

# METODOLOGÍA DEL USO DE PLANILLAS DE CÁLCULO COMO HERRAMIENTA PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES EN PROBLEMAS TÉRMICOS

V. Passamai<sup>†</sup>  
INENCO – CIUNSA\* - CONICET  
Facultad de Ciencias Exactas  
Av. Bolivia 5150 – 4400 Salta. R. Argentina  
Tel.: 0054-87-255389 – Fax: 0054-87-255489 – Email: <passamai@unsa.edu.ar>

## RESUMEN

Se presenta una descripción detallada para mostrar la metodología que es posible emplear para ampliar el uso de las planillas de cálculo electrónico, del tipo Excel de Microsoft o Quattro Pro de Borland, más allá de las aplicaciones típicas de análisis de datos o su graficación, para abarcar la simulación del comportamiento térmico de sistemas solares descritos por ecuaciones diferenciales. Se aplica al ejemplo de un horno solar, descrito en otro trabajo (Passamai, 1999), para ilustrar cómo se resuelve una ecuación diferencial, por el método de Runge-Kutta de Cuarto Orden, que describe el comportamiento dinámico de la evolución de la temperatura de una olla de agua colocada dentro del horno solar, sometido a la radiación constante de una lámpara (Passamai, 1998).

## INTRODUCCIÓN

En dos trabajos recientes (Passamai, 1998 y 1999), se presentaron los resultados de la simulación por computadora de experiencias de calentamiento de un horno solar, *vacío o con una olla de agua*, por acción de la radiación constante proveniente de una lámpara, así su comparación con los datos provenientes de dichas experiencias. Por razones de espacio, no se dieron detalles de la metodología desarrollada para resolver numéricamente una ecuación diferencial del tipo  $T_a(t) = f(t, T_a)$ , para la que sí se mencionó la aplicación del método de Runge-Kutta de Cuarto Orden, que conduce comúnmente a imaginar el uso de algunos de los programas de cálculo como FORTRAN, BASIC (o los correspondientes *visuales* de la era Windows<sup>®</sup>) u otros más sofisticados como Mathematica<sup>®</sup>.

Sin embargo, cuando es necesario emplear algún método numérico que implique el uso de fórmulas recursivas, puede surgir la idea de asociar esta posibilidad con la conocida orden de *copiar y pegar* de las planillas de cálculo, aplicada a una celda o conjunto de celdas (*bloque*) en las que se utilizan más de una vez determinados rótulos, números o fórmulas (Cobb, 1992; Cobb et al., 1994); con el consiguiente desarrollo *inmediato* de la solución buscada.

Para ello basta escribir la fórmula de recurrencia *una sola vez*, copiar y pegar la misma tantas veces como sea necesario su recálculo en función del tiempo (o el espacio) y, simultáneamente, se tendrá el listado solución del problema y la serie de datos que es normalmente necesario visualizar gráficamente con las herramientas de graficación en dos ejes cartesianos ortogonales. Esto evita tener que realizar *un programa de cálculo* o, menos aún, algún *diagrama de flujo* para resolver el problema.

## METODOLOGÍA DE TRABAJO CON LA PLANILLA DE CÁLCULO

Habiéndose efectuando una presentación esquemática que permita visualizar los flujos de calor que intervienen en el fenómeno térmico, planteadas las ecuaciones involucradas en la dinámica térmica y resueltas las mismas en todo lo que se refiere a la aplicación de hipótesis simplificadoras y manipuleo de tipo algebraico, cabe arribar a una (o más) ecuaciones diferenciales de las que, no pudiéndose resolver analíticamente, resulta conveniente recurrir a algún método numérico, del tipo Runge-Kutta (Sadosky, 1971) o similar.

Para el caso específico que se pretende mostrar (Passamai, 1999), es conveniente realizar los siguientes pasos:

1°) Colocar *un nombre* que identifique al archivo donde se está trabajando.

Aunque esto resulte obvio, no siempre se efectúa esta operación y ello puede ocasionar problemas, especialmente cuando es necesario recordar lo que se hizo en algún futuro no tan lejano. Para el ejemplo, se eligió “RKAG1” (con la extensión que corresponda, .xls, .wq1, etc.). No es muy útil elegir el código comúnmente utilizado del tipo “DDMMAA” (día, mes y año) salvo que se trabaje muy ordenadamente y se cuente con un libro diario donde se anote las cosas que se realizan todos los días, aclarando de qué se trata –por ejemplo– en el archivo “230699”. En cambio, es fácil recordar que “RKAG1” puede significar “método de Runge-Kutta aplicado al calentamiento de agua, experiencia 1”.

2°) Redactar brevemente algún comentario que aclare para qué sirve el archivo.

<sup>†</sup> Investigador Adjunto del CONICET

\* Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta, organismo financiador.

En el ejemplo descrito se puso: “RK4ag1: Resolución del problema de simulación de “agua1” por RK4”, donde “agua1” es otro archivo donde se encuentran los *datos* tomados de la experiencia térmica.

3°) Definir los parámetros involucrados.

Eligiendo de manera cuidadosa el lugar disponible para escribir en la hoja de cálculo, se establecen los distintos parámetros o constantes que serán usados para calcular, *se les otorga adecuados nombres* abreviados (o extensos, según el gusto del usuario) y se *asignan* dichos nombres a los bloques o celdas donde se escribieron los valores numéricos. Esto, normalmente, se hace con la celda donde está realizado el cálculo que *encabeza* una determinada columna, además de los parámetros.

Para el ejemplo concreto que se está tratando:

Definiciones de parámetros:

	A	B	C	D	E	F	G
3	Up=	U	12.7	mu	1E-06	pa1	55.49138
4	h1=	ha	5	cou	2898.4	pa2	72.9875
5	hr=	hr	5	cod	4.3694	pa3	128.4789
6				cot	7.8479		
7				coc	6.7496		
8				ex	-0.00137		
9				te1	89.672		
10				te2	74.534		
11				ti1	49.996		
12				ti2	34.858		

Tabla 1: Ubicación en la planilla de cálculo de los distintos parámetros y fórmulas que serán necesarios en el cálculo.

Se observa en la Tabla 1, columna A, que se escribió “Up=, h1=, hr=”, en clara alusión a los parámetros  $U_p$ ,  $h_1$  y  $h_r$  que son los coeficientes de transferencia de calor involucrados en las ecuaciones (3') y (4') del trabajo de Passamai, 1999. Como no es posible usar “h1” por indicar esta notación una dirección absoluta de celda (la “h1”, justamente), se escribe a continuación ha (el ejemplo estaba desarrollado en Qpro) y luego el número 5. Se eligió escribir “U” en lugar de “Up” para simplificar. No se escribió “h” en lugar de “ha” pues “h” está reservado (a gusto del usuario) para el paso de integración, “h”.

En la columna D se escriben otros nombres, con sus valores en la columna E. El valor 1E-06 (escrito “10^-6” en la celda E3) se denomina “mu” en alusión a “un micrón”. Luego los coeficientes “cou”, “cod”, “cot” y “coc” fueron denominados así para recordar que son cuatro coeficientes ( $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , y  $c_4$ ) y, al igual que con h1, c1, c2, etc. son direcciones absolutas y pueden confundirse. El parámetro “ex” es un exponente, mientras que te1 y te2 son los coeficientes de la expresión para la Temperatura de placa (calculada con anterioridad en el mencionado trabajo). Por su parte, ti1 y ti2, son los coeficientes de la fórmula que da la temperatura del interior del policarbonato transparente que se usó como cubierta de la cocina solar.

Obsérvese que se han alineado a derecha los nombres cuya asignación numérica está escrita inmediatamente a la derecha de la notación, alineada a izquierda por defecto. Esto facilita la lectura de los datos, por parte del que realiza el cálculo, con el objeto de evitar la comisión de errores.

Los parámetros pa1, pa2 y pa3 son definiciones que involucran a los otros parámetros. Si bien se han escrito valores numéricos en la ilustración dada en la Tabla 1 (por ser exactamente esos los que se ven en la planilla electrónica), si se posiciona el cursor en las casillas G3, G4 y G5 se observará, en la *línea de edición* (Cobb, 1992), las *definiciones o fórmulas* que se encuentran usadas para definirlos:

pa1: “+COD\*U” (o sea el valor del “coeficiente dos” por el “U”,  $c_2 U_p$ , según puede comprobarse numéricamente)

pa2: “+COT\*HA+COC\*HR” ( $c_3 h_1 + c_4 h_r$ )

pa3: “+PA1+PA2” ( $c_2 U_p + c_3 h_1 + c_4 h_r$ )

Cabe una aclaración, que sirve para terminar de establecer la secuencia de cálculo: en una hoja aparte se pudo establecer de manera manuscrita la necesidad de los datos y parámetros aludidos anteriormente. Esto, si bien no es un “diagrama de flujo” estrictamente, viene a ordenar secuencialmente –como lo hacen aquéllos– lo que es necesario hacer. Para el ejemplo, dichos *datos* (iniciales) fueron:

$$U_p = 10 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

$$h_1 = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

$$h_r = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

$$\mu = 10^{-6}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2898.4 \\
c_2 &= 4.3694 \\
c_3 &= 7.8479 \\
c_4 &= 6.7496 \\
p_1 &= c_2 U_p \\
p_2 &= c_3 h_1 + c_4 h_r \\
p_3 &= p_1 + c_3 h_1 + c_4 h_r \\
ex &= -1.3712 \times 10^{-3} \\
t_1 &= 89.672 \\
t_2 &= 74.534 \\
t_{i1} &= 49.996 \\
t_{i2} &= 34.858 \\
T_1(t) &= t_1 - t_2 e^{ex t} \\
T_i(t) &= t_{i1} - t_{i2} e^{ex t} \\
T_a' &= \mu (c_1 + p_1 T_i(t) + p_2 T_1(t) - p_3 T_a(t))
\end{aligned}$$

Esta última es la ecuación diferencial  $T_a' = 10^{-6}(c_1 + p_1 T_i(t) + p_2 T_1(t) - p_3 T_a(t))$  a resolver con la condición inicial  $T_a(0) = T_m$ .  $T_m$  es la temperatura del medio ambiente (Passamai, 1999).

#### 4°) Resolución propiamente dicha

En este paso es necesario recordar (Sadosky, 1971) las fórmulas de recurrencia usadas, *en general*, para resolver una ecuación diferencial ordinaria, del tipo  $y' = f(x, y)$ , donde  $x$  es la variable independiente e  $y$  la dependiente, mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, a saber:

Definiendo los coeficientes “ $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$ ”; que en *lenguaje de planilla de cálculo* se pueden escribir: “ka1, ka2, ka3 y ka4”, sin temor de caer en alguna celda específica (pues sólo existen las  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$ ); de la siguiente manera:

$$ka1 = hf(x_n, y_n), ka2 = hf(x_n + h/2, y_n + ka1/2), ka3 = hf(x_n + h/2, y_n + ka2/2) \text{ y } ka4 = hf(x_n + h, y_n + ka3)$$

donde  $h$ , como se dijo, es el paso para el cálculo, “ $x_n$ ” e “ $y_n$ ” se refieren, obviamente, a  $x_n$  e  $y_n$ , respectivamente; y “ $f$ ” es la característica de la función  $f(x, y)$ . Para el caso, es necesario asociar  $x$  con  $t$ ; y con  $T_a$  y  $f(x, y) = \mu(c_1 + p_1 T_i(t) + p_2 T_1(t) - p_3 T_a(t))$ .

Con estos cálculos de  $k_i$  se pasa luego al cálculo de la solución para  $y_{n+1}$  en el punto  $x_{n+1} = x_n + h$ , *conociendo el del y anterior*,  $y_n$ , dado por:

$$y_{n+1} = y_n + (ka1 + 2ka2 + 2ka3 + ka4)/6.$$

Desde el punto de vista del cálculo con planilla electrónica, podría decirse que “esto es todo”, pues una vez escritas las columnas para  $ka1, ka2, ka3, ka4$  e  $y_{n+1}$ , se copian en las filas sucesivas y se habrá generado la solución.

No obstante, y para mayor claridad, se exponen más detalles de lo realizado, continuando con la elaboración de la planilla de cálculo.

5°) Establecer una celda específica para el paso  $h$  de cálculo, el que podrá tener algún valor inicial, elegido convenientemente. Por ejemplo,  $h = 300$  (coincidente con el intervalo de captura de los datos, expresado en segundos –o sea, 5 minutos-).

6°) Poner rótulos a las filas que encabezarán las columnas de la secuencia de cálculo.

En el caso de que se trata:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
21	x(t, s)	Ti(x)	T(x)	Ti(x+h/2)	T(x+h/2)	ka1	ka2	ka3	ka4	y	Ta(t)°C	Ta(med)

donde el número 21 se refiere a la fila donde se están escribiendo los rótulos, que indicarán:

$x(t, s)$  tiempo del cálculo,  $t$ , en segundos

$Ti(x)$  es la temperatura del lado interno de la cubierta transparente del horno solar

$T(x)$  es la temperatura de la placa absorbadora,  $T_j$

$Ti(x+h/2)$  se refiere a la evaluación de  $Ti(x)$  en  $x = x+h/2$ , obviamente.

$T(x+h/2)$  en cambio hace alusión a  $T(x)$  con  $x = x+h/2$

$ka1, ka2, ka3$  y  $ka4$  son los coeficientes de la fórmula de Runge-Kutta

$y = y_n + (ka1 + 2ka2 + 2ka3 + ka4)/6$

$Ta(t)°C$  es simplemente el cálculo de  $y - 273,16$  para expresar el resultado en grados centígrados

$Ta(med)$  encabeza los datos provenientes de la medición experimental, a comparar con el calculado.

7°) Escribir los cálculos a realizar, empleando el lenguaje específico de la planilla de cálculo, en la fila ubicada inmediata-

mente por debajo de los rótulos.

Como se comienza a partir del tiempo  $t=0$ , la celda A22 contiene 0. En cambio, en la A23 se deberá escribir:

$$+X+\$H$$

Aquí “X” se refiere al nombre que deberá haberse *creado* para designar a la celda A22, que contiene los *equis* del cálculo. “\$H” es el valor *anclado* (Cobb, 1992) o *constante* que deberá tener el paso  $h$  para que pueda sumarse filas abajo en la columna A y generar, de este modo, la columna completa para la variable independiente,  $x$ .

En la celda B22 se escribe:

$$273.16+TE1-TE2*@\text{EXP}(EX*X)$$

y corresponde al cálculo de  $T_i(x)=273.16+T_1-T_2e^{(ex.x)}$  (recordando los valores previamente definidos).

En C22:

$$273.16+TI1-TI2*@\text{EXP}(EX*X)$$

que corresponde a  $T(x)$  (ver arriba).

En D22:

$$273.16+TE1-TE2*@\text{EXP}(EX*(X+H/2))$$

que permite encontrar  $T_i(x+h/2)$  (necesario para encontrar  $ka_2$ ,  $ka_3$ )

En E22, F22, G22, H22, I22 y J22 se calculan  $T(x+h/2)$ ,  $ka_1$ ,  $ka_2$ ,  $ka_3$ ,  $ka_4$  e  $y=y_o$ , es la condición inicial (la temperatura ambiente).

8°) Realizar la copia de la fila 22, entre las columnas B e I, hasta el valor de  $x$  deseado. En J23 se escribe la fórmula:  $+Y+(KA1+2*KA2+2*KA3+KA4)/6$ , suponiendo que se asignó a J22 el nombre “Y”; y a continuación se copia la casilla J23 desde ese lugar hasta el final de la columna J, dado por el último  $x$  determinado en el paso anterior.

Se observará que se tiene las tablas del cálculo buscado en las columnas A y J, con lo que se terminó el proceso.

## CONCLUSIONES

El uso de una planilla de cálculo es sumamente sencillo e ilustrativo de los pasos que se van realizando en una secuencia de cálculo como la presentada a modo de ejemplo en este trabajo. La continua aplicación de este método garantizará la fluidez necesaria para adoptarlo de manera definitiva. Una vez generado el conjunto de columnas que permiten realizar la secuencia de cálculos buscada, la realización de representaciones gráficas adecuadas para publicación es inmediata.

La ventaja del programa Quattro Pro, versión 3 para DOS, es su alto grado de *transportabilidad* a lugares de trabajo remotos respecto del investigador, pues sólo es necesario un disquete para lograr su instalación. Esto ha sido comprobado por el autor al realizar visitas de cooperación científica en lugares tan dispares como Canadá o Costa Rica. Una desventaja encontrada en programas como Excel es su limitación en el número de columnas y/o filas de cálculos, dependiendo en cierto modo de la capacidad de máquina con que se cuenta (Frigerio, 1999).

## REFERENCIAS

- Cobb, S. (1992). *Aplique Quattro Pro 3*, Osborne McGraw-Hill. Madrid.
- Cobb, S. et al. (1994). *Manual de Quattro Pro 5 para Windows*, Osborne McGraw-Hill. Madrid.
- Frigerio, E. (1999). Universidad Nacional de Salta. Comunicación personal.
- Passamai, V. (1998). Experiencias de laboratorio y de campo con un horno solar. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*, Vol. 2, N°1, 1998 (02.29-02.32).
- Passamai, V. (1999). Simulación del comportamiento térmico de una cocina solar (Parte II). *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*.
- Sadosky, M. (1971). *Cálculo Numérico y Gráfico*. Ed. del Colegio. Buenos Aires.