la izquierda por los lemas 2.10, 2.12 y 2.15; el de la derecha en virtud de 2-2, 2-7 y 2-12 de [2].

2.18 - Proposición:

Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{p+1} V(\varphi_i)$. Si ξ es una trayectoria admisible, entonces, $\forall\, \tilde{\omega} \in \mathcal{D}^{2n-p}_{Y}(*Y)$,

$$\lim_{c\to 0}\lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi)} \tilde{\omega} = \lim_{\delta_{p+1}\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{D^{p+1}_{\delta,\delta_{p+1}}(\varphi)} \tilde{\omega} \quad .$$

Demostración:

En primer lugar, notemos que, como consecuencia inmediata del lema 2.11, $\dim |D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi)| \leq 2n-p$ para t suficientemente chico, por lo que tiene sentido tomar las integrales de la izquierda.

Ahora bien, mediante una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{V_k; k=1,\ldots,r\}$, podemos limitarnos a considerar $\operatorname{sop} \tilde{\omega} \in V_k$. En tal caso,

$$\int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi)} \tilde{\omega} = \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\varphi\circ\pi_k/\pi_k^{-1}(V_k))} \pi_k^{*}\tilde{\omega}$$

y análogamente para la integral de la derecha, con

$\tilde{\omega} \in \mathcal{D}^{2n-p}_{\pi_k^{-1}(V_k)}(*Y^{*})$, $Y^{*} = \bigcup_{i=1}^{p+1} V(\varphi_i \circ \pi_k)$.

Si tomamos una nueva partición de la unidad, esta vez sobre $\Pi_k^{-1}(V_k)$, subordinada al cubrimiento $\{U_l^k; l=1,\dots,s(k)\}$, del lema anterior se deduce el resultado.

2.19 - Como caso particular de la proposición anterior, obtendremos el resultado principal de este capítulo. Sea, pues, $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_p) : W \to \mathbb{C}^p$ y U en las condiciones que hemos venido suponiendo, esto es, que ninguna de las funciones φ_i se anula sobre el abierto conexo W y que U es un abierto relativamente compacto tal que $U \subset \bar{U} \subset V_i \subset \mathbb{C}^n$. Denotemos $Y \bigcup_{j=1}^{p} V(\varphi_j)$.

Teorema:

$\exists\, q \in N$ tal que, si $\gamma : (0,1) \to R^p$ está definida por $\gamma(t) = (t^{n_1},\dots,t^{n_p})$, con $n_j \in N$, $n_p > q$, $n_i/n_{i+1} > q$, $i=1,\dots,p-1$, entonces,

$$R_Y^p[\tilde{\omega}] = \lim_{t\to 0} \int_{T^p_{\gamma(t)}(\varphi)} \tilde{\omega}$$

Demostración:

Sea $\psi = (\varphi_1,\dots,\varphi_p,1) : W \to \mathbb{C}^{p+1}$. Tomemos $q = q(\mathcal{F})$ como en el lema 2.7, con $\mathcal{F}$ una familia finita asociada a ψ sobre U. Para tal q, una aplicación γ en las condiciones del enunciado, resulta una trayectoria admitida por ψ sobre U, inducida por $\mathcal{F}$.

Es claro que, $\forall\, c \in (0,1)$, $T^p_{\gamma(t)}(\varphi) = D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\psi)$. En consecuencia, por la proposición anterior,

$$\lim_{t\to 0} \int_{T^p_{\gamma(t)}(\varphi)} \tilde{\omega} = \lim_{c\to 0}\lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),c}(\psi)} \tilde{\omega} = \delta_{p+1}\lim_{\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{D^{p+1}_{\underline{\delta},\delta_{p+1}}(\psi)} \tilde{\omega}\,.$$

Es decir,

$$\lim_{t\to 0} \int_{T^p_{\gamma(t)}(\varphi)} \tilde{\omega} \;=\; \lim_{\delta\to 0} \int_{T^p_{\delta}(\varphi)} \tilde{\omega} \;=\; R^p_Y[\tilde{\omega}].$$

2.20 - El camino elegido para probar el teorema anterior, considerarlo como caso especial de un límite iterado, tiene la ventaja de permitirnos establecer el siguiente resultado (que no utilizaremos en lo que resta):

Proposición:

Si φ e Y son como en 2.18, entonces,

$$R^p\, P^{p+1}_Y[\tilde{\omega}] = \lim_{t\to 0} \int_{D^{p+1}_{\gamma(t),t}(\varphi)} \tilde{\omega}, \qquad \forall\, \tilde{\omega} \in \mathcal{D}^{2n-p}_U(*\varphi)$$

Demostración:

Análoga a las de 2.12,...,2.18.

Capítulo III - El ciclo esencial.

Supondremos fijados W y φ como en 2.19, es decir, W un abierto conexo de $\mathbb{C}^n$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_p): W \to \mathbb{C}^p$, una aplicación analítica tal que ninguna de las funciones φ_j se anule idénticamente.

Como expresamos en 1.9.2, nos proponemos asociar a φ un ciclo analítico $C_e(\varphi)$, el ciclo esencial asociado a φ, cuyo soporte sea precisamente $V_e(\varphi)$ (cf. 1.5) y que esté relacionado con las trayectorias admitidas por φ en el sentido allí explicitado.

Siguiendo la definición inductiva de $V_e(\varphi)$, construiremos $C_e(\varphi)$del siguiente modo:

3.1 - Definición:

$$C_e(\varphi_1) = \varphi_1^{-1}[0] .$$

Si $C_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}) = \sum_{i \in I} n_i M_i$, para $1 < s \leq p$, donde $\{M_i\}_{i \in I}$ es la familia de las componentes de $V_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})$ y $n_i \in \mathbb{N}$, definimos

$$C_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_s) = \tilde{C}_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}) \cdot \varphi_s^{-1}[0] ,$$

donde $\tilde{C}_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}) = \sum_{i \in E(s)} n_i M_i$, con $E(s) = \{ i \in I$ tales que $M_i \subset \tilde{V}_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}) \}$.

3.2 - De esta definición y de 1.5, se deducen inmediatamente las siguientes propiedades de $C_e(\varphi)$:

a) $|C_e(\varphi)| = V_e(\varphi)$.

b) $C_e(\varphi)= 0$ si $p > n$.

c) $C_e(\varphi)= \varphi^{-1}[0]$ si $\dim_{\mathbb{C}} \varphi^{-1}(0)= n-p$.

d) Si U es un abierto de W, $C_e(\varphi_{/U})$ es igual a la restricción a U de $C_e(\varphi)$.

3.3 - Calcularemos $C_e(\varphi)$ en un caso particular que nos será de utilidad en lo que sigue.

Dada una matriz $\alpha \in M_{p,n}(N)$, definimos el conjunto $\mathcal{A}(\alpha)= \{A \in \wedge(p,n): \alpha_A \text{ es normal}\}$ y dado $B \subset \{1,\ldots,n\}$, definimos $P_B= \{ z \in W: z_j=0 \text{ si } j \in B \}$.

Lema:

Si $\varphi_i= h_i\, z^{\alpha_i}$, $1 \le i \le p$, con $\alpha_{ij} \in N$ y si $\forall\ z \in W$, $h_i(z) \neq 0$, $i=1,\ldots,p$, entonces

$$C_e(\varphi) = \sum_{A \in \mathcal{A}(\alpha)} |\Delta(\alpha_A)|\ [P_A] ,$$

donde $\alpha =(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}}$.

Demostración:

Sea $\tilde{\varphi}_i= z^{\alpha_i}$ y $\tilde{\varphi}=(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_p)$.

Probaremos en primer término, por inducción sobre s, que si $1 \le s \le p$, entonces $C_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_s)= C_e(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_s)$.

Si s=1:

$$C_e(\varphi_1)= \varphi_1^{-1}[0] =(h_1\, z^{\alpha 1})^{-1}[0] = h_1^{-1}[0] +(z^{\alpha 1})^{-1}[0] .$$

Como $h_1^{-1}(0) = \emptyset$, $C_e(\varphi_1)= (z^{\alpha 1})^{-1}[0] = \tilde{\varphi}_1^{-1}[0] = C_e(\tilde{\varphi}_1)$. (1)

Supongamos $C_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})= C_e(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_{s-1})$. Dado que $h_s(z) \neq 0\ \forall\ z \in W$, $\varphi_s(z)= 0$ si y sólo si $\tilde{\varphi}_s(z)= 0$. Así,

pues, de la hipótesis inductiva resulta

$$\tilde{C}_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}) = \tilde{C}_e(\check{\varphi}_1,\ldots,\check{\varphi}_{s-1}),$$

lo que, junto con (1) aplicado a φ_s, implica:

$$C_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_s) = C_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})\cdot\varphi_s^{-1}\,[0]$$

$$= \tilde{C}_e(\check{\varphi}_1,\ldots,\check{\varphi}_{s-1})\cdot\varphi_s^{-1}\,[0]$$

$$= C_e(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_s)\ .$$

Veremos, ahora, que

$$C_e(\tilde{\varphi}) = \sum_{A\in\mathcal{A}(\alpha)} |\Delta(\alpha_A)|\ [P_A] \qquad (2)$$

Para $1 \le s \le p$, escribamos $\alpha^s = \alpha(s+1,\ldots,p)$, y, consecuentemente, $\mathcal{A}(\alpha^s) = \{A:\ A\in\wedge(s,n),\ \alpha^s_A \text{ normal}\}$. (Es claro que $\alpha^p = \alpha$ y $\mathcal{A}(\alpha^p) = \mathcal{A}(\alpha)$).

Probaremos (2) mostrando, por inducción sobre s, que

$$C_e(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_s) = \sum_{A\in\mathcal{A}(\alpha^s)} |\Delta(\alpha^s)|\,.\,[P_A] \qquad (3)$$

Sea $B(s) = \{j:\ 1\le j\le n,\ \alpha_{sj}\neq 0\}$. Si $s=1$,

$$C_e(\tilde{\varphi}_1) = (z^{\alpha_1})^{-1}[0] = \sum_{j\in B(s)} \alpha_{1j}[z_j\equiv 0] = \sum_{A\in\mathcal{A}(\alpha^1)} |\Delta(\alpha^1_A)|\,[P_A].$$

Supongamos (3) para s-1. Para todo $A\in\mathcal{A}(\alpha^{s-1})$,

$$\tilde{\varphi}_{s/P_A} \neq 0 \text{ si y sólo si } A \cap B(s) = \phi \ .$$

Por tanto, si $\tilde{\mathcal{A}}(\alpha^{s-1}) = \{ A \in \mathcal{A}(\alpha^{s-1}) : A \cap B(s) = \phi \}$,

$$\tilde{C}_e(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{s-1}) = \sum_{A \in \tilde{\mathcal{A}}(\alpha^{s-1})} |\Delta(\alpha_A^{s-1})| \, [P_A] \ .$$

Así, pues,

$$C_e(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_s) = \tilde{C}_e(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{s-1}) \cdot \tilde{\varphi}_s^{-1}[0] -$$

$$= \left(\sum_{A \in \tilde{\mathcal{A}}(\alpha^{s-1})} |\Delta(\alpha_A^{s-1})| \, [P_A] \right) \cdot \left(\sum_{j \in B(s)} \alpha_{sj} [z_j \equiv 0] \right).$$

Pero, si $j \in B(s)$ y $A \in \tilde{\mathcal{A}}(\alpha^{s-1})$, $[P_A]$ y $[z_j \equiv 0]$ son transversales [1] , ya que $j \notin A$, así que

$$C_e(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_s) = \sum_{\substack{A \in \tilde{\mathcal{A}}(\alpha^{s-1}) \\ j \in B(s)}} \alpha_{sj} \, |\Delta(\alpha_A^{s-1})| \, [P_A \cap (z_j \equiv 0)] \ .$$

Es decir,

$$C_e(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_s) = \sum_{A' \in \mathcal{A}(\alpha^s)} |\Delta(\alpha_{A'}^s)| \, [P_{A'}] \ .$$

3.4 - En lo que resta del capítulo, supondremos fijados:

La aplicación $\varphi_{p+1} \equiv 1$ sobre W .

Un abierto relativamente compacto U, tal que $U \subset \bar{U} \subset W$.

Una familia finita $\mathcal{F}$ asociada a $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+1})$ sobre U;

Una trayectoria

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p) : (0,1) \longrightarrow R^p$$

$$\gamma(t) = (t^{n_1}, \ldots, t^{n_p})$$

admitida por $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+1})$ sobre U, inducida por $\mathcal{F}$. (cf. 2.8);

Una aplicación continua

$$\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_p): (0,1) \to \mathbb{C}^p,$$

tal que

a) $|\tilde{\gamma}_j(t)| = \gamma_j(t)$, $\forall\ t \in (0,1)$, $j=1,\ldots,p$;

b) $\tilde{\gamma}((0,1))$ es un conjunto semianalítico real en $\mathbb{R}^{2p}$.

Nota: Es inmediato corroborar la existencia de una aplicación $\tilde{\gamma}$ en tales condiciones. Por ejemplo, si $\theta_1, \ldots, \theta_p \in [0,2]$, podemos tomar $\tilde{\gamma}_j(t) = t^{n_j} e^{i\theta_j}$, $j=1,\ldots,p$.

Observemos además que, si $t \in (0,1)$, entonces $b\tilde{\gamma}((0,t)) = \{0\} \cup \tilde{\gamma}(t)$.

Notación:

$\forall\ t \in (0,1)$, designaremos con β_t a la 1-cadena semianalítica que resulta de orientar al conjunto $\tilde{\gamma}((0,t))$ de modo de tener

$$\partial \beta_t = [0] - [\tilde{\gamma}(t)] \ .$$

Si $\alpha' \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ (cf. 2.2), convendremos en denotar con α a la matriz $\alpha'(p+1)$. (Recordemos que $\alpha'_{p+1} = 0$, pues $\varphi_{p+1} \equiv 1$). Así mismo, convendremos en denotar con φ a la restricción del morfismo φ al abierto U.

3.5 - Nos proponemos probar (cf. 1.9.2) que, para $0 < t < t_0$, con t_0 como en el lema 2.11,

$$\partial\, \varphi^{-1}(\beta_t) = c_e(\varphi) - \varphi^{-1}[\tilde{\gamma}(t)] \quad .$$

Desarrollaremos la demostración de esta igualdad de ciclos en dos etapas: en la primera, probaremos la igualdad de los soportes, esto es,

$$b\, \varphi^{-1}(|\beta_t|) = V_e(\varphi) \cup \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(t));$$

en tanto que en la segunda, haremos lo propio con las respectivas multiplicidades.

Definición:

La γ-variedad de φ es el conjunto

$$V^{\gamma}(\varphi) = \{ z \in U : \forall \text{ abierto } D : z \in D \subset U,\ \exists\ t' \in (0,1) : 0 < t < t' \Rightarrow D \cap \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(t)) \neq \emptyset \}.$$

(Veremos en 3.9, que $V^{\gamma}(\varphi)$ es independiente de la particular $\tilde{\gamma}$ tomada).

Nota: La definición es local, es decir, $\forall$ abierto $A \subset U$ se cumple: $V^{\gamma}(\varphi) \cap A = V^{\gamma}(\varphi_{/A})$. En efecto, si $z \in V^{\gamma}(\varphi) \cap A$ y D es un abierto tal que $z \in D \subset A$, en particular $z \in D \subset U$ y por tanto, $\exists$ t' en (0,1) tal que, si $0 < t < t'$, $D \cap \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(t)) \neq \emptyset$, de donde $D \cap (\varphi_{/A})^{-1}(\tilde{\gamma}(t)) \neq \emptyset$, ya que $D \subset A$. Así, pues,

$$z \in V^{\gamma}(\varphi) \cap A \Rightarrow z \in V^{\gamma}(\varphi_{/A}).$$

Análogamente para la otra inclusión.

3.6 - Mediante los siguientes lemas, probaremos que

$$V^{\chi}(\varphi) = V_e(\varphi).$$

Lema:

Si $U_1^k \in \mathcal{F}$ y rang $\chi < p$,

$$V^{\chi}(\varphi^*) = \emptyset$$

donde, como en el capítulo anterior, $\varphi^* = \varphi \circ \pi_{k/U_1^k}$ (notación que continuaremos utilizando en lo que sigue).

Demostración:

$$\text{rang } \chi < p \Rightarrow \exists\, (x_1,\ldots,x_p) \in G_4(\mathcal{F}) \text{ tal que :}$$

$$x_1\alpha_1+\ldots+x_p\alpha_p = 0,$$

$$n' = n_1x_1+\ldots+n_px_p > 0 .$$

Ahora bien, $z \in \varphi^{*-1}(\tilde{\gamma}(t))$ si y sólo si, para $1 \leq i \leq p$, $h_i(z)z^{\alpha i} = \tilde{\gamma}_i(t)$; de modo que

$$z \in \varphi^{*-1}(\tilde{\gamma}(t)) \Rightarrow \prod_{i=1}^{p} |h_i(z)z^{\alpha i}|^{x_i} = \prod_{i=1}^{p} |h_i(z)|^{x_i} = t^{n'} .$$

$$n' > 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} t^{n'} = 0, \text{ así que, como } |h_i(z)| > m(k,1) > 0 \text{ sobre } U_1^k,$$

$\varphi^{*-1}(\tilde{\gamma}(t)) = \emptyset$ si t es suficientemente chico y por tanto

$$V^{\gamma}(\varphi^*) = \emptyset \ .$$

3.7 - Lema:

Si $U_1^k \in \mathcal{F}$ y rang $\alpha = p$,

$$V^{\gamma}(\varphi^*) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\alpha)} P_A \ ,$$

con $\mathcal{A}(\alpha)$ como en 3.3.

Demostración:

Sea $z \in P_A$, con $A \in \mathcal{A}(\alpha)$. Podemos suponer $A = \{1,\ldots,p\}$, α_A triangular superior y, en consecuencia, $\Delta(\alpha_A) = \Delta$ positivo. Tenemos:

$$\varphi^*(x) = \tilde{\gamma}(t) \text{ si y sólo si } x_A^{\alpha_i} = \gamma_i(t)/x(A)^{\alpha_i}, i=1,\ldots,p. \quad (1)$$

Por tanto, si $\beta_i = \sum_{s=i}^{p} \Delta_{si} \alpha_i$,

$$\varphi^*(x) = \tilde{\gamma}(t) \text{ si y sólo si } x_i^{\Delta} = \tilde{\gamma}_i(t)^{\Delta_{ii}} \ldots \tilde{\gamma}_p(t)^{\Delta_{pi}}/x(A)^{\beta_i}. \quad (2)$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $U_\varepsilon = \{x \in U_1^k : \sum_{i=1}^{p} |x_i - z_i| < \varepsilon\}$ y sea $y \in U_\varepsilon$ tal que $y_{p+1},\ldots,y_n \neq 0$. Si $n_i' = n_1 \Delta_{1i} + \ldots + n_p \Delta_{pi}$, $n_i' > 0$, para $i=1,\ldots,p$, puesto que $(\Delta_{1i},\ldots,\Delta_{pi}) \in G_1(\mathcal{F})$. Así, pues,

$$\exists\, t' \in (0,1) : 0 < t < t' \Rightarrow t^{n_i'} < \varepsilon^{\Delta} \cdot |y(A)^{\beta_i}| \ ; \ i=1,\ldots,p. \quad (3)$$

Si $0 < t < t'$, sea $(x_1,\ldots,x_p)$ una solución del sistema (1) para $x(A) = y(A)$. Tenemos que $\varphi^*(x_1,\ldots,x_p,y_{p+1},\ldots,y_n) = \tilde{\gamma}(t)$. Además, por (2) y (3), $(x_1,\ldots,x_p,y_{p+1},\ldots,y_n) \in U_\varepsilon$.

Resumiendo: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, t' \in (0,1) : 0 < t < t' \Rightarrow$

$\varphi^{*-1}(\tilde{\delta}(t)) \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$; esto es, $z \in V^{\delta}(\varphi^*)$.

Sea ahora, $z \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\alpha)} P_A$ y escribamos $M=\{j : z_j=0\}$. Si $M=\emptyset$, $\varphi^*_p(z)= z_p^{\alpha_{pp}} \ldots z_n^{\alpha_{pn}} \neq 0$. Sea $\varepsilon = |\varphi^*_p(z)|/2$. Tomemos $D= \varphi^{*-1}_p(\{|w-\varphi^*_p(z)|<\varepsilon\})$. Si $t' \in (0,1)$ es tal que $t'^{n_p} < \varepsilon$, $\forall\ t \in (0,t')$, se cumple que $D \cap \varphi^{*-1}_p(\tilde{\gamma}_p(t))=\emptyset$ y, por ende, $z \notin V^{\delta}(\varphi^*)$.

Si $M \neq \emptyset$, $M \in \mathcal{A}^{\alpha}(\chi)$y, en consecuencia, existe

$(0,\ldots,0,1,-k_{r+1},\ldots -k_p) \in \mathcal{C}_5(\mathcal{F})$ tal que

$$\alpha_{rj} \leq k_{r+1}\alpha_{r+1\,j} + \ldots + k_p \alpha_{pj}, \text{ para } j \in M;$$

$$n' = n_r - n_{r+1}k_{r+1} - \ldots - n_p k_p > 0.$$

Si $\varphi^*(x)=\tilde{\gamma}(t)$, necesariamente $|x^{\alpha_i}| = t^{n_i}$; $i=1,\ldots,p$;

de donde

$$t^{n_r} / |x(M)^{\alpha_r}| = |x_M^{\alpha_r}| \geq |x_M^{k_{r+1}\alpha_{r+1} + \ldots + k_p \alpha_p}|,$$

pues $|x_j|<1$, para $j=1,\ldots,n$ (cf. 2.1). Resulta entonces, si $m=\alpha_r - k_{r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - k_p \alpha_p$,

$$t^{n_r} / |x(M)^{\alpha_r}| \geq t^{n_r - n'} / |x(M)^{\alpha_r - m}|,$$

o, lo que es equivalente,

$$t^{n'} \geq |x(M)^m|. \qquad (4)$$

Sea $D= \{x \in U_1^k : |z_j| < 2|x_j|, \text{ si } j \notin M\}$, y sea $\varepsilon > 0$ tal que $|x(M)^m| > \varepsilon$ para $x \in D$.

$n' > 0 \Rightarrow (\exists\ t' \in (0,1) : 0<t<t' \Rightarrow t^{n'} < \varepsilon)$.

De (4) se deduce que, para $0<t<t'$, $D \cap \varphi^{*-1}(\tilde{\gamma}(t))=\emptyset$.

Dado que D es un entorno de z, llegamos a que $z \notin V^{\delta}(\varphi^*)$.

3.8 - Corolario:

Sea k=1,...,r. Si $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi_{k/\pi_k^{-1}(V_k)}$ (notación que utilizaremos de aquí en más), entonces

$$V^{\gamma}(\tilde{\varphi}) = V_e(\tilde{\varphi})$$

Demostración:

Basta comprobarlo para cada U_1^k, ya que éstos cubren $\pi_k^{-1}(V_k)$. Si $U_1^k \in \mathcal{F}$, los lemas 3.6 y 3.7 nos dan para $V^{\gamma}(\varphi)$ la misma expresión obtenida para $V_e(\varphi^*)$ en 2-17-3 de [2].

3.9 - Proposición:

En las condiciones que hemos fijado,

$$V^{\gamma}(\varphi) = V_e(\varphi) .$$

Demostración:

Dado que estamos suponiendo que el dominio de φ es el abierto U, como este es la unión de los abiertos $V_1,...,V_r$, será suficiente que probemos:

$$V^{\gamma}(\varphi) \cap V_k = V_e(\varphi) \cap V_k \text{ , para } k=1,...,r .$$

En 3-2-1 de [2], se prueba que $V_e(\varphi) \cap V_k = \pi_k(V_e(\tilde{\varphi}))$. En forma análoga, llegamos a que $V^{\gamma}(\varphi) \cap V_k = \pi_k(V^{\gamma}(\tilde{\varphi}))$.

Así, el resultado es consecuencia inmediata del corolario 3.8.

3.10 - Corolario:

$$\exists\, t_0 \in (0;1):\ 0 < t < t_0$$
$$\text{b}\ \varphi^{-1}(|\beta_t|) = V_e(\varphi),\ \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(t)).$$

Demostración:

De la definición de $V^{\gamma}(\varphi)$ y de la proposición anterior, se deduce que $\text{b}\,\varphi^{-1}(|\beta_t|) \cap \varphi^{-1}(0) = V_e(\varphi)$, $\forall\ t \in (0,1)$. Tomando t_0 como en el lema 2.11 obtenemos lo buscado.

De aquí en más, consideraremos $0 < t < t_0$, con t_0 como en el corolario anterior.

3.11 - Lema:

Para k=1,...,r,

$$\partial\, \tilde{\varphi}^{-1}(\beta_t) = C_e(\tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi}^{-1}[\tilde{\gamma}(t)] \quad .$$

Demostración:

Basta probar, sobre cada U_1^k,

$$\partial\, \varphi^{*-1}(\beta_t) = C_e(\varphi^*) - \varphi^{*-1}[\tilde{\gamma}(t)] \quad .$$

Es trivial si rang $\alpha < p$. Supongamos, pues, rang $\alpha = p$.

a) p=n.

Podemos suponer α normal, pues es trivial en caso contrario. Supongamos, además, α triangular superior.

$$\text{rang}\,\alpha = p \Rightarrow \varphi_i^* = z_i^{\alpha_{ii}} \ldots z_n^{\alpha_{in}};\quad i=1,\ldots,p \text{ (cf. 1.1)}.$$

Si $w \in |\beta_t|$, existe un entorno de w sobre el cuál las distintas determinaciones de las raíces α_{ii}-ésimas dan lugar a $\alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} = \Delta(\alpha)$ isomorfismos ψ_j^w, inversos a derecha de φ .

Estos ψ_j^w proveen $\Delta(\alpha)$ isomorfismos en un entorno de $|\beta_t|$, inversos a derecha de φ, que denotaremos ψ_j. Es claro que

$$\varphi^{*-1}(\beta_t) = \sum_{j=1}^{\Delta(\alpha)} \psi_j(\beta_t) .$$

Consecuentemente,

$$\partial\varphi^{*-1}(\beta_t) = \sum_{j=1}^{\Delta(\alpha)} \partial\psi_j(\beta_t) .$$

Pero $\partial\psi_j(\beta_t) = [0] - \psi[\tilde{\gamma}(t)]$ y así,

$$\partial\varphi^{*-1}(\beta_t) = \Delta(\alpha)[0] - \varphi^{*-1}[\tilde{\gamma}(t)] .$$

De 3.3 resulta:

$$\partial\varphi^{*-1}(\beta_t) = C_e(\varphi^*) - \varphi^{*-1}[\tilde{\gamma}(t)] .$$

b) $p < n$.

Dado que $\dim_{\mathbb{C}} \varphi^{*-1}(\tilde{\gamma}(t)) \leq n-p$, es claro que será suficiente que probemos que las componentes de $V_e(\varphi^*)$ están afectadas en $\partial\varphi^{*-1}(\beta_t)$ con igual multiplicidad que en $C_e(\varphi^*)$.

Por 3.3, $C_e(\varphi^*) = \sum_{A \in \mathcal{A}(\alpha)} |\Delta(\alpha_A)|[P_A]$. Llamemos n_A a la multiplicidad de P_A en $\partial\varphi^{*-1}(\beta_t)$. Queremos probar que $n_A = |\Delta(\alpha_A)|$, $\forall\ A \in \mathcal{A}(\alpha)$.

Dado $A \in \mathcal{A}(\alpha)$ y $0 < \varepsilon < 1$, sea $P_A^\varepsilon = \{ z \in U_1^k$ tales que $z_j = \varepsilon$ si $j \notin A$.

Podemos razonar como en a) para $\varphi^*/_{[P_A^\varepsilon]}$ y obtener así:

$$(\varphi^*/_{[P_A^\varepsilon]})^{-1}(\beta_t) = |\Delta(\alpha_A)|[o_A^\varepsilon - (\varphi^*/_{[P_A^\varepsilon]})^{-1}[\tilde{\gamma}(t)] , \qquad (1)$$

donde $O_A^{\varepsilon} = (o_1, \ldots, o_n)$, con $o_j = 0$ si $j \in A$ y $o_j = \varepsilon$ si $j \notin A$.

Por otra parte,

$$(\varphi^*_{/[P_A^{\varepsilon}]})^{-1}(\beta_t) = \varphi^{*-1}(\beta_t) \cdot [P_A^{\varepsilon}]$$

y, puesto que $\partial [P_A^{\varepsilon}] = 0$,

$$\partial (\varphi^*_{/[P_A^{\varepsilon}]})^{-1}(\beta_t) = \partial (\varphi^{*-1}(\beta_t) \cdot [P_A^{\varepsilon}]) =$$

$$= (\partial\, \varphi^{*-1}(\beta_t)) \cdot [P_A^{\varepsilon}] .$$

Por tanto, de (1) resulta

$$\partial\, \varphi^{*-1}(\beta_t) \cdot [P_A^{\varepsilon}] = |\Delta(\alpha_A)| \cdot [O_A^{\varepsilon}] - (\varphi^*_{/[P_A^{\varepsilon}]})^{-1}[\tilde{\gamma}(t)] .$$

Ahora bien, la única componente de $V_e(\varphi^*)$ que interseca a P_A^{ε} es evidentemente P_A; en consecuencia:

$$n_A[P_A] \cdot [P_A^{\varepsilon}] = |\Delta(\alpha_A)| \cdot [O_A^{\varepsilon}] .$$

Pero, P_A y P_A^{ε} son transversales, lo que implica [1]:

$$n_A[P_A] \cdot [P_A^{\varepsilon}] = n_A [P_A \cap P_A^{\varepsilon}] = n_A [O_A^{\varepsilon}] .$$

Así, pues, $n_A = |\Delta(\alpha_A)|$, $\forall A \in \mathcal{A}(\alpha)$.

3.12 - Vamos a completar la demostración de la igualdad de ciclos enunciada en 3.4. Puesto que la misma ya ha sido

probada para $\tilde{\varphi}$ en el lema anterior, estudiaremos la relación entre $C_e(\tilde{\varphi})$ y $C_e(\varphi)$ en el siguiente lema, y completaremos la prueba en 3.13.

Lema:

Si se restringe φ a V_k, se obtiene:

$$C_e(\varphi_1,\ldots,\varphi_s) = \pi_k(C_e(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_s)) \quad ,$$

para $k=1,\ldots,r$; $1 \leq s \leq p$.

Demostración:

Haremos inducción sobre s.

Para s=1:

Es trivial si φ_1 es una constante. Si φ_1 no es constante, sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y designemos con β al conjunto $F=\{z=t\,z_0 : 0<t<1\}$ orientado de modo de que $\partial\beta = [0] - [z_0]$.

Es claro que

$$\begin{aligned} \partial\tilde{\varphi}^{-1}(\beta) &= C_e(\tilde{\varphi}_1) - \tilde{\varphi}_1^{-1}[z_0] \\ \partial\varphi^{-1}(\beta) &= C_e(\varphi_1) - \varphi_1^{-1}[z_0] \end{aligned} \qquad (1)$$

Por otra parte, si $Y=\bigcup_{j=1}^{p} V(\varphi_j)$, $\tilde{Y}=\bigcup_{j=1}^{p} V(\tilde{\varphi}_j)$, $\pi_k : \tilde{\varphi}_1^{-1}(F) - \tilde{Y} \longrightarrow \varphi_1^{-1}(F) - Y$ es un isomorfismo y como $\tilde{Y} \cap \tilde{\varphi}_1^{-1}(F)$ es un cerrado en $\tilde{\varphi}_1^{-1}(F)$ cuya dimensión es estrictamente menor que la de $\tilde{\varphi}_1^{-1}(F)$ (pues $\dim(\tilde{Y} \cap \tilde{\varphi}_1^{-1}(F)) \leq \dim \tilde{Y} = 2n-2 < 2n-1 = \dim \tilde{\varphi}_1^{-1}(F)$), se deduce que [1]:

$$\pi_k(\tilde{\varphi}_1^{-1}(\beta)) = \varphi_1^{-1}(\beta)$$

Puesto que π_k es propia, de esta última igualdad resulta:

$$\partial\varphi_1^{-1}(\beta) = \partial\pi_k(\tilde{\varphi}_1^{-1}(\beta)) = \pi_k(\partial\tilde{\varphi}_1^{-1}(\rho))$$

y, por (1),

$$C_e(\varphi_1) = \pi_k(C_e(\varphi_1))$$

Supongamos que hemos probado

$$C_e(\varphi_1,\dots,\varphi_{s-1}) = \pi_k(C_e(\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_{s-1})),$$

para $1 \leq s-1 < p$. Es inmediato ver que, considerando componente a componente, llegamos a

$$\tilde{C}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_{s-1}) = \pi_k(\tilde{C}_e(\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_{s-1})).$$

Sea $\Delta : \Xi^{V(\varphi_s)}_{2(n-1)}(V_k) \longrightarrow \Xi^{2}_{V(\varphi_s)}(V_k)$ el isomorfismo de Poincaré y $\cap$ el cap-producto en el sentido de [1] . Por 7-5 de [1]

$$\begin{aligned} C_e(\varphi_1,\dots,\varphi_s) &= \tilde{C}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_{s-1})\cdot\varphi_s^{-1}[0] \\ &= \tilde{C}_e(\varphi_1,\dots,\varphi_{s-1}) \cap \Delta\,\varphi_s^{-1}[0] \\ &= \pi_k(\tilde{C}_e(\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_{s-1}))\cap\Delta\,\tilde{\varphi}_s^{-1}[0] \\ &= \pi_k(\tilde{C}_e(\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_{s-1}))\cap\pi_k^{-1}(\Delta\,\varphi_s^{-1}[0])) \\ &= \pi_k(\tilde{C}_e(\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_{s-1})\cdot\tilde{\varphi}_s^{-1}[0]) \\ &= \pi_k(C_e(\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_s)) \ . \end{aligned}$$

3.13 - En las condiciones de 3.4 vale el siguiente

Teorema:

Si $0 < t < t_0$,

$$\partial\varphi^{-1}(\beta_t) = C_e(\varphi) - \varphi^{-1}[\tilde{\gamma}(t)] \ .$$

Demostración:

Verificaremos la igualdad sobre cada V_k. Por 3.11,

$$\partial\tilde{\varphi}^{-1}(\beta_t) = C_e(\tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi}^{-1}[\tilde{\gamma}(t)]. \qquad (1)$$

Como π_k es un isomorfismo en un entorno de $|\varphi^{-1}(\beta_t)|$,

$$\pi_k(\tilde{\varphi}^{-1}(\beta_t)) = \varphi^{-1}(\beta_t)$$

Dado que π_k es propia, tenemos

$$\pi_k \partial (\tilde{\varphi}^{-1}(\beta_t)) = \partial \pi_k(\tilde{\varphi}^{-1}(\beta_t)) = \partial \varphi^{-1}(\beta_t) .$$

De (1) entonces,

$$\partial \varphi^{-1}(\beta_t) = \pi_k(C_e(\tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi}^{-1}[\tilde{\gamma}(t)]) .$$

Finalmente, por el lema anterior,

$$\partial \varphi^{-1}(\beta_t) = C_e(\varphi) - \varphi^{-1}[\tilde{\gamma}(t)] .$$

Capítulo IV - Aplicaciones.

4.1 - Continuidad de la fibra integral esencial.

Tanto en este parágrafo como en 4.2, nos situaremos en las condiciones enunciadas en 3.4. Mantendremos , asi mismo la nomenclatura del capítulo anterior.

4.1.1 - Lema:

Si $\mathcal{H}^{2(n-p)+1}$ es la $2(n-p)+1$-dimensional medida de Hausdorff,

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{H}^{2(n-p)+1}((\varphi_{/U})^{-1}(\beta_t)) = 0 .$$

Demostración:

Sea $t \in (0,t_0)$. Como $(\varphi_{/\bar{U}})^{-1}(\beta_t))$ es un conjunto semianalítico de dimensión $2(n-p)+1$, su $2(n-p)+1$ medida de Hausdorff es localmente finita [8] o [3] . Dado que $\bar{U}$ es compacto,

$$\mathcal{H}^{2(n-p)+1}((\varphi_{/\bar{U}})^{-1}(\beta_t)) < \infty .$$

Así, pues,

$$\mathcal{H}^{2(n-p)+1}(\varphi_{/\bar{U}})^{-1}(\beta_t) < \infty .$$

Por otra parte, si $0 < t_1 < t_2 < t_0$,

$$(\varphi_{/U})^{-1}(\beta_{t_1}) \subset (\varphi_{/\bar{U}})^{-1}(\beta_{t_2}).$$

Además, $\bigcap_{t\in(0,t_0)} (\varphi_{/U})^{-1}(\beta_t) = \emptyset$ y por tanto:

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{H}^{2(n-p)+1}((\varphi_{/U})^{-1}(\beta_t)) = 0 .$$

4.1.2 - Lema:

Sea $k_t = \sup M_t$, donde $M_t = \{ n \; ; \; n$ es la multiplicidad de alguna componente de $(\varphi_{/U})^{-1}(\beta_t) \}$.

Si $0 < t < t_0$, se verifica

$$k_t \leq k_{t_0} < \infty \quad .$$

Demostración:

Veamos, en primer término, la finitud de k_{t_0}. Dado que el número de componentes de un conjunto semianalítico es localmente finito [8], razonando como en el lema anterior se deduce que $(\varphi_{/U})^{-1}(\beta_{t_0})$ tiene una cantidad finita de componentes y, por tanto, M_{t_0} es un conjunto finito de números naturales. En consecuencia, $k_{t_0} < \infty$.

Para probar $k_t \leq k_{t_0}$, demostraremos que $M_t \subset M_{t_0}$. Sea V_t una componente de $(\varphi_{/U})^{-1}(\beta_t)$. Puesto que $(\varphi_{/U})^{-1}(\beta_t)$ es la restricción al abierto $(\varphi_{/U})^{-1}(\{ z \in \mathbb{C}P : |z_j| < t^{n_j} \})$ de la cadena $(\varphi_{/U})^{-1}(\beta_{t_0})$, V_t es la restricción de alguna componente V_{t_0} de esta última. Consecuentemente, su multiplicidad es la misma que la de V_{t_0}. Así, $M_t \subset M_{t_0}$.

4.1.3 - Teorema:

En las hipótesis supuestas, $\forall \alpha \in \mathcal{D}^{2(n-p)}(U)$,

$$\lim_{t \to 0} \int_{\varphi_U^{-1}[\tilde{\gamma}(t)]} \alpha = \int_{C_e(\varphi)} \alpha \quad ,$$

donde $\varphi_U = \varphi_{/U}$.

Demostración:

Sea $t\in(0,t_0)$. Por el teorema de Stokes para conjuntos semianalíticos [5] ,

$$\int_{\varphi_0^{-1}(\beta_t)} d\alpha = \int_{Ce(\varphi_0)} \alpha - \int_{\varphi_0^{-1}[\tilde{\gamma}(t)]} \alpha$$

y como sop $\alpha \subset U$, por 3.2 podemos escribir

$$\int_{\varphi_0^{-1}(\beta_t)} d\alpha = \int_{Ce(\varphi)} \alpha - \int_{\varphi_0^{-1}[\tilde{\gamma}(t)]} \alpha \qquad (1)$$

De la acotación

$$\left| \int_{\varphi_0^{-1}(\beta_t)} d\alpha \right| \leq k_t \mathcal{H}^{2(n-p)+1}(\varphi_0^{-1}(|\beta_t|)) \; \nu(d\alpha)$$

donde $\nu(d\alpha)$ es la comasa de $d\alpha$ [3],[9], y de los lemas 4.1.1 y 4.1.2 se deduce:

$$\lim_{t\to 0} \int_{\varphi_0^{-1}(\beta_t)} d\alpha = 0$$

Así, por (1)

$$\lim_{t\to 0} \int_{\varphi_0^{-1}[\tilde{\gamma}(t)]} \alpha = \int_{Ce(\varphi)} \alpha$$

4.2 - El residuo logarítmico.

4.2.1 - Lema:

Sea $\alpha \in \mathcal{D}^{2(n-p)}(M)$. Tomemos U tal que sop $\alpha \subset U$. Para cada $t\in(0,t_0)$, definamos la función

$$h_t : [0,2\pi]^p \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h_t(\theta) = \int_{\varphi_U^{-1}[\tilde{\gamma}_\theta(t)]} \alpha \ ,$$

donde $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_p)$ y $\tilde{\gamma}_\theta(t) = (t^{n_1}e^{i\theta_1},\ldots,t^{n_p}e^{i\theta_p})$. $\forall\, t \in (0,t_0)$, se verifica:

a) La función h_t es continua

b) $\exists\ M \in R$: $|h_t(\theta)| \leq M$, $\forall \theta \in [0,2\pi]^p$ (M independiente de t).

c) $$\int_{T^p_{\gamma(t)}(\varphi_U)} \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha = i^p \int_{[0,2\pi]^p} h_t(\theta)\, d\theta \ ,$$

donde $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\varphi_p}{\varphi_p}$, $d\theta = d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_p$.

<u>Demostración</u>:

Sean X, I_α , T como en 1.7. Dado que $\forall\, t \in (0,t_0)$, $\tilde{\gamma}_\theta(t) \in X$, para cada $\theta \in [0,2\pi]^p$, y como $h_t(\theta) = I_\alpha(\tilde{\gamma}_\theta(t))$, a) se obtiene de 1.7.

Además, la identificación de I_α con $<T, \varphi, \cdot>(\alpha)$ (cf. 1.7), permite deducir b) como inmediata consecuencia del lema 4-2 de [4] .

Si restringimos φ de modo que tengamos $\varphi: |T^p_{\gamma(t)}(\varphi_U)| \longrightarrow |T^p_{\gamma(t)}(i)|$, resulta (cf. por ej. 3-6-1 de [2]):

$$\int_{T^p_{\gamma(t)}(\varphi_U)} \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha = \int_{T^p_{\gamma(t)}(\varphi_U)} \varphi^*\left(\frac{dz}{z}\right) \wedge \alpha$$

$$= \int_{T^p_{\gamma(t)}(i)} \left(\int_{\varphi^{-1}[z]} \alpha \right) \frac{dz}{z} \ , \qquad)$$

donde $\frac{dz}{z} = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_p}{z_p}$. Haciendo $z_j = t^{n_j} e^{i\theta_j}$, se tiene c).

4.2.2 - Teorema:

Si $Y = \bigcup_{j=1}^{p} V(\varphi_j)$, $\forall \alpha \in \mathcal{E}^{2(n-p)}(W)$,

$$R_Y^p\left[\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha\right] = (2\pi i)^p \int_{C_e(\varphi)} \alpha$$

Demostración:

Sea U como en el lema anterior y tomemos γ admitida por $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, 1)$ sobre U.

Por 2.19,

$$R_Y^p\left[\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha\right] = \lim_{t \to 0} \int_{T^p_{\gamma(t)}(\varphi_0)} \frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha$$

De la parte c) de 4.2.1 se sigue

$$R_Y^p\left[\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha\right] = (2\pi i)^p \lim_{t \to 0} \int_{[0,2\pi]^p} h_t(\theta)\, d\theta$$

Como a) y b) de 4.2.1 nos aseguran que estamos en las hipótesis del teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue, podemos escribir

$$R_Y^p\left[\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha\right] = (2\pi i)^p \int_{[0,2\pi]^p} \left(\lim_{t \to 0} h_t(\theta)\right) d\theta$$

Pero, $\forall \theta \in [0, 2\pi]^p$, $\lim_{t \to 0} h_t(\theta) = \int_{C_e(\varphi)} \alpha$, según el teorema 4.1.3. Por lo tanto,

$$R_Y^p\left[\frac{d\varphi}{\varphi} \wedge \alpha\right] = (2\pi i)^p \int_{[0,2\pi]^p} \left(\int_{C_e(\varphi)} \alpha\right) d\theta = (2\pi i)^p \int_{C_e(\varphi)} \alpha$$

4.3 - Evaluadores ampliados.

4.3.1 - Nos proponemos construir un evaluador generalizado cuyo dominio sea el conjunto $SM_L = \bigcup_{\epsilon>0} SM_{L,\epsilon}$, con $SM_{L,\epsilon}$ el conjunto de las funciones semimeromorfas en $U_{L,\epsilon}$, siendo $U_{L,\epsilon} = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_L) : |\lambda_j - 1| < \epsilon \ , \ j=1,\ldots,L\}$ (cf. 1.8).

Consideraremos a $SM_{L,\epsilon}$ con su topología natural (Esto es, diremos que una sucesión $(f_n)_{n\in N}$, con $f_n \in SM_{L,\epsilon}$,converge a cero si, $\forall\ k\in N$, $\exists\ h_k$ analítica sobre $U_{L,(1-1/k)\epsilon}$ de modo que $h_k f_n \to 0$ uniformemente sobre $U_{L,(1-1/k)\epsilon}$, cuando $n\to\infty$).

A tal fin, interpretaremos el ejemplo 1.8.2 siguiendo un proceso inverso al del capítulo II. Allí, reemplazamos, para el caso de un abierto relativamente compacto, las trayectorias admisibles por trayectorias "de orden finito". Si reescribimos las aplicaciones ω_L de 1.8.2 como:

$$\omega(f) = \frac{1}{L!} \sum_{\sigma\in S_L} \lim_{t\to 0} \frac{1}{(2\pi i)^L} \int_{|\lambda_j - 1| = R_{\sigma(j)}(t)} \frac{f(\lambda)}{(\lambda_1 - 1)\ldots(\lambda_L - 1)}\, d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_L \ .$$

donde $R=(R_1,\ldots,R_L)$: $(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^L$ verifica; $0 < R_1(t) < \ldots < R_L(t) < t$, $R_i(t) > \sum_{j=1}^{i-1} R_j(t)$, podemos considerarlas como límites sobre trayectorias de orden finito. Si queremos extender su dominio al espacio SM_L, deberemos tomar trayectorias admisibles.

Definición:

Un evaluador ampliado es una familia de aplicaciones $e = \{e_L : SM_L \longrightarrow \mathbb{C};\ L \text{ entero positivo}\}$ tal que, $\forall$ L, se satisfacen las condiciones W1) - W6) de 1.8.1.

4.3.2 - Proposición:

Si $\epsilon_L : SM_L \longrightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\epsilon_L(f) = \frac{1}{L!} \sum_{\sigma \in S_L} \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{(2\pi i)^L} \int_{|\lambda_1 - 1| = \delta_{\sigma(1)}} \frac{f(\lambda)}{(\lambda_1 - 1)\cdots(\lambda_L - 1)} \, d\lambda_1 \wedge \cdots \wedge d\lambda_L$$

con $\underline{\delta}$ una trayectoria admisible, entonces $\epsilon = \{\epsilon_L\}_L$ entero positivo } es un evaluador ampliado.

Demostración:

Sólo probaremos que ϵ_L está bien definida, es decir que $\forall\, f \in SM_L$, existe el límite cuando δ tiende a cero, pues es inmediato ver que, en tal caso, se verifican W1) - W6). Para simplificar la notación escribiremos $z_i = \lambda_i - 1$, $z = (z_1, \ldots, z_L)$, $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_L$. Así, debemos probar, la existencia de

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{|z_i| = \delta_{\sigma(i)}} \frac{f(z)}{z_1 \cdots z_L} \, dz \quad , \quad \forall\, \sigma \in S_L \, .$$

Sea $f \in SM_L$ y tomemos un entorno V del origen en $\mathbb{C}^L$ de modo que:

a) Sobre V, $f = g/h$, $g \in C^\infty(V)$, h analítica en V.

b) $\exists\, \pi : W \longrightarrow V$, resolución del producto $z_1 \ldots z_L h$.[6]

En estas condiciones,

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{|z_i| = \delta_{\sigma(i)}} \frac{f(z)}{z_1 \cdots z_L} \, dz = \lim_{\delta \to 0} \int_{|\tilde{z}_i| = \delta_{\sigma(i)}} \frac{\tilde{f}}{\tilde{z}_1 \cdots \tilde{z}_L} \, d\tilde{z} \qquad (1)$$

donde $\tilde{f} = f \circ \pi$, $\tilde{z}_i = z_i \circ \pi$, $i = 1, \ldots, L$.

Ahora bien, $\forall\, x \in W$, $\exists\, W_x$ entorno de x y un sistema de coordenadas $w = (w_1, \ldots, w_L)$ sobre él tales que, en W_x,

$$\tilde{z}_i = g_i w^{\alpha_i} \quad , \quad i=1,\ldots,L$$
$$\tilde{h} = h \circ \pi = g w^{\beta}$$

con g_i, g unidades en W_x, $\alpha_i=(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{iL})$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_L)$, $\alpha_{ij}, \beta_j \in \mathbb{N}$.

Mediante una partición de la unidad en W, subordinada al cubrimiento $\{W_x\}_{x\in W}$, podemos restringirnos a probar la existencia de (1) sobre cada W_x.

Consideremos, pues,, $x \in W$ y el entorno W_x que le hemos asociado. Supongamos σ = identidad (los otros casos son similares).

Si la matriz $\alpha=(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,L\\ j=1,\ldots,L}}$ no es normal, el límite es cero [2] .

Si α es normal, para cada $j \in \{1,\ldots,L\}$ exsite i tal que $\alpha_{ij} \neq 0$. Esto implica que $V(\tilde{h}) \subset \bigcup_{i=1}^{L} V(\tilde{z}_i)$ y por tanto, el límite en cuestión no es otra cosa que el L-residuo de $\dfrac{f}{\tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_L}\, d\tilde{z}$ según las funciones $\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_L$.

Nota:

Si restringimos e_L al conjunto de las funciones meromorfas en algún entorno de $(1,\ldots,1)$ en $\mathbb{C}^L$, no es necesario utilizar el teorema de resolución local de singularidades. En efecto, puede demostrarse sin la intervención de este teorema que dado un conjunto analítico complejo A en un entorno del origen en $\mathbb{C}^L$, $\exists\, \delta_0 \in (0,1)$ tal que, si $0 < \delta < \delta_0$, $|T_{\underline{\delta}}^{L}(i)| \cap A = \emptyset$. Esto, junto con el teorema de Stokes, garantiza que, si $0 < \delta < \delta' < \delta_0$, para toda f meromorfa,

$$\int_{|z_i| = \delta_{\sigma(i)}(\delta)} \frac{f(z)}{z_1 \ldots z_L}\, dz = \int_{|z_i| = \delta_{\sigma(i)}(\delta')} \frac{f(z)}{z_1 \ldots z_L}\, dz$$

Solución

Bibliografía

1 - BOREL, A., HAEFLIGER, A., La classe d'homologie fondamental d'un espace analytique. Bull. Soc. math. France 89, 461-513 (1961).

2 - COLEFF, N., HERRERA, M., Les courants résiduels associés a une forme méromorphe. Edición previa, I.A.M. (1976).

3 - FEDERER, H., Geometric Measure Theory, Springer Verlag, New York, 1969.

4 - HARDT, R.M., Slicing and intersection theory for chains associated with real analytic varieties, Acta Math. 129, 1972, 75-136.

5 - HERRERA, M., Integration on a semianalytic set. Bull. Soc. math. France 94, 141-180, (1966).

6 - HIRONAKA, H., The resolution of singularities of an algebraic variety over a fiel of characteristic zero. Ann. Math. 19, 109-326, (1964)

7 - KING, J.R., The currents defined by analytic varieties. Acta Math. 127, 135-220, (1971).

8 - LOJASIEWICZ, S., Ensembles semi-analytiques. Paris, Presses universitaires de France, 1966 (I.H.E.S).

9 - POLY, J.B., Formule des résidus et intersection des chaines sous-analytiques. Theses, Université de Poitiers (1974).

10 - SPEER, E.R., Generalised Feynman amplitudes. Princeton University Press (1969).