



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis para obtener el grado académico de
Licenciado en Astronomía

DISCOS DE ACRECIÓN CALIENTES EN TORNO A AGUJEROS
NEGROS EN TEORÍAS ALTERNATIVAS DE LA GRAVITACIÓN

Enzo Agustin Saavedra

Directora: Dra. Vieyro Florencia
Co-Directora: Dra. Perez Daniela

LA PLATA, ARGENTINA
- AGOSTO DE 2023 -

Resumen

La Teoría de la Relatividad General es la teoría más exitosa para describir la interacción del espacio-tiempo y otros objetos materiales. Sin embargo, presenta problemas como las singularidades y la incapacidad de reproducir ciertos fenómenos astrofísicos. Como alternativa, han surgido teorías como la gravedad- $f(R)$, que generaliza la acción de Hilbert-Einstein a una función del escalar de Ricci.

Para evaluar la viabilidad de la gravedad- $f(R)$, es fundamental analizarla en el régimen de gravedad de campo fuerte, lo cual puede lograrse estudiando las manifestaciones astrofísicas de agujeros negros. Los agujeros negros astrofísicos interactúan con su entorno y dan lugar a diversos fenómenos, como discos de acreción, chorros de plasma relativistas en núcleos galácticos activos y explosiones de rayos- γ .

Los discos de acreción se clasifican en distintos regímenes según la tasa de acreción de materia sobre el objeto compacto. Para tasas de acreción altas, el flujo puede modelarse con la solución estándar de disco delgado y ópticamente grueso de Shakura-Sunyaev. Por otro lado, para tasas de acreción bajas, las densidades del disco son bajas, y la interacción Coulombiana entre iones y electrones no es eficiente. Esto genera un plasma de dos temperaturas, con los iones mucho más calientes que los leptones, que radia de forma ineficiente. Los modelos de disco caliente más exitosos son los de flujos dominados por advección, conocidos como ADAF (*Advection Dominated Accretion Flows*). Una solución aproximada y similar, pero con la ventaja de ser semi-analítica, es la de los modelos de *Toro de Iones*.

Esta tesis presenta el desarrollo del modelo del *Toro de Iones* con el objetivo de estudiar los efectos de la gravedad- $f(R)$ en el régimen de campo fuerte.

Abstract

General relativity is the most successful theory describing the interaction of spacetime and other material objects. However, it has problems such as singularities and the inability to reproduce certain astrophysical phenomena. As an alternative, theories such as $f(R)$ gravity have emerged, which generalize the Hilbert-Einstein action to a function of the Ricci scalar.

To assess the viability of $f(R)$ gravity, it is essential to analyze it in the strong-field regime, which can be achieved by studying the astrophysical manifestations of black holes. Astrophysical black holes interact with their surroundings and give rise to various phenomena, such as accretion disks, relativistic plasma jets in active galactic nuclei, and gamma-ray bursts.

Accretion disks are classified into different regimes depending on the rate at which matter is accreted onto the compact object. For high accretion rates, the flow can be modeled using the standard Shakura-Sunyaev thin and optically thick disk solution. On the other hand, at low accretion rates, the disk densities are low and the Coulomb interaction between ions and electrons is inefficient. This leads to a two-temperature plasma, with ions much hotter than leptons, which radiate inefficiently. The most successful models for hot accretion disks are those dominated by advection, known as ADAF (Advection Dominated Accretion Flows). An approximate and similar solution, but with the advantage of being semi-analytic, is that of the Ion Tori models.

This thesis presents the development of the Ion Tori model with the aim of studying the effects of $f(R)$ -gravity in the strong field regime.

Agradecimientos

El tiempo pasó rápido a lo largo de estos años, quizás debido a lo bien que la pasé junto a cada persona con la que me rodeé. Mi agradecimiento va dirigido a cada una de ellas, ya que sin duda hicieron que este camino fuera muy ameno.

En lo académico tuve el azar de cruzarme con personas maravillosas, que tuvieron la pasión y sobretodo la paciencia para mostrarme el hermoso mundo de la ciencia.

A mi profesor consejero, Gustavo, que siempre me supo guiar a buenos puertos.

A mis directoras, Flor y Dani, quienes sin duda tuvieron la paciencia y el cariño para orientarme en esta etapa.

A todo el grupo de Rayos X, Foga, Jorge, FedeG, que siempre me brindaron su apoyo en cada proyecto que emprendí. Gracias por acompañarme en todo.

A Sofia, mi compa de mates, pastito y sol.

A mis viejos, que sin ese apoyo incondicional no hubiera logrado nada.

Nuevamente, esta lista no es extensiva, por lo cual agradezco a cada persona que me cruce a lo largo de estos años.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Resumen | iii |
| Abstract | v |
| Agradecimientos | vii |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Relatividad General | 5 |
| 2.1. Introducción | 5 |
| 2.2. Soluciones de las ecuaciones de campo | 7 |
| 2.2.1. Métrica de Kerr-Newman | 7 |
| 2.2.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker | 10 |
| 2.2.3. Modelo Λ CDM | 12 |
| 2.2.4. Materia oscura | 13 |
| 2.2.5. Campo de energía oscura | 14 |
| 2.3. Problemas en la Relatividad General | 15 |
| 2.4. Teoría de la gravitación- $f(R)$ | 16 |
| 3. Flujos de acreción en torno a agujeros negros | 19 |
| 3.1. Flujo de acreción según la tasa de acreción | 20 |
| 3.1.1. Disco de acreción estándar | 20 |
| 3.1.2. Acreción subcrítica | 21 |
| 3.1.3. Acreción supercrítica | 21 |
| 3.2. Modelo del <i>Toro de Iones</i> | 23 |
| 3.2.1. Geometría del toro | 25 |
| 3.2.2. Microfísica del plasma | 29 |
| 4. <i>Toro de Iones</i> en gravedad-$f(R)$ | 33 |
| 4.1. Espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ | 33 |
| 4.2. Construcción del <i>Toro de Iones</i> en gravedad- $f(R)$ | 37 |
| 5. Distribución espectral de energía | 47 |
| 5.1. Pérdidas radiativas en torno de agujeros negros acretantes | 48 |
| 5.1.1. Emisividad Bremsstrahlung | 48 |
| 5.1.2. Emisividad sincrotrón | 49 |
| 5.1.3. Comptonización | 50 |
| 5.2. Distribuciones espectrales de energía en gravedad- $f(R)$ | 51 |
| 5.3. Aplicación del modelo a la fuente Sgr A* | 56 |
| | ix |

ÍNDICE GENERAL

| | |
|------------------------|-----------|
| 6. Conclusiones | 59 |
| Bibliografía | 61 |

Acrónimos

Lista de acrónimos utilizados en esta tesis (notar que las siglas usualmente corresponden a las utilizadas en el idioma inglés):

- EHT: *Event Horizon Telescope*
- ngEHT: *Next Generation Event Horizon Telescope*
- GR: Relatividad General (*General Relativity*)
- BH: Agujero Negro (*Black Hole*)
- FLRW: *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*
- SSD: *Shakura-Sunyaev accretion Disk*
- ADAF: Flujo de acreción dominados por advección (*Advection-Dominated Accretion Flow*)
- GC: Centro Galáctico (*Galactic Center*)
- HAF: Flujo de acreción caliente (*Hot Accretion Flow*)
- HBB: Big Bang caliente (*Hot Big Bang*)
- SED: Distribución Espectral de Energía (*Spectral Energy Distribution*)
- SMBH: Agujero Negro Supermasivo (*Supermassive Black Hole*)
- BHXB: Sistema Binario de Rayos X con un Agujero Negro (*Black Hole X-ray Binaries*)
- ULX: Fuentes de Rayos X Ultraluminosas (*Ultraluminous X-Ray Sources*)
- ISCO: Órbita circular estable más interna (*Innermost Stable Circular Orbit*)
- IC: Compton inverso (*Inverse Compton*)
- GRMHD: Magnetohidrodinámica en Relatividad General (*General Relativity Magnetohydrodynamics*)
- STVG: Gravedad Escalar-Tensorial-Vectorial (*Scalar-Tensorial-Vectorial Gravity*)

Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | La sombra del agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea, Sgr A*, obtenida por la colaboración Event Horizon Telescope. | 2 |
| 2.1. | Esquema del interior de un BH de Kerr. | 10 |
| 2.2. | Expansión del universo. La distancia co-móvil entre los puntos x_1 y x_2 en una grilla que sirve como sistema de coordenadas se mantiene constante a medida que el universo se expande; en este caso, $ x_2 - x_1 = 1$ (Dodelson, 2003). | 11 |
| 3.1. | Se muestran cuatro tipos de modelos de discos de acreción analíticos y semi-analíticos: las <i>donas polacas</i> (<i>Polish doughnuts</i> en inglés), con alturas moderadas ($h > 1$), tasas de acreción altas ($\dot{m} \gg 1$) y ópticamente gruesos ($\tau \gg 1$) (curva sólida en la parte superior derecha) , discos delgados $h \ll 1$, $\dot{m} \ll 1$, $\tau \gg 1$ (parte inferior de la curva sólida en el lado derecho); discos delgados $h \leq 1$, $\dot{m} \sim 1$, $\tau \gg 1$ (parte superior de la curva sólida en el lado derecho); ADAFs $h \lesssim 1$, $\dot{m} \ll 1$, $\tau \ll 1$ (curva sólida en el lado izquierdo); y los <i>ion tori</i> $h > 1$, $\dot{m} \ll 1$, $\tau \ll 1$. Se muestran secuencias de modelos para un valor particular del parámetro de viscosidad α , $\alpha = 0.1$, y una masa de BH, $M = 10M_\odot$. Figura tomada de Abramowicz & Fragile (2013) | 22 |
| 3.2. | Ilustración de un toroide soportado por la presión de iones, rodeando un BH de Kerr. Adaptado de Rees et al. (1982). | 24 |
| 3.3. | Curvas equipotenciales usando $\lambda = 0.7$. En el centro un BH de Kerr con un spin de $0.99M$, la línea negra punteada representa la ergosfera y la línea amarilla central representa el anillo de singularidad. El gradiente de color representa el valor de potencial normalizado, siendo este más grande en el centro del toro y a más chico a medida que se aleja del mismo. | 27 |
| 3.4. | Momento angular específico kepleriano de un BH de Kerr asociado a diferentes valores del spin. | 29 |
| 3.5. | Temperatura asociada a los iones usando $\lambda = 0.7$. En el centro un BH de Kerr con un spin de $0.99M$, y su estructura asociada. | 31 |
| 4.1. | Escalar de Ricci en función de la coordenada radial para un BH en Kerr- $f(R)$ con $a = 0.99$ | 34 |
| 4.2. | Diagrama de la estructura de un BH en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ para los valores de $R_0 \in [-0.13, 0]$ (panel izquierdo). Fig. derecha: diagrama de la estructura de un BH en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ para los valores $R_0 \in (0, 0.6]$. Fig. adaptada de Cembranos et al. (2011). | 35 |
| 4.3. | Momento angular específico del <i>toro</i> en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y para $a = 0.85$ (panel derecho). En negro se representa Kerr. La barra de color representa la variación del parámetro R_0 | 35 |

| | |
|--|----|
| 4.4. Momento angular específico del <i>toro</i> en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y para $a = 0.1$ (panel derecho). En negro se representa Kerr. La barra de color representa la variación del parámetro R_0 | 36 |
| 4.5. Potencial efectivo normalizado asociado al <i>toro</i> en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω | 37 |
| 4.6. Potencial efectivo normalizado asociado al <i>toro</i> en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.85$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω | 37 |
| 4.7. Potencial efectivo normalizado asociado al <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω | 38 |
| 4.8. Potencial efectivo normalizado asociado al <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.1$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω | 38 |
| 4.9. Superficies equipotenciales del <i>toro</i> para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.99$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular. | 39 |
| 4.10. Superficies equipotenciales del <i>toro</i> para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.85$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular. | 39 |
| 4.11. Superficies equipotenciales del <i>toro</i> para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.5$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular. | 40 |
| 4.12. Superficies equipotenciales del <i>toro</i> para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.1$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular. | 40 |
| 4.13. Densidad de energía del <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y $a = 0.85$ (panel derecho) | 43 |
| 4.14. Densidad de energía del <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y $a = 0.1$ (panel derecho). | 43 |
| 4.15. Temperatura de los electrones del <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y $a = 0.85$ (panel derecho). | 44 |
| 4.16. Temperatura de los electrones del <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y $a = 0.1$ (panel derecho). | 44 |
| 4.17. Temperatura de los iones del <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y $a = 0.85$ (panel derecho). | 44 |
| 4.18. Temperatura de los iones del <i>toro</i> de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y $a = 0.1$ (panel derecho). | 45 |
| 5.1. Distribución espectral de energía del <i>toro</i> sobre un BH de Kerr con $a = 0.5$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Sincrotrón y Comptonización. | 51 |
| 5.2. Panel superior: Distribución espectral de energía del <i>toro</i> sobre un BH de Kerr con $a = 0.99$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Sincrotrón y Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 | 52 |
| 5.3. Panel superior: Distribución espectral de energía del <i>toro</i> sobre un BH de Kerr con $a = 0.85$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Sincrotrón y Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 | 53 |

| | |
|--|----|
| 5.4. Panel superior: Distribución espectral de energía del <i>toro</i> sobre un BH de Kerr con $a = 0.5$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Sincrotrón y Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 | 54 |
| 5.5. Panel superior: Distribución espectral de energía del <i>toro</i> sobre un BH de Kerr con $a = 0.1$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Sincrotrón y Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 | 55 |
| 5.6. SED de radio a rayos X de Sgr A*. Los puntos azules muestran densidades de flujo observadas rebineadas (Falcke et al., 1998; An et al., 2005; Bower et al., 2015, 2019; Liu et al., 2016); los puntos coloreados tenues representan límites superiores para la densidad de flujo media. Las líneas grises sólidas de 4.5 a 2.2 μm muestran SEDs del modelo para los percentiles 5, 50 y 95, y muestran el cambio de pendiente predicho en función de la densidad de flujo. Los puntos verdes en 2.2 μm representan el análisis más reciente de los percentiles 5, 50 y 95 de la distribución de densidad de flujo en NIR basado en datos de VLTI/GRAVITY. El área sombreada en naranja representa una estimación del rango de densidades de flujo en el 90% del tiempo observado. Tomado de (Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022f) | 57 |
| 5.7. Ajuste de los datos de Sgr A* con una distribución espectral de energía del <i>toro</i> sobre un BH de Kerr con $a = 0.1$. Los puntos representan las luminosidades tomadas de Zylka et al. (1992); Telesco et al. (1996); Cotera et al. (1999); Schödel et al. (2011); Stone et al. (2016); Zhang et al. (2017); von Fellenberg et al. (2018). | 58 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 3.1. Parámetros y valores asociados usados para modelar el mapa de temperatura de los iones del <i>toro</i> . $T_{e,c}$ corresponde a unidades de Kelvin y ϵ_c en g cm^{-3} | 30 |
| 4.1. Localización de las órbitas circulares marginalmente limitadas (r_{mb}), órbitas circulares estables más internas (r_{isco}), órbitas del derrame gravitacional (r_{dgrav}), órbitas central del <i>toro</i> ($r_{central}$), horizontes de sucesos (r_{eh}), horizontes cosmológicos (r_{ch}), y de las órbitas circulares estables más externas (r_{osco}) para los escalares de Ricci positivos y negativos, para un BH con $a = 0.99$ en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ | 41 |
| 4.2. Idem Tabla 4.1 para $a = 0.85$ | 42 |
| 4.3. Idem Tabla 4.1 para $a = 0.5$ | 42 |
| 4.4. Idem Tabla 4.1 para $a = 0.1$ | 42 |

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta Tesis es investigar fuentes astrofísicas en el contexto de teorías alternativas de la Relatividad General (GR, por sus siglas en inglés). En particular, nos enfocaremos en el estudio del proceso de acreción en el marco de gravedad- $f(R)$.

La teoría de la Relatividad General es la teoría más exitosa hasta la fecha para la descripción de la interacción del espacio-tiempo y otros objetos materiales. A más de 100 años del descubrimiento de las ecuaciones de campo por Einstein, la Relatividad General continúa mostrando su extraordinario poder predictivo (Abbott et al., 2016; Abbott et al., 2019, 2021).

Esta teoría ha sido probada en numerosos escenarios utilizando diferentes herramientas observacionales y en diversos sistemas astrofísicos (ver revisión de Will 2014 y referencias allí). Tradicionalmente, estas pruebas se han llevado a cabo dentro del sistema solar, incluyendo el estudio de la precesión del periastro de Mercurio (Verma et al., 2014), la deflexión de la luz observada durante los eclipses solares (Lambert & Le Poncin-Lafitte, 2011) y la detección del efecto Shapiro -retraso temporal gravitacional- en fotones que rozan la superficie solar (Bertotti et al., 2003). Además, las observaciones de radio de púlsares en sistemas binarios han ampliado estas pruebas, permitiendo investigar los aspectos radiativos de la teoría y la interacción entre la materia y los campos gravitacionales (Stairs, 2003; Wex & Kramer, 2020; Kramer et al., 1999; Kramer et al., 2021). Sin embargo, es una teoría defectuosa como el propio Einstein manifestó en relación al problema de las singularidades (Romero, 2012).

Una perspectiva para intentar resolver los problemas de esta teoría, que podría parecer más radical, es la siguiente: la gravedad es la interacción dominante a escalas cosmológicas y, por lo tanto, es la fuerza que rige la evolución del Universo. ¿Podría ser que nuestra descripción de la interacción gravitacional a las escalas relevantes no sea lo suficientemente adecuada? ¿Deberíamos considerar modificar nuestra teoría de la gravitación?

El fin de esto no es argumentar si esta perspectiva sería mejor que cualquiera de las otras soluciones propuestas, pero definitivamente es una forma diferente de abordar los mismos problemas y, mientras estos problemas no encuentren una solución plausible, bien aceptada y simple, vale la pena explorar todas las alternativas. Además, cuestionar la teoría de la gravitación en sí misma tiene sus méritos ya que nos ayuda a obtener una comprensión más profunda de los problemas relevantes y de la interacción gravitacional, tiene altas probabilidades de llevarnos a una nueva física y ha funcionado en el pasado. Frente a esta situación, han surgido a lo largo de los años teorías alternativas a la Relatividad General que intentan remediar algunos de los problemas mencionados. Entre éstas se destacan las teorías conocidas como gravedad- $f(R)$.

En gravedad- $f(R)$, la acción de Hilbert-Einstein se generaliza a una función arbitraria del escalar de Ricci (De Felice & Tsujikawa, 2010; Sotiriou & Faraoni, 2010; Faraoni & Capozziello, 2011). Si la gravedad- $f(R)$ ha de ser una teoría viable de la gravitación, es

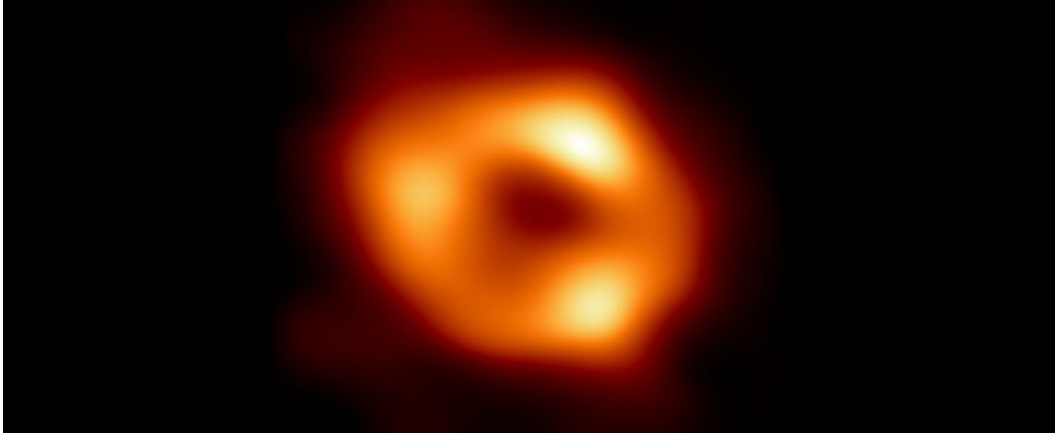


Figura 1.1. La sombra del agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea, Sgr A*, obtenida por la colaboración Event Horizon Telescope.

fundamental analizar la misma en el régimen de gravedad de campo fuerte. Un escenario idóneo lo constituyen los agujeros negros, los cuales generan los fenómenos más extremos del Universo. La investigación de las manifestaciones astrofísicas de agujeros negros en este régimen pueden luego utilizarse para evaluar y poner a prueba estas teorías.

Los agujeros negros astrofísicos al interactuar con su entorno local dan lugar a una variada fenomenología: formación de discos de acreción, chorros de plasma relativistas en núcleos galácticos activos y explosiones de rayos- γ , entre otros. Recientemente, la colaboración del Event Horizon Telescope (EHT) ha obtenido imágenes de las sombras generadas por los discos de acreción de M87* y Sgr A*. Estas observaciones representan una de las pruebas más sólidas de la existencia de agujeros negros supermasivos (en inglés, *Supermassive Black Holes*, SMBHs) en el núcleo de las galaxias. Un ejemplo claro de ello se aprecia en la Fig. 1.1, donde se puede observar la sombra de Sgr A*, el SMBH en el centro de nuestra Galaxia (Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022a,b,c,d,e,f).

Los modelos de disco caliente más exitosos para describir los procesos de acreción en torno a M87* y Sgr A* son los de flujos dominados por advección, conocidos como ADAF (*Advection Dominated Accretion Flows*, Narayan & Yi 1995; Ramesh Narayan & Gammie 1997; Yuan et al. 2003.) Una solución aproximada y con algunas propiedades similares, pero con la ventaja de ser semi-analítica, es la de los modelos de toros (llamados *toros de iones*) (Ichimaru, 1977; Abramowicz et al., 1978; Rees et al., 1982). Este modelo ha sido utilizado en el marco de la Relatividad General para estudiar la fuente Sgr A* (Straub et al., 2012). También se usó para estudiar la desviación de la métrica Johannsen-Psaltis (Johannsen & Psaltis, 2011) en el contexto de Sgr A* (Lin et al., 2015), encontrando una degeneración significativa entre la determinación del momento angular del objeto compacto (*-spin*)- y de las posibles desviaciones de la métrica de Kerr.

En este trabajo, nos proponemos extender el modelo de *toro de iones* al contexto de gravedad- $f(R)$. Nuestro enfoque consistirá en el estudio detallado de las órbitas de partículas masivas en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$, considerando diferentes valores del escalar de Ricci denotado como R_0 . Posteriormente, analizaremos la configuración de las superficies equipotenciales que conforman el toro y procederemos a caracterizar sus propiedades termodinámicas.

Además, examinaremos los procesos radiativos relevantes y las distribuciones espectrales de energía generadas en el toro. Para cada caso, realizaremos comparaciones con los resultados obtenidos en GR para detectar posibles características que permitan acotar los valores del

parámetro R_0 .

En este contexto, las capacidades observacionales actuales son idóneas para estudiar los efectos de la gravedad- $f(R)$ en el régimen de campo fuerte. Particularmente, los resultados obtenidos por la colaboración EHT para Sgr A* y los que se obtendrán próximamente con la nueva generación del Event Horizon Telescope (ngEHT, <https://www.ngeht.org/>) brindan una oportunidad única para investigar escenarios alternativos a la GR y examinar las posibles desviaciones de la teoría de Einstein.

Capítulo 2

Relatividad General

2.1. Introducción

La Teoría de la Relatividad General es una teoría que versa sobre la gravitación y los sistemas físicos con los cuales interactúa. Contrario a lo que comúnmente se encuentra en la literatura, no constituye una teoría concerniente al espacio-tiempo (Romero, 2013), dado que todas las teorías clásicas de campos presuponen el concepto de espacio-tiempo, el cual fue introducido por Minkowski (1908, 1909).

La representación del espacio-tiempo se logra mediante una variedad real cuatridimensional E equipada con un tensor métrico g_{ab} : $ST = [E, g_{ab}]$. Para determinar la estructura geométrica del espacio-tiempo y comprender los efectos de la gravedad, es esencial establecer una ley que defina la métrica a partir de la fuente del campo gravitacional. Dicha fuente es representada por los campos materiales, que a su vez son descritos por el *tensor de energía-momento* (T_{ab}). Este tensor de campo captura las características físicas de los sistemas materiales, mientras que la curvatura de cualquier evento se encuentra determinada por la distribución de energía-momento presente en dicho evento.

Hace más de un siglo, en noviembre de 1915, Albert Einstein halló las ecuaciones de campo de la GR (Einstein, 1915), que representan una ley física fundamental. Las Ecs. de campo de la GR pueden obtenerse a través de un principio variacional que fue desarrollado por David Hilbert a fines de 1915. Para lograr esto, es necesario definir una densidad *Lagrangiana* que cumpla dos condiciones:

- Ser un escalar bajo transformaciones generales de coordenadas.
- Depender de las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

El escalar más básico que se puede construir utilizando la métrica y sus derivadas es el escalar de Ricci, denotado como R . Así, la forma más sencilla de la acción, conocida como acción de Einstein-Hilbert, es de la siguiente forma:

$$S_{EH} = \int d^4x R \sqrt{-g}, \quad (2.1)$$

donde la densidad *Lagrangiana* es $\mathcal{L} = R \sqrt{-g}$, y g es el determinante del tensor métrico. Si introducimos una variación en la métrica denotada como $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, llegamos a la siguiente variación de la acción:

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (2.2)$$

2. Relatividad General

Si exigimos que $\delta S_{EH} = 0$ y consideramos un $\delta g_{\mu\nu}$ obtenemos las Ecs. de campo de Einstein en el vacío:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde G es la constante gravitatoria, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ con $R_{\mu\nu}$ y R el tensor y escalar de Ricci, respectivamente. De aquí en adelante, nos referiremos a las Ecs. de campo y sus soluciones asociadas bajo la signatura Landau-Lifshitz $(-, +, +, +)$.

La conservación del tensor de energía momento ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) implica que las partículas se mueven sobre geodésicas ⁽ⁱ⁾ de la métrica. Para ver esto, podemos extremizar la acción para una partícula puntual

$$S = -m \int ds, \quad (2.4)$$

donde m es la masa de la partícula y $s = \int \sqrt{-g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}$ es el tiempo propio.

Podemos encontrar el límite no relativista de esta teoría considerando perturbaciones alrededor de la métrica de Minkowski en el gauge Newtoniano conforme, que está dado por el elemento de línea:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Psi)dx^2, \quad (2.5)$$

donde los potenciales métricos Φ y Ψ son independientes del tiempo. Utilizando 2.5, junto con la condición no relativista $dx^i/dx^0 = v/c \ll 1$ en la ecuación geodésica, encontramos que las partículas evolucionan de acuerdo a

$$\ddot{x} = -\nabla\Phi, \quad (2.6)$$

donde Φ se identifica con el potencial newtoniano Φ_N . Usando las Ecs. de Einstein con una fuente de densidad no relativista $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, P, P, P)$ tal que $P \ll \rho c^2$, obtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho, \quad (2.7)$$

luego la GR reproduce la ley de gravitación de Newton exactamente en el límite no relativista.

La acción de Einstein-Hilbert puede incluir una constante cosmológica Λ sin introducir nuevos grados de libertad. En este caso, la acción se convierte en

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + S_m[g_{\mu\nu}], \quad (2.8)$$

donde R es el escalar de Ricci, $\kappa^2 = 8\pi G$, y S_m es la acción de la materia. Las Ecs. de Einstein modificadas son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

En el límite newtoniano, el potencial newtoniano efectivo es

$$\Phi_N = \Phi_{N,0} - \frac{1}{6}\Lambda r^2, \quad (2.10)$$

donde $\Phi_{N,0}$ es el potencial newtoniano en ausencia de una constante cosmológica.

La teoría de la GR no sólo es capaz de proporcionar explicaciones para fenómenos fuera del alcance de la gravedad newtoniana, sino que ha permitido revelar una de las manifestaciones más extremas de la gravitación, esto es, los *agujeros negros*.

⁽ⁱ⁾ Las geodésicas tienen dos propiedades definitorias equivalentes. Primero, su vector tangente siempre apunta en la misma dirección y, segundo, es la curva de longitud más corta entre dos puntos.

2.2. Soluciones de las ecuaciones de campo

La primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein fue encontrada por Karl Schwarzschild en 1916. Esta métrica es una solución de vacío de las ecuaciones de campo, y describe la geometría del espacio-tiempo alrededor de una masa esféricamente simétrica y no rotante. La métrica se caracteriza por un único parámetro que es la masa. La métrica de Schwarzschild describe la geometría del espacio-tiempo fuera de un *agujero negro* (BH, por sus siglas en inglés, *Black Hole*), si la masa queda contenida dentro del radio de Schwarzschild ⁽ⁱ⁾.

Posteriormente, en 1921, Gunnar Nordström encontró una solución a las Ecs. de campo de Einstein que describe la geometría del espacio-tiempo de un BH caracterizado por su masa y su carga.

Roy Kerr hizo un avance significativo en 1963 al encontrar una solución axisimétrica a las Ecs. de campo de Einstein. Esta solución está caracterizada por dos parámetros, la masa y momento angular del BH. En 1965, Ezra T. Newman descubrió una solución similar, pero que también incluía la carga eléctrica. Esta solución se conoce como la solución Kerr-Newman.

La solución de Kerr-Newman no caracteriza la geometría de un BH porque hay razones para pensar que los BH no tienen carga eléctrica. Estas soluciones han sido extensamente utilizadas para estudiar los efectos de la gravedad en la radiación, las ondas gravitacionales y partículas relativistas.

La solución de Kerr-Newman abarca y unifica todas las soluciones mencionadas anteriormente. En lo que sigue describiremos en detalle dicha solución.

2.2.1. Métrica de Kerr-Newman

La métrica de Kerr-Newman representa la solución estacionaria, axisimétrica y asintóticamente plana más simple de las Ecs. de Einstein en presencia de un campo electromagnético en cuatro dimensiones. Dicha métrica está caracterizada por 3 parámetros: masa (M), momento angular (a), y carga (Q). El elemento de línea está dado por:

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 - 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2, \quad (2.11)$$

donde las componentes de la métrica son:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \left[1 - \frac{(2Mr - Q^2)}{\rho^2} \right], \\ g_{t\varphi} &= \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2} [2Mr - Q^2], \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta_r], \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta_r}, \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde

⁽ⁱ⁾El origen de la expresión *agujero negro*, introducida por John A. Wheeler a mediados de la década de 1960, viene del hecho de que los eventos en el interior del horizonte de eventos no tiene influencia causal sobre los eventos que están fuera del horizonte. Por lo que el BH es la región del espacio-tiempo dentro del horizonte de eventos.

$$\begin{aligned}\Delta_r &\equiv r^2 - 2 M r + a^2 + Q^2, \\ \rho^2 &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Se supone que los agujeros negros astrofísicos no poseen carga eléctrica, debido a su inmersión en entornos ricos en plasma. Esto les permite absorber con rapidez partículas cargadas y, así, neutralizar cualquier desequilibrio de carga. Por esta razón, la métrica de Kerr (Kerr, 1963), que es el caso especial de la métrica de Kerr-Newman con carga eléctrica cero, es de gran importancia en astrofísica. La *hipótesis de Kerr* establece que todos los BH astrofísicos aislados, estacionarios y sin carga se describen mediante la métrica de Kerr. Esta hipótesis es una consecuencia de la suposición de que la GR describe con precisión los fenómenos gravitacionales y los teoremas de unicidad de BH que se deducen dentro de la teoría. El espacio-tiempo alrededor de los BH astrofísicos conocidos parece estar bien descrito por la solución de Kerr, dada por:

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 - 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2.\tag{2.14}$$

La componente de la métrica son:

$$\begin{aligned}g_{tt} &= 1 - \frac{2 M r}{\rho^2}, \\ g_{t\varphi} &= \frac{2 a M r \sin^2 \theta}{\rho^2}, \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta_r], \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta_r}, \quad g_{\theta\theta} = \rho^2,\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde

$$\Delta_r \equiv r^2 + a^2 - 2 M r,\tag{2.16}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta.\tag{2.17}$$

En el límite $a \rightarrow 0$, la métrica de Kerr se reduce a la de Schwarzschild.

La solución de Kerr es la única solución estacionaria axisimétrica de vacío que satisface las Ecs. de campo de la GR. Esta afirmación ha sido demostrada por diversos autores, entre ellos Carter (1971), Hawking (1972) y Robinson (1975). A diferencia de la solución estática de Schwarzschild, que se recupera cuando el parámetro de rotación a es cero, la solución de Kerr no cumple el teorema de Birkhoff ⁽ⁱⁱ⁾. Esto significa que la geometría del espacio-tiempo alrededor de una estrella rotante no queda completamente determinada por esta solución. De hecho, una estrella rotante genérica puede tener momentos multipolares gravitacionales distintos a los de la solución de Kerr.

No obstante, es importante resaltar que, si la estrella rotante colapsa y forma un BH, la solución exterior se aproximará asintóticamente a la solución de Kerr. Este resultado no se verifica para un colapso esféricamente simétrico, donde la geometría externa coincide siempre con la solución de Schwarzschild.

⁽ⁱⁱ⁾ Establece que cualquier solución esféricamente simétrica de las Ecs. de campo del vacío debe ser estática y asintóticamente plana. Esto significa que la solución exterior (es decir, el espacio-tiempo fuera de un cuerpo esférico y no rotante) debe estar dada por la métrica de Schwarzschild.

La condición $\Delta = 0$, que implica que g_{rr} tiende a infinito, define la superficie del horizonte de eventos:

$$r_{\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2.18)$$

Existen dos horizontes de eventos para la métrica de Kerr, denominados r_+ y r_- , respectivamente. Cuando consideramos el límite de Schwarzschild, es decir, $a \rightarrow 0$, la Ec. 2.18 se simplifica a $r_+ \rightarrow 2M$ y $r_- \rightarrow 0$. El segundo horizonte, r_- , se encuentra en el interior del horizonte de eventos externo r_+ ; además, el horizonte interno oculta la singularidad. La Ec. 2.18 revela que si $M - a^2 < 0$, no existen horizontes de eventos y se tiene una singularidad desnuda, por lo tanto no representaría a un BH.

En la solución de Kerr se genera un fenómeno conocido como arrastre de sistemas inerciales, en donde existe un límite estático, determinada por un punto a partir del cual es imposible evitar rotar con el BH. La región entre el límite estático y el horizonte de eventos se denomina *ergosfera*. Ésta no es esférica, sino que su forma cambia con la latitud θ . Se puede determinar su forma resolviendo la ecuación $g_{tt} = 0$, la cual es:

$$r_e = \frac{1}{2} \left[M + \sqrt{M^2 - 2M^2/a^2 \cos^2 \theta} \right]. \quad (2.19)$$

La superficie del límite estático y el horizonte de eventos solo coinciden en los polos. El fenómeno de arrastre inercial es común a todas las métricas axialmente simétricas con $g_{t\phi} \neq 0$.

Las singularidades ⁽ⁱⁱⁱ⁾ esenciales del espacio-tiempo de Kerr se pueden determinar analizando las divergencias del escalar de Kretschmann, que se define como:

$$K = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.20)$$

$$= \frac{48 M r^3}{\rho^6} - \frac{24 M a^2 r \sin^2 \theta}{\rho^6} + \frac{24 M a^4 r \sin^4 \theta}{\rho^6}, \quad (2.21)$$

$$= \frac{r^2 - 2 M r + a^2}{\rho^6} - \frac{4 a^2 r^2 \sin^2 \theta}{\rho^6}, \quad (2.22)$$

se puede inferir que $K \rightarrow \infty$ para cualquier valor de las coordenadas r y θ que cumplan con la condición:

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (2.23)$$

Esta condición se satisface solamente para $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, que en coordenadas cartesianas (x, y, z) cumplen:

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \quad (2.24)$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \quad (2.25)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.26)$$

Consideremos las Ecs.:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (2.27)$$

$$z = 0. \quad (2.28)$$

⁽ⁱⁱⁱ⁾Las singularidades son características patológicas de algunas soluciones de las Ecs. fundamentales de la teoría, en este caso, la Relatividad General.

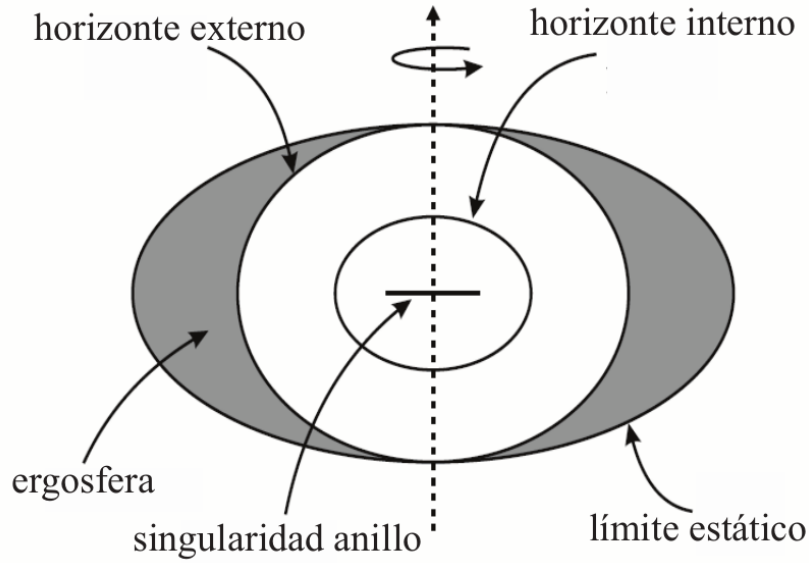


Figura 2.1. Esquema del interior de un BH de Kerr.

La singularidad que describe este sistema es un anillo de radio ac^{-1} en el plano ecuatorial. Si a es igual a cero, entonces se recupera la singularidad puntual de Schwarzschild. Sin embargo, cuando a no es igual a cero, la singularidad no necesariamente se encuentra en el futuro de todos los eventos con coordenada radial $r < r_-$, lo que significa que puede evitarse para algunas geodésicas. Esta singularidad se conoce como una singularidad escalar tipo tiempo.

La métrica de Kerr es la adecuada para describir agujeros negros astrofísicos. Por otro lado, la métrica de Minkowski ^(iv) es adecuada para describir la física en una región pequeña de espacio-tiempo, donde los efectos de la curvatura son despreciables. Esta métrica tiene la propiedad de que la distancia entre dos puntos del espacio-tiempo es invariante bajo transformaciones de Lorentz, es decir que es la misma para todos los observadores inerciales. A escalas cosmológicas, la métrica de Minkowski necesita ser sustituida para que capte el hecho de que el universo se está expandiendo. En lo que sigue presentaremos a la métrica obtenida por los Srs. Friedmann, Lemaître, Robertson y Walker que nos ayudará a describir un universo en expansión.

2.2.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker

La métrica de *Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker* (FLRW) describe la geometría del espacio-tiempo de un universo homogéneo e isotrópico en expansión, y se puede escribir como:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.29)$$

donde k describe la curvatura (constante en el tiempo) y $a(t)$ es el factor de escala. El papel del factor de escala adimensional $a(t)$ es modificar las distancias en el tiempo.

Para establecer el factor de escala se consideran coordenadas co-móviles y se evalúa en el tiempo presente t_0 como unidad: $a_0 = a(t_0) = 1$ donde el subíndice 0 siempre denotará el valor de una cantidad evaluada hoy. La misma escala con $a(t)$ se observa para la distancia entre cualquier par de puntos. Si elegimos una función $a(t)$ con $\dot{a} > 0$, entonces la distancia entre cualquier par de puntos está aumentando. De esta manera se cuantifica la expansión

^(iv)Elemento de línea de Minkowski en coordenadas cartesianas: $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$

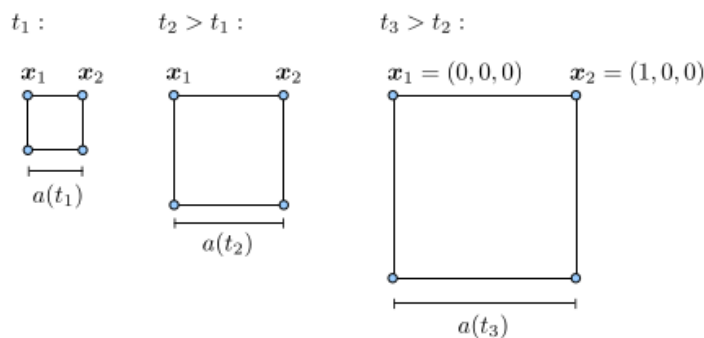


Figura 2.2. Expansión del universo. La distancia co-móvil entre los puntos x_1 y x_2 en una grilla que sirve como sistema de coordenadas se mantiene constante a medida que el universo se expande; en este caso, $|x_2 - x_1| = 1$ (Dodelson, 2003).

del universo: por ejemplo dos galaxias, en coordenadas co-móviles fijas, se alejaran a medida que el espacio-tiempo se estira (ver Fig 2.2). La distancia física es proporcional a la distancia co-móvil multiplicada por el factor de escala, por lo que aumenta a medida que transcurre el tiempo (Tong, 2019). De manera similar, una métrica con $\dot{a} < 0$ describe un universo en contracción.

La métrica representa una solución que describe las consecuencias geométricas y cinemáticas de universo homogéneo e isotrópico. La dinámica de la geometría del espacio-tiempo está caracterizada completamente por $a(t)$. Para determinar la forma de $a(t)$, se debe resolver la Ec. 2.9 en presencia de materia. Si consideramos un fluido perfecto que llena el espacio, el cual está caracterizado en cada punto por su densidad propia ρ y la presión p en el marco de reposo instantáneo, entonces tendremos las *ecuaciones de Friedmann-Lemaître*:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)a + \frac{1}{3}\Lambda a, \quad (2.30)$$

$$\dot{a}^2 = -\frac{8\pi}{3}\rho a^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k, \quad (2.31)$$

O de forma equivalente:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho), \quad (2.32)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda. \quad (2.33)$$

La ecuación 2.32 se denomina *ecuación de continuidad* y describe la tasa de cambio de la densidad de energía del fluido perfecto a medida que cambia el factor de escala. Esta ecuación representa la conservación de la energía en el modelo cosmológico de Friedmann.

La ecuación 2.33 establece que la densidad de energía, la presión y la constante cosmológica (todavía no introducida) influyen en la expansión del universo. La densidad de energía y la presión ralentizan la expansión, mientras que la constante cosmológica la acelera. La observación actual es que la constante cosmológica es mayor que la densidad de energía y la presión, lo que significa que el universo se está expandiendo más rápido.

Las *ecuaciones de Friedmann-Lemaître* sentaron los cimientos del modelo cosmológico estándar, el cual describiremos a continuación.

2.2.3. Modelo Λ CDM

Alexander Friedmann predijo en 1922 la expansión del universo antes de que fuera observada por Edwin Hubble. De manera independiente, George Lemaître obtuvo modelos cosmológicos dinámicos y reconoció que estos predecían un momento inicial en el que el universo tenía un tamaño cero, al que llamó *el átomo primordial*. Dos décadas después, se comprendió que el Universo temprano era mucho más caliente y denso que en la actualidad. Debido a la gran radiación en un ambiente tan caliente, cualquier átomo o núcleo producido inmediatamente sería destruido por un fotón de alta energía. A medida que el universo se enfrió por debajo de las energías de unión de los núcleos típicos, comenzaron a formarse elementos ligeros. George Gamow, Ralph Alpher y Hans Bethe proporcionaron la base del modelo nucleosíntesis del Big Bang y estimaron correctamente las abundancias de hidrógeno y helio-4 en las primeras etapas del Universo. Los elementos más pesados se crearían más tarde mediante procesos lentos (pulsos estelares) y rápidos (kilonovas) (Meyer, 1994). El modelo también predijo la existencia de una radiación remanente dejada por la fase temprana caliente denominada radiación cósmica de fondo de microondas (CMB) (Alpher & Herman, 1948).

Dos teorías principales sentaron las bases del modelo cosmológico estándar del Hot Big Bang (HBB): la GR y la teoría cuántica de campos. Tres pilares observacionales respaldan las predicciones de HBB: la expansión del universo, exhibida en el diagrama de Hubble; las abundancias de elementos ligeros que están en acuerdo con el HBB; y la detección del CMB (Penzias & Wilson, 1965).

Sin embargo, en las últimas décadas, varias observaciones astronómicas han desafiado algunas predicciones del modelo HBB (ver Perivolaropoulos & Skara (2022) para una revisión exhaustiva).

La estrategia predominante para resolver algunos de los problemas del HBB es postular nuevas formas de materia que van más allá del modelo estándar de la teoría cuántica de campos: *materia oscura* y un *campo de energía oscura*. Cuando el modelo HBB se complementa con materia oscura fría y una constante cosmológica obtenemos el modelo cosmológico estándar Λ Cold Dark Matter (Λ CDM) (Carroll, 2001; Peebles, 1984; Peebles & Ratra, 2003). Este es un modelo cosmológico bien definido, predictivo y simple (ver Bull et al. (2016) para una revisión). Este modelo se define por un conjunto de suposiciones simples:

- El Universo consiste en radiación (fotones, neutrinos), materia ordinaria (bariones y leptones), materia oscura fría (CDM) Bertone et al. (2005); Bosma (1981); Freeman (1970); Rubin & Ford (1970); Rubin et al. (1980); Zwicky (1937) responsable de la formación de estructuras y la constante cosmológica Λ , que sería responsable de la expansión acelerada del universo (ver Padmanabhan, 2003, 2005; Weinberg, 1989, para una revisión).
- La GR es la teoría correcta que describe la gravedad a escala cosmológica. Por lo tanto, la acción relevante a estas escalas está dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{4\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + L_m(\psi) \right), \quad (2.34)$$

donde α es la constante de estructura fina, $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético y L_m es la densidad Lagrangiana para todos los campos de materia ψ_m .

- El principio cosmológico establece que el Universo es estadísticamente homogéneo e isotrópico a escalas suficientemente grandes ($\gtrsim 100 \text{ Mpc}^{-1}$).

- Hay seis parámetros independientes (libres): las densidades de energía de la materia bariónica $\omega_b = \Omega_{0b}h^2$ y la materia oscura fría $\omega_c = \Omega_{0c}h^2$ (donde $h = H_0/100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ es la constante de Hubble adimensional y $\Omega_X \equiv \rho_X/\rho_{\text{crit}}$ es la densidad del componente X en relación a la densidad crítica, $\rho_{\text{crit}} = 3H^2/8\pi G$), la distancia angular de diámetro hasta el horizonte acústico en el momento del último scattering θ_s , la amplitud A_s y la inclinación n_s de las fluctuaciones escalares primordiales, y la profundidad óptica de la reionización τ .
- La métrica que describe la parte espacial es la FLRW.
- Se supone una fase primordial de inflación cósmica (un período de rápida expansión acelerada) para abordar los problemas de horizonte y planitud (Albrecht & Steinhardt, 1982; Guth, 1981; Linde, 1982; Starobinsky, 1980). Durante este período, se producen fluctuaciones primordiales escalares invariantes de escala gaussianas a partir de las fluctuaciones cuánticas en la época inflacionaria.

El modelo Λ CDM ha sido notablemente exitoso en explicar la mayoría de las propiedades de una amplia gama de observaciones cosmológicas, incluida la expansión acelerada del Universo (Perlmutter et al., 1999; Riess et al., 1998), el espectro de potencia y las propiedades estadísticas de las anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB) (Page et al., 2003), el espectro y las propiedades estadísticas de las grandes estructuras a gran escala del Universo (Bernardeau et al., 2002; Bull et al., 2016) y las abundancias observadas de diferentes tipos de núcleos ligeros hidrógeno, deuterio, helio y litio (Cyburt et al., 2016; Iocco et al., 2009; Schramm & Turner, 1998; Steigman, 2007).

Uno de los componentes fundamentales del modelo Λ CDM es la materia oscura. A continuación brindaremos una breve descripción de las motivaciones que han llevado a conjeturar su existencia.

2.2.4. Materia oscura

¿Por qué se postula la existencia de la materia oscura?

La postulación se lleva a cabo principalmente con el objetivo de solventar las discrepancias observadas entre la dinámica de diversos objetos astronómicos y la cantidad de materia bariónica que se presume necesaria para explicar dichas dinámicas. Estas discrepancias se han observado en curvas de rotación galácticas y en las dinámicas de cúmulos de galaxias. Por otro lado, la materia oscura parece ser un ingrediente esencial para explicar la formación de estructuras en el universo y en el CMB.

Basándonos en las observaciones astrofísicas y cosmológicas mencionadas anteriormente, la materia oscura debería tener las siguientes propiedades (Mat, 2011):

- La materia oscura no debe interactuar electromagnéticamente.
- Las autointeracciones de la materia oscura deberían ser pequeñas.
- La materia oscura debería interactuar débilmente con los bariones. Si no fuera así, se formarían estructuras barión-materia oscura, como los discos. Esto está en contradicción con los halos de materia oscura más difusos y extendidos que se observan.
- La materia oscura no puede estar formada por las partículas elementales del modelo estándar.

La hipótesis de la existencia de materia oscura fría ha sido planteada *ad hoc* como una solución para dar cuenta de diversas observaciones astronómicas. No obstante, en las últimas décadas, la acumulación de evidencia ha sugerido que los modelos de materia oscura fría enfrentan dificultades para reproducir ciertos fenómenos dentro del modelo Λ CDM (para una revisión detallada ver, Famaey & McGaugh, 2013; López-Corredoira, 2017; Perivolaropoulos & Skara, 2022). Además, el hecho de que no se haya detectado de manera directa la presencia de materia oscura hasta la fecha podría ser una señal que indica la necesidad de explorar enfoques alternativos.

2.2.5. Campo de energía oscura

Hacia finales del siglo XX, Riess et al. (1998); Perlmutter et al. (1999) encontraron de forma independiente que las Supernova de tipo Ia en galaxias de alto corrimiento al rojo eran sistemáticamente más tenues de lo que se esperaría si el universo estuviera expandiéndose a una tasa constante o si estuviera expandiéndose a una tasa decreciente. Estas observaciones solo podrían entenderse si el universo está en un estado de expansión acelerada. Es por ésto que surge la siguiente pregunta:

¿Qué está impulsando la expansión acelerada del universo?

Hay básicamente dos enfoques para construir modelos que podrían explicar la expansión acelerada del universo. Un enfoque se centra en el lado derecho de las Ecs. de campo de Einstein, es decir, en formas específicas para el tensor de energía-momento que podrían representar un campo dotado de una ecuación de estado negativa, cuyos efectos sobre el estado dinámico del universo serían los de una expansión acelerada. Dado que el contenido de energía-momento en cualquier punto puede contribuir a la estructura geométrica del espacio-tiempo, el vacío podría tener un efecto no despreciable en la dinámica del universo a grandes escalas. El tensor de energía-momento del vacío se puede escribir como

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}c^2 g_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

donde ρ_{vac} denota la densidad de energía del vacío. Si consideramos el tensor de energía-momento de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = \rho \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} + p g_{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

donde ρ es la densidad de energía, p es la presión, u_μ es la cuadrivelocidad y $g_{\mu\nu}$ es tensor métrico, entonces podemos definir una ecuación de estado efectiva para el vacío como

$$w_{vac} = \frac{p_{vac}}{\rho_{vac}c^2} = -1, \quad (2.37)$$

lo que significa que la presión del vacío es negativa y que su efecto gravitatorio es repulsivo. La densidad de energía del vacío se puede escribir en términos de la constante cosmológica Λ como

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (2.38)$$

Vemos que desde un punto de vista matemático, la constante cosmológica es equivalente a introducir una densidad de energía del vacío. Enfatizamos que la identificación de la constante cosmológica y la densidad de energía del vacío es solo matemática, como mostraremos más adelante.

La ecuación de estado del vacío es $\omega = -1$, su densidad de energía es constante en el espacio y el tiempo. Por el contrario, las observaciones cosmológicas dan un valor para la densidad de energía asociada a la constante cosmológica de 10^{-8} erg/cm³. La densidad de energía del vacío predicha por la teoría cuántica de campos es 120 órdenes de magnitud más grande que el valor de ρ_Λ inferido de las observaciones. Entonces, es evidente que la densidad de energía del vacío no impulsa la aceleración del universo y algún mecanismo aún desconocido está causando la repulsión gravitacional a ciertas escalas. Si todavía suponemos la validez de la GR, tal vez algún campo de materia exótica con una ecuación de estado negativa es responsable del estado dinámico actual del universo. Dicho campo, ha sido concebido como un candidato plausible para explicar lo que hemos identificado como *campo de energía oscura*. A su vez, este no pertenece al modelo estándar de la física de partículas. Bajo este enfoque, las Ecs. de campo de Einstein toman la forma indicada:

$$\frac{1}{8\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = \frac{T_{\mu\nu}^{SM} + T_{\mu\nu}^{DE}}{c^2}, \quad (2.39)$$

donde $T_{\mu\nu}^{SM}$ denota el tensor de energía-momento de todos los campos de materia derivados del Modelo Estándar, mientras que $T_{\mu\nu}^{DE}$ representa el tensor de energía-momento del *campo energía oscura*.

Se cree que el *campo energía oscura* constituye alrededor del 68 % del universo, por lo que es muy importante comprender su naturaleza (Oks, 2021). Sin embargo, todavía se sabe muy poco sobre el mismo.

Otra alternativa viable es la introducción de la constante cosmológica en el tensor de Einstein. Este enfoque no asume la existencia de campos adicionales, sino que modifica la forma de las Ecs. de campo. Los detalles de este enfoque se explicarán en profundidad en la sección 2.4.

2.3. Problemas en la Relatividad General

Si bien la teoría de las GR es la mejor teoría para explicar las interacciones gravitatorias, no está libre de problemas. Acaso, el más grave de todos ellos sea el problema de las *singularidades*.

La teoría de la GR, predice la existencia de singularidades. La definición precisa de estas singularidades es problemática y es objeto de debate.

Los teoremas de singularidad en teorías clásicas de campos, implican que bajo ciertas suposiciones, las soluciones de las Ecs. de la teoría son defectuosas y no se pueden reparar. La interpretación correcta de estos teoremas es que señalan la incompletitud de la teoría: hay afirmaciones que no pueden hacerse dentro de la teoría misma. En este sentido, estos teoremas son similares a los teoremas de la lógica matemática de Gödel ⁽ⁱ⁾, que también señalan la existencia de afirmaciones verdaderas pero no demostrables dentro de un sistema formal (Romero, 2012).

Por otro lado, suponiendo a la GR como la teoría correcta de la gravedad, se ha necesitado postular la existencia de formas de materia ajenas al modelo estándar de partículas para dar cuenta de las observaciones astronómicas a distintas escalas. Una estrategia alternativa es modificar la ley de la gravitación.

A continuación se presenta una forma de implementar modificaciones a la GR.

⁽ⁱ⁾El *primer teorema de incompletitud* afirma que, si elegimos como axiomas cualquier conjunto de enunciados aritméticos verdaderos y exigimos que las demostraciones que hagamos a partir de ellos sean verificable algorítmicamente, entonces habrá al menos un enunciado verdadero que no puede ser demostrado a partir de esos axiomas.

2.4. Teoría de la gravitación- $f(R)$

Las Ecs. 2.9 establecen una relación causal: cualquier cambio en los campos de materia induce un cambio en la geometría del espacio-tiempo. Esto implica, a su vez, que el espacio-tiempo es tan material como los campos: puede cambiar y puede actuar sobre los campos de materia (véase Bunge, 2018; Romero, 2018). Esta materialidad del espacio-tiempo está bien establecida por la reciente detección de ondas gravitacionales. Dichas ondas pueden medirse porque el espacio-tiempo afecta al detector.

A pesar de las consideraciones anteriores, el espacio-tiempo parece no compartir el mismo estatus ontológico que los campos de materia. Parece ser más fundamental. La razón de tal afirmación es que mientras el espacio-tiempo puede existir en ausencia de campos de materia (como se muestra por la existencia de soluciones de vacío de la ecuación 2.9, los campos de materia no pueden existir sin el espacio-tiempo. Esto se puede ver a partir del hecho de que no hay campos materiales sin energía, ya que el tensor energía-momento se define como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.40)$$

donde L_M es la densidad lagrangiana del campo. No hay energía-momento del campo si la métrica del espacio-tiempo no está bien definida (Pérez, 2023).

La mutua interdependencia de los campos de materia y el espacio-tiempo abre claramente dos alternativas si las observaciones de las trayectorias geodésicas se desvían de las expectativas derivadas de la ecuación 2.9:

- a. la energía-momento de los campos de materia no está bien medida.
- b. la respuesta del espacio-tiempo a la materia no está bien expresada por la ecuación 2.9

Claramente, (a) es menos extremo que (b) ya que, como explicamos, la materia parece ser menos fundamental que el espacio-tiempo. En este sentido, se plantea la posibilidad de modificar nuestra teoría de gravitación como una alternativa para evitar la necesidad de introducir componentes en el universo y encontrar respuestas a los enigmas cosmológicos y astrofísicos.

En lugar de debatir si esta perspectiva sería mejor o peor que las soluciones propuestas anteriormente, se argumenta que se trata de un enfoque diferente que vale la pena explorar, mientras no se encuentre una solución plausible, ampliamente aceptada y simple a estos problemas. Además, cuestionar la teoría de la gravitación en sí misma tiene méritos, ya que puede conducir a una comprensión más profunda de los problemas relevantes y de la interacción gravitacional, y tiene la posibilidad de abrir camino a nuevas ideas en el ámbito de la física, tal como sucedió en el pasado con la explicación de la precesión de la órbita de Mercurio mediante la transición de la gravedad newtoniana a la GR.

Una forma general de introducir cambios en el sector geométrico de las Ecs. de campo de Einstein es modificar la acción relativista. La GR se obtiene de la acción:

$$S[g] = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.41)$$

que se puede generalizar a

$$S[g] = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x, \quad (2.42)$$

donde $f(R)$ es alguna función del escalar de curvatura (Ricci).

Las Ecs. de campo generalizadas se derivan variando 2.42 con respecto a la métrica

$$\delta S[g] = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left[\delta f(R) - g_{\mu\nu} \frac{\delta f(R)}{\delta g_{\mu\nu}} \right] d^4x. \quad (2.43)$$

La variación del determinante es

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Entonces, su variación con respecto a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ está dada por

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}). \quad (2.45)$$

Dado que $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ es la diferencia de dos conexiones, debe transformar como un tensor. Por lo tanto, puede escribirse como

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}), \quad (2.46)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}). \quad (2.47)$$

La variación en la acción resulta en:

$$\delta S[g] = \int \left(F(R) \delta R - \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} F(R) (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) \right) d^4x, \quad (2.48)$$

donde $F(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}$. Integrando por partes en los segundos y terceros términos, obtenemos

$$\delta S[g] = - \int \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} F(R) (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) d^4x. \quad (2.49)$$

Al exigir que la acción permanezca invariante bajo variaciones de la métrica, es decir, $\delta S[g] = 0$, encontramos las Ecs. de campo en la GR:

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu] F(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.50)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento definido como:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}$$

Capítulo 3

Flujos de acreción en torno a agujeros negros

La acreción es el proceso mediante el cual la materia cae hacia el pozo de potencial de un objeto gravitante. La acreción de materia con momento angular puede llevar a la formación de un *disco de acreción* alrededor del objeto compacto. Aunque las partículas en este disco inicialmente describen órbitas circulares, la pérdida de momento angular hace que las partículas sigan una trayectoria espiral hacia el objeto compacto. Durante este proceso, se libera energía potencial gravitatoria y se gana energía cinética de rotación (Yuan et al., 2003). La cantidad de energía extraíble en este proceso es aproximadamente del mismo orden de magnitud que la energía de ligadura de la última órbita circular estable. Para un BH de Schwarzschild, la energía de una partícula en una órbita circular se puede determinar utilizando la siguiente ecuación:

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1 - 2GM/c^2r}{\sqrt{1 - 3GM/c^2r}}. \quad (3.1)$$

Dado que la relación entre el radio de la órbita circular estable más interna (ISCO, por sus siglas en inglés) (r_{isco}) y el radio de Schwarzschild (r_{Schw}) es de $r_{isco} = 3r_{Schw}$, se estima que la energía de ligadura es aproximadamente 0.943 (Hobson et al., 2005).

Definiendo la eficiencia radiativa de un disco de acreción como η_{acr} , entre la energía radiada y la energía en reposo del material acretado, la máxima eficiencia para un disco alrededor de un BH de Schwarzschild sería de aproximadamente $1 - 0.943$, es decir, alrededor del 5.7%. Para un BH de Kerr, la eficiencia radiativa es mayor, alrededor de 42% para un BH de Kerr extremo ($a = GM/c$).

El proceso de acreción se considera el más eficiente en términos de generación de radiación ⁽ⁱ⁾, siendo casi diez veces más eficiente que la fusión nuclear. La acreción es responsable de algunos de los fenómenos más luminosos y brillantes observados en el Universo (Frank et al., 2002).

La relación entre la luminosidad del disco y la tasa de acreción \dot{M} se expresa como

$$L = \eta_{acr}\dot{M}c^2. \quad (3.2)$$

Es útil definir la luminosidad crítica o también llamada *luminosidad de Eddington* la cual es la máxima luminosidad máxima en la que un objeto acretante suponiendo que el fluido se

⁽ⁱ⁾La eficiencia de la aniquilación de materia-antimateria es de $\eta = 1$, pero no se prevé que en el universo exista una cantidad significativa de antimateria.

3. Flujos de acreción en torno a agujeros negros

encuentra en estado estacionario, que posee simetría esférica y que el plasma consiste sólo de hidrógeno completamente ionizado:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T}, \quad (3.3)$$

donde σ_T es la sección eficaz de Thomson. La luminosidad de Eddington, expresada en unidades de erg s^{-1} , se puede calcular como

$$L_{\text{Edd}} \approx 1.3 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot}. \quad (3.4)$$

Asociada a la luminosidad crítica podemos definir la *tasa de acreción de Eddington* como

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{c^2} \approx 0.2 \times 10^{-8} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) M_\odot \text{yr}^{-1}. \quad (3.5)$$

La utilidad del límite de Eddington radica en que tanto la estructura geométrica como la energía de los flujos de acreción sobre agujeros negros, y por ende sus propiedades radiativas, dependen principalmente del parámetro adimensional $\dot{m} := \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\text{Edd}}}$. Este único parámetro permite clasificar cualitativamente los distintos regímenes de acreción posibles y sus diferentes implicancias astrofísicas. Veremos en detalle dicha clasificación en la próxima sección.

3.1. Flujo de acreción según la tasa de acreción

Se puede evaluar el impacto de la tasa de acreción en la estructura del flujo de acreción mediante un análisis de los distintos términos que aparecen en la ecuación de conservación de la energía. La ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$\rho v_r T \frac{ds}{dR} \equiv q^{\text{adv}} = q^+ - q^-, \quad (3.6)$$

donde ρ , v_r , T y s representan la densidad de masa, la velocidad radial, la temperatura y la entropía específica del plasma, respectivamente. El término de la izquierda de la Ec. 3.6 indica la tasa de advección radial de entropía por unidad de masa. Por otro lado, en el término de la derecha, q_+ denota la tasa de energía liberada por disipación turbulenta por unidad de volumen y q_- denota la tasa de enfriamiento radiativo por unidad de volumen.

3.1.1. Disco de acreción estándar

Si se mantiene una tasa de acreción normalizada es moderada, $\dot{m} \lesssim 0.5$, la densidad del plasma será lo suficientemente alta como para permitir interacciones eficientes entre partículas. Además, se cumplirá que $q^+ \approx q^-$, y q_{adv} cercana a cero. Bajo estas condiciones, la energía interna generada por la disipación se irradiará localmente y la advección de entropía se puede ignorar. Este escenario es común en los llamados *discos de acreción estándar* (Shakura & Sunyaev, 1973; Novikov & Thorne, 1973; Page & Thorne, 1974). Estos pueden tener temperaturas del disco T_d en el rango de 10^4 a 10^7 K, dependiendo de la masa del BH. Para estos discos, la temperatura efectiva T_d es menor que la temperatura virial T_{vir} ⁽ⁱ⁾. En este caso, es apropiado utilizar el término *disco*, ya que el enfriamiento eficiente hace que estos flujos sean delgados en términos geométricos ($h/r \ll 1$) y opacos ($\tau \equiv \int_0^h d\tau \gg 1$). La energía generada localmente se transporta verticalmente y se irradia en la fotosfera del disco a una altura aproximada de h , típicamente como un BH. Debido a la dependencia de

⁽ⁱ⁾ $T_{\text{vir}} := \frac{GM_p m_p}{3k_B R} \approx 3.6 \times 10^{12} (R/R_g)^{-1}$ K

la temperatura efectiva de la fotosfera del disco con la distancia al agujero negro, el espectro integrado del disco es un *cuerpo negro multicolor*.

Por otro lado, tanto en el régimen de muy baja tasa de acreción, $\dot{m} \ll 1$, como en el de muy alta tasa de acreción, $\dot{m} \gg 1$, se satisface que la energía disipada localmente no puede ser radiada eficientemente y que $q^+ \gg q^-$. Luego, $q_{adv} \approx q^+$ y la energía es adveccionada hacia el BH. Ambos regímenes de acreción ocurren a través de un flujo de acreción dominado por advección aunque la razón por la que la advección domina en cada caso tiene un origen completamente diferente.

3.1.2. Acreción subcrítica

Se conoce como ADAF (Flujo de Acreción Dominado por Advección) a los sistemas en los que la acreción es predominantemente impulsada por advección. En estos sistemas, las tasas de acreción son subcríticas ($\dot{m} \ll 1$). La baja eficiencia radiativa se debe a la ineficiente interacción entre partículas, causada por la baja densidad del plasma. Esta ineficiencia resulta en que los electrones y protones adquieran diferentes temperaturas, e incluso pueden no seguir una distribución de energía Maxwelliana. En cuanto a las escalas temporales, si t_{rad} representa la escala temporal de enfriamiento radiativo para una partícula y $t_{acr} \sim r/|v_r|$ indica su escala temporal de acreción, en este régimen se cumple que $t_{acr} \ll t_{rad}$.

La energía disipada en el flujo se almacena principalmente en el gas, donde la temperatura de los protones puede alcanzar valores cercanos a la temperatura virial ⁽ⁱⁱ⁾ (Yuan & Narayan, 2014)

$$T \sim T_{vir} \sim 10^{12} \text{ K.} \quad (3.7)$$

Debido a la alta temperatura, la presión del gas se vuelve significativa y los flujos adquieren una geometría gruesa, con $h/r \sim 0.5$.

Los flujos de acreción con baja eficiencia radiativa son conocidos como flujos de acreción radiativamente ineficientes (RIAF, por sus siglas en inglés, *Radiatively-Inefficient Accretion Flow*) o flujos de acreción calientes (HAF, por sus siglas en inglés, *Hot Accretion Flow*). Estos son usados para abarcar una familia de modelos de este tipo como los ADIOS, MAD, SANE, etc. Es importante resaltar que debido a la baja densidad del plasma en un HAF, este tipo de flujo es ópticamente delgado ($\tau < 1$) y su espectro radiativo difiere considerablemente del de un cuerpo negro. En particular, este es producido por los procesos de radiación sincrotrón, radiación Bremsstrahlung y dispersión Compton inversa.

Los agujeros negros que experimentan el régimen de acreción de un HAF incluyen sistemas binarios de rayos X con agujero negro (BHXB, por sus siglas en inglés, *Black Hole X-ray Binaries*) en estados *low-hard*, intermedios o inactivos (*quiescent*) (Esin et al., 1997, 1998), algunas Galaxias Seyfert de baja luminosidad y, principalmente, núcleos galácticos activos de baja luminosidad (LLAGN, por sus siglas en inglés, *Low-Luminosity Active Galactic Nucleus*) (Yuan & Narayan, 2014). Los SMBH acretantes más estudiados, Sgr A* en el centro de nuestra galaxia y M87* en el núcleo de la radio galaxia Messier 87, se encuentran en este régimen (Ramesh Narayan & Gammie, 1997; Yuan et al., 2003; Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019a,b,c,d,e,f, 2021a,b).

3.1.3. Acreción supercrítica

En los sistemas de tasas de acreción súpercríticas ($\dot{m} \gg 1$), también llamados *super-Eddington*, se presenta una situación notablemente diferente a la de los ADAF (Abramowicz

⁽ⁱⁱ⁾La temperatura de los electrones esta pocos ordenes de magnitud por debajo.

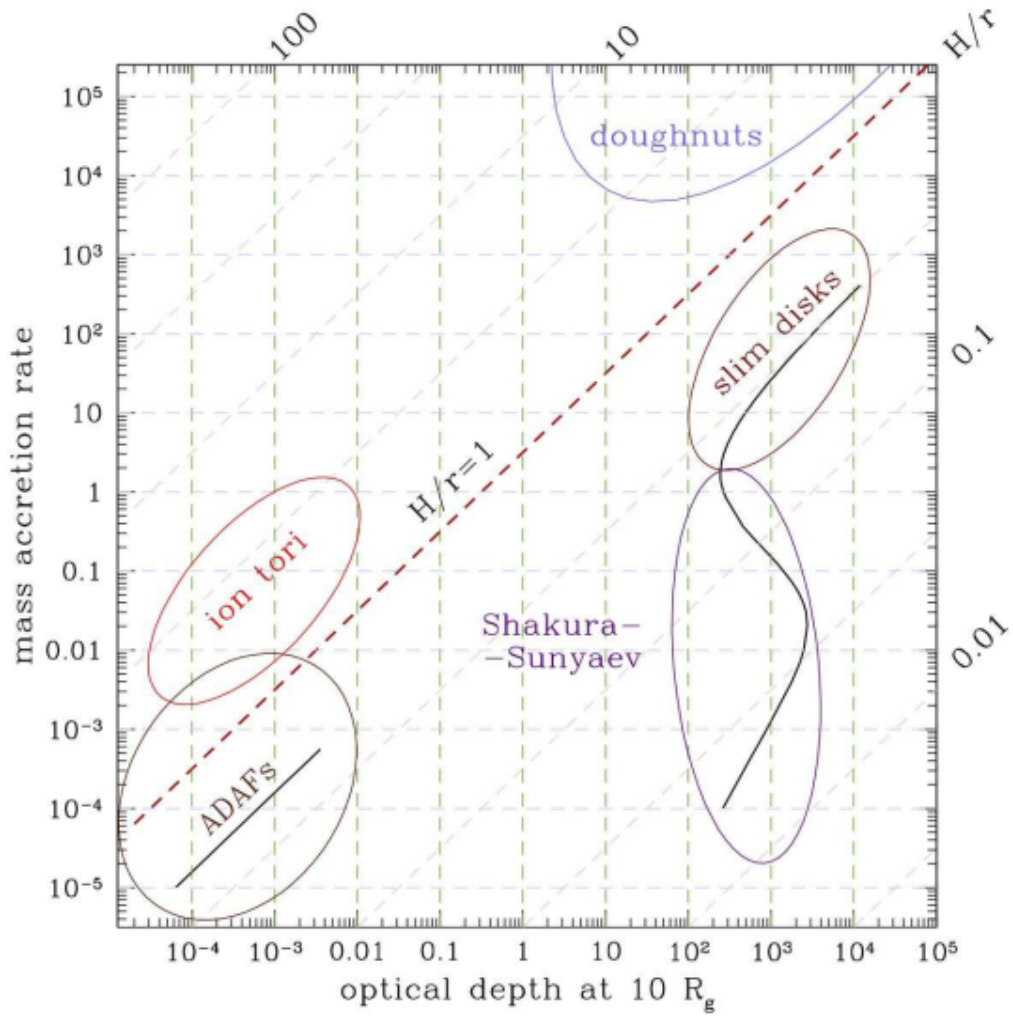


Figura 3.1. Se muestran cuatro tipos de modelos de discos de acreción analíticos y semi-analíticos: las *donas polacas* (*Polish doughnuts* en inglés), con alturas moderadas ($h > 1$), tasas de acreción altas ($\dot{m} \gg 1$) y ópticamente gruesos ($\tau \gg 1$) (curva sólida en la parte superior derecha), discos delgados $h \ll 1$, $\dot{m} \ll 1$, $\tau \gg 1$ (parte inferior de la curva sólida en el lado derecho); discos delgados $h \leq 1$, $\dot{m} \sim 1$, $\tau \gg 1$ (parte superior de la curva sólida en el lado derecho); ADAFs $h \lesssim 1$, $\dot{m} \ll 1$, $\tau \ll 1$ (curva sólida en el lado izquierdo); y los *ion tori* $h > 1$, $\dot{m} \ll 1$, $\tau \ll 1$. Se muestran secuencias de modelos para un valor particular del parámetro de viscosidad α , $\alpha = 0.1$, y una masa de BH, $M = 10M_{\odot}$. Figura tomada de Abramowicz & Fragile (2013)

et al., 1988; Fukue, 2000). A diferencia de los HAF, en estos sistemas la densidad del plasma es extremadamente alta, lo que resulta en interacciones radiativas frecuentes y eficientes. La alta densidad también implica un camino libre medio extremadamente corto para los fotones emitidos, de manera que la escala temporal de difusión para un fotón en el plasma, t_{diff} , resulta mayor que la escala temporal de acreción: $t_{diff} > t_{acr}$. Por lo tanto, los fotones quedan atrapados en el plasma y la energía disipada se almacena principalmente en forma de radiación atrapada, la cual luego es advectada hacia el BH. La alta presión de radiación también da lugar a discos geoméricamente gruesos y a la producción de fuertes vientos ópticamente gruesos que ocultarán la emisión primaria del flujo de acreción. Aunque estos flujos son ineficientes en

términos de radiación, son sumamente luminosos. Se cree que este régimen extremo opera en fuentes astrofísicas tales como las Fuentes de Rayos X Ultraluminosas (ULX, por sus siglas en inglés) (Kaaret et al., 2017; Fabrika et al., 2021) y en galaxias Seyfert de Tipo I con líneas estrechas (Collin & Kawaguchi, 2004).

En la Fig. 3.1 se muestra una representación esquemática de los regímenes de acreción, que son discutidos en el contexto de este capítulo. Estos modelos incluyen los mencionados anteriormente. Se ilustran discos delgados con una altura infinitesimal ($h \leq 1$), una tasa de acreción moderada ($\dot{m} \sim 1$) y ópticamente gruesos ($\tau \gg 1$), representados en la parte superior de la curva sólida en el lado derecho. Se presentan los discos de acreción ADAFs, con alturas moderadas ($h \sim 1$), tasas de acreción baja ($\dot{m} \ll 1$) y ópticamente delgados ($\tau \ll 1$), como se muestra en la curva sólida en el lado izquierdo de la Fig. A su vez, las donas polacas (*Polish doughnuts*) son un tipo de modelo que sirve para describir estados de hiperacreción ($\dot{m} \gg 1$), con alturas moderadas ($h > 1$) y ópticamente gruesos ($\tau \gg 1$). Sin embargo, unas modificaciones de las donas polacas, conocida como *Toro de Iones* (ahora en más: *toro*), puede usarse para describir estados de baja tasa de acreción ($\dot{m} \ll 1$), con alturas moderadas ($h > 1$) y ópticamente delgados ($\tau \ll 1$), como se verá en la siguiente sección.

La figura también muestra secuencias de modelos específicos para un valor particular del parámetro de viscosidad α ($\alpha = 0.1$) y una masa del agujero negro ($M = 10M_{\odot}$). Estos valores se utilizan para ilustrar las características de los diferentes tipos de discos de acreción en el contexto del estudio (Abramowicz & Fragile, 2013).

3.2. Modelo del *Toro de Iones*

Shapiro et al. (1976) llevaron a cabo un estudio para intentar explicar la emisión intensa de rayos X observada en Cygnus X-1 mediante el desarrollo de un modelo de disco caliente con dos temperaturas. Este fenómeno no podía ser adecuadamente explicado por el modelo convencional existente en ese momento, el cual era la solución de disco delgado Shakura & Sunyaev (1973). Descubrieron una solución óptica y geoméricamente delgada en la cual los electrones e iones estaban débilmente acoplados y exhibían diferentes temperaturas, pero permanecían en equilibrio energético. Sin embargo, desde una perspectiva térmica, esta solución resultó ser inestable.

De manera independiente, tanto Ichimaru (1977) como Rees et al. (1982) propusieron el modelo de *Toro de Iones* como una representación del flujo a una baja tasa de acreción con la capacidad de impulsar jets detectados en la banda de radio. Estos *toros* se localizan en las regiones internas de los flujos de acreción, son esferoidales y gruesos, y se mantienen mediante la presión del gas (iones). Son radiativamente ineficientes y presentan una estructura ópticamente delgada. Los *toros* están compuestos por un plasma completamente ionizado, lo cual les otorga su denominación, donde los protones y electrones se encuentran térmicamente desacoplados, siguiendo cada uno su propia distribución de temperatura y sin alcanzar un equilibrio local de energía. Se supone que estos *toros* corresponden a flujos de acreción con baja viscosidad, representada por el parámetro α , y que están atravesados por campos magnéticos. De esta manera, la viscosidad molecular ordinaria se suprime a favor de la viscosidad magnética/turbulenta.

Dado que son geoméricamente gruesos ($H/r > 1$), los *toros* exhiben intrínsecamente un par de embudos que permiten la colimación y escape del flujo magnético, como se ilustra en la Fig. 3.2. Estos *toros* solo pueden existir en un régimen de acreción sub-Eddington, caracterizado por $\dot{M} < \dot{M}_{crit} < \dot{M}_{Edd}$. En este régimen, el enfriamiento radiativo es suficiente como para mantener los iones calientes (cerca del virial) durante todo el período de flujo hacia el interior ($t_{diff} > t_{accr}$). Por otro lado, para tasas de acreción de masa más elevadas,

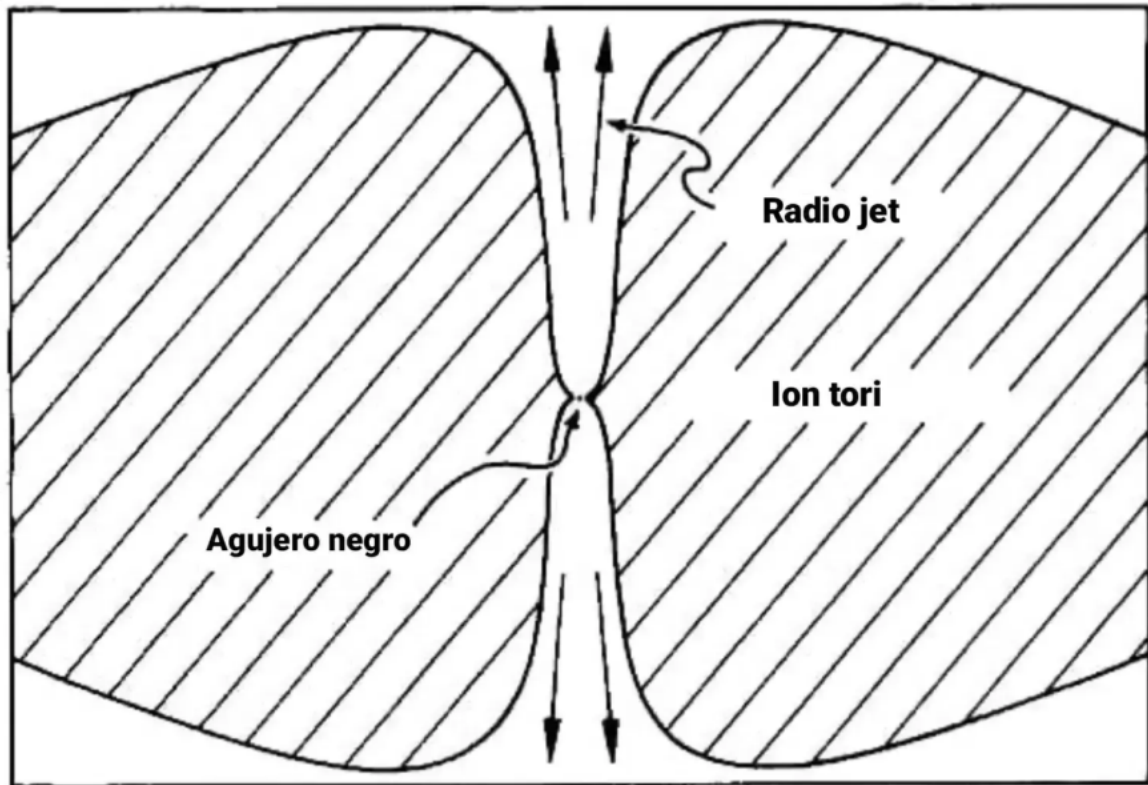


Figura 3.2. Ilustración de un toroide soportado por la presión de iones, rodeando un BH de Kerr. Adaptado de Rees et al. (1982).

el enfriamiento provoca que la región esferoidal interna inflada se torne gradualmente opaca y se desinfe hasta formar un disco delgado convencional. En virtud de que $t_{diff} < t_{accr}$, la mayor parte de la energía es transportada hacia el BH por los iones. Se puede considerar que el enfriamiento del disco se produce localmente *por advección*, dado que la energía es transportada por los iones. Por consiguiente, esta categoría de soluciones ha sido denominada como *dominado por advección*.

En lo que sigue, describiremos el modelo de *toro* usado por Straub et al. (2012) y Rees et al. (1982). Los *toros* que se estudian en este trabajo se basan en la descripción matemática propuesta por Paczynski y colaboradores en sus investigaciones sobre las *donas polacas* (en inglés, *Polish doughnuts*) (Abramowicz et al., 1978; Jaroszynski et al., 1980). Aunque las *donas polacas* presentan características diferentes a las de los *toros de iones* (por ejemplo, son ópticamente gruesas, se sustentan mediante la presión de radiación y tienen tasas de acreción superiores a la de Eddington), ambas clases exhiben una estructura equipotencial similar y poseen propiedades dinámicas muy similares.

En particular, tanto los *toros* como las *donas polacas* presentan un *lóbulo de Roche*, que corresponde a una superficie equipotencial crítica que atraviesa el radio de *derrame gravitacional* denotado r_{dgrav} . Cuando el lóbulo de Roche se desborda, se produce una pérdida dinámica de masa del toro hacia el BH sin necesidad de la intervención de la viscosidad. Por lo tanto, el flujo de acreción en radios $r \leq r_{dgrav}$ está determinado por la fuerte gravedad del BH y no por procesos viscosos. El radio del derrame gravitacional se considera como el límite interno del disco: para tasas de acreción bajas, coincide con la *isco*, mientras que para tasas de acreción más altas, el radio del derrame gravitacional se encuentra más cercano al BH.

Tanto los *toros* como las *donas polacas* exhiben inestabilidades dinámicas de acuerdo con

el criterio propuesto por Papaloizou & Pringle (1984); sin embargo, Blaes (1987) demostró que la inestabilidad se suprime mediante el desbordamiento del lóbulo de Roche (véase también Narayan & Popham 1993).

Las propiedades de los toros y las donas polacas no dependen de la distribución de momento angular. A menudo se supone que el momento angular es constante, es decir, $\Omega = \Omega_0 = \text{constante}$, lo cual conduce a formulaciones analíticas finales simples. En esta tesis adaptamos esta formulación. Modelos dinámicos para estos toros han sido calculados en estudios anteriores, como por ejemplo, Qian et al. (2009), donde suponen una cierta distribución de momento angular no constante.

3.2.1. Geometría del toro

Las órbitas circulares en el espacio-tiempo de Kerr se obtienen a partir de las geodésicas tipo tiempo de la métrica 2.14, para las cuales el cuadvectores de velocidad toma la forma $u_\mu = (u_t, 0, 0, u_\varphi)$. Las dos constantes de movimiento asociadas al estado estacionario y la simetría axial se expresan de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = -u_t = -u_t(g_{tt} + \Omega g_{t\varphi}), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L} = u_\varphi = u_t(g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}), \quad (3.9)$$

donde $\Omega \equiv u_\varphi/u_t$ representa la velocidad angular con respecto a un observador lejano. El momento angular específico se define como:

$$\ell \equiv \mathcal{L}/\mathcal{E} = -u_\varphi/u_t. \quad (3.10)$$

En el caso de las órbitas geodésicas circulares, el momento angular adopta una forma Kepleriana (Bardeen et al., 1972):

$$\ell_K(r, a) = \frac{M^{1/2}(r^2 - 2aM^{1/2}r^{1/2} + a^2)}{r^{3/2} - 2Mr^{1/2} + aM^{1/2}}. \quad (3.11)$$

Aquí, y en el resto de la tesis, consideramos que M es un parámetro fijo, lo que nos permite suponer que ℓ_K es una función solo de (r, a) .

En la métrica de Kerr existen 2 tipos de órbitas circulares importantes: la marginalmente ligada, cuyo radio denotamos r_{mb} (del inglés marginally bound) y la ISCO, denotada como r_{isco} . En la primera órbita se debe satisfacer que $\mathcal{E} = 1$, donde se cumplen las siguientes condiciones para el potencial efectivo: $V_{\text{eff}}(r) = 0$ y $V'_{\text{eff}}(r) = 0$. Toda órbita circular no es estable, por lo cual la segunda órbita debe satisfacer que $V''_{\text{eff}} \leq 0$. Con estas condiciones dichas órbitas quedan definidas de la siguiente manera (Bardeen et al., 1972):

$$r_{mb}(a) = 2M - a + 2M^{1/2}(M - a)^{1/2}, \quad (3.12)$$

$$r_{isco}(a) = M \left[3 + z_2 - ((3 - z_1)(3 + z_1 + 2z_2))^{1/2} \right], \quad (3.13)$$

donde $z_1 \equiv 1 + (1 - a^2/M^2)^{1/3}[(1 + a/M)^{1/3} + (1 - a/M)^{1/3}]$ y $z_2 \equiv (3a^2/M^2 + z_1)^{1/2}$.

En el caso de estas órbitas especiales, se pueden determinar los valores del momento angular específico de la siguiente manera:

$$\ell_{isco}(a) = \ell_K(r_{isco}(a), a), \quad (3.14)$$

$$\ell_{mb}(a) = \ell_K(r_{mb}(a), a). \quad (3.15)$$

3. Flujos de acreción en torno a agujeros negros

Consideremos un toro de fluido que rodea un BH Kerr, donde se desprecia la interacción gravitatoria producida por la materia del toro. Al modelar el fluido como uno perfecto, el tensor de energía-momento se describe de la siguiente manera:

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

donde P representa la presión del fluido y ρ es la densidad de energía del fluido. Para el caso de un movimiento puramente circular ($u_\mu = u_t(1, 0, 0, \Omega)$), se puede demostrar que la ecuación de conservación de energía-momento, $\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0$, toma la siguiente forma:

$$\frac{\nabla_\mu P}{\epsilon + P} = -\nabla_\mu \ln(-u_t) + \frac{\Omega \nabla_\mu \ell}{1 - \Omega \ell}, \quad (3.17)$$

donde ℓ está relacionado con las componentes de la cuadrivelocidad del fluido mediante la Ec. 3.10. Suponiendo que el fluido es barotrópico, es decir, $P = P(\epsilon)$, introducimos la función de entalpía definida como:

$$H \equiv \int_0^P \frac{dP}{\rho} + P, \quad (3.18)$$

de manera que el lado izquierdo de la Ec. 3.17 se puede expresar simplemente como $\nabla_\mu H$. Siguiendo el enfoque propuesto por Abramowicz et al. (1978), consideramos modelos en los cuales ℓ es constante en todo el toro, es decir:

$$\ell = \ell_0. \quad (3.19)$$

En consecuencia, la Ec. 3.17 se reduce a:

$$\nabla_\mu H = -\nabla_\mu \ln(-u_t), \quad (3.20)$$

lo cual implica que:

$$H = W + \text{const.}, \quad (3.21)$$

donde se ha introducido el potencial:

$$W \equiv -\ln(-u_t). \quad (3.22)$$

Utilizando la relación de normalización $u^\mu u_\mu = -1$, se obtiene:

$$W(r, \theta) = \frac{1}{2} \ln \frac{-g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}}{(g_{tt} + \Omega g_{t\phi})^2}, \quad (3.23)$$

donde Ω debe considerarse como una función de (r, θ) , dada por:

$$\Omega(r, \theta) = -\frac{g_{t\phi} + \ell_0 g_{tt}}{g_{\phi\phi} + \ell_0 g_{t\phi}}. \quad (3.24)$$

Esta última relación se deriva al combinar las Ecs. 3.8, 3.9 y 3.10.

Abramowicz et al. (1978) demostraron que la ubicación del *derrame gravitacional* debe estar entre la última órbita circular estable y la órbita marginalmente ligada, lo que implica que el valor de ℓ_0 debe cumplir:

$$\ell_{isco}(a) < \ell_0 < \ell_{mb}(a), \quad (3.25)$$

donde $\ell_{isco}(a)$ y $\ell_{mb}(a)$ están definidos en las Ecs. 3.14 y 3.15 respectivamente. Reformulando esta condición en términos del parámetro adimensional:

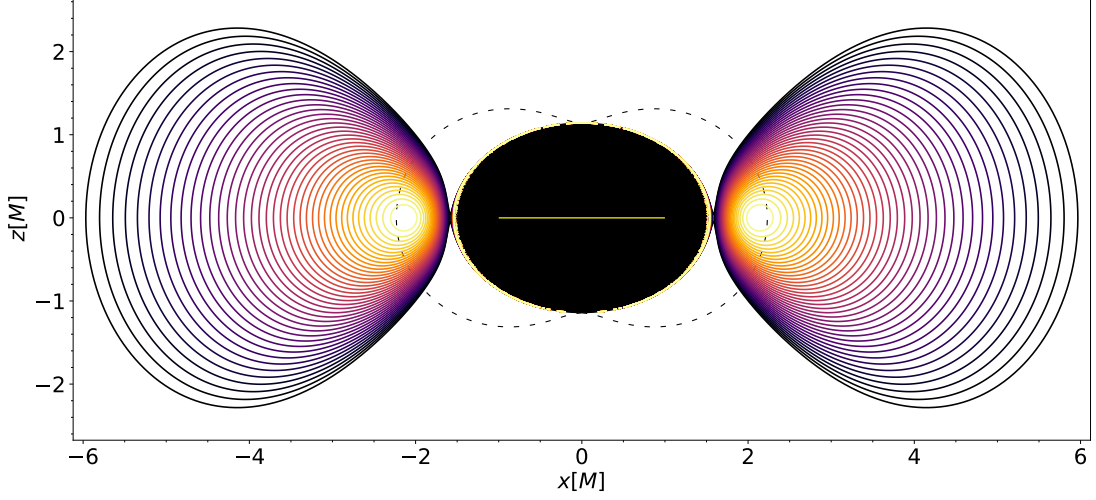


Figura 3.3. Curvas equipotenciales usando $\lambda = 0.7$. En el centro un BH de Kerr con un spin de $0.99M$, la línea negra punteada representa la ergosfera y la línea amarilla central representa el anillo de singularidad. El gradiente de color representa el valor de potencial normalizado, siendo este más grande en el centro del toro y a más chico a medida que se aleja del mismo.

$$\lambda \equiv \frac{\ell_0 - \ell_{isco}(a)}{\ell_{mb}(a) - \ell_{isco}(a)}, \quad (3.26)$$

se tiene que la condición en la Ec. 3.25 es equivalente a:

$$0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.27)$$

El momento angular específico kepleriano (ℓ_K) tiene una dependencia radial y alcanza su valor mínimo en $r = r_{isco}(a)$, y considerando la restricción impuesta por la Ec. 3.25, existen dos valores de r , denotados como r_{in} y r_{center} , para los cuales $\ell_K(r, a) = \ell_0$ y se cumple que:

$$r_{mb}(a) < r_{in} < r_{isco}(a) < r_{center}. \quad (3.28)$$

Dado que para $r = r_{in}$ o $r = r_{center}$, el momento angular real ℓ_0 es igual al momento angular kepleriano, las fuerzas gravitatoria y centrífuga se equilibran, lo que implica que $\nabla_\mu W = 0$. A partir de la primera integral en la Ec. 3.21, tenemos $\nabla_\mu H = 0$, o equivalentemente, a través de la Ec. 3.18, $\nabla_\mu P = 0$. Un punto donde el gradiente se anula se puede llamar punto singular (cruce propio de una equipotencial) o extremo. En el caso presente, $r = r_{in}$ es la ubicación donde una de las equipotenciales de W , llamada lóbulo de Roche, se cruza a sí misma, como se muestra en la Fig. 3.3. Esto da lugar al derrame gravitacional en la superficie del toro (Abramowicz et al., 1978). Por otro lado, $r = r_{center}$ corresponde al máximo de P . El círculo $r = r_{center}$ en el plano ecuatorial se llama el centro del toro.

Para determinar las propiedades termodinámicas del fluido que compone el toro, suponemos una ecuación de estado politrópica:

$$P = K \epsilon^{1+\frac{1}{n}}, \quad (3.29)$$

donde n el índice politrópico y K la constante politrópica. La densidad de energía total $\epsilon = \rho + \Pi$ es la suma de la densidad de energía ρ y la energía interna Π , que en el límite no relativista, $\Pi \approx \rho$, se reduce a $\epsilon \approx \rho$. Integrando la Ec. 3.18, se obtiene:

$$H = (n+1) \ln \left(1 + K \epsilon^{\frac{1}{n}} \right). \quad (3.30)$$

La superficie del toro está definida por $P = 0$. A partir de la Ec. 3.18, esto corresponde a $\epsilon = 0$, y a partir de la Ec. 3.30, a $H = 0$. Por lo tanto, podemos reescribir la primera integral de movimiento en la Ec. 3.21 como:

$$H = W - W_s, \quad (3.31)$$

donde la constante W_s es el valor del potencial W en la superficie del toro. Denotando por H_c y W_c los valores de H y W en el centro del toro, la Ec. 3.31 implica que:

$$H_c = W_c - W_s. \quad (3.32)$$

Introducimos el potencial adimensional:

$$\omega(r, \theta) \equiv \frac{W(r, \theta) - W_s}{W_c - W_s}. \quad (3.33)$$

A partir de las Ecs. 3.31 y 3.32, tenemos:

$$H = H_c \omega. \quad (3.34)$$

Sustituyendo la Ec. 3.30 para H , obtenemos:

$$\ln \left(1 + K \epsilon^{\frac{1}{n}} \right) = \omega \ln \left(1 + K \epsilon_c^{\frac{1}{n}} \right), \quad (3.35)$$

donde ϵ_c es la densidad de energía en el centro del toro. Resolviendo para ϵ , obtenemos:

$$\epsilon = \frac{1}{K^n} \left[\left(K \epsilon_c^{1/n} + 1 \right)^\omega - 1 \right]^n. \quad (3.36)$$

Hasta aquí, el modelo de *toro* está determinado por cinco parámetros: el spin a , el momento angular específico adimensional λ , el índice politrópico n , la constante politrópica K , y la densidad central ϵ_c . En síntesis, el método para la construcción geométrica del *toro* para un dado valor de a y λ es:

- a. Se calculan $\ell_{isco}(a)$ y $\ell_{mb}(a)$ utilizando las Ecs. 3.14 y 3.15.
- b. A partir de λ y a , evaluamos ℓ_0 a través de la Ec. 3.26.
- c. Los valores de ℓ_0 y a determinan completamente el potencial $W(r, \theta)$ según las Ecs. 3.23 y 3.24.
- d. Estamos buscando un toro que llene el lóbulo de Roche, el valor W_s del potencial W en la superficie del toro debe establecerse en el valor del lóbulo de Roche:

$$W_s = W(r_{in}, \frac{\pi}{2}). \quad (3.37)$$

- e. Dado W_s y W_c , determinamos H_c usando la Ec. 3.32.

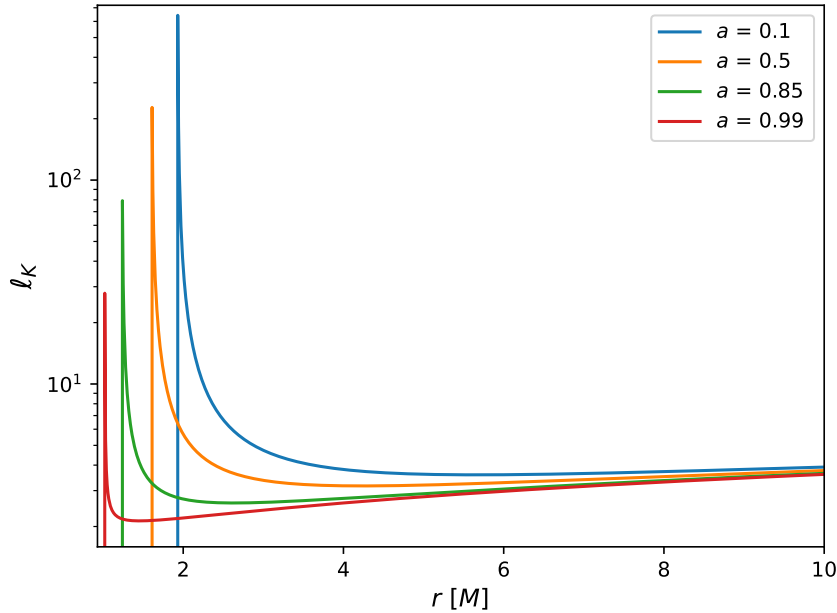


Figura 3.4. Momento angular específico kepleriano de un BH de Kerr asociado a diferentes valores del spin.

- f. Conocemos entonces completamente el potencial adimensional $\omega(r, \theta)$ según lo dado por la Ec. 3.33.
- g. Se puede calcular la densidad de energía en todo el toro usando la Ec. 3.36.

Se observa que por construcción $\omega = 0$ en la superficie del toro y $\omega = 1$ en el centro. Entre $0 \leq \omega(r, \theta) \leq 1$, las equipotenciales toroidales se extienden desde la mayor área posible, la superficie del toro, hasta una única línea, un círculo en r_{center} . Las superficies equipotenciales abiertas tienen $\omega(r, \theta) < 0$. El tamaño de los *toros* depende del spin. Cuanto mayor sea el spin, más estrecha será la distribución del momento angular que establece la ubicación de los radios críticos, por lo tanto, los *toros* serán más pequeños (ver Fig. 3.4).

3.2.2. Microfísica del plasma

En el siguiente análisis, consideramos el valor de $n = \frac{3}{2}$, que corresponde al índice adiabático $\gamma = 1 + \frac{1}{n} = \frac{5}{3}$ de un gas ideal no relativista. Esta elección es coherente para un medio ópticamente delgado.

En los *toros* soportados por presión de gas, se puede despreciar la presión de radiación. La presión total P se expresa como la suma de las contribuciones magnética y del gas, P_{mag} y P_{gas} , respectivamente:

$$P = P_{mag} + P_{gas}. \quad (3.38)$$

Suponemos que la presión magnética (y del gas) es una fracción constante β ($1-\beta$) de la presión total (una suposición común en los modelos analíticos de estructuras de acreción):

$$P_{mag} = \frac{B^2}{24\pi} = \beta P, \quad P_{gas} = (1 - \beta)P. \quad (3.39)$$

3. Flujos de acreción en torno a agujeros negros

Aquí, B es la intensidad del campo magnético. Consideramos que el gas es un plasma con dos temperaturas, donde μ_i , μ_e , T_i y T_e representan los pesos moleculares medios y las temperaturas de los iones y electrones, respectivamente. La presión del gas se expresa entonces como la suma de las contribuciones de los iones y los electrones:

$$P_{gas} = P_i + P_e = \frac{k_B}{m_u} \epsilon \left(\frac{T_i}{\mu_i} + \frac{T_e}{\mu_e} \right), \quad (3.40)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y m_u es la unidad de masa atómica. Escribimos las temperaturas de los iones y electrones de la siguiente manera:

$$T_e = f(\omega) \mu_e \frac{m_u P_{gas}}{k_B \epsilon}, \quad T_i = g(\omega) \mu_i \frac{m_u P_{gas}}{k_B \epsilon}, \quad (3.41)$$

donde f y g son funciones lineales de la función de equipotencial ω .

Las condiciones impuestas son que las temperaturas sean iguales en la superficie: $T_i = T_e$ cuando $\omega = 0$, y que estén en una proporción determinada ξ en el centro: $\xi T_i = T_e$ cuando $\omega = 1$. Esto conduce a las siguientes expresiones:

$$f(0) = \frac{\mu_i}{\mu_e + \mu_i} \equiv \mathcal{M}, \quad (3.42)$$

$$f(1) = \frac{\mu_i \xi}{\mu_e + \mu_i \xi} \equiv \mathcal{M}_\xi, \quad (3.43)$$

Dado que la Ec. 3.40 establece que $f(\omega) + g(\omega) = 1$, podemos obtener fácilmente los valores de $g(0)$ y $g(1)$, lo que nos permite escribir expresiones explícitas para las dos temperaturas:

$$T_e = [(1 - \omega) \mathcal{M} + \omega \mathcal{M}_\xi] \mu_e \frac{(1 - \beta) m_u P}{k_B \epsilon}, \quad (3.44)$$

$$T_i = \left[\frac{\mu_e}{\mu_i} \mathcal{M} + \omega \mathcal{M} - \mathcal{M}_\xi \right] \mu_i \frac{(1 - \beta) m_u P}{k_B \epsilon}. \quad (3.45)$$

En la Fig. 3.5 se muestra el mapa de temperatura de iones para un toro caracterizado por los parámetros de la Tabla 3.1. La temperatura de los iones y de los electrones difieren de forma aproximada dos órdenes de magnitud, siendo la de los electrones menor, aunque su distribución espacial es similar en ambos casos.

| Parámetros | λ | $T_{e,c}$ | ξ | ϵ_c | β | n | a |
|------------|-----------|-----------|-----------|--------------|---------|-----|------|
| Valores | 0.7 | 10^{10} | 10^{-2} | 10^{-17} | 0.5 | 3/2 | 0.99 |

Tabla 3.1. Parámetros y valores asociados usados para modelar el mapa de temperatura de los iones del *toro*. $T_{e,c}$ corresponde a unidades de Kelvin y ϵ_c en g cm^{-3} .

Utilizando la Ec. 3.40, la constante politrópica en el centro del toro resulta:

$$K = \frac{k_B T_{e,c}}{(1 - \beta) m_u \epsilon_c^{2/3} \mu_e \mathcal{M}_\xi}, \quad (3.46)$$

donde $T_{e,c}$ es la temperatura central de los electrones. La presión total es:

$$P = \frac{k_B T_{e,c}}{(1 - \beta) \mu_e m_u \mathcal{M}_\xi} \frac{\epsilon^{5/3}}{\epsilon_c^{2/3}}, \quad (3.47)$$

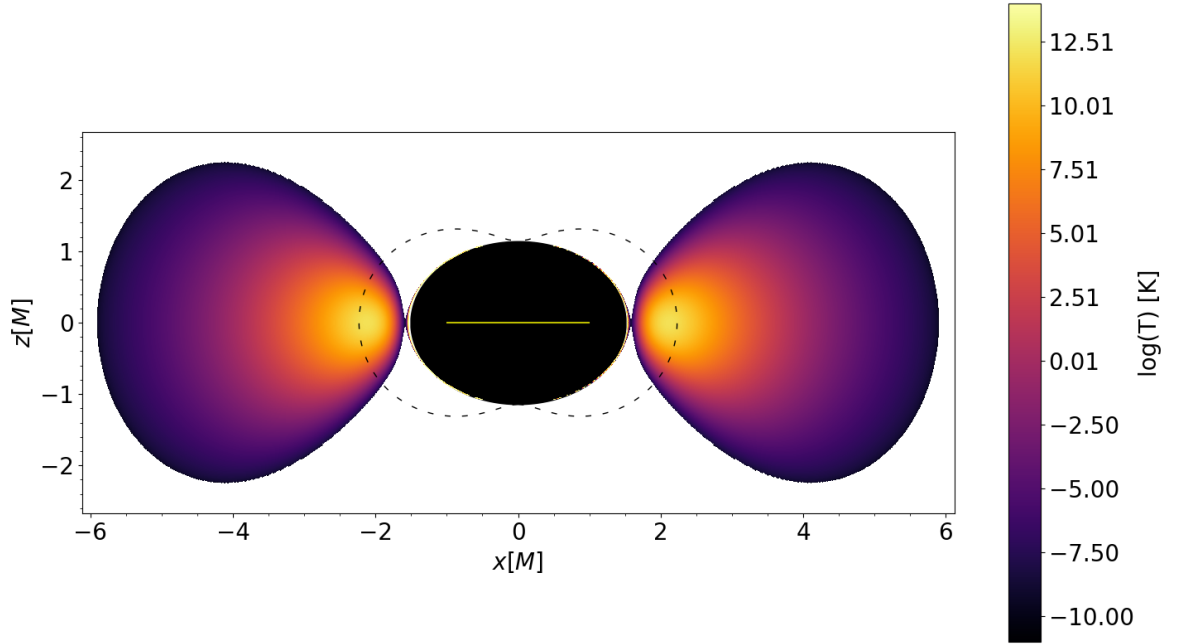


Figura 3.5. Temperatura asociada a los iones usando $\lambda = 0.7$. En el centro un BH de Kerr con un spin de $0.99M$, y su estructura asociada.

y el campo magnético es:

$$B = \left[\frac{24\pi\beta}{(1-\beta)} \frac{k_B T_{e,c}}{\mu_e m_u \mathcal{M}_\xi} \frac{\epsilon^{5/3}}{\epsilon_c^{2/3}} \right]^{1/2}. \quad (3.48)$$

Consideraremos las siguientes abundancias de hidrógeno y helio, $X = 0.75$ e $Y = 0.25$, respectivamente. Esto implica que la masa molecular efectiva de los iones es $\mu_i = 1.23$ y para los electrones $\mu_e = 1.14$, y por otro lado, define las densidades numéricas de electrones e iones, n_e y n_i , con respecto a la densidad de energía.

En el trabajo de [Straub et al. \(2012\)](#) se analiza la dependencia con estos parámetros que tienen tanto la estructura del *toro* como la emisión. En esta Tesis, consideraremos como modelo fiducial aquel determinado por los parámetros termodinámicos que figuran en la tabla [3.1](#).

Capítulo 4

Toro de Iones en gravedad- $f(R)$

4.1. Espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$

La solución análoga a la de Kerr-Newman pero en el contexto de gravedad- $f(R)$ fue propuesta por [Cembranos et al. \(2011\)](#). En adelante, nos referiremos a la métrica de Kerr- $f(R)$ asociada a la que se obtiene cuando el parámetro de carga eléctrica Q tiende a cero, es decir una métrica que describe un BH estacionario y axialmente simétrico, la cual está caracterizada por la masa (M), *spin* (a), y escalar de Ricci (R_0). La métrica de Kerr- $f(R)$ se define mediante el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2, \quad (4.1)$$

en coordenadas de Boyer-Lindquist. Las componentes de la métrica son:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta \Delta_\theta - \Delta_r}{\rho^2 \Xi^2}, \\ g_{t\varphi} &= \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2 \Xi^2} [(r^2 + a^2) \Delta_\theta + \Delta_r], \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2 \Xi^2} [(r^2 + a^2)^2 \Delta_\theta - a^2 \sin^2 \theta \Delta_r], \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta_r}, \quad g_{\theta\theta} = \frac{\rho^2}{\Delta_\theta}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \Delta_r &\equiv (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{R_0}{12} r^2\right) - 2Mr, \\ \Delta_\theta &\equiv 1 + \frac{R_0}{12} a^2 \cos^2 \theta, \\ \rho^2 &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Xi \equiv 1 + \frac{R_0}{12} a^2. \end{aligned}$$

Si $R_0 \rightarrow 0$ se retoma la métrica de Kerr en GR.

El escalar de Ricci R_0 puede en principio tomar cualquier valor real. Sin embargo, seleccionaremos aquellos valores de R_0 que conduzcan a métricas que puedan representar agujeros negros astrofísicos. El escalar de Ricci en términos de la coordenada radial del horizonte de

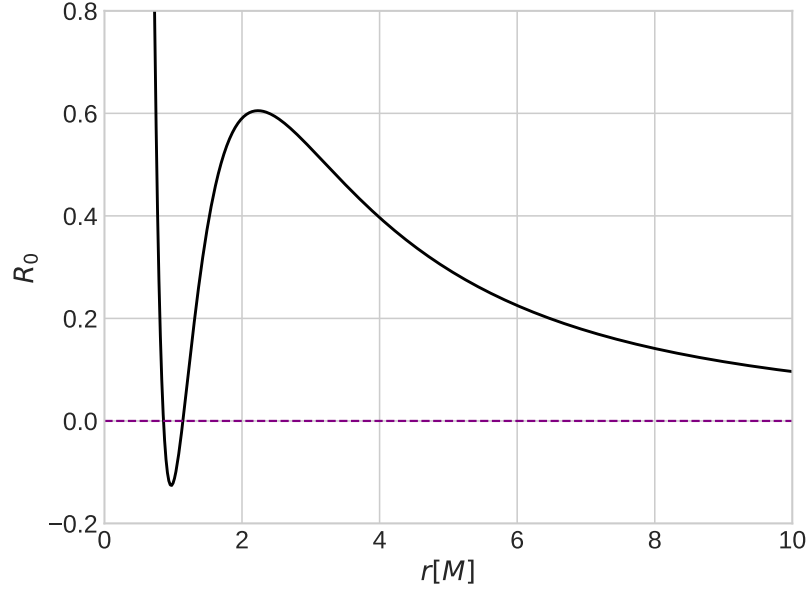


Figura 4.1. Escalar de Ricci en función de la coordenada radial para un BH en Kerr- $f(R)$ con $a = 0.99$.

eventos y el momento angular del BH, se obtiene de $\Delta_r = 0$. En términos de r , R_0 y a , tenemos que:

$$(r^2 + a^2)((1 - \bar{y}r^2)) - 2r = 0, \quad (4.2)$$

donde $\bar{y} = \frac{R_0}{12}$. Con esto podemos obtener el escalar de Ricci en función de la coordenada radial.

En la Fig. 4.1 usamos la última ecuación para graficar R_0 en términos de la coordenada r para $a = 0.99$

- Si $R_0 \in (0, 0.6]$ se tienen 3 horizontes de eventos: el horizonte de eventos interno y externo del BH y un horizonte cosmológico.
- Si $R_0 > 0.6$ sólo hay un horizonte interno que se vuelve más pequeño para valores más grandes de R_0 .
- Si $R_0 \in [-0.13, 0]$ hay 2 horizontes de eventos, el horizonte interno y externo de eventos del BH.
- Si $R_0 \leq -0.13$, las soluciones representan singularidades desnudas.

Por todo ésto, el análisis de las propiedades de agujeros negros de Kerr en teorías $f(R)$ se restringe para valores del escalar de Ricci en el intervalo $(-0.13, 0.6]$. En la Fig. 4.2 se muestra la estructura resultante de un BH en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ según el valor de R_0 .

Una partícula que se mueve en una dirección azimutal en el plano ecuatorial, es decir que $\theta = \pi/2$, tiene una quadri-velocidad $u^\mu = (u^t, 0, 0, u^\varphi)$. De la ecuación de la geodésica $u^\mu u_{;\mu}^\nu = 0$ se pueden extraer dos constantes de movimiento que están relacionadas con las simetrías del espacio-tiempo (es decir, $u^\mu \nabla_\mu \mathcal{C} = 0$ para una constante \mathcal{C}). Estas son:

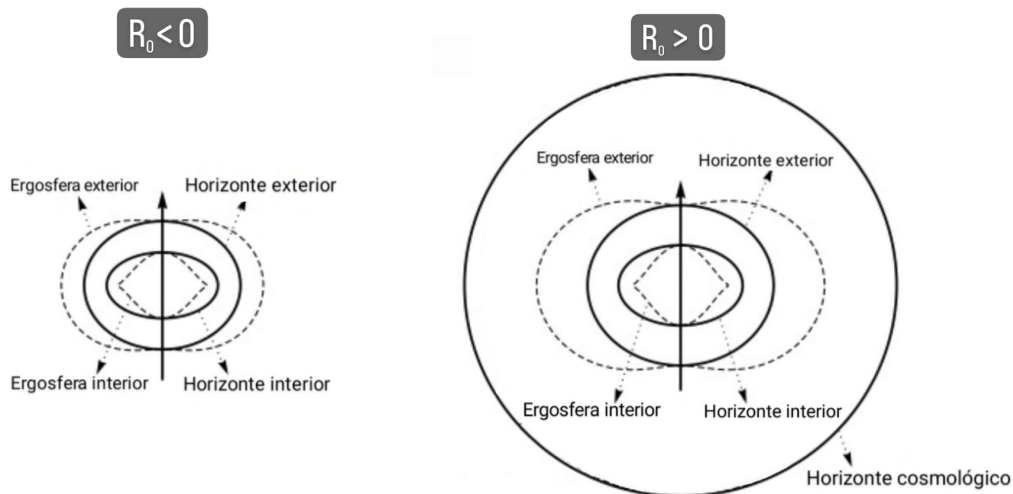


Figura 4.2. Diagrama de la estructura de un BH en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ para los valores de $R_0 \in [-0.13, 0]$ (panel izquierdo). Fig. derecha: diagrama de la estructura de un BH en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ para los valores $R_0 \in (0, 0.6]$. Fig. adaptada de Cembranos et al. (2011).

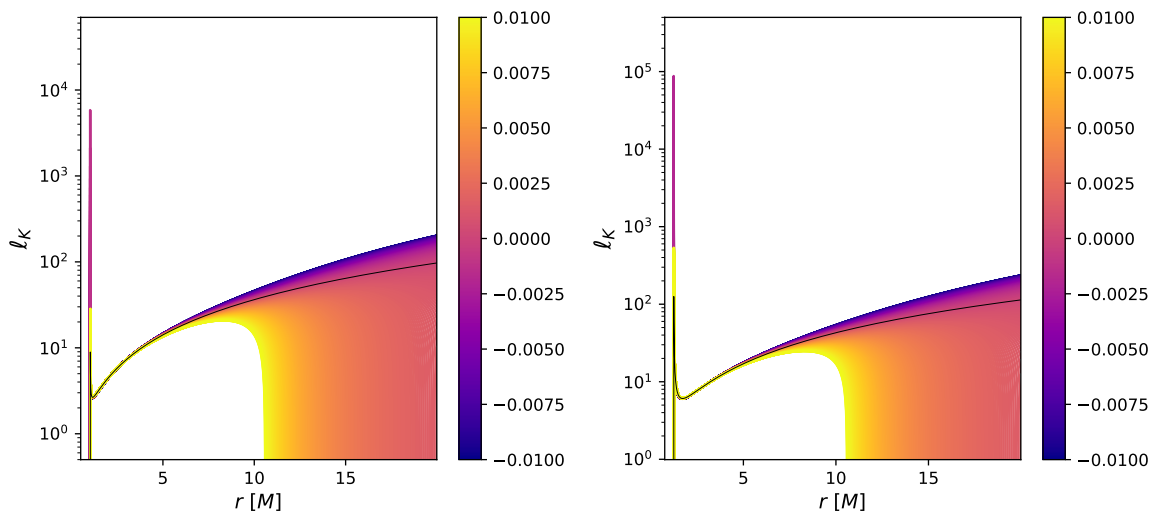


Figura 4.3. Momento angular específico del toro en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y para $a = 0.85$ (panel derecho). En negro se representa Kerr. La barra de color representa la variación del parámetro R_0 .

$$\mathcal{E} \equiv -u_t = -u^t (g_{tt} + \Omega g_{t\phi}), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L} \equiv u_\phi = u^t (g_{t\phi} + \Omega g_{\phi\phi}), \quad (4.4)$$

donde $\Omega = u^\phi/u^t$ es la velocidad angular. En términos del \bar{y} , r y a se definen como (Stuchlík

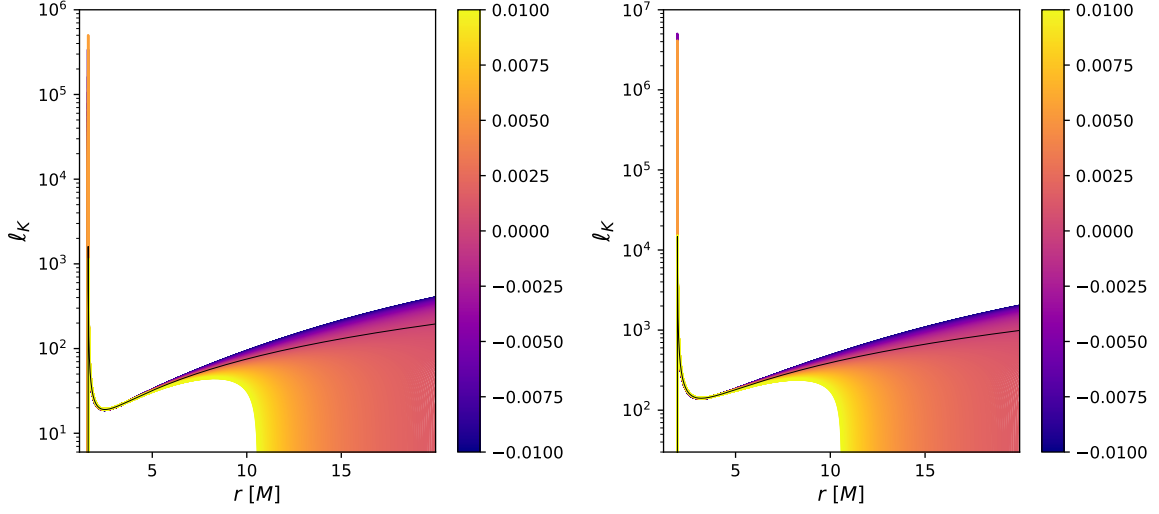


Figura 4.4. Momento angular específico del *toro* en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y para $a = 0.1$ (panel derecho). En negro se representa Kerr. La barra de color representa la variación del parámetro R_0 .

& Slaný, 2004):

$$\mathcal{E}(r, a, \bar{y}) = \frac{1 - \frac{2}{r} - (r^2 + a^2)\bar{y} + a(\frac{1}{r^3} - \bar{y})^{1/2}}{(1 - \frac{3}{r} - a^2\bar{y} + 2a(\frac{1}{r^3} - \bar{y})^{1/2})^{21/2}}, \quad (4.5)$$

y

$$\mathcal{L}(r, a, \bar{y}) = -\frac{2a + ar(r^2 + a^2)\bar{y} - r(r^2 + a^2)(\frac{1}{r^3} - \bar{y})^{1/2}}{1 - \frac{3}{r} - a^2\bar{y} + 2a(\frac{1}{r^3} - \bar{y})^{1/2}}. \quad (4.6)$$

Con esto podemos definir el momento angular específico:

$$\ell \equiv \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} = -\frac{u_\varphi}{u_t}, \quad (4.7)$$

que en Kerr- $f(R)$ es:

$$\ell_K(r, R_0) = -\frac{2a + ra(r^2 + a^2)\bar{y} - r(r^2 + a^2)(r^{-\frac{1}{3}} - \bar{y})^{\frac{1}{2}}}{r(1 - 2r^{-1} - (r^2 + a^2)\bar{y} + a(r^{-3} - \bar{y})^{\frac{1}{2}})}. \quad (4.8)$$

Si tomamos $\bar{y} \rightarrow 0$, reobtenemos el momento angular específico en la geometría de Kerr (Bardeen et al., 1972). La estructura del *toro* y el comportamiento del momento angular específico están determinados por el valor de R_0 y a del BH.

En esta tesis, se examinarán cuatro casos distintos de *spin*: 0.99, 0.85, 0.5 y 0.1. En cuanto a los valores de R_0 , se limitará al rango de $[-10^{-2}, 10^{-2}]$. En el pasado, Pérez et al. (2013) obtuvieron cotas para los valores de R_0 mediante el estudio de discos de acreción delgados. Encontraron que discos estables sólo pueden formarse para $R_0 \in [-1.2 \times 10^{-3}; 6.67 \times 10^{-4}]$. En particular, se descartaron valores de $R_0 < -1.2 \times 10^{-3}$ comparando con las distribuciones espectrales de energía observadas en Cygnus X-1 en el estado dominado por la emisión térmica (estado *high-soft*). El rango de valores de R_0 que se consideran en este trabajo esta ligeramente por fuera de las cotas mencionadas a fin de explorar los límites de la teoría para otro tipo de modelo de acreción.

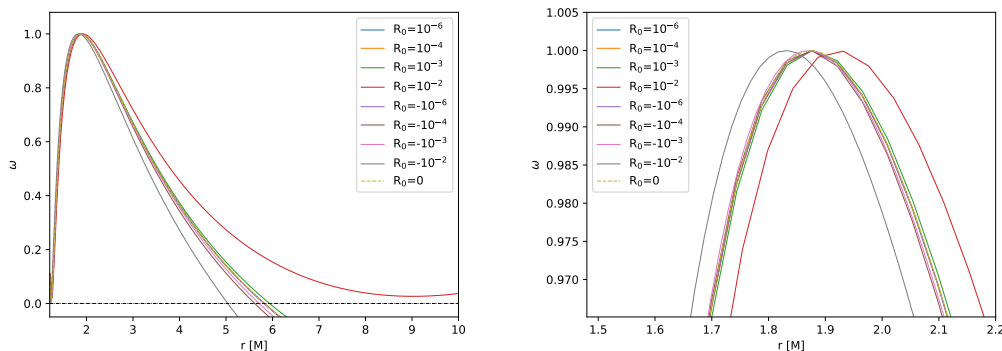


Figura 4.5. Potencial efectivo normalizado asociado al *toro* en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω .

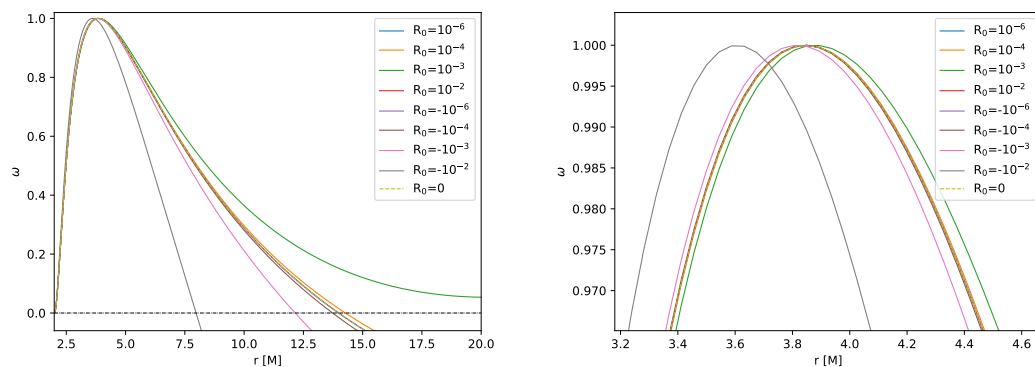


Figura 4.6. Potencial efectivo normalizado asociado al *toro* en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.85$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω .

En la Fig. 4.3 se presenta el momento angular específico para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.99$ y para $a = 0.85$. A medida que R_0 aumenta, podemos observar que ℓ_K tiende a disminuir para valores grandes de r . Sin embargo, para valores pequeños de r , el comportamiento es similar al de un BH de Kerr. Este comportamiento se mantiene para $a = 0.5$ y para $a = 0.1$, y se puede apreciar en las Figs. 4.4.

4.2. Construcción del *Toro de Iones* en gravedad- $f(R)$

Como se mencionó en el Cap. 3, para construir la estructura geométrica del *toro* es necesario determinar las siguientes cantidades:

- Radio de la *órbita circular marginalmente ligada*: r_{mb} . Para calcular esta órbita, se resuelve la Ec. 4.5 tal que $\mathcal{E}(r_{mb}, a, \bar{y}) = 0$. Una vez dada esta relación obtenemos los valores de r_{mb} asociados a un a , y un \bar{y} particular.
- Radio de *órbita circular estable más interior*: r_{isco} . Aquí se resuelve la ecuación 4.8, donde necesitamos que $\ell_K(r_{isco}, R_0) = 0$.
- Se calculan $\ell_{isco}(a)$ y $\ell_{mb}(a)$ utilizando la Ec. 4.8.

4. Toro de Iones en gravedad- $f(R)$

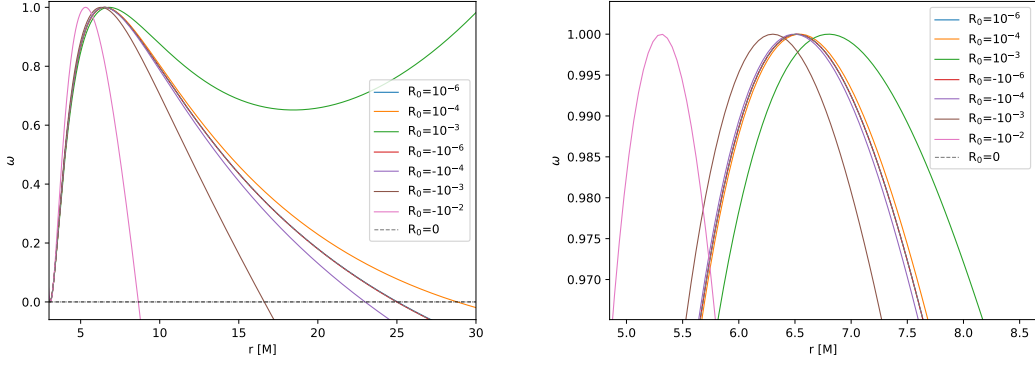


Figura 4.7. Potencial efectivo normalizado asociado al *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω .

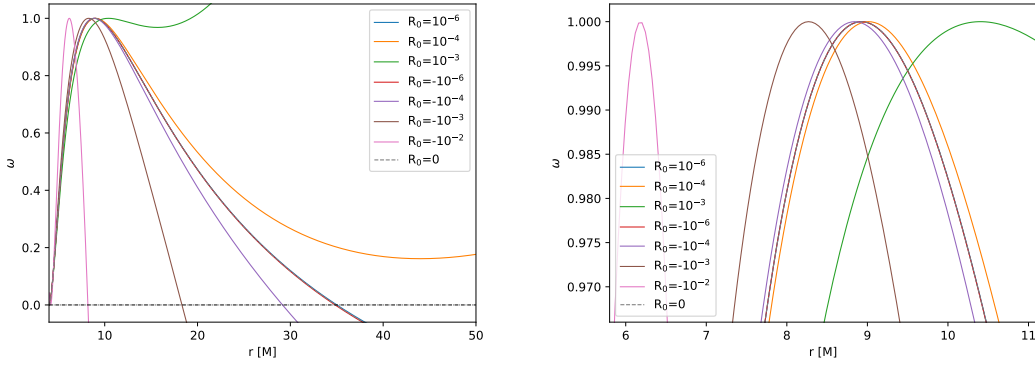


Figura 4.8. Potencial efectivo normalizado asociado al *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.1$ (panel izquierdo). En el panel derecho se muestra un zoom del máximo valor de ω .

- d. Radio de la *órbita del derrame gravitacional*: r_{dgrav} . Tomando el momento angular específico del *toro*, se resuelve $\ell_K(r_{dgrav}, R_0) = \ell_0$ ya que ℓ_0 está definido por la Ec. 3.26. Para resolver esta igualdad se usó el método de bisección entre r_{mb} y r_{isco} .
- e. Radio de la *órbita central*: $r_{central}$. Se resolvió la misma igualdad anterior donde ahora se usa el método de bisección entre r_{isco} y número lo suficientemente grande que pertenezca al *toro*.
- f. Los valores de ℓ_0 y a determinan completamente el potencial $W(r, \theta)$ según las Ecs. 3.23 y 3.24.
- g. Dado W_s y W_c , se obtiene H_c usando la Ec. 3.32.
- h. Conocemos entonces completamente el potencial adimensional $\omega(r, \theta)$ según lo dado por la Ec. 3.33.

De forma independiente al cálculo de la estructura del *toro* encontramos el *radio de los horizontes de eventos*: r_{eh} , y el *radio del horizonte cosmológico*: r_{ch} . El radio de los horizontes se calcula usando la Ec. 4.2.

Cabe mencionar que para $R_0 > 0$ el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$ presenta una última órbita circular estable exterior, denota r_{osco} . En otras palabras, para $r > r_{osco}$ no hay órbitas

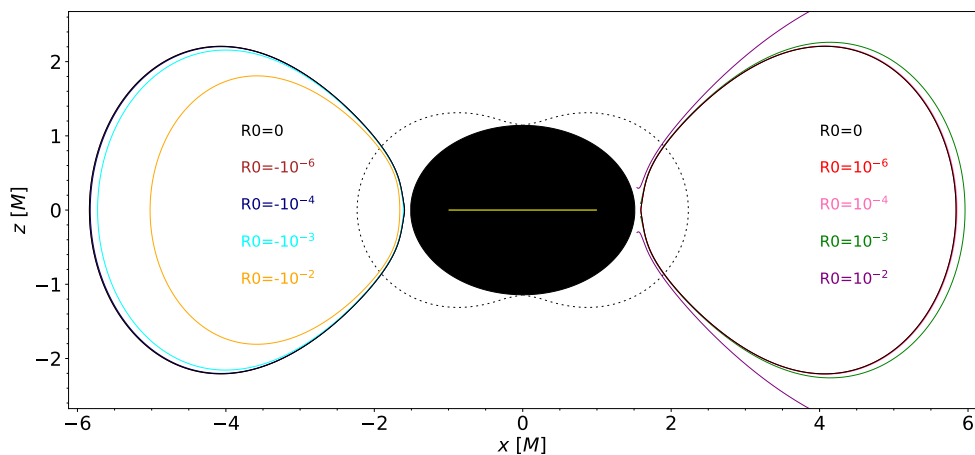


Figura 4.9. Superficies equipotenciales del *toro* para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.99$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular.

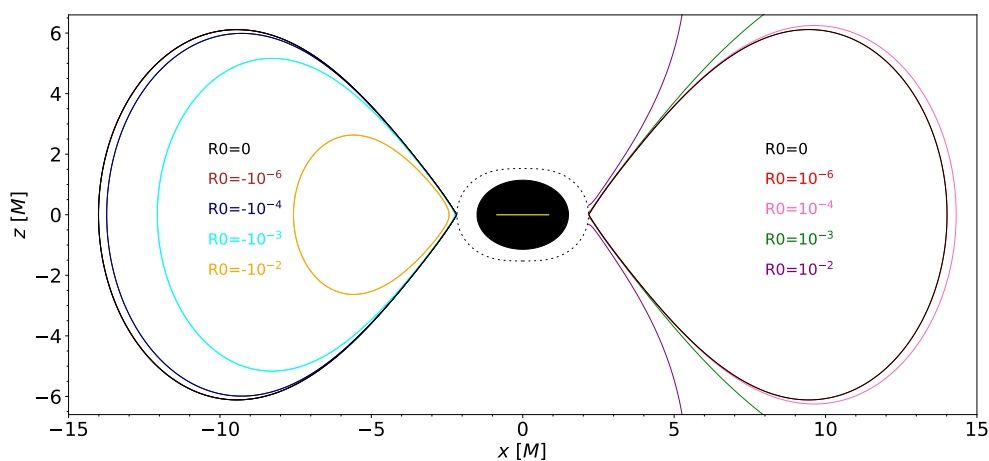


Figura 4.10. Superficies equipotenciales del *toro* para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.85$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular.

circulares estables. Para determinar estos radios, se siguieron los cálculos especificados en Pérez et al. (2013).

En particular, se presentan solo una vez para el caso en que el $a = 0.99$, dado que para el resto de los casos, estos valores no varían. La librería usada para determinar las órbitas fue

la de `scipy`, dentro del lenguaje de programación `python`.

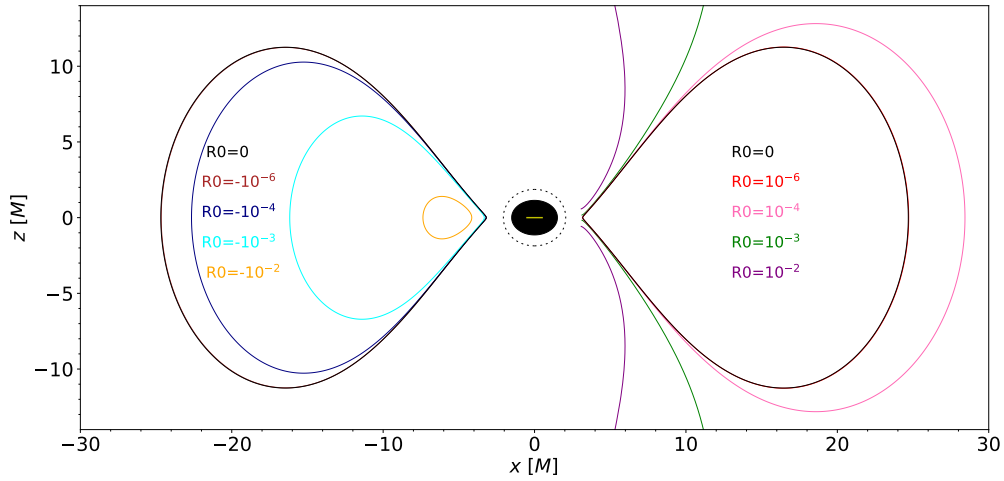


Figura 4.11. Superficies equipotenciales del *toro* para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.5$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular.

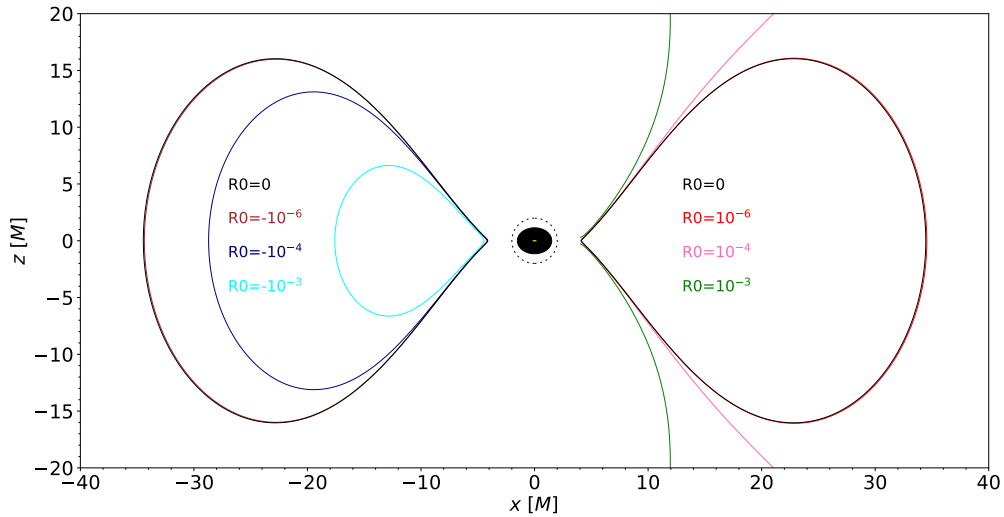


Figura 4.12. Superficies equipotenciales del *toro* para un BH de Kerr- $f(R)$ con $a = 0.1$. Las curvas de diferente color están asociadas a un R_0 en particular.

En las Figs. 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se muestra al potencial efectivo normalizado asociada a diferentes valores de a para $\theta = \pi/2$. Estas Figs. proporcionan información sobre la extensión

del *toro* al variar el *spin* y el escalar de Ricci. El límite externo del *toro* sobre el plano ecuatorial va a estar dado por $\omega(r) = 0$, y el centro del *toro* corresponde a la región donde la presión es máxima, esto es, $\omega(r) = 1$.

| R_0 | r_{mb} | r_{isco} | r_{dgrav} | $r_{central}$ | r_{eh} | r_{ch} | r_{osco} |
|-----------------------|----------|------------|-------------|---------------|----------|----------|------------|
| 10^{-6} | 1.21001 | 1.4545 | 1.23674 | 1.874981 | 0.86 | 1.14 | 346.3 |
| 10^{-4} | 1.21012 | 1.4547 | 1.23675 | 1.874952 | 0.86 | 1.14 | 345.4 |
| 6.67×10^{-4} | 1.21078 | 1.4560 | 1.23687 | 1.877974 | 0.86 | 1.14 | 113.1 |
| 10^{-3} | 1.21116 | 1.4567 | 1.23759 | 1.879505 | 0.86 | 1.14 | 108.5 |
| 10^{-2} | 1.22151 | 1.4765 | 1.2493 | - | 0.85 | 1.15 | 33.6 |
| 0 | 1.21 | 1.4545 | 1.2367 | 1.875 | 0.86 | 1.14 | - |
| -10^{-6} | 1.21 | 1.4545 | 1.23674 | 1.874941 | 0.86 | 1.14 | - |
| -10^{-4} | 1.21099 | 1.4542 | 1.236673 | 1.874538 | 0.86 | 1.14 | - |
| -10^{-3} | 1.20884 | 1.4523 | 1.2366 | 1.879254 | 0.86 | 1.14 | - |
| -1.2×10^{-3} | 1.2086 | 1.45186 | 1.2352 | 1.880149 | 0.86 | 1.14 | - |
| -10^{-2} | 1.19823 | 1.4325 | 1.2239 | 1.83088 | 0.86 | 1.13 | - |

Tabla 4.1. Localización de las órbitas circularmente marginalmente limitadas (r_{mb}), órbitas circularmente estables más internas (r_{isco}), órbitas del derrame gravitacional (r_{dgrav}), órbitas central del *toro* ($r_{central}$), horizontes de sucesos (r_{eh}), horizontes cosmológicos (r_{ch}), y de las órbitas circularmente estables más externas (r_{osco}) para los escalares de Ricci positivos y negativos, para un BH con $a = 0.99$ en el espacio-tiempo de Kerr- $f(R)$.

En particular, se observa que para $a = 0.99$, la estructura del *toro* diverge (no es una estructura cerrada) para valores de $R_0 \geq 0.01$. Si consideramos $a = 0.85$ y $a = 0.5$, ocurre algo similar, donde la estructura del *toro* diverge para valores de $R_0 \geq 0.001$. Por último, cuando $a = 0.1$, nuevamente se observa una situación similar para valores de $R_0 \geq 0.0001$. Luego, analizando la estructura geométrica del *toro*, encontramos una restricción al parámetro R_0 (dependiendo del valor de a).

De los gráficos se nota que la presión máxima se mueve hacia valores de r más grandes a medida que R_0 aumenta. Estas características se hacen evidentes en las Figs 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.

Las superficies equipotenciales de los *toros* en Kerr- $f(R)$ dependen de los parámetros a y R_0 , tal como se explicó en el Capítulo 3. La forma y ubicación de las superficies equipotenciales dependen únicamente de las propiedades de la geometría del espacio-tiempo. Se presentan dichas superficies en las Figs 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12.

En general, un mayor valor del *spin* del BH da lugar a *toros* más pequeños. Un escalar de Ricci negativo tiene un efecto similar, también da lugar a *toros* más pequeños. La diferencia entre el efecto del aumento de a y el escalar de Ricci negativo es que, en el primer caso, la máxima presión y densidad del *toro* se desplaza hacia el horizonte de eventos, mientras que en el último caso, el centro del *toro* permanece casi en su lugar y solo las partes exteriores se comprimen hacia adentro. Esto se debe a la distribución de momento angular Kepleriano $f(R)$ -Kerr, que es más estrecha que la curva correspondiente en GR. El mismo λ entonces requiere un momento angular ligeramente menor, ℓ_0 , para mantener una partícula en órbita. Un escalar de Ricci positivo produce, de manera análoga, *toros* más grandes (estirados).

En la Tabla 4.1 se encuentran los valores correspondientes a las regiones mencionadas anteriormente para diferentes valores de R_0 . Estos valores de R_0 coinciden con los que fueron utilizados por Pérez et al. (2013), con el propósito de facilitar la comparación.

Para el caso en que $a = 0.99$, las regiones se encuentran muy cercanas a un BH de Kerr. En las Tablas 4.2, 4.3 y 4.4 se presentan para a igual a 0.85, 0.5 y 0.1, respectivamente.

A continuación, se analizarán algunos parámetros termodinámicos utilizando los valores

4. Toro de Iones en gravedad- $f(R)$

| R_0 | r_{mb} | r_{isco} | r_{dgrav} | $r_{central}$ |
|-----------------------|----------|------------|-------------|---------------|
| 10^{-6} | 1.9246 | 2.6321 | 2.005 | 3.8462 |
| 10^{-4} | 1.92459 | 2.6326 | 2.005 | 3.8492 |
| 6.67×10^{-4} | 1.92425 | 2.6358 | 2.005 | 3.86780 |
| 10^{-3} | 1.92454 | 2.6378 | 2.005 | - |
| 10^{-2} | 1.92414 | 2.6965 | 2.0084 | - |
| 0 | 1.9246 | 2.6321 | 2.00498 | 3.84622 |
| -10^{-6} | 1.9246 | 2.6320 | 2.005 | 3.8462 |
| -10^{-4} | 1.9246 | 2.63153 | 2.0049 | 3.8432 |
| -10^{-3} | 1.92466 | 2.6265 | 2.0046 | 3.8169 |
| -1.2×10^{-3} | 1.92467 | 2.6264 | 2.0046 | 3.8113 |
| -10^{-2} | 1.9254 | 2.5813 | 2.0022 | 3.6072 |

Tabla 4.2. Idem Tabla 4.1 para $a = 0.85$.

| R_0 | r_{mb} | r_{isco} | r_{dgrav} | $r_{central}$ |
|-----------------------|----------|------------|-------------|---------------|
| 10^{-6} | 2.91421 | 4.233 | 3.0640 | 6.5174 |
| 10^{-4} | 2.91374 | 4.2368 | 3.0638 | 6.5418 |
| 6.67×10^{-4} | 2.91108 | 4.2591 | 3.0652 | 6.68476 |
| 10^{-3} | 2.90954 | 4.2729 | 3.0620 | - |
| 10^{-2} | 2.8716 | 10.6265 | 9.0883 | - |
| 0 | 2.91421 | 4.233 | 3.06408 | 6.51724 |
| -10^{-6} | 2.9142 | 4.2329 | 3.0640 | 6.517 |
| -10^{-4} | 2.9146 | 4.2292 | 3.0642 | 6.4936 |
| -10^{-3} | 2.919 | 4.1970 | 3.0663 | 6.3021 |
| -1.2×10^{-3} | 2.9199 | 4.1902 | 3.0667 | 6.2647 |
| -10^{-2} | 2.96769 | 3.9747 | 3.0948 | 5.3093 |

Tabla 4.3. Idem Tabla 4.1 para $a = 0.5$.

| R_0 | r_{mb} | r_{isco} | r_{dgrav} | $r_{central}$ |
|-----------------------|----------|------------|-------------|---------------|
| 10^{-6} | 3.79735 | 5.66943 | 4.01006 | 8.9257716 |
| 10^{-4} | 3.79568 | 5.68226 | 4.009268 | 9.0132994 |
| 6.67×10^{-4} | 3.7863 | 5.76292 | 4.005074 | 9.686483 |
| 10^{-3} | 3.7809 | 5.8172535 | 4.002891 | - |
| 10^{-2} | 3.65975 | 10.62658 | 8.637230 | - |
| 0 | 3.79377 | 5.6693 | 4.01007 | 8.924897 |
| -10^{-6} | 3.79738 | 5.66917 | 4.01007 | 8.924079 |
| -10^{-4} | 3.79906 | 5.656673 | 4.01089 | 8.842373 |
| -10^{-3} | 3.81464 | 5.555492 | 4.01895 | 8.270463 |
| -1.2×10^{-3} | 3.8182 | 5.53555 | 4.02091 | 8.17126 |
| -10^{-2} | 4.02714 | 5.040296 | 4.167439 | 6.182828 |

Tabla 4.4. Idem Tabla 4.1 para $a = 0.1$.

de R_0 presentes en las tablas, excluyendo aquellos en los cuales la estructura del *toro* no tiene un significado físico adecuado.

Se puede notar que el comportamiento de los parámetros termodinámicos guarda similitud con el del potencial normalizado, lo cual es esperable. A modo de ejemplo, se presenta la densidad de energía para diferentes valores de a y de R_0 en las Figs. 4.13 y 4.14. Conforme R_0 disminuye, el pico máximo de la densidad de energía se desplaza hacia radios más chicos.

4.2. Construcción del *Toro de Iones* en gravedad- $f(R)$

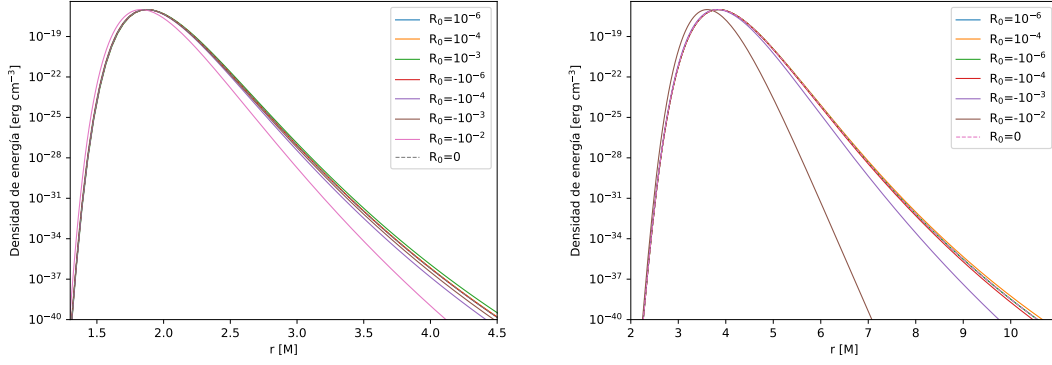


Figura 4.13. Densidad de energía del *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y $a = 0.85$ (panel derecho)

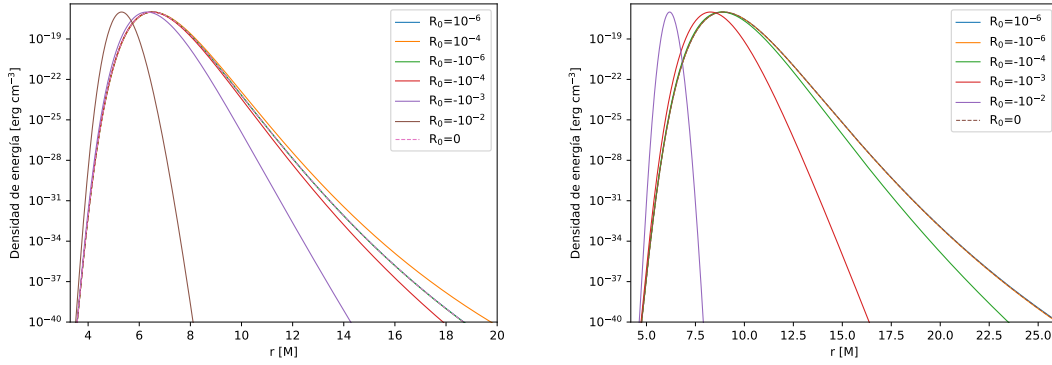


Figura 4.14. Densidad de energía del *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y $a = 0.1$ (panel derecho).

Además, se muestra la temperatura de los electrones en las Figs 4.15 y 4.16, así como la temperatura de los iones en las Figs 4.17 y 4.18, con un comportamiento similar a la densidad de energía.

Una vez caracterizado el comportamiento de la estructura del *toro* y los parámetros termodinámicos al variar a y R_0 , podemos utilizar esta información para calcular la distribución espectral de energía (SED, por sus siglas en inglés). Para llevar a cabo este cálculo, será necesario considerar las pérdidas de energía más relevantes para este tipo de sistema. Abordaremos este tema en detalle en el próximo capítulo.

4. Toro de Iones en gravedad- $f(R)$

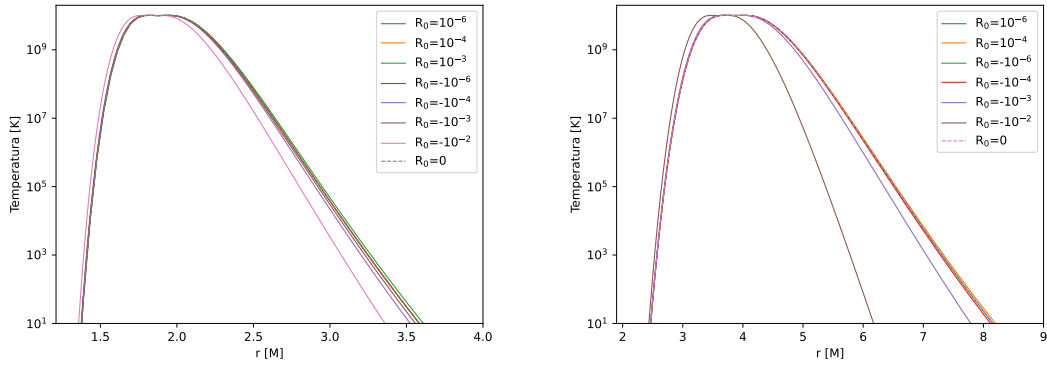


Figura 4.15. Temperatura de los electrones del *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y $a = 0.85$ (panel derecho).

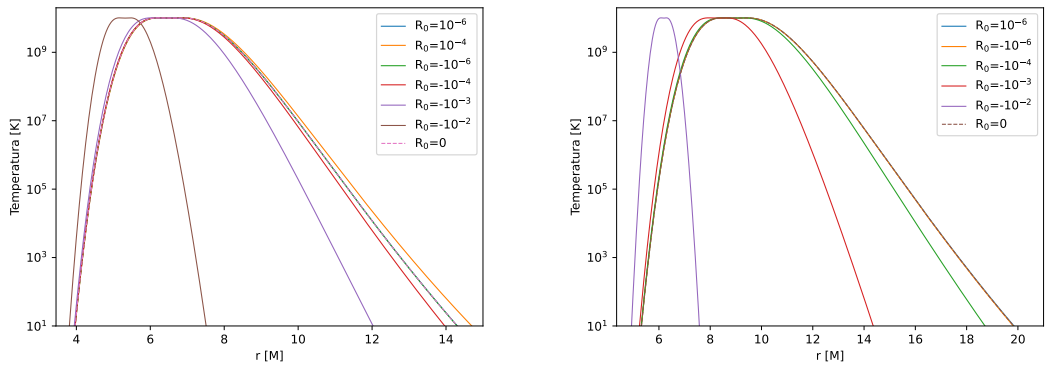


Figura 4.16. Temperatura de los electrones del *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y $a = 0.1$ (panel derecho).

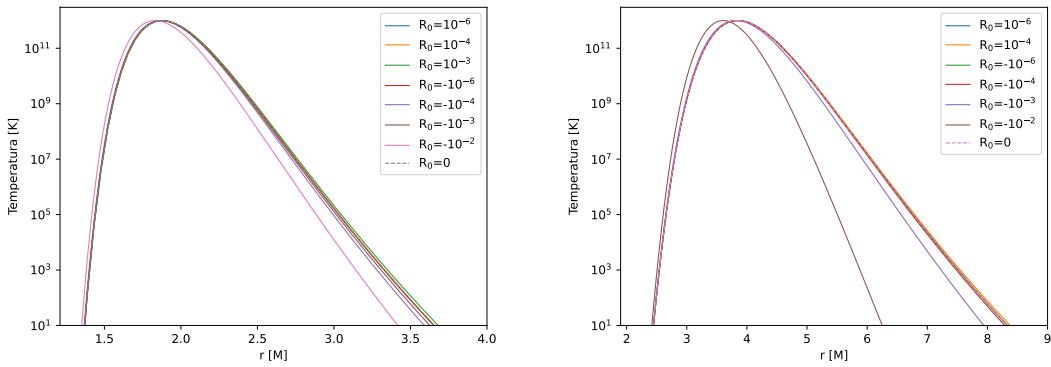


Figura 4.17. Temperatura de los iones del *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.99$ (panel izquierdo) y $a = 0.85$ (panel derecho).

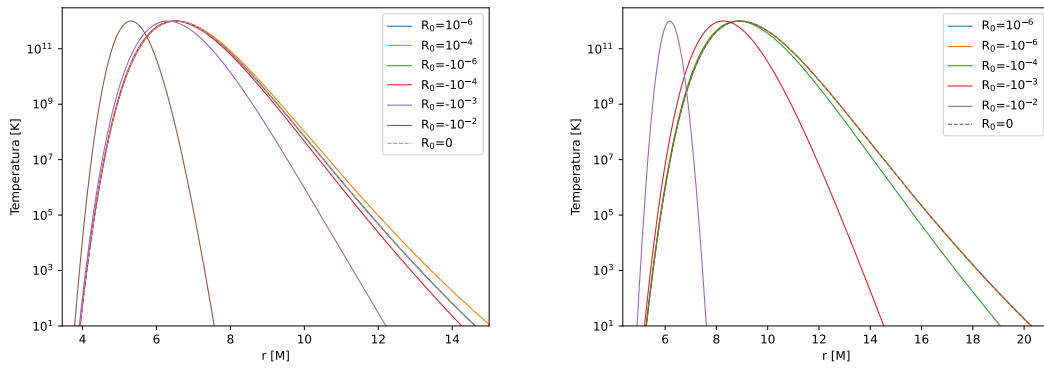


Figura 4.18. Temperatura de los iones del *toro* de iones en Kerr- $f(R)$ para $a = 0.5$ (panel izquierdo) y $a = 0.1$ (panel derecho).

Capítulo 5

Distribución espectral de energía

La característica principal de los HAF es que desarrollan una estructura de dos temperaturas. Esto se debe a tres principales puntos:

- El calentamiento por disipación viscosa deposita una cantidad mayor de energía en los iones en comparación con los electrones.
- La principal forma en la que los iones se enfrían es a través de la transferencia de energía hacia los electrones mediante colisiones coulombianas. Sin embargo, en condiciones de bajas densidades, este proceso se vuelve altamente ineficiente debido a que la tasa de intercambio de energía Coulombiana entre iones y electrones es más lenta que la tasa de acreción.
- Los electrones se enfrían de manera más eficiente radiativamente en comparación con los iones, lo que resulta en una tendencia a mantener temperaturas más bajas.

La configuración de plasmas de dos temperaturas también es respaldada por simulaciones de Magnetohidrodinámica en Relatividad General (GRMHD por sus siglas en inglés), donde las ecuaciones de energía para iones y electrones evolucionan de manera independiente (Sądowski et al., 2017; Ressler et al., 2017; Ryan et al., 2018; Chael et al., 2019).

En los HAF se tienen plasmas no colisionales, donde se supone que cada población de iones y electrones está en equilibrio termodinámico por separado. Sin embargo, esto puede no ser válido si las interacciones coulombianas entre partículas de la misma especie también son ineficientes.

Como bien se explicó en el Cap. 3, los *toros* comparten características similares con los HAF, en particular, podemos considerar un *toro* compuesto de un plasma de dos temperaturas. En este capítulo estudiaremos en las pérdidas radiativas de partículas con una distribución térmica. ⁽ⁱ⁾.

⁽ⁱ⁾Se ha demostrado que en un HAF, las colisiones coulombianas entre iones son ineficientes, lo que les permite conservar cualquier distribución de energía que hayan adquirido durante el proceso de aceleración. Por otro lado, los electrones tienden a termalizarse más eficientemente que los iones, por lo que es probable que sigan una distribución de energía Maxwelliana si la tasa de acreción no es muy baja ($\dot{m} > 10^{-3} \dot{m}_{edd}$). Sin embargo, esta eficiencia de termalización de los electrones disminuye significativamente a medida que aumenta la energía de las partículas. Esto implica que si los electrones son acelerados rápidamente a energías muy altas, pueden mantener su distribución de energía adquirida (no térmica) durante un tiempo considerable (Mahadevan & Quataert, 1997).

5.1. Pérdidas radiativas en torno de agujeros negros acretantes

Dado que un *toro* alcanza temperaturas extremadamente elevadas y tiene una estructura ópticamente delgada, los principales procesos radiativos que afectarán a los electrones del plasma son la radiación sincrotrón, la emisión Bremsstrahlung y la Comptonización. Estos procesos dependen únicamente de las propiedades locales del plasma, como la densidad de iones y electrones, la intensidad del campo magnético inducido y la temperatura.

5.1.1. Emisividad Bremsstrahlung

El Bremsstrahlung es el proceso mediante el cual una partícula cargada emite radiación al ser acelerada en el campo electrostático de un núcleo atómico u otra partícula cargada. A las elevadas temperaturas presentes en los *toros*, tanto las dispersiones de electrones con iones (ei) como la de electrones con electrones (ee) debe tenerse en cuenta.

La tasa de pérdida de energía por bremsstrahlung de una partícula, $f_{\text{br}} = \frac{dE_{\text{br}}}{dt dV}$, incluye la emisión tanto de colisiones ión-electrón como de colisiones electrón-electrón (Svensson, 1982; Stepney & Guilbert, 1983):

$$f_{\text{br}}^- = f_{\text{ei}}^- + f_{\text{ee}}^- \quad (5.1)$$

donde

$$f_{\text{ei}} = n_e \bar{n} \sigma_T \alpha_f m_e c^3 F_{\text{ei}}(\theta_e), \quad (5.2)$$

donde α_f es la constante de estructura fina y la función $F_{\text{ei}}(\theta_e)$ tiene una forma aproximada en unidades de $[\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3}]$.

$$F_{\text{ei}}(\theta_e) = \begin{cases} 4\sqrt{\frac{2\theta_e}{\pi^3}} (1 + 1.781\theta_e^{1.34}), & \text{si } \theta_e < 1, \\ \frac{9\theta_e}{2\pi} [\ln(1.123\theta_e + 0.48) + 1.5], & \text{si } \theta_e > 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

donde se expresa las temperaturas de forma adimensional:

$$\theta_e = \frac{k_B T_e}{m_e c^2}, \quad (5.4)$$

$$\theta_i = \frac{k_B T_i}{m_i c^2}, \quad (5.5)$$

donde m_e y m_i son las masas del electrón y el ion, respectivamente.

Para la tasa de enfriamiento de bremsstrahlung por interacciones electrón-electrón, Svensson (1982) presenta la siguiente expresión:

$$f_{\text{ee}} = n_e^2 r_e^2 \alpha_f m_e c^3 F_{\text{ee}}(\theta_e), \quad (5.6)$$

donde

$$F_{\text{ee}}(\theta_e) = \begin{cases} \frac{20}{9\sqrt{\pi}} (44 - 3\pi^2) \theta_e^{3/2} (1 + 1.1\theta_e + \theta_e^2 - 1.25\theta_e^{5/2}), & \text{si } \theta_e < 1, \\ 24\theta_e [\ln(2\eta \theta_e) + 1.28], & \text{si } \theta_e \geq 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

donde r_e es el radio clásico del electrón, y el número de Euler $\eta = \exp(-\gamma_E) = 0.5616$, donde γ_E es la constante de Euler-Mascheroni.

De esta forma, la emisividad bremsstrahlung proporcionada anteriormente (en unidades de $[\text{cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}]$), resulta:

$$j_\nu^{br} = f_{br}^- \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_e}\right) \bar{G}, \quad (5.8)$$

donde h es la constante de Planck, el factor $\frac{1}{4\pi}$ supone emisión isotrópica en el marco del emisor, y \bar{G} es el factor de Gaunt promediado en velocidad, dado por Rybicki & Lightman (1986):

$$\bar{G} = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{k_B T_e}{h\nu}, & \text{si } \frac{k_B T_e}{h\nu} < 1, \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{4}{\gamma_E} \frac{k_B T_e}{h\nu}\right), & \text{si } \frac{k_B T_e}{h\nu} \geq 1. \end{cases} \quad (5.9)$$

5.1.2. Emisividad sincrotrón

La radiación sincrotrón es causada por la aceleración de una partícula cargada en un campo magnético. La emisividad del proceso sincrotrón para electrones que sigan una distribución de Maxwell–Jüttner (térmica relativista) es (Pacholczyk, 1970)

$$j_\nu^{sy} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{c\sqrt{3}} \frac{4\pi n_e \nu}{K_2(\frac{1}{\theta_e})} M(x_M), \quad (5.10)$$

donde

$$M(x_M) = \frac{4.0505A}{x_M^{1/6}} \left(1 + \frac{0.4B}{x_M^{1/4}} + \frac{0.5316C}{x_M^{1/2}}\right) \exp(-1.8899x_M^{1/3}), \quad (5.11)$$

y

$$x_M = \frac{2\nu}{2\nu_0\theta_e^2}, \nu_0 = \frac{eB}{2\pi m_e c}. \quad (5.12)$$

Los parámetros A , B y C están tabulados en Mahadevan et al. (1996) para un rango de temperaturas acorde a las que se alcanzan en un *toro*. A temperaturas más bajas o en las regiones externas del *toro*, la emisión está dominada por bremsstrahlung. Por debajo de una frecuencia crítica, ν_c , el espectro sincrotrón se vuelve autoabsorbido. Dado que el flujo en los *toros* es muy similar a un flujo esférico, esta frecuencia puede obtenerse igualando la emisión sincrotrón en una esfera de algún radio, R [cm], con la emisión de cuerpo negro de Rayleigh-Jeans desde la superficie de esa esfera y resolviendo para x_M , que luego se sustituye en la ecuación:

$$\nu_c = \frac{3}{2}\nu_0\theta_e^2 x_M. \quad (5.13)$$

Suponemos que a bajas frecuencias, $\nu < \nu_c$, la absorción está dada localmente por la ley de Kirchhoff, es decir, la parte de baja frecuencia de la emisión sincrotrón se comporta como un cuerpo negro.

5.1.3. Comptonización

La dispersión Compton depende de la densidad de fotones, los cuales pueden originarse en cualquier región del flujo. Debido a la baja opacidad, los fotones pueden experimentar múltiples dispersiones con los electrones antes de escapar del sistema. Este fenómeno se conoce como *Comptonización* y, en principio, posee una naturaleza altamente no local. Abordar globalmente la *Comptonización* resulta en un proceso complejo y computacionalmente costoso.

En nuestro modelo, haremos un tratamiento local como primera aproximación (al igual que Manmoto et al. (1997)). Aunque el proceso de *Comptonización* se asume local, presenta una naturaleza no lineal, ya que la intensidad en un punto del flujo de acreción depende de las emisiones previas de fotones sincrotrón y Bremsstrahlung, así como del propio proceso de dispersión Compton Inverso (IC). Para abordar esta no linealidad, separamos la *Comptonización* de los otros dos procesos radiativos.

En un radio dado r , el flujo de energía que escapa por cada cara del disco de acreción será (Manmoto et al., 1997):

$$F_\nu = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} S_\nu \left[1 - \exp(-2\sqrt{3}\tau_\nu^*) \right], \quad (5.14)$$

donde $\tau_\nu^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2} k_\nu(R, 0)H$ representa la profundidad óptica en la dirección vertical, y $k_\nu(R, 0)$ es el coeficiente de absorción en el plano ecuatorial. Además, $S_\nu = j_\nu/k_\nu$ se refiere a la función fuente, donde j_ν es el coeficiente total de emisividad y está compuesto por las contribuciones de emisividad sincrotrón y Bremsstrahlung, representadas por j_ν^{sy} y j_ν^{br} , respectivamente (Manmoto et al., 1997):

$$j_\nu = j_\nu^{sy} + j_\nu^{br}. \quad (5.15)$$

En el caso de que el plasma sea puramente térmico y se encuentre en equilibrio termodinámico local, el coeficiente de absorción viene dado por la Ley de Kirchhoff: $k_\nu = j_\nu/B_\nu$, y en consecuencia, la función fuente se equipara a la función de Planck: $S_\nu = B_\nu$ (Rybicki & Lightman, 1979).

Tomamos las grillas de manera que variamos cada celda radial (i.e. un array para r), evaluando la dependencia azimutal en el plano ecuatorial (es decir, para $\theta = \pi/2$). La luminosidad recibida por cada celda- j se calcula de la siguiente manera:

$$L_{\nu,j} = 2\pi(l_{j+1/2}^2 - l_{j-1/2}^2)F_{\nu,j}, \quad (5.16)$$

donde el factor 2 proviene de que el flujo radiativo escapa por las dos caras del *toro*.

Para calcular el acomplamiento local consideramos el campo de fotones local de la misma celda:

$$L_{C,\text{out}}^k(\nu) = \int d\nu' \left(\frac{\nu}{\nu'} \right) L_{C,\text{in}}^k(\nu') P(\nu, \nu', T_e), \quad (5.17)$$

donde $P(\nu, \nu', T_e)$ es la probabilidad de que un fotón con frecuencia ν' sea dispersado hacia ν por un electrón en una distribución maxwelliana relativista de temperatura T_e (Coppi & Blandford, 1990), y L_C^k es la luminosidad emitida por la celda k del *toro*, tanto sincrotrón como Bremsstrahlung. Iteramos hasta alcanzar la convergencia.

Mostramos las componentes asociadas a cada proceso radiativo descrito anteriormente para un agujero negro de Kerr con $a = 0.5$ en la Fig. 5.1. Definidos cada uno, estamos en condiciones de poder estudiar dichas distribuciones espectrales en gravedad- $f(R)$.

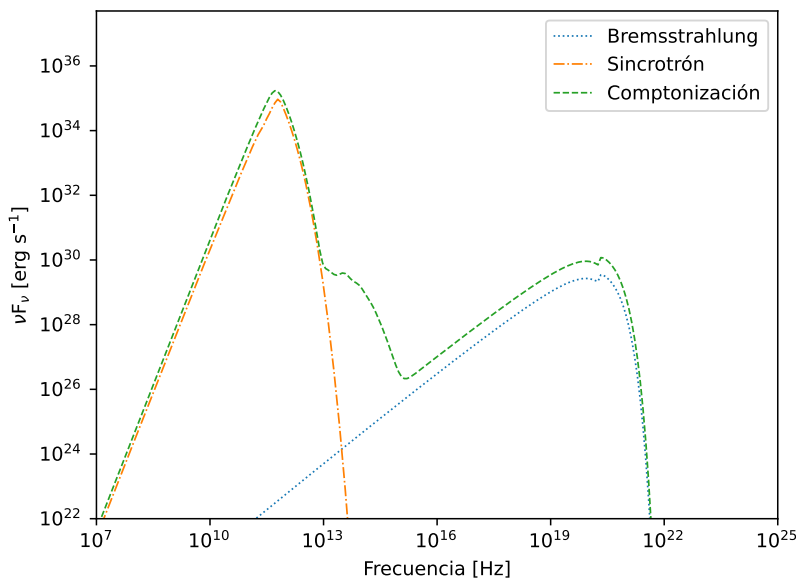


Figura 5.1. Distribución espectral de energía del *toro* sobre un BH de Kerr con $a = 0.5$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Sincrotrón y Comptonización.

5.2. Distribuciones espectrales de energía en gravedad- $f(R)$

Se realizaron cálculos de las SEDs relacionadas con diferentes spines y distintos valores de R_0 en agujeros negros de $f(R)$ -Kerr. Se utilizaron los valores del escalar de Ricci analizados en el capítulo anterior, empleando solo aquellos que tienen un significado físico.

La Fig. 5.2 muestra la SED para un BH de $f(R)$ -Kerr con un $a = 0.99$, junto con un acercamiento al valor máximo de la emisión sincrotrón. En ella, se puede observar que la variación de $R_0 \in [-0.01, 0.001]$, da lugar a luminosidades que oscilan entre aproximadamente 6×10^{33} erg/s y 7×10^{33} erg/s. A su vez, la variación de la luminosidad Bremsstrahlung mantiene el mismo comportamiento.

En el caso de un BH de $f(R)$ -Kerr con $a = 0.85$, se encontró un cambio apreciable para $R_0 = -0.01$ en comparación con un BH de Kerr ($R_0 = 0$), donde la luminosidad varía desde $\sim 3.5 \times 10^{34}$ erg/s hasta $\sim 6 \times 10^{34}$ erg/s, respectivamente. Sin embargo, para valores de $R_0 \in [-0.001, 0.001]$, la variación es menor, y las luminosidades se encuentran en el rango de $\sim 5.5 \times 10^{34}$ erg/s a $\sim 6.5 \times 10^{34}$ erg/s.

Para un BH de $f(R)$ -Kerr con $a = 0.5$, el cambio para $R_0 = -0.01$ nuevamente es apreciable en comparación con un BH de Kerr, donde la luminosidad varía desde $\sim 4.5 \times 10^{34}$ erg/s hasta $\sim 2.5 \times 10^{35}$ erg/s, respectivamente. Para los valores de $R_0 \in [-0.001, 0.0001]$, la variación es menor. En este caso, las luminosidades se encuentran en el rango de $\sim 2 \times 10^{35}$ erg/s a $\sim 2.6 \times 10^{35}$ erg/s.

Por último, para un BH de $f(R)$ -Kerr con $a = 0.1$, nuevamente se observa un cambio apreciable para $R_0 = -0.01$ en comparación con el BH de Kerr, donde la luminosidad varía desde $\sim 3.4 \times 10^{33}$ erg/s hasta $\sim 5 \times 10^{35}$ erg/s, respectivamente. Las luminosidades asociadas a los valores de $R_0 \in [-0.0001, 0.0001]$ se encuentran en el rango de $\sim 2.4 \times 10^{35}$ erg/s a $\sim 2.6 \times 10^{35}$ erg/s.

Observamos que a medida que se eligen valores más pequeños para R_0 , los máximos

5. Distribución espectral de energía

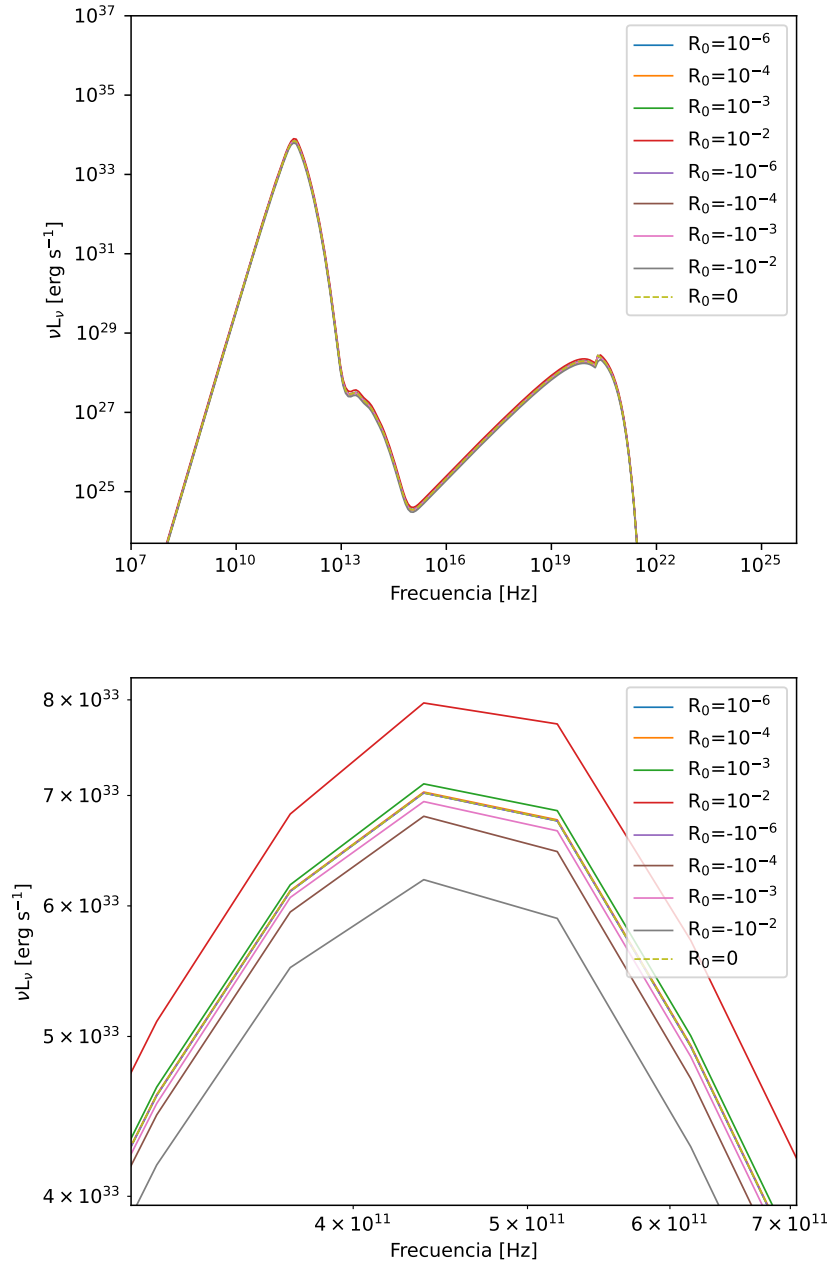


Figura 5.2. Panel superior: Distribución espectral de energía del *toro* sobre un BH de Kerr con $a = 0.99$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Sincrotrón y Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 .

valores de las variables termodinámicas se desplazan hacia radios más reducidos. Aunque la densidad de energía máxima del *toro* es la misma en todos los casos, el efecto de la variación de R_0 se refleja en el tamaño del mismo. Es debido a esto la variación en la luminosidad al variar R_0 .

De manera general, se encontró que para agujeros negros de $f(R)$ -Kerr con $a \gtrsim 0.85$, las variaciones en la luminosidad no son significativas para cualquier valor de R_0 . Sin embargo, para agujeros negros de $f(R)$ -Kerr con $a \lesssim 0.5$, los cambios en los valores del escalar de

Ricci empiezan a ser notorios.

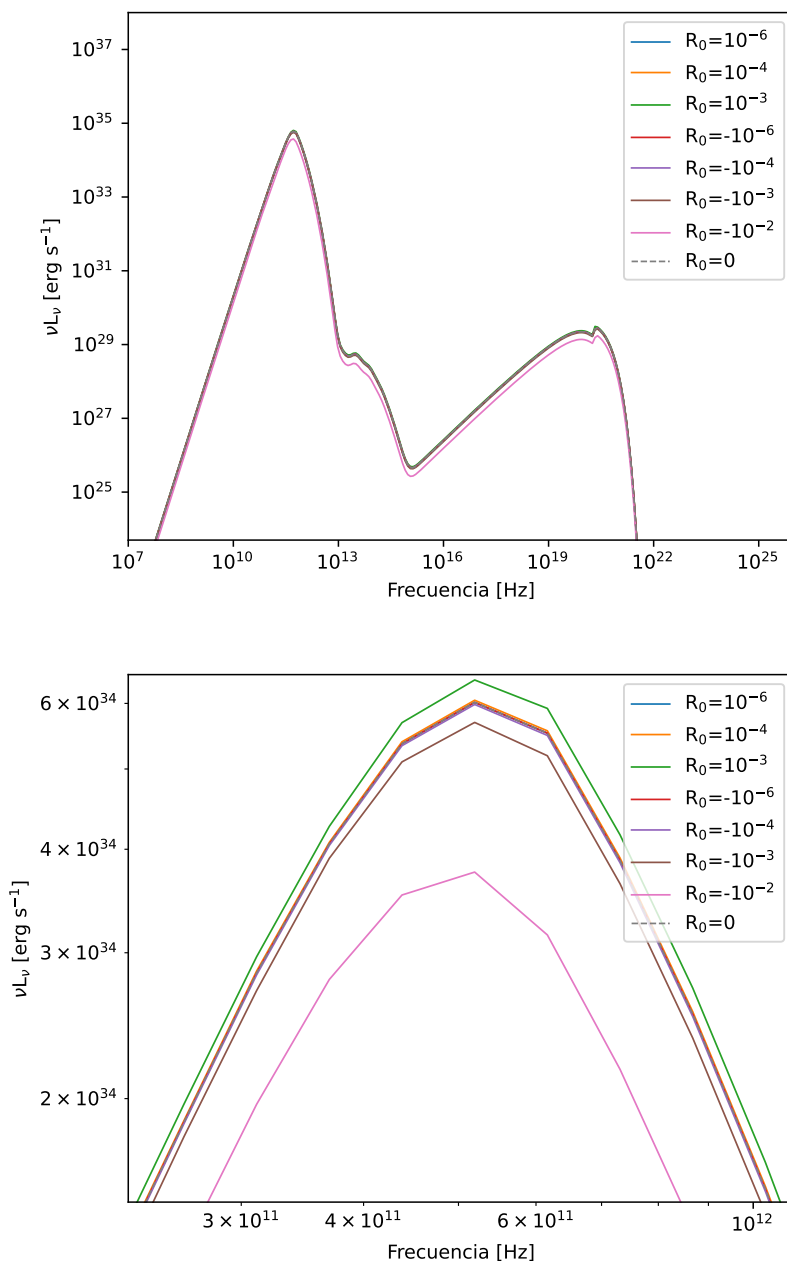


Figura 5.3. Panel superior: Distribución espectral de energía del *toro* sobre un BH de Kerr con $a = 0.85$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Síncrotrón e Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 .

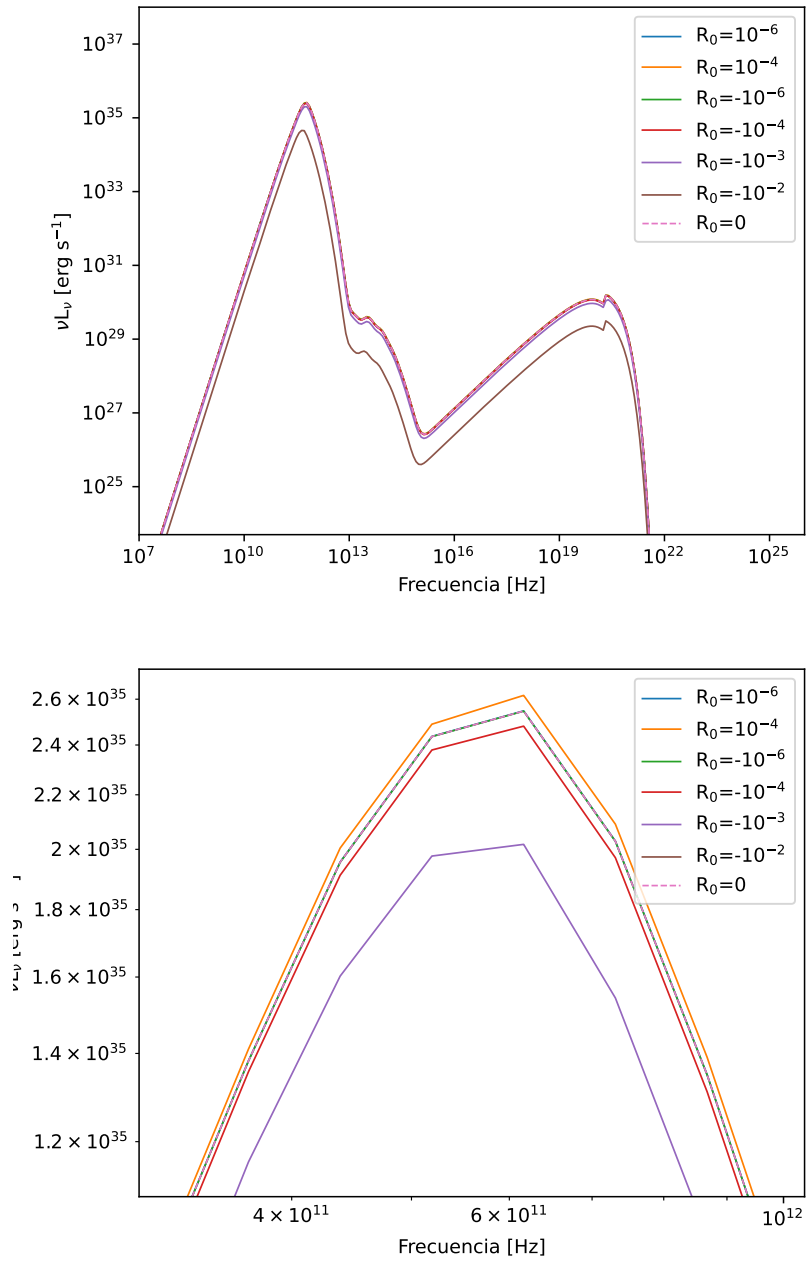


Figura 5.4. Panel superior: Distribución espectral de energía del *toro* sobre un BH de Kerr con $a = 0.5$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Síncrotrón e Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 .

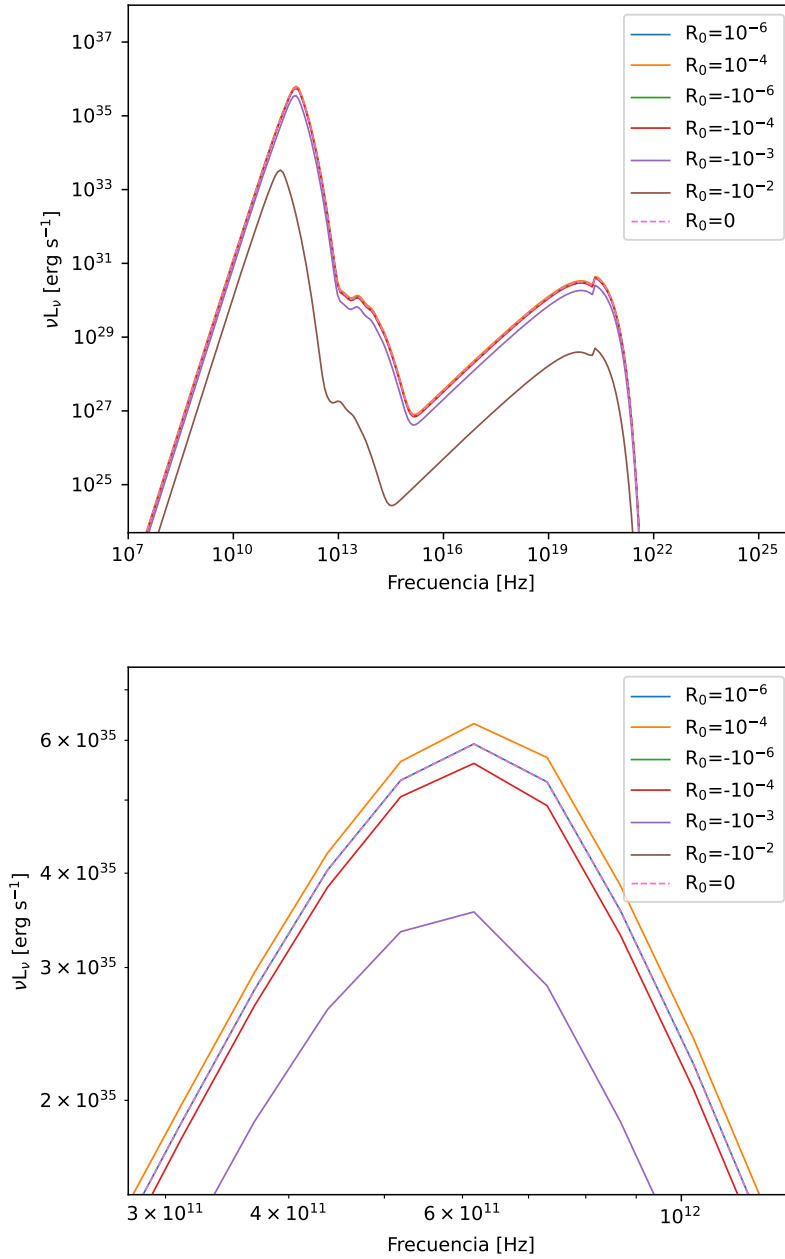


Figura 5.5. Panel superior: Distribución espectral de energía del *toro* sobre un BH de Kerr con $a = 0.1$. Se muestran los principales procesos radiativos mencionados en el texto: Bremsstrahlung, Síncrotrón e Inverse Compton. Panel inferior: Zoom del valor máximo de la emisión sincrotrón para diferentes valores de R_0 .

5.3. Aplicación del modelo a la fuente Sgr A*

Durante el período en el que se confirmó la existencia de un SMBH en el Centro Galáctico (en inglés, *Galactic Center*, GC) mediante la medición de los movimientos estelares a su alrededor, también se informó sobre la emisión variable de Sgr A* en otros rangos de longitud de onda. En primer lugar, [Baganoff et al. \(2001\)](#) reportaron la detección de una fuente de rayos X en reposo en la ubicación de Sgr A*. Poco después, [Baganoff et al. \(2003\)](#) informaron sobre el primer estallido brillante en rayos X proveniente de Sgr A*. Apenas dos años después, con la llegada de imágenes asistidas por Óptica Adaptativa del GC, [Genzel et al. \(2003\)](#) descubrieron el homólogo de Sgr A* en el infrarrojo cercano. En las dos décadas siguientes, se han realizado investigaciones exhaustivas sobre el espectro, la variabilidad, la polarización e incluso las propiedades dinámicas.

Sgr A* es uno de los objetos más estudiados en el cielo, tanto desde el punto de vista observacional como teórico. Tiene el tamaño angular más grande de todos los agujeros negros en el cielo. Está a una distancia de ≈ 8 kpc y tiene una masa de $\approx 4 \times 10^6 M_{\odot}$ ([Do et al., 2019](#); [GRAVITY Collaboration, 2020](#)). Está mucho más cerca que cualquier otro candidato a SMBH y mucho más masivo que los candidatos BHBX de masa estelar galácticos. Esto hace de Sgr A* un laboratorio ideal para poner a prueba la teoría de la GR. En particular, Sgr A* tiene una tasa de acreción muy baja, $\dot{M} \sim 10^{-5} M_{\odot} \text{ año}^{-1}$ ($\dot{m} \sim 10^{-2}$) ([Quataert, 2002](#); [Baganoff et al., 2003](#)), por lo cual es ideal para poner a prueba el modelo de *toro* en gravedad- $f(R)$.

El 12 de mayo de 2022 la colaboración Event Horizon Telescope (EHT) hizo público la imagen obtenida de Sgr A* combinando observaciones sub/milimétricas tomadas de observatorios distribuidos a lo largo del mundo ⁽ⁱ⁾.

Remarcamos que la colaboración EHT aún no pudo dar una cota satisfactoria al *spin* de Sgr A*. En la literatura se encuentran diversos valores de a para Sgr A*, cercanos a ~ 0.9 como por ejemplo en [Reynolds \(2013\)](#); [Aschenbach \(2010\)](#); [Dokuchaev \(2023\)](#), y cercanos a ~ 0.1 como en [Kato et al. \(2010\)](#); [Johannsen et al. \(2016\)](#); [Walia et al. \(2022\)](#).

En la Fig. 5.6 mostramos la SED observada de Sgr A*. La misma ha sido compilada por la colaboración EHT ([Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022f](#)) a partir de una extensa cantidad de literatura ([Zylka et al., 1992](#); [Telesco et al., 1996](#); [Falcke et al., 1998](#); [Cotera et al., 1999](#); [An et al., 2005](#); [Dodds-Eden et al., 2009, 2011](#); [Schödel et al., 2011](#); [Nowak et al., 2012](#); [Bower et al., 2015](#)); [Liu et al. \(2016\)](#); [Stone et al. \(2016\)](#); [Zhang et al. \(2017\)](#); [von Fellenberg et al. \(2018\)](#); [Witzel et al. \(2018\)](#); [Bower et al. \(2019\)](#); [Haggard et al. \(2019\)](#); [GRAVITY Collaboration \(2020\)](#).

La SED de Sgr A* exhibe una marcada variabilidad en el rango espectral del NIR y los rayos X, mientras que esta variabilidad es menos notable en las frecuencias de radio y en el régimen sub/milimétrico. Con el fin de poner a prueba el modelo de *toro*, ajustamos los datos espectrales usando la SED del *toro* sobre un BH de Kerr con $a = 0.1$. Según lo demostrado por [Straub et al. \(2012\)](#), el modelo de *toro* no resulta óptimo para ajustar los datos observacionales, dado que se requiere la inclusión de un jet ([Vincent et al., 2019](#)) junto con una distribución de electrones no térmicos ([Yuan et al., 2003](#)). No se decidió usar otros parámetros termodinámicos ya que se necesitan otras componentes para aspirar a hacer ajustes con un sentido físico real. Se puede ver el impacto en la variación de los parámetros termodinámicos en [Straub et al. \(2012\)](#); [Lin et al. \(2015\)](#); [Gutiérrez et al. \(2019\)](#).

⁽ⁱ⁾El conjunto de telescopios que actualmente forman esta red son: Gran Telescopio Milimétrico Alfonso Serrano (GTM) de México, Atacama Large Millimeter Array (ALMA) de Chile, telescopio Polo Sur (SPT) en el polo austral, Atacama Pathfinder Experiment (APEX) en Chile, telescopio James Clerk Maxwell (JCMT) en Hawái, Submillimeter Array (SMA) en Hawái, Submillimeter Telescope (SMT) en Arizona y el Instituto Radioastronómico Milimétrico (IRAM) 30-m en España.

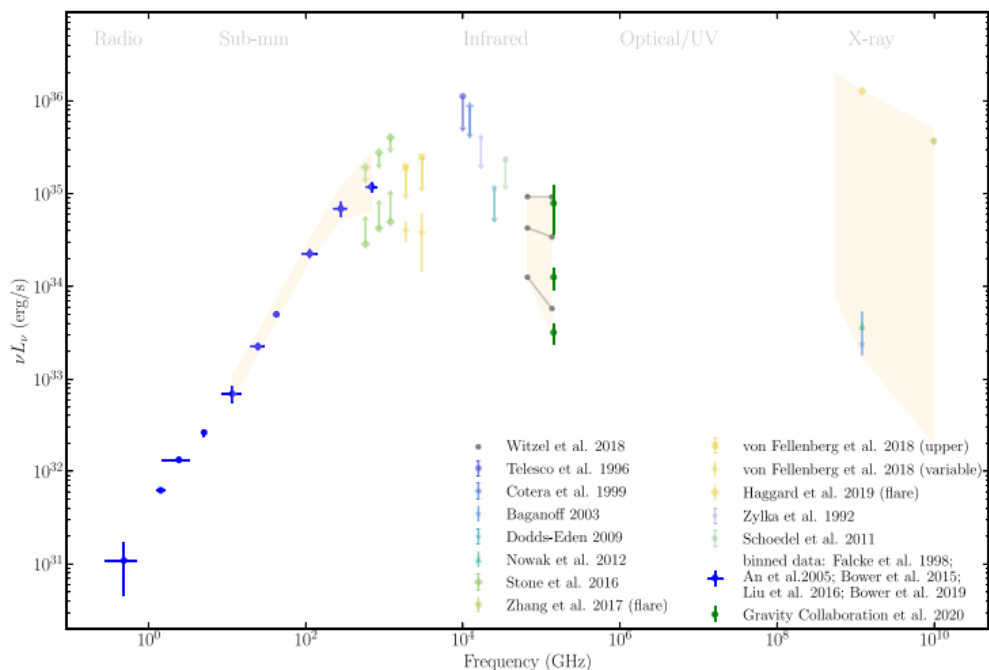


Figura 5.6. SED de radio a rayos X de Sgr A*. Los puntos azules muestran densidades de flujo observadas rebineadas (Falcke et al., 1998; An et al., 2005; Bower et al., 2015, 2019; Liu et al., 2016); los puntos coloreados tenues representan límites superiores para la densidad de flujo media. Las líneas grises sólidas de 4.5 a 2.2 μm muestran SEDs del modelo para los percentiles 5, 50 y 95, y muestran el cambio de pendiente predicho en función de la densidad de flujo. Los puntos verdes en 2.2 μm representan el análisis más reciente de los percentiles 5, 50 y 95 de la distribución de densidad de flujo en NIR basado en datos de VLTI/GRAVITY. El área sombreada en naranja representa una estimación del rango de densidades de flujo en el 90% del tiempo observado. Tomado de (Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022f)

En particular, podemos descartar las luminosidades asociadas con $R_0 < -0.001$ ya que estas últimas se alejan notoriamente de las obtenidas para el modelo de Kerr.

Respecto a los valores de $R_0 > 0$ estudiados en esta sección, no podemos afirmar nada concluyente, ya que coinciden con el modelo de Kerr.

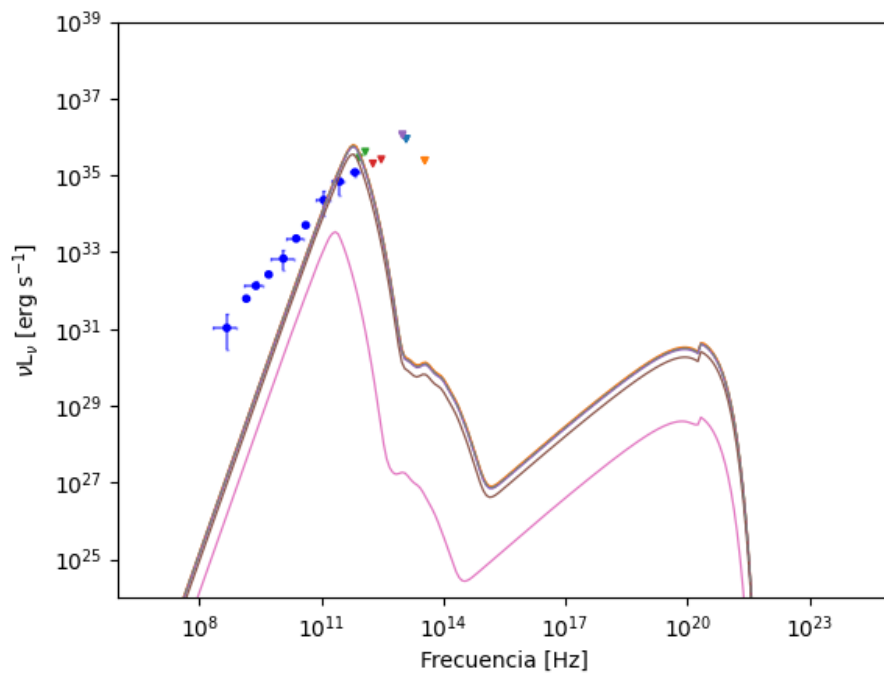


Figura 5.7. Ajuste de los datos de Sgr A* con una distribución espectral de energía del *toro* sobre un BH de Kerr con $a = 0.1$. Los puntos representan las luminosidades tomadas de Zylka et al. (1992); Telesco et al. (1996); Cotera et al. (1999); Schödel et al. (2011); Stone et al. (2016); Zhang et al. (2017); von Fellenberg et al. (2018).

Capítulo 6

Conclusiones

En esta Tesis hemos llevado a cabo una investigación sobre las implicaciones astrofísicas del modelo de toro asociado a un BH astrofísico en gravedad- $f(R)$. Aunque esta teoría de gravedad modificada ha sido estudiada en diversos regímenes, se ha puesto especial énfasis en el campo débil. Dada la notable evolución en el estudio y la observación de sistemas en regímenes de campo fuerte, y considerando las capacidades observacionales actuales que son ideales para este tipo de investigaciones, se plantea la necesidad de reevaluar y explorar escenarios alternativos a la GR. Específicamente, los resultados obtenidos en colaboraciones como EHT y las futuras expectativas de la ngEHT proporcionan un momento propicio para emprender esta investigación en profundidad.

En particular, se ha investigado la influencia del *spin* del BH y el valor del parámetro R_0 en la estructura del *toro* en agujeros negros de Kerr- $f(R)$. Se han examinado cuatro casos diferentes de *spin*: 0.99, 0.85, 0.5 y 0.1, con valores de R_0 limitados al rango $[-0.01, +0.01]$, de acuerdo a las cotas encontradas por Pérez et al. (2013).

En el Capítulo 4, con el objetivo de entender el comportamiento del *toro* en gravedad $f(R)$, encontramos que para ciertos valores de R_0 la estructura del potencial no tiene un sentido físico, por lo tanto, nos permite restringir los valores que se pueden tomar en el régimen de campo fuerte. En particular, encontramos que:

- Si $a = 0.99 \rightarrow R_0 \in [-0.01, +0.001]$
- Si $a = 0.85 \rightarrow R_0 \in [-0.01, +0.0001]$
- Si $a = 0.5 \rightarrow R_0 \in [-0.01, +0.00001]$
- Si $a = 0.1 \rightarrow R_0 \in [-0.01, +0.00001]$

Por un lado, los resultados muestran que para $a \gtrsim 0.85$ los toros son pequeños y compactos. En cambio, para $a \lesssim 0.5$ los toros son más grandes y extendidos.

Por otro lado, para valores de $R_0 \in [-0.01; -0.0001]$ encontramos se producen toros más pequeños y compactos, de forma similar que con el *spin*. El cambio en la geometría del *toro* se debe a la propia naturaleza del espacio-tiempo, donde en la mayoría de casos el centro del toro permanece casi en su lugar, y solo las partes exteriores se comprimen hacia adentro debido la distribución de momento angular Kepleriano $f(R)$ -Kerr, que es más estrecha que en la Relatividad General. También encontramos que para valores de $R_0 \in (0; 10^{-6}]$ el *toro* es capaz de mimetizar un BH de Kerr para cualquier valor del *spin*.

Finalmente, en el Capítulo 5, se han estudiado las SEDs y luminosidades de los *toros de iones* para los agujeros negros de $f(R)$ -Kerr con diferentes valores de a y R_0 .

6. Conclusiones

Se ha observado que las variaciones en R_0 dentro del rango estudiado tienen un impacto más notable en las luminosidades de agujeros negros con valores más bajos de $spin$. Sin embargo, en ningún caso estamos limitados a restringir los posibles valores que la teoría puede asignar a R_0 . En cualquier situación, existe la posibilidad de seleccionar un valor de R_0 que genere una variación significativa en la luminosidad en comparación con el caso de Kerr. Posteriormente, podemos emplear dicho valor de R_0 para ajustar de manera específica los parámetros termodinámicos y el $spin$, de manera *Ad Hoc*, de modo que produzcan la luminosidad que estamos buscando.

Para los parámetros termodinámicos definidos en el Cap. 3, encontramos que $a < 0.5$ puede reproducir una luminosidad similar a Sgr A*, ya que el máximo valor tomado por el proceso sincrotrón observado es $\sim 5 \times 10^{35}$ erg/s.

Los resultados son similares a los obtenidos por Lin et al. (2015), donde analizan la estructura del *toro* bajo la métrica de Johannsen-Psaltis (Johannsen & Psaltis, 2011). En particular, en la degeneración entre la determinación del $spin$ y las posibles desviaciones de la geometría de Kerr, donde en nuestro caso son los posibles valores de R_0 .

Luego, en el caso de Sgr A* es necesario una determinación independiente del valor del $spin$ para poder obtener cotas definidas en el parámetro R_0 .

El modelo de *toro* no permite ajustar datos observacionales de manera eficaz con los procesos radiativos usados para Sgr A*. El primer motivo y tal vez más importante es la falta en la contribución de un jet, tal como se propone en Vincent et al. (2019). El segundo motivo, es la falta de electrones no térmicos para explicar la emisión estacionaria de Sgr A* en ondas de radio de baja frecuencia (ver por ejemplo Yuan et al., 2003; Yuan & Narayan, 2014). Es por esto que como próximo paso natural es incorporar de dichos elementos con el fin de poder hacer una comparación directa con las SED de Sgr A* presentada anteriormente.

Por último, se espera que en el futuro cercano determinaciones de alta precisión de los parámetros de otros agujeros negros permitan poner límites más restrictivos a teorías alternativas de la gravitación.

Bibliografía

- Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D., Abernathy M. R., The LIGO Scientific Collaboration The Virgo Collaboration 2016, *Phys. Review Letters*, **116**, 221101
- Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D., Abraham S., Acernese F., The LIGO Scientific Collaboration The Virgo Collaboration 2019, *Phys. Rev. D*, **100**, 104036
- Abbott R., Abbott T. D., Abraham S., Acernese F., The LIGO Scientific Collaboration The Virgo Collaboration 2021, *Phys. Rev. D*, **103**, 122002
- Abramowicz M. A., Fragile P. C., 2013, *Living Reviews in Relativity*, **16**, 1
- Abramowicz M., Jaroszynski M., Sikora M., 1978, *A&A*, **63**, 221
- Abramowicz M. A., Czerny B., Lasota J. P., Szuszkiewicz E., 1988, *ApJ*, **332**, 646
- Albrecht A., Steinhardt P. J., 1982, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1220
- Alpher R. A., Herman R., 1948, *Nature*, **162**, 774
- An T., Goss W. M., Zhao J.-H., Hong X. Y., Roy S., Rao A. P., Shen Z. Q., 2005, *ApJ*, **634**, L49
- Aschenbach B., 2010, , **81**, 319
- Baganoff F. K., et al., 2001, *Nature*, **413**, 45
- Baganoff F. K., et al., 2003, *ApJ*, **591**, 891
- Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A., 1972, *ApJ*, **178**, 347
- Bernardeau F., Colombi S., Gaztañaga E., Scoccimarro R., 2002, , **367**, 1
- Bertone G., Hooper D., Silk J., 2005, , **405**, 279
- Bertotti B., Iess L., Tortora P., 2003, *Nature*, **425**, 374
- Blaes O. M., 1987, *MNRAS*, **227**, 975
- Bosma A., 1981, *AJ*, **86**, 1825
- Bower G. C., et al., 2015, *ApJ*, **802**, 69
- Bower G. C., et al., 2019, *ApJ*, **881**, L2
- Bull P., et al., 2016, *Physics of the Dark Universe*, **12**, 56
- Bunge M., 2018, *Foundations of Science*, **23**, 399
- Carroll S. M., 2001, *Living Reviews in Relativity*, **4**, 1
- Carter B., 1971, *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 331
- Cembranos J. A. R., de la Cruz-Dombriz A., Jimeno Romero P., 2011, *arXiv e-prints*, p. [arXiv:1109.4519](https://arxiv.org/abs/1109.4519)
- Chael A., Narayan R., Johnson M. D., 2019, *MNRAS*, **486**, 2873
- Collin S., Kawaguchi T., 2004, *A&A*, **426**, 797
- Coppi P. S., Blandford R. D., 1990, *MNRAS*, **245**, 453
- Cotera A., Morris M., Ghez A. M., Becklin E. E., Tanner A. M., Werner M. W., Stolovy S. R., 1999, in Falcke H., Cotera A., Duschl W. J., Melia F., Rieke M. J., eds, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 186, The Central Parsecs of the Galaxy*. p. 240
- Cyburtt R. H., Fields B. D., Olive K. A., Yeh T.-H., 2016, *Rev. Mod. Phys.*, **88**, 015004
- De Felice A., Tsujikawa S., 2010, *Living Reviews in Relativity*, **13**, 3
- Do T., et al., 2019, *Science*, **365**, 664

- Dodds-Eden K., et al., 2009, *ApJ*, **698**, 676
- Dodds-Eden K., et al., 2011, *ApJ*, **728**, 37
- Dodelson S., 2003, *Modern Cosmology*
- Dokuchaev V. I., 2023, *Astronomy*, **2**, 141
- Einstein A., 1915, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp 844–847
- Esin A. A., McClintock J. E., Narayan R., 1997, *ApJ*, **489**, 865
- Esin A. A., Narayan R., Cui W., Grove J. E., Zhang S.-N., 1998, *ApJ*, **505**, 854
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019a, *ApJ*, **875**, L1
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019b, *ApJ*, **875**, L2
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019c, *ApJ*, **875**, L3
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019d, *ApJ*, **875**, L4
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019e, *ApJ*, **875**, L5
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019f, *ApJ*, **875**, L6
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2021a, *ApJ*, **910**, L12
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2021b, *ApJ*, **910**, L13
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022a, *ApJ*, **930**, L12
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022b, *ApJ*, **930**, L13
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022c, *ApJ*, **930**, L14
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022d, *ApJ*, **930**, L15
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022e, *ApJ*, **930**, L16
- Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022f, *ApJ*, **930**, L17
- Fabrika S. N., Atapin K. E., Vinokurov A. S., Sholukhova O. N., 2021, *Astrophysical Bulletin*, **76**, 6
- Falcke H., Goss W. M., Matsuo H., Teuben P., Zhao J.-H., Zylka R., 1998, *ApJ*, **499**, 731
- Famaey B., McGaugh S., 2013, in *Journal of Physics Conference Series*. p. 012001 ([arXiv:1301.0623](https://arxiv.org/abs/1301.0623)), [doi:10.1088/1742-6596/437/1/012001](https://doi.org/10.1088/1742-6596/437/1/012001)
- Faraoni V., Capozziello S., 2011, *Beyond Einstein Gravity*. Vol. 170, [doi:10.1007/978-94-007-0165-6](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0165-6),
- Frank J., King A., Raine D. J., 2002, *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition*
- Freeman K. C., 1970, *ApJ*, **160**, 811
- Fukue J., 2000, *PASJ*, **52**, 829
- GRAVITY Collaboration 2020, *A&A*, **643**, A56
- Genzel R., et al., 2003, *Nature*, **425**, 934
- Guth A. H., 1981, *Phys. Rev. D*, **23**, 347
- Gutiérrez E. M., Vieyro F. L., Romero G. E., 2019, *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina*, **61**, 243
- Haggard D., et al., 2019, *ApJ*, **886**, 96
- Hawking S. W., 1972, *Communications in Mathematical Physics*, **25**, 152
- Hobson M. P., Efstathiou G. P., Lasenby A. N., 2005, *General Relativity*
- Ichimaru S., 1977, *ApJ*, **214**, 840
- Iocco F., Mangano G., Miele G., Pisanti O., Serpico P. D., 2009, , **472**, 1
- Jaroszynski M., Abramowicz M. A., Paczynski B., 1980, , **30**, 1
- Johannsen T., Psaltis D., 2011, , **83**, 124015
- Johannsen T., Wang C., Broderick A. E., Doeleman S. S., Fish V. L., Loeb A., Psaltis D., 2016, , **117**, 091101
- Kaaret P., Feng H., Roberts T. P., 2017, *ARA&A*, **55**, 303
- Kato Y., Miyoshi M., Takahashi R., Negoro H., Matsumoto R., 2010, *MNRAS*, **403**, L74
- Kerr R. P., 1963, , **11**, 237

- Kramer M., et al., 1999, *ApJ*, 520, 324
- Kramer M., et al., 2021, *Physical Review X*, 11, 041050
- Lambert S. B., Le Poncin-Lafitte C., 2011, *A&A*, 529, A70
- Lin N., Li Z., Arthur J., Asquith R., Bambi C., 2015, , 2015, 038
- Linde A. D., 1982, *Physics Letters B*, 108, 389
- Liu H. B., et al., 2016, *A&A*, 593, A107
- López-Corredoira M., 2017, *Foundations of Physics*, 47, 711
- Mahadevan R., Quataert E., 1997, *ApJ*, 490, 605
- Mahadevan R., Narayan R., Yi I., 1996, *ApJ*, 465, 327
- Manmoto T., Mineshige S., Kusunose M., 1997, *ApJ*, 489, 791
- 2011, *Dark Matter and Dark Energy: A Challenge for Modern Cosmology* Vol. 370, doi:10.1007/978-90-481-8685-3.
- Meyer B. S., 1994, *ARA&A*, 32, 153
- Minkowski H., 1908, *Raum und Zeit*, 80th Versammlung Deutscher Naturforscher
- Minkowski H., 1909, *Raum und Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 18, 75
- Narayan R., Popham R., 1993, *Nature*, 362, 820
- Narayan R., Yi I., 1995, *ApJ*, 452, 710
- Novikov I. D., Thorne K. S., 1973, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*. pp 343–450
- Nowak M. A., et al., 2012, *ApJ*, 759, 95
- Oks E., 2021, , 93, 101632
- Pacholczyk A. G., 1970, *Radio astrophysics. Nonthermal processes in galactic and extragalactic sources*
- Padmanabhan T., 2003, , 380, 235
- Padmanabhan T., 2005, *Current Science*, 88, 1057
- Page D. N., Thorne K. S., 1974, *ApJ*, 191, 499
- Page L., et al., 2003, *ApJS*, 148, 233
- Papaloizou J. C. B., Pringle J. E., 1984, *MNRAS*, 208, 721
- Peebles P. J. E., 1984, *ApJ*, 284, 439
- Peebles P. J. E., Ratra B., 2003, *Rev. Mod. Phys.*, 75, 559
- Penzias A. A., Wilson R. W., 1965, *ApJ*, 142, 419
- Pérez D., Romero G. E., Perez Bergliaffa S. E., 2013, *A&A*, 551, A4
- Perivolaropoulos L., Skara F., 2022, , 95, 101659
- Perlmutter S., et al., 1999, *ApJ*, 517, 565
- Pérez D., 2023, *Dark Matter and Dark Energy vs. Modified Gravity: An Appraisal*
- Qian L., Abramowicz M. A., Fragile P. C., Horák J., Machida M., Straub O., 2009, *A&A*, 498, 471
- Quataert E., 2002, *ApJ*, 575, 855
- Ramesh Narayan Rohan Mahadevan J. E. G. R. G., Gammie C., 1997, *ApJ*, 492, 554
- Rees M. J., Begelman M. C., Blandford R. D., Phinney E. S., 1982, *Nature*, 295, 17
- Ressler S. M., Tchekhovskoy A., Quataert E., Gammie C. F., 2017, *MNRAS*, 467, 3604
- Reynolds C. S., 2013, *Classical and Quantum Gravity*, 30, 244004
- Riess A. G., et al., 1998, *AJ*, 116, 1009
- Robinson D. C., 1975, , 34, 905
- Romero G. E., 2012, *Foundations of Science*, 18, 297–306
- Romero G. E., 2013, *Cosmology and Gravitation*, pp 1–20
- Romero G. E., 2018, *Scientific Philosophy*. Springer, doi:10.1007/978-3-319-97631-0
- Rubin V. C., Ford W. Kent J., 1970, *ApJ*, 159, 379
- Rubin V. C., Ford W. K. J., Thonnard N., 1980, *ApJ*, 238, 471

BIBLIOGRAFÍA

- Ryan B. R., Ressler S. M., Dolence J. C., Gammie C., Quataert E., 2018, *ApJ*, **864**, 126
- Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979, Radiative processes in astrophysics. IOP Publishing
- Rybicki G. B., Lightman A. P., 1986, Radiative Processes in Astrophysics
- Schödel R., Morris M. R., Muzic K., Alberdi A., Meyer L., Eckart A., Gezari D. Y., 2011, *A&A*, **532**, A83
- Schramm D. N., Turner M. S., 1998, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 303
- Shakura N. I., Sunyaev R. A., 1973, *A&A*, **24**, 337
- Shapiro S. L., Lightman A. P., Eardley D. M., 1976, *ApJ*, **204**, 187
- Sądowski A., Wielgus M., Narayan R., Abarca D., McKinney J. C., Chael A., 2017, *MNRAS*, **466**, 705
- Sotiriou T. P., Faraoni V., 2010, *Reviews of Modern Physics*, **82**, 451
- Stairs I. H., 2003, *Living Reviews in Relativity*, **6**, 5
- Starobinsky A. A., 1980, *Physics Letters B*, **91**, 99
- Steigman G., 2007, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **57**, 463
- Stepney S., Guilbert P. W., 1983, *MNRAS*, **204**, 1269
- Stone J. M., Marrone D. P., Dowell C. D., Schulz B., Heinke C. O., Yusef-Zadeh F., 2016, *ApJ*, **825**, 32
- Straub O., Vincent F. H., Abramowicz M. A., Gourgoulhon E., Paumard T., 2012, *A&A*, **543**, A83
- Stuchlík Z., Slaný P., 2004, , **69**, 064001
- Svensson R., 1982, *ApJ*, **258**, 335
- Telesco C. M., Davidson J. A., Werner M. W., 1996, *ApJ*, **456**, 541
- Tong D., 2019, Lectures on Cosmology
- Verma A. K., Fienga A., Laskar J., Manche H., Gastineau M., 2014, *A&A*, **561**, A115
- Vincent F. H., Abramowicz M. A., Zdziarski A. A., Wielgus M., Paumard T., Perrin G., Straub O., 2019, *A&A*, **624**, A52
- Walia R. K., Ghosh S. G., Maharaj S. D., 2022, *ApJ*, **939**, 77
- Weinberg S., 1989, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1
- Wex N., Kramer M., 2020, *Universe*, **6**, 156
- Will C. M., 2014, *Living Reviews in Relativity*, **17**, 4
- Witzel G., et al., 2018, *ApJ*, **863**, 15
- Yuan F., Narayan R., 2014, *ARA&A*, **52**, 529
- Yuan F., Quataert E., Narayan R., 2003, *ApJ*, **598**, 301
- Zhang S., et al., 2017, *ApJ*, **843**, 96
- Zwicky F., 1937, *ApJ*, **86**, 217
- Zylka R., Mezger P. G., Lesch H., 1992, *A&A*, **261**, 119
- von Fellenberg S. D., et al., 2018, *ApJ*, **862**, 129