UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE POSGRADO

“El aprendizaje y la enseñanza de la división a través de problemas de doble conceptualización: análisis de una propuesta en la formación docente”

María Luján Basal

Tesis para optar por el grado de Especialista en la enseñanza de las Matemáticas para el Nivel Inicial y el Nivel Primario

Directora Sandra Espósito, Universidad Nacional de La Plata

Ensenada, 4 de agosto de 2023

Resumen

El presente Trabajo Final Integrador se centra en la reflexión sobre lo que ocurre en el aula durante la formación docente cuando se abordan situaciones problemáticas relacionadas con un contenido matemático específico, desde el enfoque curricular. El objetivo principal es analizar la relación que establecen las y los estudiantes con la división a lo largo del proceso educativo, con el fin de explorar algunos de los sentidos de la división y debatir sobre el verdadero significado de saber dividir, en el contexto de la formación docente inicial.

Con este propósito, se propone analizar un dispositivo didáctico implementado en la formación de maestros, el cual consiste en el diseño y puesta en práctica de una secuencia didáctica que aborda situaciones problemáticas que admiten la doble conceptualización. En esta secuencia, la división se presenta como una estrategia de resolución. El análisis de este dispositivo busca profundizar en el trabajo matemático desarrollado en el contexto de la formación docente y en el tipo de prácticas que las y los estudiantes necesitan para convertirse en docentes del Nivel Primario.

Palabras claves: estructuras multiplicativas, división, múltiplos, divisores, dispositivo didáctico, producción de conocimiento, hacer matemática, formación docente, prácticas escolares.

Índice

1. Introducción

El presente Trabajo Final Integrador (TFI) se enmarca dentro de la carrera Especialización en la Enseñanza de las Matemáticas para el Nivel Inicial y el Nivel Primario, dictada desde la secretaría de posgrado de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata. En el mismo se abordará el análisis de una propuesta diseñada para trabajar y discutir algunos sentidos de la división en el marco del espacio curricular Didáctica de la Matemática II, correspondiente al tercer año del Profesorado de Educación Primaria, en un Instituto de Formación Docente de la provincia de Buenos Aires.

El objetivo es poner en juego y reflexionar acerca de la relación que construyen las y los estudiantes[1] a lo largo de su escolaridad con ese objeto de estudio para, en clases posteriores, discutir acerca de qué es "saber" dividir y qué tipos de problemas se proponen abordar en la escuela primaria. Para ello, se diseñó e implementó un dispositivo didáctico conformado por una serie de problemas que permiten avanzar en los conocimientos matemáticos y didácticos. Este tipo de situaciones son denominadas por Delia Lerner, Paula Stella y Mirta Torres (2009), como de "*doble conceptualización*"[2]. Desde la mirada que adopta este trabajo estas ideas dialogan en la formación docente inicial ya que se intenta deconstruir concepciones y construir nuevas miradas y sentidos de los conocimientos didácticos en general, y de los relacionados con la división en particular. De esta manera se favorece la formación de docentes "*capaces de actuar, de tomar decisiones fundadas y de indagar sobre sus prácticas educativas*" (Andrea Alliaud y Lea Vezub, 2014, p.37).

Se abordará, por un lado, los aportes teóricos de la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa que sustentan la selección de las situaciones problemáticas y las decisiones didácticas que se tomaron al momento de diseñar e implementar el dispositivo didáctico. Por otro lado, se hará referencia al marco curricular y al quehacer matemático dentro de la formación docente poniendo el foco en la enseñanza de las operaciones en general, y de la división en particular. Y por último, se remitirá al diseño, la puesta en acción y el análisis de la propuesta didáctica. Para llevar adelante todas estas acciones se hará una breve descripción del grupo y del instituto donde se implementó, la elección de las situaciones problemáticas, el análisis de las discusiones y los registros fotográficos de las producciones de las y los estudiantes.

[1] Cabe destacar que para este trabajo se ha tomado la decisión de utilizar en primer lugar el género

[2] A lo largo del trabajo se profundizará acerca de este tipo de situaciones.

2. Marco teórico

El objetivo del presente trabajo final integrador es implementar un dispositivo didáctico en la formación inicial. Para lograr este propósito, se ha considerado la definición de dispositivo didáctico de Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón (1997):

> En general, un dispositivo escolar será cualquier “mecanismo” dispuesto para obtener determinados objetivos educativos. Así, por ejemplo, la clase de matemáticas, la de lengua, el libro de texto, la biblioteca, los exámenes, las preguntas que hace el profesor en clase, las sesiones de tutoría y los descansos son dispositivos escolares. En la medida en que cada uno de estos dispositivos incide sobre la estructuración y el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas, funcionando como un dispositivo de ayuda al estudio de las matemáticas, diremos que se trata, además, de un dispositivo didáctico (en el sentido de didáctico-matemático). (p. 277)

En este sentido el dispositivo que se propone incluye el armado y la puesta en acción de una secuencia didáctica así como la organización de la clase y el debate; y se sostiene a partir de los aportes de la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa. Esta perspectiva didáctica nace en los años setenta como producto de las preocupaciones por descubrir e interpretar los fenómenos y los procesos ligados a la adquisición y a la transmisión del conocimiento matemático. De ella se destacan la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau y la Teoría de Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud, entre otras. De la primera se toma la idea de aprendizaje por construcción, la relevancia de la interacción entre pares y la acción docente en la construcción del conocimiento. De la segunda la relación entre el conocimiento matemático y el sentido del mismo, así como el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

Será indispensable tener en cuenta qué entendemos, desde la perspectiva didáctica adoptada, por estudiar matemática y qué tipos de prácticas matemáticas son necesarias discutir dentro de los institutos superiores del nivel terciario para favorecer la construcción de conocimientos, tanto disciplinares como didácticos.

A continuación se pondrán en diálogo los aportes de las teorías señaladas con las decisiones que se tomaron al momento de diseñar, implementar y analizar el dispositivo didáctico de este trabajo.

2. 1 *Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau*

La Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau sostiene que se debe pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de conocimiento en el aula. Estas ideas son desarrolladas por Patricia Sadovsky (2005) quien agrega que "*producir conocimientos supone tanto establecer nuevas relaciones como transformar y reorganizar otras*" (p. 17). Los conocimientos matemáticos no se construyen de manera espontánea, sino que las y los alumnos aprenden adaptándose a un medio que genera desequilibrios y este saber, se manifiesta a través de nuevas respuestas, en este sentido Sadovsky (2005) plantea lo que Guy Brousseau propone:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta a través de respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau, 1986, citado por Sadovsky, 2005, p. 18)

La selección de las situaciones problemáticas ponen en diálogo las ideas que los conocimientos no se apilan ni se acumulan (Ronald Charnay, 1994) y, por tanto, el docente debe contemplar el aprendizaje de las y los alumnos como cambios de estados cognitivos y no como una yuxtaposición de estados finales. En línea con estas ideas, Charnay (1994) cita a Brousseau al sostener que el sentido de un conocimiento matemático se define tanto por la colección situaciones donde el contenido se desarrolla como teoría matemática y la colección de situaciones donde el sujeto lo encuentra como un medio de resolución sino, también, "*por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.*" (p.53). Por esta razón, los problemas propuestos pretenden ampliar los saberes matemáticos de las y los estudiantes de la formación de maestros, a la vez que les dan la posibilidad de construir conocimientos didácticos acerca de los sentidos de la división para que, a posteriori, puedan guiar la construcción de conocimientos de sus alumnas y alumnos respecto a este objeto de estudio. Es decir, fueron pensados para que los resuelvan con lo que ya saben acerca de la división, múltiplos y divisores, pero son los suficientemente ricos como para desafiarlos, haciendo que los amplíen o los rechacen a partir de la construcción de nuevos sentidos.

La Teoría de Situaciones Didácticas destaca la importancia de la interacción entre pares, la puesta en común y la conceptualización del rol docente, devolución e institucionalización, en la construcción de conocimiento. Por ello se decidió organizar las clases en pequeños grupos con el propósito de que se generen discusiones al interior de cada uno y se les dio un tiempo prudencial para que puedan resolver las actividades propuestas. La interacción entre pares implica discutir las estrategias de resolución utilizadas, validar las producciones, etc. Esto es considerado parte constitutiva del proceso de construcción de conocimiento, pues puede ser fuente de nuevos problemas que lleguen a ampliar el campo de conocimiento disponible hasta el momento. En consonancia con estas ideas, Sadovsky (2005) afirma que "*tanto cuando los alumnos colaboran entre sí para resolver un problema como cuando comparten estrategias de los problemas ya resueltos, los modos de abordar de uno puede modificar el sistema de decisiones del otro*" (p.48). Por su parte María Emilia Quaranta y Susana Wolman (2003) sostienen que los momentos de discusión son centrales ya que mediante las confrontaciones, reflexiones y argumentaciones se pueden descontextualizar algunos procedimientos y conocimientos que surgieron de resolver determinada situación problemática, favoreciendo la generalización. En relación a la devolución e institucionalización, la primera refiere a devolverles el problema a las y los alumnos; lo que implica que se apropien del mismo, se responsabilicen, lo hagan suyo e intenten resolverlo. La institucionalización es "*la consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro*" (Sadovsky, 2005, p.43).

La Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau sostiene que la clase de matemáticas debe ser concebida como una comunidad en la que los errores y las interacciones entre pares, junto con la participación del profesor, potencian la construcción del conocimiento. En este proceso, la discusión y validación son aspectos fundamentales. Por esta razón, las clases se organizan en grupos, manteniendo la incertidumbre y centrándose en el conocimiento matemático en juego. De esta manera, se fomenta la puesta en común y validación en grupo, para luego realizar un análisis y discusión en conjunto sobre lo que se ha realizado hasta el momento.

2. 2 *Teoría de Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud*

En la enseñanza tradicional de las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) cada una aparece disociada de la otra; las prácticas de enseñanza que se llevaban a cabo tenían como eje central la repetición, ejercitación y memorización. Por el contrario, hoy en día, el foco se encuentra en la construcción del sentido de las operaciones y la diversidad de problemas que resuelven, así como la variedad de procedimientos y estrategias de cálculo que se pueden utilizar (Broitman, 2010). En consonancia con estas ideas, las situaciones problemáticas seleccionadas para este trabajo lejos de pensar cada operación disgregada de la otra, son tomadas como parte de un mismo campo conceptual.

La Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud estudia dos estructuras conceptuales, la aditiva y la multiplicativa. La estructura o campo multiplicativo es definido como "*el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones*" (Vergnaud, 1990, p. 8). Este campo conceptual es el que se aborda en este trabajo final integrador a partir de la implementación de situaciones que ponen en juego uno de los sentidos de la división.

La Teoría de Campos Conceptuales estudia los problemas que dependen de la relación multiplicativa, las propiedades de los números, etc., las principales son: isomorfismo de medidas, casos de un solo espacio de medidas y producto de medidas[3]. En ellos se distinguen dos grandes tipos de problemas: de multiplicación, donde se busca la medida-producto cuando se conocen las medidas elementales, y división, donde se busca una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida del producto (Vergnaud, 1991).

Respecto a los problemas de división se propone abordar el sentido de esta operación mediante situaciones problemáticas vinculadas a la búsqueda del cociente y el resto, que incluyen problemas de reparto e iteración, reflexión de la relación entre las partes de la división (dividendo = divisor x cociente + resto) y la búsqueda de un cociente en los casos de proporcionalidad y el producto de medidas. Estas ideas abonan al trabajo que propone el Documento de trabajo n°4 (1997) ya que permiten "*reconocer los problemas que permite resolver, usar las propiedades y las formas de representación adaptadas a esos problemas y dominar diferentes estrategias de cálculo que permitan abordarlos*" (p. 38).

Se abordó un modo de trabajo que lleva a las y los estudiantes a dar cuenta que los problemas de división se pueden resolver utilizando una variedad de procedimientos y operaciones (Horacio Itzcovich y Broitman, 2001). Desde esta perspectiva, saber dividir implica reconocer a la división como una herramienta de resolución para diversos tipos de problemas: de iteración, proporcionalidad, reparto y partición, etc. (Mónica Escobar y Mónica Salgado, 2007). En el diseño de la secuencia didáctica, se ha tomado en cuenta la entrada a la división a través de problemas de iteración que implican una o varias multiplicaciones o divisiones. Esta aproximación se

[3] Para más información el lector puede consultar a Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 10 (2-3).

enmarca en la Teoría de Campos Conceptuales, que sostiene que un concepto no puede reducirse a su definición, sino que su significado está en la red de conceptos que le dan sentido. La construcción del concepto se pone en juego en el esquema, que se entiende como el conjunto de conocimientos previos del sujeto. Por lo tanto, se considera que el conocimiento se moldea a través de situaciones que le otorgan sentido, lo que se entiende como el conjunto de acciones que requieren una tarea cognitiva. En este sentido, se tuvo en cuenta que las y los estudiantes de la formación ingresan con un bagaje de conocimientos acerca de los sentidos de la división, que fueron construyendo a lo largo de su trayectoria escolar, y que las situaciones problemáticas propuestas buscan ponerlos en juego con el propósito de que puedan establecer nuevas relaciones entre ellos, reorganizarlos y transformarlos. Al fomentar el análisis y la discusión de las relaciones entre las operaciones, se amplía la perspectiva que las y los estudiantes tienen acerca de ese objeto de enseñanza.

3. <u>Antecedentes</u>

El armado, la implementación y el análisis del dispositivo didáctico propuesto en este trabajo se apoya en el TFI de Sandra Espósito (2020) y el desarrollado por Andrea Novembre (2013) en el marco de la formación docente continua. Es por ello que en los párrafos siguientes se analizarán los puntos en común y las diferencias con dichas estudios.

De manera análoga al TFI de Espósito (2020), en este trabajo se diseña e implementa un dispositivo didáctico en el profesorado de educación primaria para abordar el campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Si bien existen muchos puntos en común, se puede decir que mientras Espósito (2020) hace hincapié en la multiplicación, en éste se analizan algunos aspectos de la división. Por otro lado, en ambos se busca "*analizar la potencialidad de ciertos dispositivos puestos en juego en la formación docente inicial, con el fin de pensar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en consonancia con los lineamientos curriculares provinciales del nivel primario*" (Espósito, 2020, p. 3). Asimismo se comparte la idea de formar a los sujetos ampliamente, en lugar de enseñar matemática mediante técnicas aisladas y repetitivas. Esto implica que piensen por sí mismos y que se comporten como sujetos matemáticos mediante situaciones que admiten la doble conceptualización ya que estas tienen, a la vez, dos objetivos: "*por un lado, que los maestros construyan conocimientos matemáticos y, por otro lado, que elaboren conocimientos en relación a las condiciones didácticas que son necesarias para que sus alumnos puedan apropiarse de los mismos*" (Espósito, 2020, p. 12). Es decir que, entre otras cosas, se trata de abordar los contenidos matemáticos y didácticos generando nuevos vínculos entre ellos.

Por su parte Novembre (2013) presenta un dispositivo didáctico en el marco de las acciones de capacitación que lleva adelante la formación docente continua. En él se abordan problemas que pertenecen al campo conceptual multiplicativo - los sentidos de la división y el análisis del resto, entre otros - y que admiten la doble conceptualización pues,

> Se trata de una situación que puede evocar contenidos conocidos por todos los docentes, aunque no resulta evidente su aplicación. Por otro lado, admite estrategias de resolución muy variadas y da lugar a prácticas e interacciones que permiten reflexionar sobre el rol docente. (Novembre, 2013, p. 240)

Ambos dispositivos tienen en común que las situaciones problemáticas seleccionadas pueden ser resueltas por distintas estrategias -como la representación gráfica, sumas, restas y multiplicaciones- pero se establece a la división como una estrategia de resolución. Además pretenden mostrar cómo van evolucionando las estrategias desde las más rudimentarias -como la representación gráfica y la suma- hasta las más complejas, estableciendo nuevas relaciones matemáticas que deben comprobar y validar.

Aunque los destinatarios difieren, en ambos se propone trabajar en grupo y reflexionar sobre las prácticas docentes en el nivel primario. En el estudio de Novembre, se plantean situaciones problemáticas a docentes que los llevan a los mismos interrogantes que a las y los alumnos, como por ejemplo: ¿es de proporcionalidad? ¿Con qué cuenta se resuelve? El objetivo en ambos casos es que las y los participantes experimenten en primera persona la actividad matemática propia de la disciplina, y que a través de situaciones que pueden "*evocar contenidos conocidos por todos los docentes, aunque no resulta evidente su aplicación*" (Novembre, 2013, p. 240), se cuestionen y pongan en juego sus conocimientos previos.

4. Marco curricular de la formación docente

Nos proponemos analizar y comprender las ideas que circulan desde el marco curricular de la formación docente. En este sentido, la Ley Nacional de Educación Superior (N°26206/06) en su artículo N° 71 nos ayuda a entender algunas de sus finalidades:

> Preparar profesionales y trabajadores capaces de enseñar, generar y transmitir los conocimientos y valores que se necesitan para la formación integral de las personas, el desarrollo nacional y la construcción de una sociedad más justa. También busca propiciar la autonomía del docente, el vínculo con la cultura y la sociedad contemporánea, el trabajo en equipo, el compromiso con la igualdad y la confianza en las posibilidades de aprendizaje de los/as alumnos/as. (p. 15)

Se puede decir que la formación docente es considerada un proceso permanente que se da a lo largo de toda la vida profesional, siendo la formación inicial de suma importancia ya que genera las bases para el desarrollo de la carrera profesional. Al respecto el Diseño Curricular para la Educación Superior (2008)[4] presenta como uno de sus objetivos la construcción colectiva de la práctica docente, formando a la futura maestra o maestro como un profesional de la educación, un pedagogo y un trabajador cultural; siendo la enseñanza su núcleo fundante. En el documento se señala que la autoridad pedagógica del docente se sostiene en los saberes que domina para ser enseñados y la legitimación social de su rol, se propone que la formación "*debe apuntar al fortalecimiento del saber del docente y ofrecer algunos elementos para la reconstrucción de su autoridad social o su legitimación en nuestras sociedades conflictivas y complejas*" (DGCyE, 2008, p.26). En lo que concierne al campo de los saberes a enseñar, se presenta a la matemática como una de las áreas que debe ser interpelada y problematizada durante la formación docente inicial puesto que:

> Un sólido dominio y conocimiento conceptual y epistemológico, por parte de los docentes de los niveles implicados de cada una de estas áreas, constituye un requisito previo e insoslayable para la construcción de las estrategias de intervención pedagógicas y didácticas orientadas a garantizar que los conocimientos socialmente productivos, definidos desde la prescripción curricular y recreados por el colectivo docente, sean aprendidos por todos los niños/as y las niñas que ingresan y egresan del Nivel Inicial y del Nivel Primario. (DGCyE, 2008, p.32)

Es por ello que desde el profesorado de educación primaria se busca retomar el bagaje de conocimientos que construyeron las y los estudiantes a lo largo de su escolarización para reflexionar sobre ellos y cuestionarlos con el objetivo que, a

[4] Corresponde al Diseño Curricular para la Educación Superior de la provincia de Buenos Aires.

posteriori, puedan construir estrategias de intervención pedagógicas y didácticas en pos de mejorar su enseñanza. De esta manera, desde el primer año, tienen un primer acercamiento al quehacer matemático propio de la disciplina en el Taller de pensamiento lógico matemático donde se las y los enfrenta a

> Una serie de situaciones tales que les permitan vivenciar la actividad matemática como producción cultural y social […] El núcleo central del taller es la argumentación, entendiéndose por tal al desarrollo de la función discursiva que permite justificar o refutar determinada proposición. (DGCyE, 2008, p.100)

En el segundo y tercer año de la carrera se dictan Didáctica de la Matemática I y II, respectivamente, cuya intención es la de desarrollar y problematizar "*los contenidos sugeridos poniendo en acto los marcos teóricos propios de la Didáctica de la Matemática y empleando, siempre y en todo momento, ejemplos propios de la educación primaria*" (DGCyE, 2008, p. 120); mediante una "*constante dialógica de la teoría didáctica con el contenido matemático de enseñanza presentado para el Nivel Primario*" (p. 120). Desde esta mirada, se puede decir que, para las y los futuros docentes, los conceptos teóricos de la Didáctica de la Matemática actúan como "*el soporte de fundamentación de sus decisiones didácticas para las prácticas en las aulas de Primaria, como durante su desarrollo profesional*" (p. 120).

Teniendo en cuenta el objeto de análisis del presente trabajo, es importante destacar que el Diseño Curricular para la Educación Superior (2008) propone abordar una serie de contenidos, entre los cuales se pueden mencionar:

- Consideraciones sobre las situaciones didácticas, marco teórico para sustentar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de los niños/as.
- Situaciones para la construcción del sentido de un conocimiento. Situaciones para la reinversión del conocimiento.
- Variables didácticas de las situaciones de enseñanza, los valores a considerar y los aprendizajes que promoverán.
- Lectura y escritura favorecedora de la apropiación conceptual-metodológica de las prácticas discursivas propias del área y de su enseñanza para cada uno de los ciclos.
- Actividades que se enseñan para promover conocimientos vinculados con las operaciones y sus propiedades. (DGCyE, 2008, p. 120)

Este documento curricular propone que, desde la formación inicial, se planteen situaciones problemáticas que permitan a las y los estudiantes establecer nuevas relaciones entre los conocimientos matemáticos y, a su vez, construir los conocimientos didácticos necesarios para guiar el aprendizaje de sus futuras alumnas y alumnos. En este sentido, la secuencia didáctica que se analiza en este trabajo tuvo como objetivo explorar y reflexionar algunos aspectos de la división a través de problemas de iteración dado que si bien involucran a la división, pueden resolverse, inicialmente, por medio de sumas, restas o multiplicaciones (DGCyE, 2018).

5. La formación matemática en el Profesorado de Educación Primaria

Desde la perspectiva didáctica adoptada en este trabajo, resulta fundamental retomar la pregunta planteada por Mónica Agrasar y Graciela Chemello (2008) acerca de las necesidades de formación matemática de las y los docentes para que puedan tomar decisiones adecuadas en relación a la enseñanza. En otras palabras, qué es lo que necesita una maestra o un maestro de primaria para desarrollar su rol como profesionales de la educación, que esté en consonancia con las exigencias de los actuales proyectos de enseñanza y acorde a la perspectiva didáctica del Diseño Curricular para la Educación Primaria (2018)[5]. Al respecto, las autoras señalan que:

> Para enseñar matemática es suficiente saber los cálculos con distintos tipos de números, conocer definiciones, saber clasificar figuras y consideran que su tarea como maestros será, fundamentalmente, hacer accesibles estos conocimientos a los niños de la escuela primaria, explicar bien, estar dispuestos a responder preguntas. (Agrasar y Chemello, 2008, p.9)

Por su parte, los lineamientos del Diseño Curricular para la Educación Superior (2008) pretenden que las y los futuros docentes dispongan de un bagaje de conocimientos matemáticos y didácticos que les permitan ejercer de la mejor manera la profesión ya que el conocimiento disciplinar por sí solo, no garantiza una mejor enseñanza. Es decir que se piensa que para desarrollar una buena práctica docente en la escuela primaria, es necesario poder articular los contenidos matemáticos y didácticos, pudiendo reflexionar sobre lo actuado para tomar decisiones en pos de reorientar la enseñanza y favorecer la construcción de los conocimientos de las y los alumnos. No se trata de enseñar matemática sino "*de intentar que construyan una nueva relación con ella*" (Novembre, 2013, p. 255). Para lograrlo es necesario

[5] El Diseño Curricular para la Educación Primaria (2018) es el que se encuentra en vigencia actualmente.

promover un encuentro con la producción matemática que permita tener una mirada distinta sobre los objetos escolares conocidos, generando nuevos vínculos entre los conocimientos. En este proceso es esperable que la didáctica intervenga como un "*instrumento de formación y no como un objeto de conocimiento*" (Nadine Bednarz, 2000, p. 13) puesto que, la formación didáctica, "*contribuye a la comprensión del contenido matemático en el docente o futuro docente, y en este sentido, a menudo constituye una toma de conciencia importante*" (p. 13). Es decir que la enseñanza de la matemática no se limita solo a resolver problemas sino que también, puedan pensarlos como una herramienta de enseñanza. En términos de Sadovsky y Carmen Sessa (2007):

> Al enfrentar problemas se producen ideas nuevas, que dichas ideas no son necesariamente las mismas para distintas personas, que llevan implícitas relaciones que en muchos casos hay que validar y que pueden ser objeto de intercambios generando nuevas ideas. Hacer de estos procesos del aula asuntos de reflexión de los mismos maestros, objetivar las prácticas de la que ellos formaban parte, fue esencial para desnaturalizar y problematizar la enseñanza. (p. 17)

Por su parte Agrasar y Chemello (2008) agregan que:

> La posibilidad de controlar la transmisión requiere conocer sus múltiples ropajes (sus significados, sus representaciones) y los modos de pasar de uno a otro. Esto le permite al docente intervenir convenientemente tanto para hacer avanzar a los alumnos como para planificar atendiendo mejor a los conocimientos disponibles. (p.4)

Por lo tanto, sería recomendable que las y los docentes formadores propongan en el aula prácticas que les permitan a las y los estudiantes desarrollar una producción matemática con un enfoque similar al de los matemáticos que crearon nuevos conceptos ya que "*estudiar matemática es efectivamente HACERLAS*" (Bernard Charlot, 1991) lo que conlleva a construirlas, fabricarlas, producirlas. Desde esta perspectiva, enseñar matemática no se trata de memorizar y aplicar una técnica o de aprender definiciones descontextualizadas, sino que implica formar al sujeto de una manera amplia.

Este trabajo de articulación entre saberes matemáticos y didácticos es de suma importancia para la formación de maestras y maestros dado que algunos estudios señalan que el enfoque predominante de enseñanza está "*basado en la mecanización* *y repetición, que propone la transmisión directa del saber: el profesor enseña y los alumnos supuestamente aprenden como una consecuencia directa*” (Novembre, 2013, p. 239). La autora considera que estas prácticas son una tradición, ya que a pesar de haberse originado en un contexto histórico, han perdurado en el tiempo y se han incorporado al pensamiento y la acción, incluso en la formación de docentes. Además, estas tradiciones son las que traen consigo las y los estudiantes al ingresar a la formación docente, como consecuencia de su biografía escolar. El Diseño Curricular para la Educación Superior (2008) sostiene que:

> Los estudiantes que aspiran a ser docentes poseen ya una biografía escolar que los condiciona en su proceso de formación como docentes. A lo largo de esa biografía han internalizado un imaginario y una serie de prácticas que caracterizan a la docencia. (p. 21)

Es fundamental que las y los profesores formadores aborden estas prácticas de manera sistemática y consciente, cuestionando cómo se han naturalizado los procesos educativos en las escuelas, el enfoque de los contenidos y las prácticas de evaluación, entre otros aspectos. Este análisis lleva a reflexionar sobre la necesidad de desnaturalizarlas y pensar en cómo las futuras y futuros docentes desarrollarán su praxis.

En síntesis, uno de los propósitos de la formación docente inicial es que las y los estudiantes se comporten como sujetos matemáticos. Por esta razón, es importante que se piense el aula de los institutos como una oportunidad para conocer los objetos matemáticos relevantes del nivel primario con el propósito que, a posteriori, sean “*capaces de analizar, elegir, adaptar o concebir una progresión de enseñanza sobre un concepto, noción, procedimiento, etc., así como han de aprender a gestionar la clase según sus propósitos y tomando en cuenta los aprendizajes y las dificultades de sus alumnos*” (Sadovsky et al., 2010, p. 13). Para esto, es esperable que en las áreas de la enseñanza de las matemáticas se trabaje con una diversidad de propuestas, se comparen enfoques didácticos desde distintos libros de texto, se analicen las diferentes estrategias de resolución de un mismo problema, se consideren las diversas maneras de plantear un problema, etc., ya que “*todas estas opciones muestran la inclusión del análisis del funcionamiento matemático en las consideraciones que se hacen al pensar en la enseñanza*” (Sadovsky, 2010, p.31). Se trata que puedan avanzar en la construcción de conocimiento didáctico a la vez que construyen nuevos sentidos para el hacer matemáticas y los contenidos de la disciplina.

5. 1 *La enseñanza de las operaciones*

Se toma como punto de partida la pregunta ¿qué significa verdaderamente saber algo? El Diseño Curricular para la Educación Primaria (2018), establece que "*Hoy, saber algo no es tener memorizada la información o hacer las cuentas [...] Hoy, saber algo es poder hacer cosas nuevas con esos conocimientos*" (p. 98), y además agrega:

> Para lograr un aprendizaje significativo en Matemática debemos proponer situaciones que planteen problemas, los cuales requieran de ciertas nociones matemáticas como instrumentos necesarios para poder solucionarlos ya que un conocimiento matemático sólo puede considerarse aprendido cuando se ha funcionalizado; es decir, cuando es posible emplearlo como medio para resolver una situación o problema. (p. 98)

Este tipo de aprendizaje no se desarrolla de manera inmediata, sino que requiere un trabajo a largo plazo que expone a las y los estudiantes a diversas situaciones de enseñanza, desafiándolos con un amplio repertorio de problemas. Desde este posicionamiento, la enseñanza de las operaciones en la escuela primaria busca trabajar sobre otros aspectos vinculados con la apropiación de diferentes recursos de cálculo, el establecimiento de relaciones entre estos y el sistema de numeración, el estudio de las propiedades de las operaciones y el reconocimiento del campo de problemas que pueden resolverse con las operaciones que se trabajan (Héctor Ponce, 2011). Es menester aclarar que esto no siempre fue así pues durante mucho tiempo, la enseñanza de las operaciones giró alrededor de los algoritmos. Cabe decir que por algoritmo se entiende a "*cualquier procedimiento que funcione paso a paso, y en el que cada uno de ellos se pueda describir sin ambigüedad y sin hacer referencia a una computadora o una persona en particular que lo lleve a cabo*" (Verónica Grimaldi, 2010, p.6). Al respecto, el Diseño Curricular para la Educación Primaria (2008) sostiene que:

> Hace algunos siglos la necesidad era que los alumnos/as aprendieran las cuatro cuentas, mientras que actualmente es compartida la idea acerca de la insuficiencia del dominio de las cuentas para que los alumnos/as reconozcan la gama de problemas para los cuales una operación es una vía de solución. (p. 180)

Sadovsky y Sessa (2007) consideran que dominar un contenido matemático no es saber más sino que es saber de otra manera, puesto que "*bajo el mismo nombre,* *se pueden desplegar prácticas muy distintas en relación con los objetos matemáticos, que dan lugar a aprendizajes esencialmente diferentes*" (p. 15). Desde esta mirada la formación docente inicial busca que se generen las condiciones para que las futuras maestras y maestros lleven adelante un nuevo encuentro con la producción matemática, donde se dé lugar a "*una mirada nueva sobre los "viejos" y conocidos objetos escolares como producto de nuevas relaciones construidas; nuevos vínculos entre diferentes "zonas" de la matemática que históricamente aparecen divorciadas en las prácticas escolares*" (p. 15). En este sentido Espósito (2020) sostiene que:

> Sería interesante pensar la enseñanza de las operaciones en la formación de maestros con la intención de problematizar lo que es saber calcular, interpretar los distintos caminos de resolución de los niños/as, poder dar respuesta a las distintas justificaciones que ellos plantean, etc. (p. 14)

Esto está en consonancia con lo que propone el Diseño Curricular para la Educación Primaria (2008), donde el foco está puesto en que las niñas y niños "*aprendan a resolver diferentes clases de problemas y que adquieran una gran variedad de estrategias de cálculo para resolverlos*" (DGCyE, 2008, p.180). Por lo tanto, es fundamental que en los institutos superiores se promueva la reflexión en torno a las interpretaciones y el análisis de las producciones infantiles que involucran diversas estrategias de cálculo, tales como cálculos mentales, el uso reflexivo de la calculadora y los cálculos estimativos, entre otros. Según Broitman (2014), una vez que se dominan estas estrategias y se construye el sentido de las operaciones, es importante discutir y reflexionar acerca de los diferentes algoritmos disponibles. Esto da la posibilidad de ver qué tienen en común, en qué se diferencian, cuál conviene más, entre otros, y permite relacionarlo con las propiedades de las operaciones, mediante un trabajo exploratorio donde se admiten distintas estrategias de resolución que se revisan y analizan, se reflexiona y se determinan los procedimientos más adecuados para esa situación particular, se discute la validez de los resultados obtenidos, etc. (Broitman, 2014). Este tipo de trabajo es el que se propone llevar adelante en la formación inicial para que, a posteriori, las y los futuros docentes puedan guiar la construcción del conocimiento matemático en general, y del sentido de las operaciones en particular, de sus alumnas y alumnos.

Es importante, desde esta perspectiva didáctica, que lo que se enseñe tenga sentido para las y los estudiantes. Al respecto Vergnaud (1990) sostiene que "*un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se* *pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño*" (p. 1). Por su parte, Charnay (1994) agrega que el sentido se adquiere en los errores que evita, la economía que procura, entre otros, y cita a Brousseau (1983):

> El sentido de un conocimiento matemático se define no solo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no solo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc. (Charnay, 1994, pp. 52-53)

Según María Quaranta (2007), la Teoría de Campos Conceptuales sostiene que al estudiar un concepto es importante considerar diversos aspectos, tales como:

a) el conjunto de diferentes situaciones que otorgan sentido al concepto (la referencia);
b) el conjunto de relaciones y propiedades ligadas a una noción determinada (el significado);
c) el conjunto de las diferentes formas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de resolución (el significante). (p. 2)

Basado en lo expuesto en los párrafos anteriores, el diseño del dispositivo didáctico implementado en este trabajo tiene como objetivo abordar las operaciones matemáticas mediante la construcción de sus significados. Dado que se sostiene que la enseñanza tradicional de las operaciones se centraba en el cómo hacerlas mediante técnicas aisladas, pero no brindaba la comprensión sobre el propósito de las mismas, se plantea que esto conduce a que las y los estudiantes puedan resolver cálculos, pero tengan dificultades para seleccionar la operación adecuada para resolver situaciones problemáticas y por lo tanto le *"preguntan al docente: "¿de qué es el problema, de dividir o multiplicar?*" (Espósito, 2020, p.17). La importancia de este tipo de trabajo, en consonancia con Espósito (2020), radica en considerar necesario que desde la formación de maestros se reflexione, analice y discuta acerca de cómo se hace matemática en la escuela, qué matemática se hace, para qué y para quiénes se la enseña. Para ello es necesario tener en cuenta que, lo que se trabaja respecto a determinados objetos matemáticos, "*influirá en la relación que cada persona construya con ellos, influirá en el hecho de sentirse capaz de aprenderla o no, en las posibilidades de entenderla y resignificarla*" (Espósito, 2020, p. 16).

5. 2 *Los sentidos de la división*

Para abordar la enseñanza de la división, es necesario comprenderla como una herramienta para resolver diversos tipos de problemas, como los de reparto, partición, análisis del resto, proporcionalidad, iteración, entre otros. Asimismo, es importante dominar distintas estrategias de cálculo, incluyendo el mental, el estimativo, el algorítmico y el uso de calculadoras, tal como lo señalan Mónica Escobar y Mónica Salgado (2007). Siguiendo estas líneas, Cecilia Parra e Irma Saiz (2007) afirman que aprender a dividir incluye "*reconocer cuáles son los problemas que pueden resolver utilizando la división y cuáles no*" (p. 180), empleando en su resolución una diversidad de procedimientos. Itzcovich (2008) sostiene que las y los alumnos suelen recurrir a procedimientos como el conteo, los dibujos, las sumas y las restas para abordar la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, es tarea de la escuela promover la evolución de estas estrategias hacia otras más complejas y eficientes. Para ello se necesita "*plantear nuevos desafíos, aumentar el tamaño de los números y establecer relaciones con la multiplicación para que los alumnos puedan producir nuevos recursos de cálculo que permitan resolver problemas más complejos en el campo de la división*" (p. 119). En lo que refiere a la formación de maestros, Espósito (2020) destaca la importancia de incluir la discusión de diversos aspectos relacionados con la enseñanza de estas operaciones. Por ejemplo, los que plantea Chemello et al. (2007):

> Cada operación puede resolver diferentes tipos de problemas asociados a los distintos significados de la operación; cada problema puede resolverse por diferentes procedimientos y estrategias de resolución; los cálculos que permiten resolver problemas aritméticos son de diferente tipo y su uso depende de los instrumentos disponibles y el tipo de números involucrados, lo que da lugar a poner en juego propiedades de los números y de las operaciones. (Chemello et al., 2007, citado por Espósito, 2020, p. 19)

Es fundamental que en la formación de maestros, la enseñanza de la división no pierda de vista los ejes mencionados, ya que son esenciales para construir el sentido de la operación. Por consiguiente, este trabajo final integrador aborda situaciones problemáticas de iteración que corresponden al campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Este campo se define como "*el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones*" (Vergnaud, 1990, p. 8). Dentro del campo multiplicativo, Vergnaud distingue tres tipos de problemas: isomorfismo de medidas, un solo espacio de medidas y producto de medidas. Estas categorías son retomadas por Broitman (1999), quien las clasifica en problemas de proporcionalidad, de organizaciones rectangulares y problemas donde hay que combinar elementos[6] que, según dónde se ubica la incógnita, dan lugar a problemas de multiplicación y división. En los primeros se conocen las medidas elementales y se busca la medida-producto y, en los segundos, se busca una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida del producto.

Las situaciones problemáticas propuestas buscan avanzar sobre un modo de quehacer matemático que lleve a las y los estudiantes a interpelar sus conocimientos acerca de la división para cuestionarlos, analizarlos y, a partir de los aportes de la Didáctica de la Matemática, construir estrategias de intervención didáctica que potencien su desarrollo profesional. Para ello se seleccionaron problemas de iteración, donde se plantea una relación de congruencia: dos números enteros son congruentes módulo p, si tienen el mismo resto en la división por p. Por ejemplo, 6 y 21 son congruentes módulo 5 porque tienen el mismo resto al dividirlo por 5, 1. De esta manera se puede escribir el número 6 como una relación entre el número por el que se divide y el resto de esa división: 6 = 5 x 1 + 1, donde 1 que multiplica a 5 representa el cociente de esa división. De igual modo con el 21, 21 = 5 x 4 + 1, donde 4 es el cociente de dividir a 21 por 5. El Documento de trabajo n° 4 (1997) sostiene que las situaciones que se han descrito están vinculadas a la búsqueda del cociente y del resto mientras se aborda la relación a = b x q + r, siendo *a* el dividendo, *b* el divisor, *q* el cociente de dividir *a* por *b* y *r* el resto de dicha división. También plantea que si bien la resolución de los problemas de iteración está relacionada con la aproximación por productos y el análisis del resto, no son muchas las y los estudiantes que recurren a la división a pesar de que sepan “usarla”, agrega al respecto:

> Si bien no es esperable que de entrada los chicos reconozcan la división, tanto el análisis de los distintos procedimientos, como la necesidad de encontrar una estrategia económica cuando los números crecen, deberían llevar a identificar la división como la operación que resuelve este problema. Esta identificación enriquece, para los alumnos, los significados vinculados a la división. (p. 42)

Es decir, se espera que, paulatinamente, la división comience a transformarse en un recurso adecuado para resolver problemas de iteración.

[6] Broitman, C. (1999). *Las operaciones en el primer ciclo: aportes para el trabajo en el aula.* Novedades Educativas. Buenos Aires.

6. Diseño del dispositivo

6. 1 Características del grupo y de la Institución: decisiones didácticas

El dispositivo didáctico se implementó en el ISFDyT n°136 de Ensenada, un instituto creado en 1992 como extensión del ISFD N°17 de La Plata, que originalmente ofrecía sólo el Profesorado en Educación Primaria. Con el tiempo, el instituto se expandió y agregó nuevas carreras para satisfacer las necesidades de la comunidad. En el 2005, se independizó del ISFD n°17 y se convirtió en el ISFDyT n°136. En la actualidad, la institución imparte clases en el turno vespertino de 17:30 a 22:00 hs, incluyendo los Profesorados en Educación Primaria e Inicial, Profesorado de Educación Secundaria en Lengua y Literatura, y las Tecnicaturas en Recursos Humanos, Industria Textil e Indumentaria, Régimen Aduanero y Comercio exterior, y Turismo. Debido a que las carreras tienen una sola sección, los grupos suelen ser numerosos en los primeros años, aunque la matrícula disminuye en los años superiores. La mayoría de las y los estudiantes provienen de las zonas de Ensenada, Berisso y Punta Lara.

El trabajo propuesto consta del armado, la implementación y el análisis de una secuencia didáctica dentro del espacio curricular Didáctica de la Matemática II que corresponde al tercer año del Profesorado en Educación Primaria, donde me desempeño como docente. Para ello se tuvo en cuenta que la mayoría de las y los alumnos estudian, trabajan y tienen familiares a cargo, lo que repercute en la asistencia a las clases y las lecturas previas dentro de los espacios curriculares. Además, este grupo cursó sus dos primeros años en el contexto de ASPO[7] lo que implicó que las cursadas se lleven adelante de manera virtual, con lo cual el trabajo entre pares, debatir ideas, argumentar frente al pizarrón, validar las estrategias, etc., fue un desafío para el desarrollo de las clases y terminó convirtiéndose en un obstáculo que hubo que surfear. Por otra parte, una característica del tercer año del profesorado es el alto impacto que tiene la Práctica Docente III al interior del desarrollo de los contenidos correspondientes a Didáctica de la Matemática II.

Se intentó trabajar no solo el contenido matemático sino, también, de introducir a las y los estudiantes en el hacer propio de la matemática, para que a posteriori puedan conceptualizar y elaborar nuevas referencias para pensar la enseñanza en el aula de primaria cuando ejerzan como docentes del nivel (Sadovsky y Sessa, 2007).

[7] Aislamiento Social Preventivo y Obligatorio decretado por el Gobierno Nacional a partir de marzo del 2020 para evitar la circulación y el contagio del virus COVID-19, declarado pandemia por la Organización Mundial de la Salud el 11 de marzo del 2020.

La secuencia didáctica que forma parte del dispositivo pretendió abordar algunos aspectos del campo multiplicativo de las operaciones, mediante un conjunto de situaciones problemáticas que podrían admitir más de una estrategia de resolución y donde la división también lo resuelve. Se implementó de manera presencial, durante el mes de mayo del 2022, durante tres clases de dos horas cada una. En clases anteriores se abordaron las discusiones iniciadas durante el segundo año de la carrera, retomando el trabajo con la tabla pitagórica y las relaciones con el sistema de numeración. También se reflexionó sobre la multiplicación y el juego como recurso de aprendizaje, a través de "las pulgas y las trampas"[8] que fue retomado al finalizar la secuencia ya que posibilitó abordar algunas ideas relacionadas con múltiplos y divisores.

La clase se organizó en dos grupos, uno de tres integrantes y el otro de cuatro, para llevar adelante la resolución de las situaciones problemáticas propuestas. Esto tuvo como propósito que las y los estudiantes pudieran proponer distintas estrategias de resolución y discutir acerca de ellas. En consonancia con el tipo de trabajo matemático que proponen los Diseños Curriculares para la Educación Primaria (2008/2018), se pensó la clase de matemática como un espacio donde las y los estudiantes pueden:

- Construir a partir de la resolución de situaciones en distintos contextos (extra e intramatemático) que permitan desplegar un trabajo de tipo exploratorio (probar; ensayar; abandonar; representar para imaginar; entender; resolver o comunicar; tomar decisiones; conjeturar), habilitando el despliegue y discusión de diferentes procedimientos, de ensayos y errores, y la consideración de que un mismo problema puede ser resuelto mediante diferentes recursos.
- Interactuar, comunicar e interpretar procedimientos y resultados, analizando la razonabilidad de los mismos, revisar y analizar estrategias personales e incluso apropiarse de las estrategias de otros –cuando sea conveniente– para resolver problemas.
- Reflexionar y determinar cuáles procedimientos fueron los más adecuados o útiles para la situación resuelta, promoviendo la evolución de las estrategias personales de resolución desplegadas.

[8] Extraído de Agrasar, M.; Chemello, G. y Díaz, A. (2012). *Matemática para todos en el nivel primario. Notas para la enseñanza: operaciones con números naturales, fracciones y números decimales.* Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación.

- Discutir sobre la validez de los resultados obtenidos y de las conjeturas producidas, es decir, recurrir a los conocimientos matemáticos para decidir si una afirmación, una relación, un resultado son o no válidos y bajo qué condiciones.
- Resignificar, reorganizar y establecer relaciones entre diferentes conceptos ya conocidos, generando momentos para reordenar, conceptualizar y sistematizar nuevas relaciones, nuevos problemas y permitir la producción de otros modelos matemáticos. (DGCyE, 2018, pp. 98-99)

A continuación se les repartió a cada alumna y alumno una fotocopia con la situación problemática y se les solicitó que la resuelvan con la estrategia que consideren, habilitando el uso de la calculadora y el registro de los procedimientos utilizados. La importancia de registrar lo realizado a propósito de una situación problemática va en consonancia con las ideas de Susana Wolman (2010) quien sostiene que:

> Desde el punto de vista del aprendizaje, el hecho de anotar, aunque sólo consista en relatar lo realizado o los medios empleados, requiere en cierta medida volver a pensar sobre el modo de obtener el resultado y, en algunos casos, involucra un comienzo del proceso de toma de conciencia del camino desplegado al objetivar la acción desarrollada. (p. 13)

Durante el transcurso de las clases las intervenciones docentes apuntaron a hacer avanzar a aquellos estudiantes que encontraban obstáculos sobre las maneras de resolver o registrar, pero en todo momento se intentó no intervenir respecto al contenido matemático, así como tampoco se señalaron aciertos y/o errores. En la puesta en común, en el pizarrón y a través del dictado al docente, se expusieron y compararon los distintos procedimientos y se discutió la validez de los mismos. También se analizaron los procedimientos incompletos y los errores que fueron surgiendo pues, estos últimos son considerados parte constitutiva del aprendizaje. De manera análoga a la gestión de clases planteada por Espósito (2020), se analizó y reflexionó "*sobre los distintos procedimientos que se fueron presentando, tratar de entender las estrategias de otros, intervenir ante posibles errores, fortalecer en la construcción de mayores saberes matemáticos, entre otros*" (p. 24). A lo largo de cada clase se grabaron en audio los intercambios que se dieron tanto al interior de cada grupo como en la puesta en común. Se tomaron registros fotográficos de las producciones de las y los estudiantes para su posterior análisis.

6. 2 Las situaciones problemáticas del dispositivo

Broitman e Itzcovich (2001) manifiestan que en las capacitaciones muchos docentes solicitan trabajar con la división debido a la cantidad de dificultades que encuentran para su enseñanza y mencionan las siguientes:

> Dificultades de los alumnos para apropiarse del algoritmo, especialmente con divisores de dos cifras, ausencia de estimación previa y de control posterior acerca de los resultados obtenidos; no reconocimiento de la división como recurso para resolver cierto tipo de problemas. Otra dificultad mencionada por los docentes fue la asociación de la palabra "repartir" a la operación de división que realizaban los alumnos. Por ejemplo, frente a la presencia de dicho término en un problema, algunos niños dividían aunque no fuera ésta la operación que resolvía el problema, y si no aparecía dicho término, algunos alumnos no reconocían la división como medio de resolución. (p. 3)

Podríamos asumir que estas dificultades se deben a problemas didácticos, ya que derivan de la manera en que se enseña la división en la escuela. Además, parece que los obstáculos que las y los alumnos enfrentan para comprender y aplicar el algoritmo se hacen evidentes cuando olvidan cómo realizar la división, especialmente cuando el divisor es de dos o más cifras. Asimismo, quienes recuerdan el algoritmo de la división tradicional[9], pocos son los que pueden explicar los pasos intermedios que realizan. El no comprender lo que se está haciendo y la falta de control sobre los resultados obtenidos suele producir, también, que no puedan resolver de manera correcta problemas donde la cuenta no asegura su respuesta. Por ejemplo: "*Una empresa de turismo está organizando un viaje para un grupo de 383 personas. Para trasladarlas al aeropuerto, van a utilizar micros. Cada micro tiene una capacidad para 30 personas. ¿Cuántos micros deberán utilizar para trasladar a todos los turistas, si en cada micro viaja la mayor cantidad posible de personas?"*[10] . Frente a esta situación, la mayoría de las y los estudiantes logran resolver el problema mediante la división; sin embargo, solo unos pocos concluyen que, aunque el resultado de la cuenta es 12, deben contratar 13 micros para que los 23 pasajeros puedan viajar. Esto sugiere que, aunque las y los alumnos hayan dominado el algoritmo, no tienen un completo control sobre el significado del problema.

---

[9] En este trabajo se define a los algoritmos tradicionales como cifras aisladas, sin tener en cuenta el valor posicional de las mismas en el numeral. Además ocultan los cálculos y las propiedades que se utilizan. Si bien esto los vuelve más económicos, son poco transparentes.

[10] Situación problemática extraída del Diseño Curricular para la Educación Primaria (2008) (p.162)

Con el objetivo de que tengan un mayor dominio sobre el proceso, se sugiere enseñar a partir de distintas estrategias que se basan en la descomposición numérica, las propiedades del sistema de numeración y las operaciones, en lugar de solo los algoritmos tradicionales. Por ejemplo: "*Para resolver el cálculo* 1320:12*, dos chicos pensaron así:*

1320:12=1200:12+120:12 *1320:12=1320:10+1300:2*

¿Son correctas estas formas de resolver?[11]

Este tipo de actividades, donde se debe relacionar la división con las propiedades del sistema de numeración, son difíciles de comprender y utilizar por aquellas personas que solo aprendieron el algoritmo tradicional como una técnica que se debe aplicar, sin razonar sobre lo que se está haciendo.

Son algunas de las dificultades mencionadas las que les dan sentido al objeto de estudio del presente trabajo ya que resulta interesante ponerlas en discusión dentro de la formación de maestros. Para ello se propusieron situaciones que dan lugar a la doble conceptualización. Espósito (2022) sostiene que estas situaciones permiten que las y los estudiantes de la formación construyan conocimiento matemático, a la vez que elaboran los conocimientos didácticos para que, a futuro, puedan guiar la construcción de conocimientos de sus alumnas y alumnos. Según esta autora, la idea de doble conceptualización "*ubica la relación Matemática – Didáctica de la Matemática en una zona de integración. El trabajo didáctico enriquece el conocimiento matemático y, a su vez, el conocimiento matemático es un insumo para abordar preguntas didácticas*" (Espósito, 2022, pp.100-101).

En diálogo con estas ideas es que se seleccionaron situaciones problemáticas con el propósito de introducir la división a través de problemas que no incluyen el término "repartir". Para resolverlos, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos previos sobre las operaciones y experimentar el quehacer propio de la disciplina. Al respecto, Espósito (2020) cita a Graciela Zilberman (2018) quien sostiene que:

> Si la finalidad es promover, mejorar y fortalecer la producción matemática por parte de los niños esto exige un docente que asuma un papel productor de conocimiento sobre lo que acontece en sus prácticas, que analice las tareas que propone, que interprete las respuestas de los niños para intentar

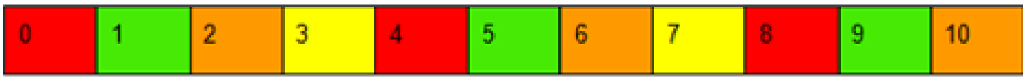
[11] Situación problemática extraída del Diseño Curricular para la Educación Primaria (2008). (p. 165)

interactuar sintonizando con ellas, que conciba recorridos de aprendizaje considerando las relaciones involucradas en los objetos de enseñanza y las aproximaciones que los alumnos van realizando. (Zilberman, 2018, citado por Espósito, 2020, p. 26)

A continuación se presentan los problemas propuestos en la secuencia didáctica:

Problema 1

La siguiente tira numerada está pintada de 4 colores, empezando con el color rojo y en cero. Los colores se repiten siempre en el mismo orden.



a) ¿Cuáles de los siguientes casilleros no están pintados de rojo?

400 418 675 128

b) ¿Es posible saber de qué color está pintado cada uno?

c) Encontrá un casillero entre 59 y 79 que esté pintado de rojo. ¿Cuántos es posible encontrar?

Problema 2

En una tira numerada de 6 colores diferentes que empieza en 0, el casillero 13 es negro. ¿Es cierto que en esa tira el casillero 55 también es negro? ¿Y el 63?

Problema 3

a) Pintá esta tira con 3 colores distintos y ordenados de manera que el número 34 sea verde.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

b) Pintá la tira con 4 colores distintos y ordenados de manera que el número 34 sea verde. [12]

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

El primer problema pretendió poner en juego los conocimientos previos sobre las operaciones en general y la división en particular, por ejemplo la aproximación mediante la multiplicación y/o sumas sucesivas, el conteo y las ideas sobre múltiplos y divisores. Se buscó que las y los estudiantes apelen a la relación que tienen los números que están en los casilleros del mismo color y la cantidad de colores distintos que se utilizan en la tira. Cabe recordar que la tira está compuesta por cuatro colores diferentes (rojo, verde, naranja y amarillo) que se repiten cada cuatro números. La serie se extiende del 0 al 10 y es responsabilidad de las y los alumnos continuar la relación que se establece en ella.

En el ítem (a), se propusieron los números 400, 418, 675 y 128; y se preguntó cuál o cuáles de ellos podrían ser ubicados en un casillero de color rojo. Se pretende reflexionar acerca de la característica que tienen en común los números que se ubican en el casillero de ese color y discutir acerca de aquellos números que no se ubican en un casillero rojo. La elección de los números propuestos aumenta la complejidad del problema dado que al ser números de tres cifras y terminar la tira en color naranja, obliga a emplear otros procedimientos para resolverlo. La diferencia entre los números representados en la tira y los que se deben determinar si están en un casillero rojo llevan a utilizar procedimientos ligados a la división y el análisis de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Sin embargo, el hecho de que la tira termine en color naranja puede dificultar la resolución, ya que para resolverlo deben darse cuenta de que el número 11 se encuentra en un casillero amarillo y no rojo.

Entre las estrategias que podrían aparecer está el concepto de múltiplos, la utilización del dibujo ya sea extendiendo la tira o partiéndola del 0 al 3, del 4 al 7 y así sucesivamente; la relación con la tabla del 4; el armado de un cuadro de doble entrada; la cuenta de dividir, entre otros.

[12] Las situaciones problemáticas fueron extraídas de INFoD (2018), Ateneo 1, encuentro n°1, “El caso de la tiras de colores”, p.4. Para leer el texto completo: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005967.pdf

Al procedimiento de extender la tira se lo llamará de ahora en adelante "representación gráfica". Este consiste en completar la tira con algunos números más para poder relacionar el color del casillero con el número que en él se ubica. Esta sugiere superponer la tira para su resolución.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

En el caso de que la tira terminara en amarillo y se visualizara en forma completa la progresión de números y su relación con el color de casillero, basta con colocar el 12 debajo del 0, el 13 debajo del 1, el 14 debajo del 2, y así sucesivamente. De esta manera, resulta más evidente que los múltiplos de 12 están debajo del 0, por lo que basta con encontrar el múltiplo más cercano a los números dados para comenzar a contar desde el casillero rojo hasta llegar al número buscado.

Otra posible estrategia de resolución ligada a la representación gráfica sería utilizar la tira cortada o separada por los colores tal como se muestra a continuación.

0	1	2	3

4	5	6	7

8	9	10	11

Así, la primera tira muestra la serie del 0 al 3, la segunda del 4 al 7 y la tercera del 8 al 11. De esta manera se hace explícito que en los casilleros de color rojo se encuentran los números: 0, 4, 8 y podrían inferir que continúan con 12, 16, 20, 24, etc., números que están en "la tabla del 4" o bien que al dividirlos por 4, el resto es 0.

Otro procedimiento posible es que adviertan que, como hay cuatro colores distintos, entre los números de los casilleros de cada color hay una diferencia de cuatro. A partir de ahí, pueden llegar a que 0+4 = 4, 4+4 = 8, 8+4 = 12 y así sucesivamente, están en casilleros rojos. Es decir que si al último número que se encuentra en un casillero rojo le sumo 4, obtengo el próximo número que está en un casillero de ese color. Sumar sucesivamente 4 es equivalente a multiplicar por 4 o bien buscar los múltiplos de 4. Encontrar esta regularidad permite determinar qué números se hallan en los casilleros de color rojo e inferir que para dar respuesta al color del casillero del número 400 basta con determinar que ese número es múltiplo de 4, 4x100, o bien que al dividirlo por 4 el resto de esa división es 0. También podrán encontrar los múltiplos más cercanos a los números dados probando con la calculadora, como ser 4x104 = 416 y 4x105 = 420. Como 418 está entre esos dos valores, no es rojo.

En el ítem (a) se avanza en determinar cuál o cuáles de los números 400, 418, 675 y 128 no están en un casillero rojo, en el ítem (b) se propone reflexionar acerca de si es posible, o no, saber de qué color está pintado el casillero que le corresponde a cada uno. Su objetivo está puesto en la búsqueda de las relaciones existentes entre los números que están en los casilleros del mismo color, es decir, los números de los casilleros rojos son múltiplos de 4 o bien que el resto de la división por 4 es 0; los números de los casilleros verdes, naranjas y amarillos no son múltiplos de 4 o bien que el resto de la división por 4 no es 0.

Una posible estrategia de resolución es utilizar que los múltiplos de 4 pertenecen a casilleros rojos, a partir de ahí buscan el múltiplo de 4 más cercano y cuentan. Así por ejemplo para saber de qué color es el casillero del número 418, buscan el múltiplo de 4 más próximo a él, en este caso el número 416 que se encuentra en un casillero de color rojo, y luego cuentan los casilleros hasta llegar al número 418. De manera análoga, podrían utilizar la misma estrategia para determinar el color del casillero del número 675 puesto que 4x168 = 672 con lo cual el casillero del 672 es rojo, el del 673 está en un casillero de color verde, el del 674 en un casillero de color naranja y por tanto, el del 675 en un casillero de color amarillo.

Otro procedimiento que puede surgir es que utilicen la división para hallar el múltiplo de 4 más cercano, que es el cociente de la división del número por 4, y de allí cuenten hasta llegar al número del que quieren saber el color del casillero. Por ejemplo, para saber el color del casillero 675 realizan la división por 4. Como el cociente es 168, ese es el múltiplo de 4 más cercano. Desde ahí cuentan hasta el 675 y les da que está en un casillero de color amarillo. Utilizando esta estrategia, puede suceder que las y los alumnos se den cuenta que el color del casillero donde se ubica el número depende del resto de la división por 4. De esta manera, en casillero rojo están los números con resto 0 en la división por 4, en color amarillo los que tienen resto 1, en color verde los que tienen resto 2 y en color naranja los que tienen resto 3.

Por último, el ítem (c), busca encontrar un número que se halle en un casillero de color rojo entre los números 59 y 79 y establecer si la respuesta brinda varias posibilidades. En caso de que haya más, establecer cuántas. En este ítem se pretende poner a prueba las estrategias desplegadas en los ítems anteriores y seguir reflexionando en las relaciones que pudieron establecer entre los números de los casilleros del mismo color y la cantidad de colores diferentes que se presentan en la tira. Una posible estrategia de resolución es utilizar la desarrollada en ítem (b). Es decir que pueden buscar el múltiplo de 4 más cercano a 59, 56, y desde ahí sumar de cuatro en cuatro. De esta manera en casillero rojo quedan los números 60, 64, 68, 72 y 76.

En el problema 2 se les propone una tira con 6 colores diferentes donde el casillero del número 13 es de color negro y se les pregunta si los números 55 y 63 también corresponden a casilleros de este color. El problema 3 involucra una tira del 0 al 10 que las y los estudiantes debieron pintar utilizando 3 colores distintos para el ítem (a) y 4 para el ítem (b) de manera tal que el número 34 quede en un casillero de color verde. El propósito de estas dos actividades es que formulen hipótesis acerca de las relaciones construidas en el primer problema y las prueben en la práctica, extendiendo la tira hasta el número 34 y pintándola para corroborar o refutar sus conjeturas. Además, la creación de tiras de tres o cuatro colores distintos y la determinación del lugar que ocupa el color elegido fomentan la reflexión acerca de los múltiplos de 4 en caso de utilizar cuatro colores distintos, múltiplos de 3 para tres colores diferentes, y así sucesivamente. En definitiva, se trata de un primer paso hacia la generalización.

Si bien al principio las situaciones problemáticas propuestas pueden ser resueltas gráficamente, se espera que posteriormente se avance hacia estrategias más complejas. Luego de la discusión de los tres problemas, se pretende llegar a la conclusión de que se pueden resolver mediante la división y el análisis del resto. Además, la ausencia de palabras que "guíen" la resolución convierte a estas situaciones en un desafío para las y los estudiantes de la formación docente, ya que deben establecer conexiones entre la multiplicación y la división, lo que fomenta la creación de nuevos recursos de cálculos (Itzcovich, 2008). También, al admitir la doble conceptualización, permiten reflexionar sobre los aspectos didácticos del objeto de estudio y analizar las condiciones del problema para que puedan ir apropiándose progresivamente de un quehacer docente similar al que se fue desarrollando en la clase (Espósito, 2022). Para ello, luego de resolver las actividades, se dio un espacio para discutir temas didácticos, como el significado de saber dividir, los diversos sentidos de la división, los tipos de problemas y las prácticas matemáticas que se pueden desarrollar en el aula de primaria, entre otros.

En este TFI sólo se analizará la implementación del problema 1 debido a la potencialidad de los intercambios que se dieron durante su abordaje.

7. <u>Análisis de las resoluciones del Problema 1</u>

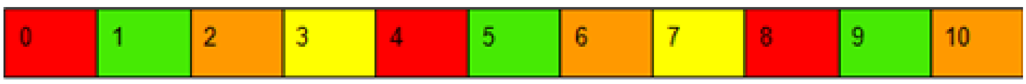
El dispositivo didáctico fue implementado durante tres clases de dos horas cada una, dentro del espacio curricular de Didáctica de la Matemática II. Para el análisis, se tomará en cuenta el problema 1, ya que se presentaron los intercambios más enriquecedores en torno a este.

Para estructurar el análisis, se decidió comenzar por las discusiones que tuvieron lugar en cada grupo durante la resolución del problema planteado. Luego, se examinan los registros de clase y las producciones escritas de las y los estudiantes. Por último, se consideran las conclusiones a las que llegaron.

La clase se dividió en dos grupos, uno cuatro integrantes y el otro de tres, se los llamará G1 y G2, y se dio inicio con la entrega de la consigna del problema 1 fotocopiada:

Problema 1

La siguiente tira numerada está pintada de 4 colores, empezando con el color rojo y en cero. Los colores se repiten siempre en el mismo orden.



a) ¿Cuáles de los siguientes casilleros no están pintados de rojo?

400 418 675 128

b) ¿Es posible saber de qué color está pintado cada uno?

c) Encontrá un casillero entre 59 y 79 que esté pintado de rojo. ¿Cuántos es posible encontrar?

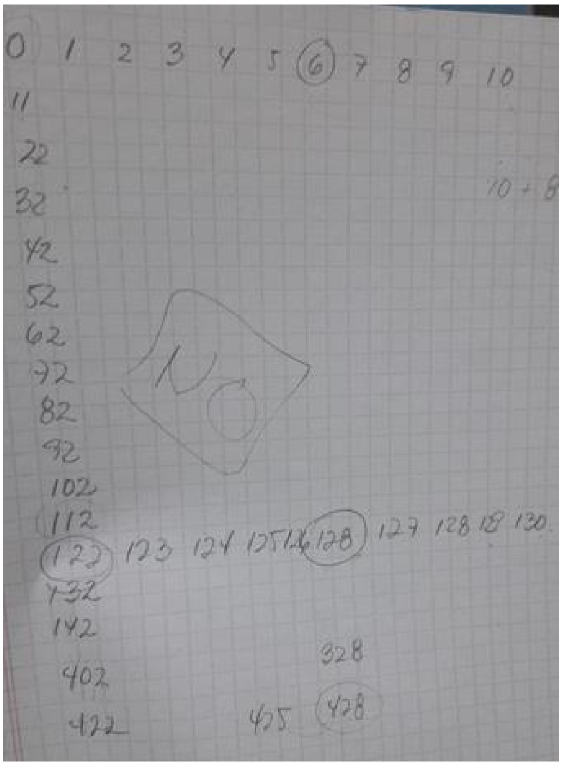
Entre todos se leyó la consigna y se aclararon las dudas del enunciado, enfatizando en que la secuencia de colores se repite en el mismo orden infinitamente. Después, cada grupo comenzó a resolver el problema.

El grupo G1 empleó diversas estrategias, como la representación gráfica mediante el uso de la tira y el conteo. Sin embargo, estos procedimientos los llevaron a cometer errores, ya que se basan demasiado en lo visual y no consideran la secuencia de colores. En cambio el grupo el G2 organizó la información de manera más explícita y despliega el armado de una tabla similar a la *"tabla pitagórica"* para dar cuenta de sus procedimientos.

A continuación se analizarán estas estrategias con un enfoque especial en las resoluciones del grupo G1, ya que los procedimientos que realizaron permiten observar las dificultades que pueden presentarse en el aula de primaria. Para ello, se partirá de la preponderancia que le otorga el grupo G1 a la representación de la tira en el problema y cómo esto genera obstáculos para su resolución. Posteriormente, se reflexionará sobre la importancia del intercambio colectivo y cómo las estrategias del grupo G2 pueden modificar o no las del grupo G1. También se analizarán las discusiones que se dieron al momento de decidir qué color de casillero le corresponde al número 675. Finalmente, se hará una breve alusión a las conclusiones a las que se llegaron.

7. 1 *Cuando lo visual genera un obstáculo*

El grupo G1 inicia la resolución del ítem (a) planteando el color del casillero que se encontrará en el número 675, recordemos que se pide hallar qué casilleros entre el 400, 418, 675 y 128 no están pintados de rojo. Del diálogo y la resolución se infiere que el grupo G1 se apoya en la tira del enunciado y en el orden de los números sin tomar como variable el color de los casilleros. Esto se puede observar en la producción escrita, donde suponen que el número 11 se encontrará en el casillero de color rojo ya que lo ubican debajo del 0, que está en un casillero de ese color. Es decir, omiten que el 11 corresponde a un casillero de color amarillo, dado que continúa al casillero de color naranja. A continuación se presenta el registro escrito y parte de la discusión que se dio al interior del grupo:

A_1: El 675 no está pintado de rojo porque no están el 0, el 4 y el 8 *A_2: El 400 es rojo. Yo voy a formar el número con esta fila. El 4 y el 0 están en rojo, entonces 400 es rojo* *A_1: También habría que ver si es 10, 10 y 10 hasta llegar al 400… Entonces 72, 82, 92, 102* *A_2: ¿Qué color sería el 102?* *A_1: Sería rojo* *A_2: Desde ahí podemos sacar el 128 que es el más próximo que tenemos* *A_1: Claro 102, 122, sería también 132 y 142, 122 quedaría rojo (cuenta hasta 128). No, 128 no es rojo* *A_2: No, por eso queda afuera* *A_1: 128 queda naranja*	

Al momento de decidir si los números 675 y 400 se ubican, o no, en un casillero de color rojo, toman en cuenta que en la tira del enunciado los números 0, 4 y 8 están en casilleros rojos. Se puede suponer que elaboran la hipótesis que, para que el número esté en un casillero de color rojo, debe contener en cualquier posición los dígitos 0, 4 u 8 ya que corresponden a casilleros de ese color. De esta manera sostienen que el número 675 no contiene a los números 0, 4 u 8, es decir, que en el 675 no aparece ni el 0, ni el 4, ni el 8 en ninguna posición y en consecuencia no está en un casillero de color rojo, "*El 675 no está pintado de rojo porque no están el 0, el 4 y el 8*".

Análogamente, concluyen que el 400 está en un casillero rojo dado que está formado por los números 4 y 0 y que ambos se encuentran en casilleros de color rojo puesto que contiene al 4 y al 0, "*El 400 es rojo. Yo voy a formar el número con esta fila. El 4 y el 0 están en rojo, entonces 400 es rojo*". Para validar estas conclusiones utilizaron la tira para contar y ubicaron en forma horizontal la serie de números del 0 al 10, sin considerar como variable los colores de los casilleros. Luego situaron en forma vertical una serie de números que inicia con el 11 debajo del 0, el 22 debajo del 11, el 32 debajo del 22 y así sucesivamente. De esta manera infieren que los números 11 y

22 corresponden a casilleros de color rojo. De igual manera los números 32, 42, 52, 62, 72, 82, donde hay una diferencia de 10 en cada uno de ellos, *"también habría que ver si es 10, 10 y 10 hasta llegar al 400… Entonces 72, 82, 92, 102".* Cuando uno de los integrantes del grupo pregunta de qué color queda el casillero del 102, su compañera afirma que es rojo y agrega *"102, 122, sería también 132 y 142, 122 quedaría rojo".*

A partir de estos fragmentos y observando la producción escrita, se puede inferir que construyeron ciertas hipótesis ligadas a la suma de 10 en 10 a partir del 22. Conclusiones que se sostienen del argumento que el número 22 está en un casillero de color rojo entonces si sumo 10, el número que obtengo, 22 + 10 = 32, también estará en un casillero de ese color. Así llegan al 122 argumentando que está en un casillero de color rojo y completan la tira con el número 123 (casillero color verde), 124 (casillero de color naranja), 125 (casillero color amarillo), 126 (casillero color rojo, 127 (casillero color verde) y 128 en el casillero de color naranja. Es así que arriban a la conclusión *"no, 128 no es rojo".*

Para analizar qué color de casillero tiene el número 400, retoman los saltos de 10 en 10 y lo llevan a saltos de 100 en 100, "*No, mira, acá tenemos 32, 42, 52,...En el caso de 102 sería 202, 302 y 402*". El siguiente fragmento de diálogo da cuenta de esos argumentos:

A_1: Es naranja el 402?

A_2: No, mira, acá tenemos 32, 42, 52,...En el caso de 102 sería 202, 302 y 402

A_1: ¿Todos esos son naranjas?

A_2: No, todos estos son rojos porque estoy buscando el que está más cerca del 400. Acá tenemos que 302 y 402 son rojos, sería 402 porque es el más cercano al 400. Entonces vamos para acá (señala la hoja) y tenemos dos menos, el 401 y 400

A_1: Y te queda naranja

De esta manera, con saltos de 10 en 10 y de 100 en 100, encuentran los números más cercanos a 400 y 418 y desde allí comienzan a contar para ver en qué color de casillero están. En el caso del 400, eligen el 402 como el más cercano. Como 402 está en un casillero de color rojo, cuentan dos hacia atrás y llegan a que el 400 está en un casillero de color naranja. Para analizar el color del casillero donde está el

418, seleccionan el número 422 como el número más cercano que está en un casillero de color rojo. A partir de ahí cuentan hacia atrás y llegan a que 418 también está en un casillero de ese color. Es necesario aclarar que la elección del 422 como el más cercano a 418 que está en un casillero de color rojo responde a que, según su estrategia, como 102 está en un casillero de color rojo si salto de 100 en 100, obtengo que 202, 302 y 402 que también están en un casillero de ese color. Además, si a partir del 402, salto de 10 en 10, los números obtenidos están en casilleros rojos, el 412, 422, etc.

Como se puede observar en los párrafos previos, las y los integrantes del grupo G1 utilizan estrategias que se basan en representaciones gráficas para resolver las situaciones propuestas. Es plausible pensar que la valoración que se le otorga a este tipo de resoluciones, como la tira de colores presentada en el enunciado, se debe a su capacidad para proporcionar un mayor control sobre la situación. Además, estos procedimientos de resolución podrían estar relacionados con las experiencias previas de las y los estudiantes con operaciones matemáticas similares. En este sentido Parra y Saiz (2007) afirman que las y los alumnos suelen tener este tipo de notaciones que coinciden ya sea con representaciones habituales, la experiencias previas que tuvieron con esas operaciones y con la resolución de problemas relativos a tales operaciones. Por otro lado, el grupo G1 sostiene sus argumentos en apoyos visuales, continuando la tira sin tener en cuenta la secuencia de colores, y el conteo ya que una vez que encontraron el número que se ubica en el casillero rojo más cercano, cuentan hasta el número que necesitan hallar el color de su casillero. Este tipo de procedimientos son esperables puesto que autores como Broitman e Itzcovich (2001) y Ponce (2011), sostienen que la representación gráfica y el conteo suelen ser los primeros procedimientos que se utilizan para resolver las situaciones problemáticas donde no se reconoce qué cálculo utilizar.

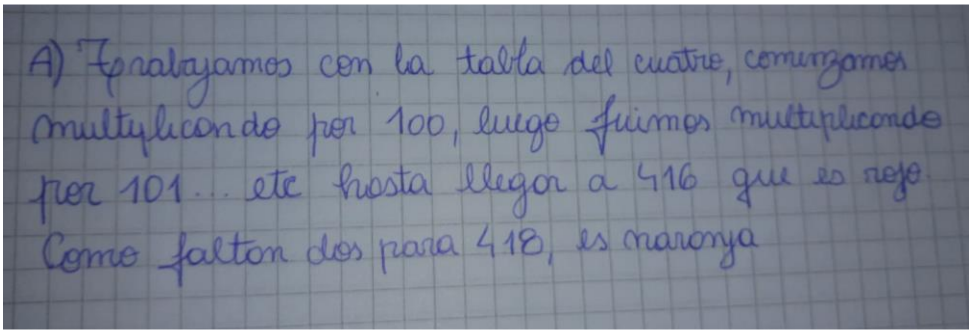
El grupo G2, por su parte, organiza la información proporcionada por la tira en un cuadro de cuatro columnas, correspondiente a la cantidad de colores que presenta la tira. La primera columna corresponde al casillero de color rojo, la segunda al casillero verde, la tercera al casillero naranja y la cuarta al casillero amarillo. En las filas se ubican los números que les corresponden a los distintos casilleros de colores. La primera de las filas distribuye los números del 4 al 7, en la segunda fila los números del 8 al 11 y así sucesivamente.

Esta nueva manera de representar la información del grupo G2 les resulta válido y eficaz para resolver el problema ya que rápidamente llegan a la conclusión que los números con igual color de casillero van de 4 en 4 y, sobre todo, que en el casillero de rojo están los números de la tabla del 4. Esto se puede inferir del siguiente fragmento del intercambio que se dio entre el grupo y el docente:

> *P: ¿Cómo lo están pensando?*
>
> *A_1: Yo lo pienso como la tabla pitagórica. Estuve buscando en la tabla del 4 porque el 4 y el 8 son rojos. Fui buscando cuatro por hasta hallar que 4x32 es 128. Entonces el 128 estaría pintado de rojo*
>
> *P: ¿Entonces vos decís que en rojo están los de la tabla de 4?*
>
> *A_2: Sí, estábamos pensando eso*

La manera de representar la información del problema le permitió al grupo G2 mejorar sus estrategias al descubrir que la diferencia entre los números de los casilleros del mismo color era de 4 unidades. Pudieron así desarrollar la hipótesis de que los números de los casilleros rojos estaban en la tabla del 4, a partir de sumar sucesivamente 4 desde 0 para obtener los números de los casilleros rojos. Al respecto Mónica Becerril y otros (2015) afirman que "*el conocimiento de los alumnos puede avanzar a partir de que establezcan correspondencias entre las distintas formas de representación que una situación admite*" (p. 20).

Del intercambio con el docente se desprende que el grupo G2 utilizó la idea de múltiplos para resolver la actividad ya que, para hallar de qué color es el casillero donde se encuentra el número 128, buscaron escribir ese número como 4 por otro número. De esa manera llegaron a que el 128 está en un casillero rojo porque es 4 x 32, *"fui buscando cuatro por hasta hallar que 4x32 es 128. Entonces el 128 estaría pintado de rojo".* Esto también se refleja en la producción escrita cuando quieren hallar el color de los casilleros que corresponden a los números 400 y 418, donde parten del trabajo con la tabla del cuatro. Así, inicialmente, multiplicaron a 4 por 100 con la intención de llegar a 418. De esta manera llegan a que 416 se ubica en un casillero de color rojo ya que surge de multiplicar a 4 por 104. A partir de ahí fueron probando hasta hallar que 4x104 es 416. Entonces afirman que el número 416 corresponde a un casillero de color rojo y *"como faltan dos para llegar a 418, es naranja".* Se cree que la elección del número 400 como punto de partida se debe a que es un cálculo común en multiplicaciones que involucran unidades seguidas de ceros, lo que demuestra la relación entre las operaciones matemáticas, el sistema de numeración y el cálculo mental (Parra y Saiz, 2007).


A) Trabajamos con la tabla del cuatro, comenzamos
multyplicando por 100, luego fuimos multiplicando
por 101... etc hasta llegar a 416 que es rojo
Como faltan dos para 418, es naranja

Al comparar los procedimientos utilizados por ambos grupos para resolver el ítem (a) del problema, se puede inferir que el grupo G2 pudo separarse de los colores presentados en la tira y enfocarse en las relaciones entre los números pintados del mismo color, mientras que el grupo G1 quedó atado a los colores y a la representación visual de la tira, en lugar de analizar las relaciones numéricas que se pueden establecer.

Se puede considerar que la decisión de terminar la tira presentada en el número diez y en un color diferente al amarillo, puede tener como objetivo aumentar la complejidad del problema, ya que si la tira terminara en amarillo, resolver el problema sería simplemente una cuestión de copiar y modificar la tira. Al respecto, Quaranta (2007) plantea que la complejidad de un problema depende, entre otras cuestiones, del conjunto numérico puesto en juego, el tamaño de los números y la presentación de la información. En este sentido, no es lo mismo presentar la información en un cuadro, en un texto, un gráfico, etc. Esto queda en evidencia en las resoluciones de ambos grupos pues al representar la información en un cuadro de cuatro columnas, que representan los cuatro colores, el grupo G2 logró resolver el problema de manera más rápida y casi sin errores. Por el contrario, el grupo G1 se centró en la representación que presenta la consigna, sin vincular el color con el número, lo que obstaculizó la resolución y que, en muchos casos, produjo errores.

7. 2 *Cuando las estrategias de uno modifican las del otro*

Durante el proceso de resolución del problema, es destacable una intervención del docente que consistió en pedir a los grupos que informaran sobre su progreso. Esta estrategia se originó a partir de la observación de que el grupo G1 estaba enfocado únicamente en los colores de la representación de la tira del problema, sin reflexionar sobre las posibles relaciones que podrían establecerse entre los números y los colores de los casilleros. Debido a esta limitación, el grupo no podía avanzar en su resolución.

Por otro lado, el grupo G2 logró avanzar en la resolución del problema al reorganizar la información presentada en la tira e identificar que los números de los casilleros rojos estaban en la tabla del cuatro, lo que implica que son múltiplos de 4. De esta manera llegan a la conclusión que si encontraban un número que multiplicado por cuatro diera por resultado, por ejemplo, 400 este último corresponde a un casillero rojo.

Desde la postura adoptada en este trabajo, las intervenciones docentes de este tipo resultan fundamentales ya que el intercambio con un otro que está más avanzado en la resolución del problema, puede generar progresos en aquellos estudiantes que se encuentran bloqueados. Al respecto Sadowsky (2005) sostiene que "*frente al bloqueo de un compañero, quien ya ha elaborado cierta aproximación a un problema puede ayudar a que se termine de comprender cuál es la tarea*" (p. 49).

A continuación el fragmento de diálogo presenta las discusiones que se dieron al interior del grupo G1 luego de escuchar la estrategia del grupo G2.

A_3: El 676 es rojo porque es múltiplo de 4

A_1: ¿Cómo es con los múltiplos?

A_2: Que es múltiplo de 4

A_1: ¿Y el 128? Entonces los que son múltiplos de 4 y de 8 porque los puedo dividir por 4 y lo puedo dividir por 8

A_3: Lo puedo dividir por 4 siguiendo la secuencia de cuatro colores

Después de que el grupo G2 explicara que estaban trabajando con los múltiplos de cuatro y justificará la validez de esta estrategia, el grupo G1 la adoptó como propia y comenzó a utilizar la división como herramienta para la resolución del problema. Como plantea Sadovsky (2005), se puede decir que, cuando se comparten estrategias de resolución de los problemas, los modos de abordar de uno pueden modificar las decisiones del otro. En este caso, las estrategias del grupo G2 hicieron modificar, parcialmente, las estrategias del grupo G1.

Se infiere que el grupo G1 pudo establecer algunas relaciones existentes entre la división y la multiplicación al sostener, por ejemplo, que *"Entonces los que son múltiplos de 4 y de 8 porque los puedo dividir por 4 y lo puedo dividir por 8"*. Es necesario destacar que no hubo consenso de todas las y los integrantes del G1, dado que, mientras unos sostenían que los números correspondientes a los casilleros rojos eran múltiplos de 4, en la resolución del ítem (c), donde se les pedía hallar cuántos números entre el 59 y 79 se encuentran en un casillero rojo, se puede inferir que los otros integrantes no acordaban con esa conclusión. A continuación se detalla un fragmento del intercambio oral que se dio con la docente cuando se analizaron los procedimientos de este ítem.

D: ¿Cuántos números encontraron en rojo?

A_1: Cinco, el 62, 66, 70, 74 y 78

D: ¿Cómo hicieron para darse cuenta?

A_2: Supusimos que el 60 es naranja porque el 6 y el 10 son naranjas. Entonces dos más es rojo, el 62. A partir de ahí voy sumando de a cuatro.

Se puede hipotetizar que no todo el grupo G1 estuvo de acuerdo con la conclusión que en rojo están los múltiplos de 4 y esto llevó a que algunos integrantes trasladen el error al ítem (C) ya que supusieron que si 6 y 10 están en un casillero naranja el 60 también, "*Supusimos que el 60 es naranja porque el 6 y el 10 son naranjas"*.

Cuando el grupo G1 se pone a discutir sobre el color del casillero que le corresponde al número 128, el docente interviene preguntando cuál es el problema que se les presenta con ese número. A continuación se detalla un fragmento del intercambio:

D: ¿Qué problema tienen con el 128?

A_1: Eso, en mi cabeza dije 4, 8, 12, 16, 20. Como va acá, el 12 debería ser rojo en teoría. Entonces lo llevé a una escala mayor y tendría que dar igual.

A_2: Claro, todos van de cuatro en cuatro. El 400 y 418 terminan en 0 y 8, se pueden dividir por cuatro pero este (marca el 675) no porque termina en 5

D: ¿Entonces la solución está en la última cifra?

A_2: Claro

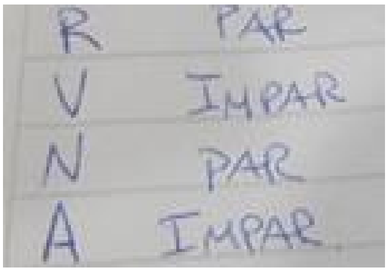
D: Entonces, según lo que estás diciendo, el 18 tiene que ser rojo, ¿es rojo?

A_2: Si nos ponemos a contar desde acá (señalando la tira del enunciado), es naranja

D: Ah, ¿entonces? ¿Basta con que termine en 0, 4 u 8 para que 4 lo divida?

Del diálogo se desprende que al decidir el color del casillero en el que se encuentra el número 128, utilizaron la división por 4 y comenzaron a pensar en qué condiciones debía cumplir el número para ser múltiplo de 4. De esta manera conjeturan que los números deben terminar en 0, 4 u 8, *"El 400 y 418 terminan en 0 y 8, se pueden dividir por cuatro pero este (marca el 675) no porque termina en 5"*.

Es interesante percibir cómo el grupo G1 a partir de las estrategias planteadas por el G2 pudo modificar su hipótesis inicial. Recordemos que sostenían que si un número contenía al 0, 4 u 8, independientemente de su posición, estaba en un casillero rojo. Ahora, ante la pregunta del docente, plantean que en los casilleros rojos están los múltiplos de 4 y para que 4 los divida, el número debe terminar en 0, 4 u 8, "*El 400 y 418 terminan en 0 y 8, se pueden dividir por cuatro pero este (marca el 675) no porque termina en 5"*. Es decir que comienzan a pensar en múltiplos y lo asocian a la división. En consecuencia, empiezan a reflexionar sobre qué condiciones tiene que tener un número para que sea divisible por 4. De esta manera construyen la hipótesis que si un número termina en 0, 4 u 8, se puede dividir por 4. Esto los lleva a establecer que los casilleros del 400 y 418 son rojos pero el 675, no, "*Claro, todos van de cuatro en cuatro. El 400 y 418 terminan en 0 y 8, se pueden dividir por cuatro pero este (marca el 675) no porque termina en 5"*. Con el propósito de que las y los integrantes del grupo G1 sigan reflexionando acerca de sus hipótesis, la intervención docente apunta a ponerlas a prueba. Es así, que recurrir a un ejemplo, "*Entonces, según lo que estás diciendo, el 18 tiene que ser rojo, ¿es rojo?",* puede servir para afirmar sus planteos o cuestionarlos. Cuando se dan cuenta de que el casillero número 18 no puede ser de color rojo, pese a que termina en 8 que es uno de los números con los que debe terminar un número para que 4 lo divida, empiezan a explorar otras estrategias. Al revisar sus conjeturas frente a un ejemplo que no sostiene sus argumentos, concluyen que si un número es impar, entonces no puede estar en el casillero de color rojo, mientras que si es par los números pueden estar en los casilleros rojos o naranja. De esta forma, se puede inferir implícitamente que todo múltiplo de 4 es también múltiplo de 2, aunque el grupo no llegó a estas conclusiones.



Las estrategias puestas en juego inicialmente por el grupo G1, donde se apoyaban en la representación de la tira presentada en la consigna y el uso del conteo, que en el intercambio con el grupo G2 avanzaron -aparentemente- hacia otras más elaboradas, fueron retomadas en los ítem siguientes lo que produjo errores.

A pesar que el grupo G1 pudo, momentáneamente, apropiarse del procedimiento del grupo G2 y comenzar a pensar en múltiplos de cuatro y su relación con la división para resolver el problema, al pasar al ítem (c), donde se les solicitaba el color de casillero que le corresponde al número 60, volvieron a sus ideas iniciales que se basaban en lo visual, sin poner en juego las relaciones numéricas. De esta manera supusieron que el número 60 corresponde a un casillero de color naranja ya que el casillero donde se ubican el 6 y el 10 es de ese color.

Por otro lado, resulta interesante observar que a pesar que el grupo G2 pudo elaborar un procedimiento válido para resolver el ítem (a), al momento de abordar el ítem (b), no lo pusieron en juego y apelaron a lo visual para resolverlo. De esta manera supusieron que el número 600 corresponde a un casillero de color naranja porque el 6 está en un casillero de ese color.

Estas estrategias nos llevan a reflexionar sobre la relevancia que tiene para las y los estudiantes las ideas iniciales y lo visual en la resolución de situaciones problemáticas ya que son tan fuertes que no las logran modificar rápidamente.

7. 3 *¿De qué color es el casillero del número 675?*

El ítem (a) del problema apela a indagar si los números 400, 418, 675 y 128 se encuentran en casilleros que no están pintados de rojo. Tanto el grupo G1 como el G2 llegan a la conclusión que los números 418 y 675 no se encuentran en un casillero de color rojo y frente al ítem (b) que pregunta por el color de casillero de esos números aparecen nuevas dificultades.

El grupo G1 afirma que el número 675 se encuentra en un casillero de color amarillo, mientras que el grupo G2 argumenta que el color del casillero es verde. Es en ese momento que se decide intervenir para que cada grupo explique cómo llegaron a esas conclusiones.

A continuación se detalla un fragmento del intercambio al interior del grupo G1:

A_1: Si acá hay 100 (señala la hoja), entonces 600 es rojo también

A_2: 800 es rojo también o 700. Los de cien son rojos

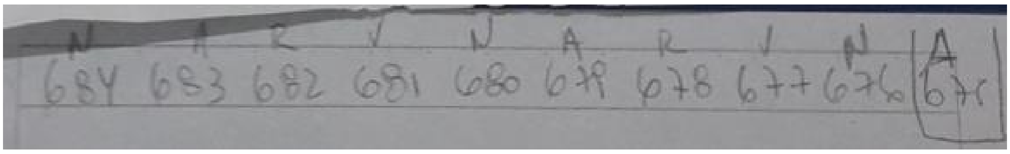
A_1:Ahora hay que contar de 600 hasta 675

A_2: Pero nos conviene 700 que está más cerca

A_1: Sí, para atrás

A_2: Amarillo sería

El grupo G1 parte del número 600 que está en un casillero rojo y desde ahí comienzan a contar hasta 675, apoyados en la representación de la tira. Después se dan cuenta que les conviene contar descendiendo desde el número 700 que también está en un casillero rojo y es más económico por estar más cerca del 675.



De esa manera concluyen que el casillero donde se ubica el 675 es de color amarillo. Se puede suponer que el grupo G1 logró apropiarse de la estrategia utilizada por el grupo G2 para el ítem (a). Es decir que comenzaron a poner en juego la relación entre los múltiplos de 4 y el color del casillero y, además, elaboraron la hipótesis "*Los de cien son rojos".*

Por su parte el grupo G2 retoma la estrategia utilizada para el número 400 y la trasladan para dar respuesta al número 675 concluyendo que se encuentra en un casillero de color verde. Dado que el grupo G1 plantea argumentos para justificar que el 675 se encuentra en un casillero de color amarillo y el grupo G2 en un casillero de color verde, frente a estas respuestas era necesario que ambos pudieran explicitar sus procedimientos para interpretar esas conclusiones. A medida que lo explican oralmente, la clase se da cuenta que el problema está en el número 600 puesto que para el grupo G1 el casillero es rojo mientras que para el G2, naranja. A continuación se muestra un fragmento de la discusión oral que se dio en la clase, siendo los alumnos 1 y 2 (A_1 y A_2) del grupo G2 y los alumnos 3 y 4 (A_3 y A_4) del grupo G1:

A_1: Nosotros hicimos el mismo mecanismo que con 400 pero arrancamos desde 6 e hicimos 6x101, 6x102…y 6x112 nos daban 672. Desde ahí cuento y (contando sobre la hoja)...Dije cualquier cosa, queda amarillo

D: ¿Por qué por 6?

A_1: Porque era 600 y lo estábamos haciendo como una tabla

A_2: No profe, lo hicimos desde el 6 para arrancar desde 600 y en el papelito el 6 es naranja

A_3: ¡Pero son cuatro números, no seis!

D: Entonces, ¿de qué color es?

A_2: ¡Naranja!

A_4: Rojo porque todos los que terminan en 00 son rojos

Aunque el grupo G2 organizó la información del enunciado en una tabla sin errores aparentes en un principio, es posible suponer que al buscar el color del casillero del número 675, al igual que ocurrió con el grupo G1, la forma en que se presentó la información en el enunciado los llevó a cometer errores. Esto puede deberse a que se apoyaron en el hecho de que el número 6 está en un casillero naranja, perdiendo de vista que la secuencia es de cuatro colores y que en consecuencia son múltiplos de 4 y no de 6, lo que no pasó desapercibido por uno de los integrantes del otro grupo, "*¡Pero son cuatro números, no seis!*". Es posible afirmar que, una vez más, la limitación a considerar únicamente los colores sin establecer una relación con los números implicados, se convirtió en un obstáculo. En este caso, el docente decide plantear nuevamente la pregunta sobre el color del casillero del número 600, con el fin de que las y los estudiantes reflexionen sobre lo realizado. Algunos siguen sosteniendo que el casillero es de color naranja, mientras que otros indican que es rojo debido a que los números que terminan en 00 suelen serlo. Cuando el docente les solicita que justifiquen su afirmación, un estudiante explica que al dividir 400 entre 4, se obtiene 100, lo que significa que 400 es rojo. Luego, mediante el cálculo, generalizan esta idea para 100, 200, 300, etc.; y plantean la hipótesis de que todos los números que terminan en 00 corresponden a casilleros rojos, y como 600 también termina en 00, entonces su casillero es de color rojo.

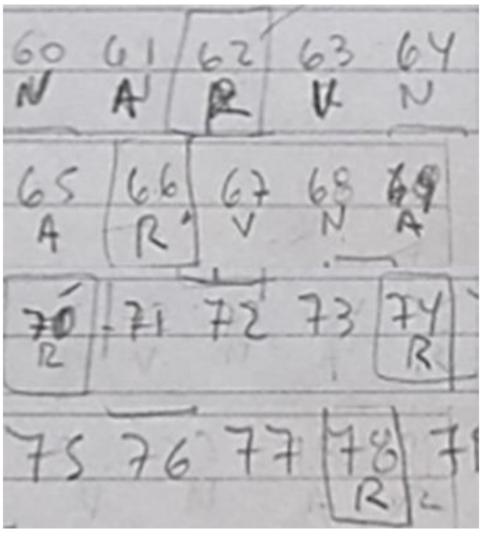
Después de la discusión, todos llegan a un acuerdo en que el casillero que corresponde al número 600 es de color rojo y, por lo tanto, el casillero que le corresponde al número 675 es amarillo. El docente les plantea entonces la pregunta de cómo podrían determinar el color del casillero correspondiente al número 675 utilizando la estrategia del grupo G2. Después de un tiempo concluyen que el múltiplo de 4 más cercano a 675 es 672. Dado que el casillero correspondiente al número 672 es rojo, entonces el casillero del 673 es verde, el del 674 es naranja y el del 675 es amarillo.

7. 4 No todo es lo que parece

Luego de discutir y reflexionar sobre los ítems (a) y (b) de la situación presentada, se infería que los grupos no iban a tener dificultades para resolver el ítem (c). Recordemos que en este ítem se les solicita hallar un número entre el 59 y 79 que esté en un casillero de color rojo y decidir acerca de cuántos casilleros de ese color hay. Es interesante analizar las estrategias empleadas por ambos grupos y que pese a llegar a encontrar en forma correcta que hay 5 números en los casilleros de color rojo dentro de la serie del 59 al 79, en ambos procedimientos se observan errores.

El grupo G1 da inicio a sus argumentos a partir del número 60 que se halla en la serie, así una vez más, utilizan la estrategia del conteo para sostener sus hipótesis. El diálogo permite inferir ese procedimiento ya que en la producción escrita se refleja la escritura de los números (desde el 60 hasta el 79) acompañado del color del casillero que le corresponde.

Cuando se les solicita al grupo G1 que expliquen cómo lo resolvieron, se da lugar al siguiente diálogo:

D: ¿Cuántos números encontraron en rojo? *A_1: Cinco, el 62, 66, 70, 74 y 78* *D: ¿Cómo hicieron para darse cuenta?* *A_2: Supusimos que el 60 es naranja porque el 6 y el 10 son naranjas. Entonces dos más es rojo, el 62. A partir de ahí voy sumando de a cuatro.* *D: ¿Están seguros que el 60 es naranja?* *A_1: No, cometimos el mismo error*	

Partieron de suponer que dado que los números 6 y 10 están en casilleros de color naranja, información que obtienen de la tira que presenta el problema, entonces el número 60 también estará en un casillero de color naranja, "*Supusimos que el 60 es naranja porque el 6 y el 10 son naranjas. Entonces dos más es rojo, el 62. A partir de ahí voy sumando de a cuatro".* Por un lado, se siguen sosteniendo desde la representación gráfica y por el otro, de las conclusiones iniciales a las que llegaron durante el desarrollo del ítem (a), donde planteaban que en los casilleros de color rojo estaban todos los números que se forman con las cifras 0, 4 y 8.

El grupo G2 determina que los números 60, 64, 68, 72 y 76 corresponden a casilleros rojos. Aunque la respuesta es correcta, la obtienen a partir de un error similar a los que se discutieron en los ítems anteriores, ya que suponen que los casilleros correspondientes a 40, 50 y 60 son de color rojo. En ese momento, las intervenciones del docente pretenden cuestionar esa idea. Finalmente, cuando cuentan hasta el número 60 en la tira del enunciado, se dan cuenta de que el número 50 no se encuentra en un casillero rojo. A continuación se muestra un fragmento del intercambio oral del grupo G2 con el docente.

D: ¿Qué les dio a ustedes?

A_1: Nosotras hicimos 60, 64, 68, 72 y 76

D: ¿Cómo se dieron cuenta de que eran esos números?

A_1: 40 es rojo entonces fuimos de diez en diez. 50 y 60 son rojos

A_2: Entonces 60, 64, 68, 72 y 76 son rojos porque fuimos contando de cuatro en cuatro

D: ¿El 40, 50 y 60 son rojos?

A_3: No (cuenta desde 40 sobre la hoja). Me da 52 rojo, el 50 no

D: Ah porque me habían dicho que el 50 era rojo

A_3: No, el 40 y el 60 son rojos porque son múltiplos de 4

Es importante destacar la importancia de analizar los procedimientos utilizados al momento de resolver una situación problemática, más allá de los resultados. Esto se debe a que muchas veces se puede llegar a soluciones correctas mediante razonamientos erróneos, o viceversa. Etchemendy, Sadovsky y Tarasow (2011) agregan que:

> Un procedimiento puesto en juego por los alumnos -correcto o no- es la expresión de un conjunto de relaciones que han establecido. En este sentido, el trabajo sobre los procedimientos utilizados para resolver un problema, es siempre una oportunidad para hacer observables esas relaciones. (p. 1)

Asimismo, comunicar los procedimientos utilizados en la resolución de un problema permite repensar y analizar los errores que pudieron aparecer, dando lugar a avances cognoscitivos de las y los estudiantes. El poder explicar y validar lo realizado es de suma importancia para la construcción del conocimiento matemático en general, y la formación de maestros en particular, porque favorece la formación de un sujeto más autónomo (Becerril y otros, 2015).

7. 5 Conclusiones a las que se arribaron

Después de la discusión colectiva, se llegó a la conclusión de que los múltiplos de 4 se corresponden con los casilleros rojos. De esta manera para determinar si un número está en un casillero rojo, basta con comprobar si es divisible por 4. Si se desea conocer el color del casillero de un número que no es múltiplo de 4, se puede buscar el múltiplo de 4 más cercano y calcular cuánto falta para llegar a él.

Durante el intercambio con el docente, las y los estudiantes concluyeron que los múltiplos de 4 más uno se corresponden con los casilleros verdes, los múltiplos de 4 más dos con los casilleros naranjas y los múltiplos de 4 más tres con los casilleros amarillos. De esta manera se comenzó a reflexionar acerca de la relación existente entre esta estrategia y el resto de la división por 4 y llegaron a que si al dividir el número por 4 da resto 0, el casillero es de color rojo; si el resto es 1, es verde; si es 2, es naranja y si es 3, amarillo.

Cabe señalar la importancia de las intervenciones docentes a lo largo de las clases ya que estas no solo ayudaron a resolver los problemas propuestos sino que también tuvieron un rol fundamental en la construcción de las conclusiones. Estas ideas se toman de Parra y Saiz (2007), quienes sostienen que un de las principales funciones del docente es proporcionarle a las y los alumnos un apoyo significativo, mediante la formulación de preguntas y reflexiones que les permitan analizar los conceptos, "*debe estar centrada en brindar a los alumnos apoyo (con buenas preguntas y reflexiones) para analizar*" (p.197). Las intervenciones que se realizaron tanto a lo largo de las clases como en la puesta en común, tuvieron como objetivo recordar la consigna, hacer avanzar a las y los alumnos que por alguna razón no podían hacerlo, reflexionar sobre las estrategias que se iban construyendo y discutir "*algunas dimensiones que les pudieran servir para pensar las prácticas docentes en las escuelas*" (Espósito, 2020, p. 40)

Se espera que, a partir de lo trabajado y la lectura de la bibliografía propuesta en el espacio curricular, las y los estudiantes durante su formación como docentes comiencen a tomar conciencia sobre la importancia de abordar los distintos sentidos de una operación ya que "*distintas opciones promueven diversas relaciones de los niños con el conocimiento y condicionan sus aprendizajes*" (Becerril y otros, 2015, p. 14), entre otros.

8. <u>A modo de cierre</u>

La intención de este trabajo no fue analizar una clase del nivel superior de manera exhaustiva, sino que se buscó reflexionar sobre lo que sucede en el aula de la formación docente cuando se pone en juego la resolución de situaciones problemáticas desde ciertos marcos teóricos a partir de un contenido matemático particular. Esta mirada, comparte con Espósito (2020) la necesidad de "*analizar las relaciones didácticas y matemáticas que se ponen en tensión en el proceso de formación de maestros*" (p. 43). Es decir que:

> Tomar decisiones de lo que se hace en una clase, cuáles son las posibles intervenciones docentes que permitirán avanzar o volver a visitar lo discutido, los tipos de problemas que se analizan y resuelven, la reflexión sobre los debates colectivos, entre otros, serán algunos elementos para que los estudiantes puedan ir construyendo sus propias prácticas docentes. (Espósito, 2020, pp. 43-44)

Para ello se presentaron situaciones problemáticas que requieren del trabajo de la doble conceptualización y que admiten a la división como estrategia de resolución. En muchos casos, esta experiencia difiere significativamente de la que las y los estudiantes han tenido en su trayectoria escolar anterior ya que estas situaciones no incluyen palabras clave como "partir" o "repartir", que históricamente han sido fundamentales en la enseñanza tradicional de las operaciones. Con la intención de explorar otros significados de la división que no se hacen tan presentes en la formación docente inicial. Debido a que los problemas presentados no muestran a priori el cálculo que se puede utilizar para resolverlo, hace aparecer la necesidad de elaborar estrategias de resolución e interactuar con la clase para repensarlas y validarlas o modificarlas. Es justamente la experiencia de producir conocimientos matemáticos en determinados dominios lo que enriquece su conceptualización (Novembre, 2013).

El dispositivo didáctico propuesto para este trabajo y el análisis de su implementación, lleva a reflexionar acerca del trabajo matemático que se desarrolla dentro de la formación y sobre qué tipo de prácticas son las que necesitan las y los estudiantes para desempeñarse como docentes del Nivel Primario, en palabras de Espósito (2020), me "*permitió advertir la complejidad que conlleva la profundización y recuperación, de algunos conocimientos matemáticos que los futuros maestros necesitan relacionar"* (p. 45). Esto quedó en evidencias durante la resolución del problema 1 ya que si bien las y los alumnos tenían conocimientos sobre las operaciones, poder relacionar la situación problemática con la división no fue evidente. En este sentido, considero necesario seguir abordando situaciones problemáticas que admiten la doble conceptualización, debido a su potencialidad al momento de recuperar y ampliar los conocimientos matemáticos de las y los alumnos, a la vez que ayudan a pensar la enseñanza de esos contenidos en el aula de primaria. Esto se va a considerar para los próximos años y se abordará esta problemática desde los espacios curriculares que me competen.

En resumen, es importante continuar reflexionando sobre cómo apoyar la construcción de un rol docente a través de la formación inicial, desafiando las prácticas escolares y los contenidos disciplinares establecidos. Esto requiere una integración efectiva entre la enseñanza de las matemáticas y la formación docente, mediante la creación de nuevos vínculos entre los conocimientos matemáticos y didácticos.

9. Bibliografía

Agrasar, M. y Chemello, G. (2008). Los conocimientos matemáticos en la formación de maestras y maestros ¿Qué y cómo aprenden los que van a enseñar? En *Revista 12ntes.* Enseñar Matemática N°3.

Alliaud, A. y Vezub, L. (2014). La formación docente inicial y continua de los docentes en los países del MERCOSUR. Problemas comunes, estructuras y desarrollos diversos. En *Cuadernos de investigación Educativa, vol. 5.* Uruguay: Universidad ORT.

Bednarz, N. (2000). *Formación continua de los docentes de matemática: una necesaria consideración del contexto.* Universidad de Quebec en Montreal (Mimeo).

Becerril, M. y otros (2015). *Analizar clases de matemática. Una herramienta de estudio para la formación docente*. Colección Desarrollo Profesional Docente. INFD.

Broitman, C.; Itzcovich, H.; Parra, C y Sadovsky, P. (1997). *Matemática: actualización curricular.* Documento de trabajo n°4. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación.

Broitman, C. e Itzcovich, H. (2001). *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB.* Documento n°2. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación.

Broitman, C. (2010). *Las operaciones en el primer ciclo: Aportes para el trabajo en el aula.* Buenos Aires: Novedades educativas.

Broitman, C. (2014). *Estrategias de cálculos con números naturales: segundo ciclo.* Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Santillana.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Didáctica de Matemáticas: Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Charlot, B. (1991). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas [trad.] En Bkouche, R.; Charlot, B.; Rouche, N.: *Faire des mathematiques: le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin. (Traducción mimeografiada).

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Didáctica de Matemáticas: Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Chevallard, Y; Bosch, M; Gascón, J (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Barcelona: Editorial Horsori.

Escobar, M. y Salgado, M. (2007). *División en 5° y 6° año de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.* Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación.

Espósito, S. (2020). *Formación en didáctica de las matemáticas para maestros: Documentación de una experiencia.* Recuperado en https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/tesis/te.2011/te.2011.pdf

Espósito, S. (2022). Formación en didáctica de las matemáticas para maestros. La doble conceptualización como instancia formativa. En *Nuevas voces para (re) pensar las matemáticas.* Buenos Aires: 12ntes.

Etchemendy, M., Sadovsky, P. y Tarasow, P. (2011). Las interacciones en el aula a propósito de la relación entre diferentes sentidos de una operación aritmética. Nova Escola. Edición especial Novos Pensadores. San Pablo: Editorial Abril.

Grimaldi, V. (2010). Los algoritmos de cálculo en la historia de la Matemática y en la escuela. Papel y tinta, 12ntes, n°33, 11-15.

Itzcovich, H. (2008). *Matemática escolar: las prácticas de enseñanza en el aula.* Capítulo 4 (pp. 89-130). Buenos Aires: Aique.

Lerner, D; Stella, P. y Torres, M. (2009). *La formación docente en lectura y escritura.* Buenos Aires: Paidós.

Novembre, A. (2013). Aprendizajes matemáticos y didácticos de los docentes en instancias de capacitación. En Broitman, C. (comp.) *Matemática en la escuela primaria II.* Buenos Aires: Paidós.

Parra, C y Saiz, I (2007). *Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio.* Capítulos 4 y 5 (pp. 137-201). Rosario: Homo Sapiens.

Ponce, H. (2011). *Problemas multiplicativos.* Buenos Aires: Santillana.

Quaranta, M. y Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB.* Buenos Aires: Paidós.

Quaranta, M.; Tarasow, P. y Wolman, S. (2003). Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avance de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas. En Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB.* Buenos Aires: Paidós.

Quaranta, M. (2007). Gérard Vergnaud: Sus aportes a la Didáctica de la Matemática y a las prácticas de enseñanza. En Broitman, C. (comp.). *Enseñar matemática Nivel inicial y primario*. Buenos Aires: 12(ntes).

Sadovsky, P. (2005). La teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar en la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P.: *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. y Sessa, C. (2007). *La conformación de una comunidad matemática en un proceso de formación de maestros: un ejemplo privilegiado para conocer complejidades acerca de la clase de matemática.* Ficha mimeografiada. CePa.

Sadovsky, P., Arias, D., Becerril, M., Etchemendy, M., Giuliani, D., Parra, C. y Zilberman, G. (2010). *La enseñanza de la matemática en la formación docente* *para la escuela primaria.* Ministerio de Educación de la Nación. Buenos Aires, Argentina.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 10 (2-3), 133-170. (Traducción mimeografiada).

Vergnaud, G. (1991). Los problemas de tipo multiplicativo. Capítulo 11. En: *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela* (pp.197-224). México: Trillas.

Wolman, S. (2010). La escritura en los procedimientos de resolución de problemas de suma y resta: un proceso constructivo. En *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, Año XVII, (28), 155-174. Facultad de Filosofía y Letras. Buenos Aires.

Normativas curriculares

DGCyE. (2008). *Diseño Curricular para la Educación Primaria.* Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.

DGCyE. (2008). *Diseño Curricular para la Educación Superior. Niveles Inicial y Primario.* Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.

DGCyE. (2018). *Diseño Curricular para la Educación Primaria*. Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.