

FACULTAD DE CIENCIAS  
ASTRONÓMICAS Y  
GEOFÍSICAS



Facultad de Ciencias  
**Astronómicas  
y Geofísicas**  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE LA PLATA



Tesis de grado en Astronomía

---

# Camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica con campos magnéticos fuertes

---

Autor

Vanesa Daiana Olivera

Director

Dr. Eduardo Bauer

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de La Plata

2023



# Camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica con campos magnéticos fuertes

Autor

Vanesa Daiana Olivera

*Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de La Plata, UNLP*

Director

Dr. Eduardo Bauer

*IFLP - CONICET*

*Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de La Plata, UNLP*



# Dedicatoria y agradecimientos

Desde que tengo 6 años miro y admiro el cielo que nos envuelve, no entendía de dónde venía esa fascinación, hasta que recordé que a esa edad cuando falleció mi abuelo, la seño me dijo que si buscaba la estrella más brillante en el cielo cada noche, ahí estaría él conmigo y desde ese día eso hice cada noche. Así que gracias al amor de y para mi abuelo y a esa seño, descubrí mi pasión a una temprana edad. Pasión que siguió aumentando, y que gracias a mi vieja que me incentivaba con “cosas ñoñas” pese a que era una niña, y mi tiito de corazón con quien compartimos la pasión por la física y la ciencia, junto a largas charlas y libros, se fue afianzando e incrementando cada vez más. Agradezco ese día que recibí mi telescopio, las lágrimas de mis viejos por la emoción de verme tan feliz, la sensación de tener el cielo más cerca, de querer conocerlo más. Agradezco a mi pueblo por darme madrugadas de invierno con un cielo que tanto disfruté y que tanto extraño. A mis amigos de la costa que me acompañaban a tirarme en la playa para contemplar por horas si era necesario la luna y las estrellas.

Agradezco nuevamente a mi vieja por traerme al observatorio cuando por miedo a fallar no quería arriesgarme a hacer un ingreso aún eliminatorio, si fallaba a lo que siempre quise, no me lo perdonaría jamás. Pero menos me hubiese perdonado no intentarlo, y eso se lo debo a ella. Agradezco a Carpintero que nos vio ese día y muy amablemente se ofreció a mostrarnos la facultad, ahí fue cuando supe que ya nunca más quería estar en otro lugar. Agradezco a mis viejos, a mi hermano, por los momentos compartidos cuando volvía y hacía parecer que nunca me había ido. Y a mi vieja y mi hermano por aún recibirme como si nunca me hubiese ido, por bancar la distancia y desde el amor, hacer que la distancia se acorte y todo sea un poco menos difícil.

Agradezco a mis amigos y amigas que dejé en la costa, que aún siguen estando, que siempre me bancaron esta locura, me vieron crecer con esta pasión, me apoyaron, siempre creyeron en mí aún cuando se puso difícil y que hoy son mi hinchada. Agradezco a mis amigos y amigas que me hice en esta ciudad, los que están desde el principio, los que se ya no pero dejaron huellas y quienes recién se suman a mi camino. Agradezco a mi marida por tantas noches de pizzas y tanta compañía que me hizo falta cuando más lo necesitaba. Agradezco a Meli por sumarse a este tren al final del recorrido, por los finales dados juntas, a veces a contratiempo, pero siempre dispuesta, con paciencia y con tanta intensidad por las materias y el estudio como la mía, no podría haber pedido compañera mejor.

Agradezco a la ciudad de La Plata, a la facultad, a la Universidad Nacional, no sólo pública y gratuita, también de calidad, a los y las docentes que hacen todo esto posible, sin eso no hubiese

sido posible cumplir mi mayor meta. También me dieron la posibilidad de trabajar enseñando que tanto disfruto y agradezco a las cátedras por darme el apoyo para rendir las materias. Agradezco haber tenido que cursar en el obser, lugar tan maravilloso que es mi segundo hogar, donde aprendí, donde crecí durante mi formación (y sigo creciendo), donde encontré al amor y donde compartí muchas alegrías.

Agradezco a Choiols, que llegó en un punto de inflexión, fue un momento clave de mi carrera donde aprendí que no necesitaba esperar al título para empezar a hacer lo que tanto quería, que podía contagiar ciencia. Fue el lugar donde descubrí aún más mis ganas de enseñar y donde conocí un grupo de gente maravillosamente ñoña con la que me identifiqué como nunca, de las que salieron también hermosas amistades.

Agradezco a la familia que elegí, a Fede, a Faustito, sin la llegada de ellos a mi vida esto no sería igual. Todo este viaje fue una montaña rusa de emociones, el demostrarme a mi misma que podía ser mamá, trabajar y aún así recibirme me dio la fuerza que necesitaba para avanzar a pasos más grandes. El saber que cada segundo que perdía eran segundos que perdía de estar disfrutar de mi hijo, hizo que aprovechara el tiempo de estudio como nunca. Y por supuesto, nada de eso sería posible si no tuviese un compañero que me bancó y me banca en todas, incluso en mis peores locuras y en todas mis decisiones. Agradezco también a mis suegros por estar, por sumarme a su familia como si fuese una más, y por cuidar de Faustito las veces que necesité para dar un final.

Por último, y para nada menos importante, tengo que agradecerle a quien fue mi mentor en este último desafío. Agradezco eternamente a Eduardo, mi director, en primer lugar por aceptar ser mi director. También por enseñarme con paciencia y mucha dedicación todo lo que necesitaba para afrontar cada paso. Por compartirme su sabiduría, no sólo por aconsejarme siempre si no también por hacerlo desde la franqueza, por la paciencia (y se que mucha) y por ayudarme a crecer. En su momento no sabía, pero no tardaría mucho en darme cuenta que llegar a él para hacer la tesis fue una gran decision.

Llegar a esta instancia fue mérito colectivo, porque cada una de las personas involucradas en los agradecimientos aportó su granito de arena para que hoy pudiera llegar hasta acá. Simplemente, gracias totales.

*A mis mentores y mentoras. A mamá que fue de fierro. A papá y al tío que nada quisiera más que hoy puedan compartir este momento conmigo, los extraño.*





# Índice general

Índice de figuras	XII
Índice de cuadros	XIII
Resumen	XV
Abstract	XVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	2
<b>2. Ecuación de Estado</b>	<b>3</b>
2.1. EdE: Hipótesis y modelo . . . . .	3
2.2. EdE: Termodinámica del sistema . . . . .	5
2.3. Evaluación de la magnetización y de la susceptibilidad magnética . . . . .	7
2.4. Resumen del cálculo de la Ecuación de Estado . . . . .	8
<b>3. Camino libre medio del neutrino en materia neutrónica</b>	<b>9</b>
3.1. Sección eficaz para la dispersión neutrino-neutrón . . . . .	9
3.2. Matriz invariante de la transición $\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}$ . . . . .	12
3.2.1. Tensor Leptónico . . . . .	13
3.2.2. Tensor Hadrónico . . . . .	14
3.2.3. Evaluación de $\langle  \mathcal{M}_{\mu'n',\mu n} ^2 \rangle$ . . . . .	16
3.3. Sección eficaz del neutrino para un sistema no polarizado . . . . .	17
3.4. Sección eficaz del neutrino para un sistema polarizado . . . . .	19
3.5. Resumen del cálculo del camino libre medio . . . . .	22
<b>4. Resultados</b>	<b>23</b>
4.1. Resultados EdE . . . . .	23
4.2. Resultados Sección Eficaz . . . . .	32
4.2.1. Caso no polarizado . . . . .	32
4.2.2. Caso polarizado . . . . .	33
4.3. Comparación con el modelo de Skyrme . . . . .	40
<b>5. Conclusiones y trabajos a futuro</b>	<b>45</b>

---

<b>A. Valores numéricos de diferentes constantes</b>	<b>49</b>
<b>B. Cálculo de la susceptibilidad magnética</b>	<b>51</b>
<b>C. Truco de Casimir y cálculo de trazas</b>	<b>53</b>
<b>D. Detalles del cálculo de <math>\langle  \mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^\pm ^2 \rangle</math></b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

# Índice de figuras

3.1.	Diagrama de Feynman a menor orden para la reacción de scattering $\nu + n \rightarrow \nu' + n'$	11
3.2.	Geometría del proceso de dispersión para el caso polarizado. En el punto central tenemos a un neutrón en reposo. El eje- $z$ lo define el campo magnético. En esta figura mostramos la relación de ángulos para el neutrino incidente $\nu$ y el neutrino dispersado $\nu'$ .	19
4.1.	Potencial químico en función de la densidad. Mostramos el potencial químico para $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$ G y $T=15$ MeV	24
4.2.	Potencial químico en función de la densidad. Mostramos el potencial químico para $T= 5, 15, 30$ MeV y $B = 10^{16}$ G	24
4.3.	Asimetría de spin en función de la densidad. Mostramos la asimetría de spin para $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$ G y $T=15$ MeV	26
4.4.	Asimetría de spin en función de la densidad. Mostramos la asimetría de spin para $T= 5, 15, 30$ MeV y $B = 10^{18}$ G	26
4.5.	Potencial de Helmholtz en función de la densidad. Mostramos el potencial de Helmholtz para $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$ G y $T=15$ MeV	27
4.6.	Potencial de Helmholtz en función de la densidad. Mostramos el potencial de Helmholtz para $T= 5, 15, 30$ MeV y $B = 10^{18}$ G	27
4.7.	Presión en función de la densidad. Mostramos la presión para $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$ G y $T=15$ MeV	28
4.8.	Presión en función de la densidad. Mostramos la presión para $T= 5, 15, 30$ MeV y $B = 10^{18}$ G	28
4.9.	Magnetización en función de la densidad. Mostramos la magnetización para $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$ G y $T=15$ MeV	30
4.10.	Magnetización en función de la densidad. Mostramos la magnetización para $T= 5, 15, 30$ MeV y $B = 10^{18}$ G	31
4.11.	Susceptibilidad en función de la densidad. Mostramos en a) la susceptibilidad para $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$ G y $T=15$ MeV y en b) para $T= 5, 15, 30$ MeV y $B = 10^{18}$ G	31
4.12.	Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para temperaturas $T= 5, 15$ y $30$ MeV en ausencia de campo magnético.	32

4.13. Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para campos magnéticos $B = 0$ G y $B = 10^{18}$ G para $\theta_\nu = \pi/2$ , para temperaturas $T = 5, 15$ y $30$ MeV. . . . .	34
4.14. Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para $T = 5$ MeV, para campos magnéticos $B = 10^{16}$ G en a), $B = 10^{17}$ G en b) y $B = 10^{18}$ G en c). En los tres casos, se muestra para $\theta = 0, \pi/2$ y $\pi$ . . . . .	35
4.15. Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para $T = 15$ MeV, para campos magnéticos $B = 10^{16}$ G en a), $B = 10^{17}$ G en b) y $B = 10^{18}$ G en c). En los tres casos, se muestra para $\theta = 0, \pi/2$ y $\pi$ . . . . .	36
4.16. Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para $T = 30$ MeV, para campos magnéticos $B = 10^{16}$ G en a), $B = 10^{17}$ G en b) y $B = 10^{18}$ G en c). En los tres casos, se muestra para $\theta_\nu = 0, \pi/2$ y $\pi$ . . . . .	37
4.17. Camino libre medio en función de la energía. Mostramos el camino libre medio para la densidad de saturación $\rho_0$ en presencia de un campo magnético $B = 10^{17}$ G, para temperatura $T = 5$ MeV en a), $T = 15$ MeV en b) y $T = 30$ MeV en c). En los tres casos, se muestran resultados para $\theta_\nu = 0, \pi/2$ y $\pi$ . . . . .	38
4.18. Asimetría en función del campo magnético. Mostramos la asimetría para densidad $\rho_0$ , $T = 5$ MeV en a), $T = 15$ MeV en b) y $T = 30$ MeV en c). En los tres casos, se muestran resultados para $\theta_\nu = 0, \pi/2$ y $\pi$ . . . . .	39
4.19. Potencial químico en función de la densidad. Mostramos el potencial químico en función de la densidad para $T = 15$ MeV y $B = 10^{18}$ G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme. . . . .	41
4.20. Potencial de Helmholtz en función de la densidad. Mostramos el potencial de Helmholtz en función de la densidad para $T = 15$ MeV y $B = 10^{18}$ G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme. . . . .	42
4.21. Presión en función de la densidad. Mostramos la presión en función de la densidad para $T = 15$ MeV y $B = 10^{18}$ G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme. . . . .	42
4.22. Asimetría en función de la densidad. Mostramos la asimetría en función de la densidad para $T = 15$ MeV y $B = 10^{18}$ G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme. . . . .	43
4.23. Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio en función de la densidad para $T = 15$ MeV y $B = 10^{18}$ G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme, para ángulos de incidencia de $\theta_\nu = 0, \pi/2$ y $\pi$ . . . . .	43

# Índice de cuadros

4.1. Contribuciones de los términos a la presión en función de la densidad para $T=15$ MeV y $B = 10^{16}$ G . . . . .	29
4.2. Contribuciones de los términos a la presión en función de la densidad para $T=15$ MeV y $B = 10^{17}$ G . . . . .	29
4.3. Contribuciones de los términos a la presión en función de la densidad para $T=15$ MeV y $B = 10^{18}$ G . . . . .	29
4.4. Asimetría total del camino libre medio en función de la densidad para temperatura $T=15$ MeV y campos magnéticos $B = 10^{16}, 10^{17}$ y $10^{18}$ G . . . . .	40



# Resumen

Calculamos el camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica degenerada, no relativista, en presencia de un campo magnético intenso. No se incluyen las interacciones de los neutrones entre sí. Consideramos la reacción de dispersión  $\nu + n \rightarrow \nu' + n'$ , en un rango de densidades de  $0 \leq \rho \leq 0.4 \text{ fm}^{-3}$  para temperaturas finitas, que alcanzan hasta los  $T = 30 \text{ MeV}$  y una intensidad de campo magnético hasta  $B = 10^{18} \text{ G}$ . Una buena aproximación para nuestro escenario astrofísico es considerar estas cantidades como localmente constantes.

En primer lugar, desarrollamos una ecuación de estado; considerando la interacción de los neutrones con el campo magnético externo. De esta ecuación de estado, extraemos los valores del potencial químico del neutrón y de la asimetría de spin, para emplearlos luego en el cálculo del camino libre medio de neutrinos. De nuestra ecuación de estado y considerando la termodinámica del sistema, encontramos las expresiones para la presión, la magnetización y la susceptibilidad magnética del medio. Evaluamos numéricamente y discutimos estas magnitudes físicas.

Luego calculamos el camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica, a través del cálculo de la sección eficaz total de dispersión por unidad de volumen para la reacción de dispersión inelástica de un neutrino por un neutrón mediante la Regla de Oro de Fermi. Consideramos el caso de materia no polarizada donde  $B = 0 \text{ G}$  y el caso de materia polarizada, para  $B = 10^{16}$ ,  $B = 10^{17}$  y  $B = 10^{18} \text{ G}$ . Tomamos  $B = 10^{16} \text{ G}$ , como el menor valor para el campo magnético no nulo, ya que los resultados para este campo son muy similares al del campo nulo. Realizamos los cálculos para los casos donde el neutrino incide de manera paralela, perpendicular y antiparalela a la dirección del campo magnético.

Encontramos que cuando el neutrino incide en forma perpendicular al campo magnético, su camino libre medio es casi independiente del valor del campo magnético. Por otra parte, cuando incide en forma paralela (antiparalela) al campo magnético, toma valores mayores (menores) que los correspondientes a la incidencia perpendicular. Esto establece una asimetría en el camino libre medio. La asimetría entre la incidencia paralela y antiparalela es del orden de 20 % para la densidad de saturación,  $B = 10^{18} \text{ G}$  y  $T = 15 \text{ MeV}$ . Esta asimetría puede contribuir a la explicación del problema del “pulsar kick”, en que la velocidad de translación de la estrella de neutrones es mucho más rápida que la de su estrella progenitora. Por otra parte, nuestros resultados son consistentes con el comportamiento conocido del camino libre medio en ausencia de campo magnético: disminuye con la densidad y con el incremento de la temperatura.

Finalmente, comparamos nuestros resultados con el modelo de Skyrme bajo las mismas condiciones. El modelo de Skyrme agrega la interacción nuclear entre los neutrones, empleando el

modelo de Hartree-Fock para dar cuenta de las correlaciones nucleares a nivel de campo medio. Los resultados del modelo de Skyrme y el nuestro, muestran un acuerdo cualitativo. La comparación de nuestros resultados con el modelo de Skyrme, sugieren que la ecuación de estado tiene una importante dependencia con la interacción nuclear; mientras que el para el camino libre medio es el espacio de fases el elemento más importante.



# Abstract

We evaluate the neutrino mean free path for degenerate, non-relativistic neutron matter, in the presence of a strong magnetic field. Interactions of neutrons with each other are not included. We consider the scattering reaction  $\nu+n \rightarrow \nu'+n'$ , in a range of densities of  $0 \leq \rho \leq 0.4 \text{ fm}^{-3}$  for finite temperatures, reaching up to  $T=30 \text{ MeV}$  and a magnetic field intensity up to  $B = 10^{18} \text{ G}$ . A good approximation for our astrophysical scenario is to consider these quantities as locally constant.

First, we develop an equation of state; considering the interaction of neutrons with the external magnetic field. From this equation of state, we extract the values of the chemical potential of the neutron and of the spin asymmetry, to use them later in the calculation of the mean free path of neutrinos. From our equation of state and considering the thermodynamics of the system, we find the expressions for the pressure, magnetization and magnetic susceptibility of the medium. We numerically evaluate and discuss these physical magnitudes.

Then we calculate the neutrino mean free path in neutron matter, by calculating the total cross section of scattering per unit volume for the inelastic scattering reaction of a neutrino by a neutron using Fermi's Golden Rule. We consider the case of non-polarized matter where  $B = 0 \text{ G}$  and the case of polarized matter, for  $B = 10^{16}$ ,  $B = 10^{17}$  and  $B = 10^{18} \text{ G}$ . We take  $B = 10^{16} \text{ G}$ , as the smallest value for the non-zero magnetic field, since the results for this field are very similar to ones for the null field. We perform the calculations for the cases where the neutrino hits parallel, perpendicular and antiparallel to the direction of the magnetic field.

We find that when the incident neutrino is perpendicular to the magnetic field, its mean free path is almost independent of the value of the magnetic field. On the other hand, when it hits parallel (antiparallel) to the magnetic field, it takes higher (lower) values than those corresponding to perpendicular incidence. This establishes an asymmetry in the mean free path. The asymmetry between parallel and antiparallel neutrinos is of the order of 20% for the saturation density,  $B = 10^{18} \text{ G}$  and  $T=15 \text{ MeV}$ . This asymmetry may help to explain the “pulsar kick” problem, in which the translational speed of the neutron star is much faster than that of its progenitor star. On the other hand, our results are consistent with the known behavior of the mean free path in the absence of a magnetic field: it decreases with density and with increasing temperature.

Finally, we compare our results with the Skyrme model under the same conditions. The Skyrme model adds the nuclear interaction between neutrons, using the Hartree-Fock model to account for nuclear correlations at the mean field level. The results of the Skyrme model and ours

show a qualitative agreement. The comparison of our results with the Skyrme model, suggests that the equation of state has an important dependence on the nuclear interaction; while for the mean free path the phase space is the most important element.

# Capítulo 1

## Introducción

Las estrellas de neutrones son objetos que resultan del remanente de la explosión de supernova de tipo II en la etapa final de una estrella de masa intermedia ( $8 M_{\odot} < M < 20 M_{\odot}$ ) (Baade y Zwicky (1934)). Debemos mencionar que los neutrinos juegan un papel importante en la explosión de supernova (Bethe (1990); Burrows (2000); Janka y Mueller (1996)). Además, el mecanismo de enfriamiento más eficiente de una supernova es la emisión de neutrinos (Shibanov y Yakovlev (1996); Yakovlev y Pethick (2004)). Mientras que las capas externas de la estrella son violentamente expulsadas hacia el exterior, el núcleo colapsa gravitacionalmente, hasta encontrar el equilibrio debido al gas de neutrones degenerados que lo componen. Las estrellas de neutrones tienen masas de entre  $1.2$  y  $2 M_{\odot}$  contenidas en radios de entre  $10$  y  $12$  km, por lo que se encuentran entre los objetos más compactos que se conocen. Considerando una densidad promedio  $\bar{\rho} = 3M/(4\pi R^3)$ , para una masa típica de  $M = 1.4 M_{\odot}$  y un radio de  $10$  km, resulta  $\bar{\rho} \approx 7 \times 10^{14} \text{ gr cm}^{-3}$ , es decir, unas  $2.5$  veces mayor que la densidad de saturación nuclear, que es la densidad de equilibrio de los nucleones en el interior del núcleo atómico  $\rho_0 \sim 2.8 \times 10^{14} \text{ gr cm}^{-3}$ . Para tener una idea más clara de la densidad de las estrellas de neutrones, una cucharada de la materia que la conforma, podría pesar  $10^9$  toneladas. Ciertas estrellas de neutrones conocidas como magnetares poseen campos magnéticos muy intensos que en su superficie toman valores que van de  $10^{14}$  a  $10^{15}$  G y en su interior podrían llegar a  $10^{18}$  G (Duncan y Thompson (1992)). Los pulsares son estrellas de neutrones cuyo eje de campo magnético, que es la dirección por donde la estrella emite señales de radio (pulsos), está inclinado respecto al eje de rotación, haciendo que los pulsos de radiación sean observados en intervalos de tiempos periódicos, por lo que la estrella se comporta como un faro.

Una de las particularidades que presentan los pulsares es que la velocidad espacial es más grande que el de su estrella progenitora. Este hecho observacional se conoce como el problema del “*pulsar kick*” (Cordes y cols. (1993); G.Lyne y Lorimer (1994)). Se han propuesto diferentes mecanismos para explicar la diferencia de velocidades, uno de ellos es que la explosión de supernova es asimétrica. Otra posibilidad, es la emisión asimétrica de neutrinos debido al intenso campo magnético, ya que con solo una asimetría del  $1\%$ , sería suficiente para explicar la velocidad de los pulsares (Horowitz y Li (1998); Kauts y cols. (2006); Maruyama y cols. (2014)). En esta tesis, estudiaremos el camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica para analizar la emisión

asimétrica de neutrinos.

Los neutrinos son partículas elementales de carga neutra. Según el Modelo Estándar de partículas elementales, los neutrinos son leptones, y hay tres tipos diferentes, según la generación de fermiones a la que pertenece: el neutrino electrónico  $\nu_e$ , el neutrino muónico  $\nu_\mu$  y el neutrino tau  $\nu_\tau$ . Mediante la oscilación de neutrinos, pueden pasar de una familia de fermiones, a otra, por lo que su masa es no nula, pero sí despreciable. En esta tesis, consideraremos a los neutrinos sin masa. Tienen carga nula, por lo que no sufren la interacción electromagnética, tampoco la interacción fuerte, ya que como dijimos son leptones. Por lo tanto, interactúan con la materia mediante la interacción débil, que es de corto alcance ( $10^{-18}$  m). Debido a su alcance e intensidad, la interacción de un neutrino con la materia es poco probable.

Los neutrinos brindan información proveniente del interior de estrellas, en particular nos dan información sobre la evolución y composición del colapso de estrellas masivas en estrellas de neutrones. El ingrediente principal en este caso, es la propagación de los neutrinos en la materia estelar. De este modo, estamos interesados en la física de la propagación de neutrinos dentro de una estrella de neutrones.

## 1.1. Objetivos

Obtener una ecuación de estado (EdE) para materia puramente neutrónica en un rango de densidades que llegan  $\sim 0.4\text{fm}^{-3}$ , temperaturas de entre 5 y 30 MeV y con altos campos magnéticos localmente constantes, que llegan hasta una intensidad máxima de  $B = 10^{18}$  G. De la EdE, obtener valores del potencial químico y de la asimetría de spin, que luego emplearemos en el cálculo del camino libre medio de neutrinos. Calcular también la magnetización y la susceptibilidad del medio neutrónico.

Con los valores que resulten de la EdE, se buscará evaluar el camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica. El camino libre medio se calcula como la inversa de la sección eficaz total por unidad de volumen, para la reacción de dispersión. Para ello, habrá que calcular el elemento de matriz de transición débil correspondiente tanto a la materia no polarizada, como a materia polarizada.

De los resultados de la EdE y la sección eficaz, podremos estudiar el comportamiento del camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica para diferentes densidades, temperaturas e intensidades del campo magnético. Finalmente, comparar nuestros resultados con los del modelo de Skyrme, que tomamos de Torres Patiño y cols. (2019).

# Capítulo 2

## Ecuación de Estado

El objetivo de este trabajo es evaluar el camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica, a temperatura finita y con un campo magnético intenso. El primer paso para ello, es desarrollar un modelo del medio. Esto lo hacemos desarrollando una ecuación de estado (EdE), que da cuenta del medio en el que se propagan los neutrinos.

De este modo, calculamos una EdE para materia de neutrones, con un rango de densidades  $\rho$  que pueden llegar hasta dos veces y media la densidad de saturación nuclear, la cual en núcleos pesados es  $\rho_0 \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$ , y corresponde al número de nucleones en un volumen de una unidad de  $1 \text{ fm}^3$ . Consideramos campos magnéticos localmente constantes, hasta una intensidad  $B = 10^{18} \text{ G}$ . Además, realizamos el cálculo a temperatura finita, hasta un valor de  $T = 30 \text{ MeV}$ . En resumen, nuestros datos de entrada para la EdE son: la densidad de neutrones, la temperatura y el campo magnético. Por medio de la EdE podemos conocer la presión en función de dichas variables.

Comenzaremos enunciando las hipótesis bajo las cuales se desarrollarán los cálculos de la EdE. Bajo éstas condiciones, definiremos funciones que nos serán útiles para los cálculos, estableciendo así, los elementos de la termodinámica del sistema. Además, emplearemos algunos conceptos de termodinámica y mecánica estadística necesarios para el desarrollo de nuestro modelo; según el enfoque de los libros de Callen (B.Callen (1981)) y de Pathria y Beale (Pathria y Beale (2011)).

### 2.1. EdE: Hipótesis y modelo

Entendemos por EdE a los valores que toma la presión como función de la densidad de neutrones, la temperatura y el campo magnético. En particular, nuestro interés en el cálculo de la EdE es conocer los valores que toma el potencial químico y la polarización del sistema, ya que son las cantidades que necesitamos para el cálculo del camino libre medio de neutrinos. Por completitud, discutiremos además de la presión, la magnetización y la susceptibilidad magnética del medio.

Como ya adelantamos, es necesario en primer lugar, establecer las hipótesis bajo las cuales desarrollaremos esta EdE. Éstas son:

1. Consideramos materia uniforme formada solo por neutrones.
2. Consideraremos la presencia de un campo magnético externo intenso, localmente constante.

3. No consideramos la interacción de los neutrones entre sí.
4. Los neutrones interactúan con el campo magnético debido a su momento magnético anómalo.
5. Consideramos que el sistema está degenerado, esto es, debemos hacer un tratamiento cuántico del problema.
6. Debido al rango de densidades y temperaturas que analizaremos, trataremos al problema en términos no-relativistas.

Dadas las hipótesis mencionadas, lo que sigue es establecer nuestro modelo para la energía de partícula independiente del neutrón  $\varepsilon_n(p, s_n)$ . Como trabajamos con materia neutrónica infinita y recurriendo al electromagnetismo para dar cuenta del acoplamiento entre el momento magnético anómalo del neutrón y el campo magnético, podemos escribir,

$$\varepsilon_n(p, s_n) = m + \frac{p^2}{2m} - \mu_N g_n \vec{s}_n \cdot \vec{B}, \quad (2.1)$$

donde  $m$  es la masa del neutrón,  $\mu_N$  es el magnetón de Bohr nuclear y  $g_n$  es el factor giromagnético del neutrón <sup>1</sup>. En esta expresión, escribimos tanto al spin  $\vec{s}_n$ , como el campo magnético  $\vec{B}$ , mostrando su carácter vectorial. En las hipótesis mencionamos que los neutrones no interactúan entre sí, pero notemos que sí lo hacen con un campo magnético externo. También mencionamos, que el campo magnético externo es considerado localmente constante, ésto lo utilizaremos a lo largo de todo el trabajo y elegiremos en forma arbitraria que la dirección del campo es en la dirección del eje- $z$ , es decir,  $\vec{B} = B\hat{k}$ . Por lo tanto tenemos,

$$\varepsilon_n(p, s_n) = m + \frac{p^2}{2m} - \mu_N g_n s_n B, \quad (2.2)$$

donde  $s_n$  es la proyección del spin en el eje- $z$  ( $s_n = \pm 1$ ). Antes de comenzar a discutir el potencial termodinámico, es conveniente definir primero ciertas funciones. La primera de ellas es la función de distribución de neutrones; esto es, el modo en que se distribuyen los neutrones según su temperatura, cantidad de movimiento y spin. Ya que los neutrones son fermiones, empleamos la distribución de Fermi-Dirac,

$$f_n(T, p, s_n) = [1 + \exp(\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n)/T]^{-1}, \quad (2.3)$$

donde  $T$  es la temperatura del medio,  $p$  es la magnitud de la cantidad de movimiento del neutrón y  $\mu_n$  es su potencial químico. Debemos destacar que el potencial químico  $\mu_n$ , no depende de la proyección de spin. Para mayor claridad en los conceptos, analizamos qué sucede con la función cuando la temperatura tiende a cero. Para ello, tomamos ese límite teniendo en cuenta el signo del exponencial en la ec. (2.3). Vemos entonces que si,

<sup>1</sup>Por conveniencia, daremos los valores numéricos de las diferentes constantes en el Apéndice A

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n > 0 & \quad \text{entonces} & \quad f_n(T, p, s_n) \rightarrow 0 & \quad \text{cuando} & \quad T \rightarrow 0, & \quad \text{y si} \\
\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n < 0 & \quad \text{entonces} & \quad f_n(T, p, s_n) \rightarrow 1 & \quad \text{cuando} & \quad T \rightarrow 0. & \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Esto nos dice que la ocupación de neutrones es máxima, si la energía del neutrón es menor que su potencial químico, mientras que la ocupación de neutrones tiende a cero cuando su energía es mayor que la del potencial químico. Mencionamos por último, que para el tratamiento del sistema trabajamos con unidades naturales; es decir que definimos  $c = \hbar = k_B = 1$ . Por lo tanto, la temperatura estará en unidades de energía MeV.

## 2.2. EdE: Termodinámica del sistema

Dadas nuestras hipótesis y habiendo establecido el modelo con las ecs. (2.2) y (2.3), podemos definir:

$$\rho_{n, s_n}(\rho_n, T, B) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p f_n(T, p, s_n), \quad (2.5)$$

$$\vec{W}_n(\rho_n, T, B) = \sum_{\vec{s}_n} \frac{\vec{s}_n}{(2\pi)^3} \int d^3p f_n(T, p, s_n), \quad (2.6)$$

$$K_{n, s_n}(\rho_n, T, B) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p p^2 f_n(T, p, s_n). \quad (2.7)$$

La primera cantidad,  $\rho_{n, s_n}$ , es la expresión para la densidad parcial de número de neutrones, para una proyección de spin dada. Por lo tanto, según la proyección del spin que utilicemos, tendremos la densidad parcial de spin up o de spin down. La expresión para la densidad total del sistema  $\rho_n$  está dada entonces, por la suma de las densidades parciales correspondiente a cada una de las proyecciones del spin.

$$\rho_n = \rho_{n, s_n=1} + \rho_{n, s_n=-1}. \quad (2.8)$$

La segunda cantidad,  $\vec{W}_n$ , da cuenta de la polarización del sistema. La presencia del campo magnético hace que  $\rho_{n, s_n=1} \neq \rho_{n, s_n=-1}$ , con lo cual la materia presenta cierto grado de polarización. Finalmente, las cantidades  $K_{n, s_n=\pm 1}$  divididas por  $2m$ , representan la densidad de energía cinética para spin up y down, respectivamente. En lo que sigue y por simplicidad, ya no mostraremos la dependencia funcional de las ecs. (2.5–2.7).

Discutamos con más detalles la función  $\vec{W}_n$ , dada en la ec. (2.6). Esta cantidad, nos permite calcular  $\vec{\mathcal{M}}_n$ , la magnetización de neutrones, también llamada Paramagnetismo de Pauli, como sigue:

$$\vec{\mathcal{M}}_n = \mu_N g_n \vec{W}_n. \quad (2.9)$$

Más adelante, en este mismo capítulo, justificamos esta expresión. Enseguida veremos que es útil

mostrar la proyección de  $\vec{W}_n$  sobre el eje  $-z$ , que designamos como  $W_n$ ,

$$W_n = \sum_{s_n} \frac{s_n}{(2\pi)^3} \int d^3p f_n(T, p, s_n). \quad (2.10)$$

En este punto, es conveniente definir a la asimetría de spin,

$$A_n \equiv \frac{W_n}{\rho_n} = \frac{\rho_{n, s_n=1} - \rho_{n, s_n=-1}}{\rho_{n, s_n=1} + \rho_{n, s_n=-1}}. \quad (2.11)$$

Notemos que  $-1 \leq A_n \leq 1$ . Analizando este cociente, vemos que si la densidad de neutrones con spin up es igual a aquella con spin down, entonces la materia no está polarizada, y  $A_n = 0$ , al igual que  $W_n$  y la magnetización. Naturalmente, el estado físico es aquel en que tenemos un mínimo para el potencial termodinámico, que definiremos enseguida. En ausencia de campo magnético, este mínimo de energía va a ocurrir cuando tenemos el mismo número de neutrones con spin up y down, debido al principio de Pauli. Por otra parte, si se enciende el campo magnético, éste favorece la alineación del spin con el mismo. Para ser claros, existe una cierta competencia entre el principio de Pauli que busca el mismo número de spin up y down y el campo magnético que busca alinear las proyecciones de spin. La situación de equilibrio tiene lugar cuando el sistema muestra cierto grado de polarización. Los casos extremos donde  $A_n = -1$  o  $A_n = 1$ , se dan cuando la materia está totalmente polarizada con todos los spines down o up respectivamente. Por último, estados parcialmente polarizados corresponde a valores  $-1 < A_n < 1$ .

Dadas las funciones anteriores, podemos entonces definir el potencial termodinámico. Para nuestro problema, el potencial adecuado es el de Helmholtz, que designamos como  $\mathcal{F}_n$ . Notemos que trabajamos con el potencial por unidad de volumen. Tenemos entonces,

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_n - T\mathcal{S}_n, \quad (2.12)$$

donde  $\mathcal{E}_n$  y  $\mathcal{S}_n$  son las densidades de energía y de entropía, respectivamente. La densidad de energía resulta de integrar la energía de partícula independiente del neutrón (ec. 2.2), respecto del momento y sumando sobre su spin, esto es,

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s_n=\pm 1} \int d^3p f_n(T, p, s_n) \varepsilon_n(p, s_n). \quad (2.13)$$

Por lo tanto, utilizando las expresiones dadas por las ecs. (2.5, 2.7, 2.10), obtenemos la siguiente expresión para la densidad de energía,

$$\mathcal{E}_n = m\rho_n + \sum_{s_n=\pm 1} \frac{K_{n, s_n}}{2m} - \mu_N g_n W_n B. \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.9) vemos que dicho producto es

$$\vec{\mathcal{M}}_n \cdot \vec{B} = \mu_N g_n W_n B. \quad (2.15)$$

Si bien hemos podido establecer esta relación, aún debemos justificar la expresión de la



magnetización en sí.

Luego, debemos evaluar la densidad de entropía,

$$\mathcal{S}_n = - \sum_{s_n} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p [f_n \ln(f_n) + (1 - f_n) \ln(1 - f_n)], \quad (2.16)$$

donde por simplicidad eliminamos la dependencia funcional de  $f_n(T, p, s_n)$ .

Finalmente, la presión del sistema  $P$  como función de la densidad total viene dada por,

$$P = \mu_n \rho_n - \mathcal{F}_n. \quad (2.17)$$

Hasta este punto, hemos definido los elementos de la termodinámica del problema. Luego, el proceso operativo que sigue es: dada una densidad de número de neutrones  $\rho_n$ , la temperatura del sistema  $T$  y la intensidad del campo magnético  $B$ , buscamos un potencial químico resolviendo la ec. (2.8). Esta es una ecuación implícita en  $\mu_n$ , que debe resolverse en forma numérica. Una vez que conocemos el potencial químico, podemos calcular el resto de las magnitudes físicas de interés. No vamos a desarrollar este punto, pero debemos indicar que el valor de  $\mu_n$  que satisface la ec. (2.8), es aquel que minimiza el potencial termodinámico. En resumen, dada la densidad, temperatura y campo magnético del sistema, de la ecuación de estado obtenemos el estado físico, caracterizado por el potencial químico, la energía de partícula independiente de los neutrones, la presión y la asimetría de spin.

Antes de avanzar, mostraremos el cálculo de la magnetización y de la susceptibilidad magnética con algún detalle.

### 2.3. Evaluación de la magnetización y de la susceptibilidad magnética

La expresión para la magnetización dada en la ec. (2.9), puede encontrarse en la literatura. Sin embargo, como daremos una deducción de la susceptibilidad, consideramos conveniente deducir la expresión de la magnetización. Referimos al lector al libro de Pathria y Beale (2011), para obtener más detalles del tema.

En primer lugar, mostramos la expresión para el potencial gran canónico por unidad de volumen,

$$\Omega_n = - \sum_{s_n} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \ln(1 - f_n). \quad (2.18)$$

La magnetización se calcula a partir de  $\Omega_n$ , según la expresión,

$$\mathcal{M}_n = -T \left( \frac{\partial \Omega_n}{\partial B} \right)_{\mu_n, T, V}. \quad (2.19)$$

Luego de un poco de álgebra obtenemos

$$\mathcal{M}_n = \mu_N g_n W_n. \quad (2.20)$$

Esta expresión se denomina *paramagnetismo de Pauli*. En segundo lugar, calculamos la susceptibilidad magnética, que se obtiene como la derivada de la magnetización respecto del campo magnético, para densidad y temperatura constantes; esto es,

$$\chi_n = \left( \frac{\partial \mathcal{M}_n}{\partial B} \right)_{\rho_n, T}. \quad (2.21)$$

A partir de esta ecuación, podemos obtener una expresión analítica para la susceptibilidad. Esto lo hacemos en el Apéndice B. La expresión final resulta,

$$\chi_n = 4 \mu_n^2 g_n^2 \frac{\xi_n(T, B, s_n = 1) \xi_n(T, B, s_n = -1)}{\xi_n(T, B, s_n = 1) + \xi_n(T, B, s_n = -1)} \quad (2.22)$$

con,

$$\xi_n(T, B, s_n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\exp(\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n)/T}{[1 + \exp(\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n)/T]^2}, \quad (2.23)$$

## 2.4. Resumen del cálculo de la Ecuación de Estado

Consideramos materia neutrónica degenerada, no-relativista, bajo un campo magnético intenso y temperatura finita; sin interacciones entre los neutrones. De este modo, construimos una ecuación de estado para materia neutrónica polarizada. En la evaluación de la EdE, fijamos el valor de la densidad de número de neutrones, la temperatura y el campo magnético. Si bien la EdE tiene interés en sí misma, nuestro objetivo es obtener valores del potencial químico y de la asimetría de spin, que luego emplearemos en el cálculo del camino libre medio de neutrinos. En nuestro análisis general encontramos expresiones para calcular la presión, la magnetización y la susceptibilidad magnética del medio. En la sección de resultados, mostraremos valores numéricos para estas cantidades, comparándolas con las que resultan de un modelo que incluya la interacción entre los neutrones.

Debemos comentar que el fin último de esta línea de trabajo es tratar de describir una situación realista de una estrella de neutrones. Una estrella de neutrones se modela en general, por medio de capas concéntricas de diferentes radios, a partir del centro de la estrella. Cada capa tiene un rango de densidades que la caracteriza y diferentes temperaturas. Quizá el modelo más simple para el campo magnético de una estrella de neutrones es el del dipolo magnético. Aún este modelo supone un campo magnético con dependencia espacial. Tenemos entonces que densidad, temperatura y campo magnético, tienen una dependencia espacial para un caso realista. Sin embargo, la escala de esta dependencia es muy grande comparada con el rango de acción de la interacción débil (responsable de la interacción entre el neutrino y el neutrón). Luego, el pensar a estas cantidades como *localmente* constantes, es una buena aproximación. Esta es entonces nuestra motivación para estudiar todas las magnitudes de interés, para diferentes valores de la densidad, la temperatura y el campo magnético.

## Capítulo 3

# Camino libre medio del neutrino en materia neutrónica

El camino libre medio es la distancia media que recorre un neutrino entre dos colisiones sucesivas. En particular, en este trabajo modelamos al medio por materia neutrónica, bajo las condiciones que enunciamos en el capítulo anterior. En este capítulo, presentaremos y desarrollaremos las ecuaciones para el cálculo del camino libre medio del neutrino cuando es dispersado inelásticamente por un neutrón.

En presencia de un campo magnético la materia se polariza y el camino libre medio adquiere una dependencia con el ángulo entre la dirección del campo magnético y la dirección de movimiento del neutrino. Mostraremos cómo el camino libre medio del neutrino depende de la densidad de neutrones, la temperatura y el campo magnético.

En lo que sigue, presentaremos el esquema para el cálculo de la sección eficaz total de dispersión de neutrinos por neutrones. Para ello, emplearemos la Regla de Oro de Fermi. Vale la pena recordar que la Regla de Oro de Fermi nos da una probabilidad de transición por unidad de tiempo. En nuestro caso, es la probabilidad de que el neutrino se disperse. Fijamos el estado inicial del neutrino y sumamos sobre todos los posibles estados finales.

Antes de comenzar con el cálculo en sí, es conveniente señalar que el cálculo del camino libre medio de neutrinos en un medio denso, es un problema que se nutre de varias disciplinas: la EdE nos la da la termodinámica y la mecánica estadística, la sección eficaz de dispersión sale de la física de partículas. Eventualmente, pueden incluirse las interacciones entre las partículas del medio denso, empleando la física nuclear. Más allá de que en este trabajo no abordaremos ese punto, el fin último debe ser la comparación con datos observacionales de objetos compactos, como las estrellas de neutrones.

### 3.1. Sección eficaz para la dispersión neutrino-neutrón

Nuestro objetivo es calcular el camino libre medio de los neutrinos, que designaremos por medio de la letra  $\lambda$ ; en materia neutrónica, a temperatura finita y para un campo magnético intenso. En esta sección repetimos el formalismo desarrollado en (Torres Patiño y cols. (2019)).

Calculamos  $\lambda$  como la inversa de la sección eficaz total  $\sigma$ , por unidad de volumen  $V$ :

$$\lambda = \left( \frac{\sigma}{V} \right)^{-1}. \quad (3.1)$$

Debemos enfatizar que vamos a considerar al campo magnético como localmente constante. Notemos que un modelo realista del campo magnético de una estrella de neutrones emplea un campo magnético con dependencia espacial. Sin embargo, la curvatura de dicho campo es despreciable frente a la escala microscópica del proceso de dispersión de un neutrino por un neutrón. Un neutrino es un leptón (esto es, no interactúa por medio de la interacción fuerte); no tiene carga eléctrica e interactúa con el neutrón por medio de la interacción débil. La interacción débil es de corto alcance, lo cual respalda nuestra hipótesis de un campo magnético localmente constante. Además, el carácter de la interacción débil indica que la probabilidad de interacción es baja, lo cual se traduce en que el camino libre medio debe ser grande. Desarrollaremos estos puntos nuevamente en la sección de las conclusiones.

Siguiendo con el análisis del efecto del campo magnético, éste determina la polarización del medio, como mostramos en la ec. (2.11). La polarización del medio es una propiedad macroscópica que resulta del efecto colectivo del momento magnético de cada neutrón; determinado por su proyección de spin. Como sabemos, esta proyección puede ser up o down. En el caso de neutrones, el campo magnético favorece el spin down. De este modo, si todos los neutrones tienen su spin down, el sistema se encuentra completamente polarizado. Esa situación puede ocurrir con campos muy fuertes o con densidades muy bajas. El estado físico del sistema es aquel que minimiza el potencial termodinámico y el principio de Pauli nos dice que en un mismo nivel pueden tener dos neutrones solo si uno tiene spin up y el otro down. Luego, en ausencia de campo magnético habrá tantos neutrones con spin up, como down. En resumen y como ya lo habíamos señalado, en presencia de un campo magnético la situación más probable es la de una polarización parcial.

Hasta este punto hemos puesto el acento en el medio en que se propaga el neutrino. Como dijimos anteriormente, el objetivo de este capítulo es estudiar la reacción de dispersión inelástica de un neutrino con un neutrón. La reacción que estudiaremos es entonces,

$$\nu + n \rightarrow \nu' + n', \quad (3.2)$$

donde  $\nu$  y  $n$ , representan el neutrino y el neutrón, respectivamente. Las letras sin primar representan el estado inicial y aquellas primadas el estado final. Consideraremos a los neutrinos sin masa. En la Fig. 3.1, mostramos el diagrama de Feynman que respresenta a esta reacción; donde  $p_i$  designa al cuatri-momento de las partículas y  $q$ , el cuatri-momento transferido por la interacción. Dado que usamos la interacción débil, la constante de acoplamiento que corresponde a cada vértice es  $G_F$ , la constante de Fermi (ver Apéndice A).

La sección eficaz por unidad de volumen, según la regla de Oro de Fermi, es:

$$\frac{\sigma_{dis}(\vec{p}_\nu)}{V} = \int d\Pi_{\nu'} \int d\Pi_n \int d\Pi_{n'} f_{s_n}(E_n, \mu_n, T) [1 - f_{s'_n}(E'_n, \mu'_n, T)] \mathcal{W}_{fi}^{dis}, \quad (3.3)$$

donde  $\vec{p}_\nu$  es la cantidad de movimiento del neutrino incidente,  $E_i$ , la energía de la partícula

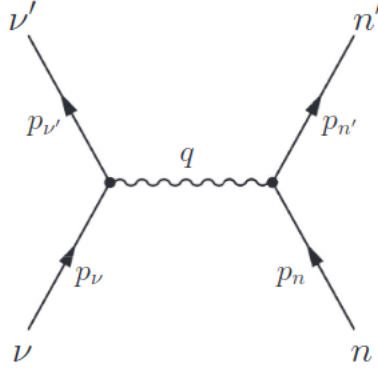


Figura 3.1: Diagrama de Feynman a menor orden para la reacción de scattering  $\nu + n \rightarrow \nu' + n'$

independiente y  $\mu_i$ , el potencial químico de la partícula  $i$ -ésima. Las integrales  $\int d\Pi_i$ , representan a la suma sobre el espacio de fase de la partícula  $i$ . La función  $\mathcal{W}_{fi}^{dis}$ , es la amplitud de transición al cuadrado de la reacción. Los índices  $i$  y  $f$ , representan al estado inicial y final de la reacción respectivamente.

Antes de seguir, es conveniente abrir un paréntesis sobre un punto conceptual relevante del problema. Al comienzo de este capítulo, afirmamos que al emplear la Regla de Oro de Fermi “fijamos el estado inicial y sumamos sobre los estados finales”. En la ec. (3.3), notamos que estamos sumando sobre los posibles estados del neutrón inicial. Podemos fijar el estado cuántico del neutrino incidente, pero no podemos conocer el del neutrón. Frente a ello, hacemos un promedio sobre los posibles estados iniciales del neutrón. Expongamos este punto: la función de onda del neutrón tiene una parte que depende del impulso y otra que depende del spin. En forma explícita, podemos escribir,

$$\int d\Pi_n = \sum_{spin} \int \frac{d\vec{p}_n}{(2\pi)^3}. \quad (3.4)$$

Enseguida, en esta sección, discutiremos la suma sobre spin. Es la presencia de la función de distribución  $f_{s_n}(E_n, \mu_n, T)$  en la ecuación (3.3), lo que determina que estemos haciendo un promedio sobre los estados de impulso del neutrón; ya que esta función le asigna un peso (entre cero y uno), a cada componente del impulso. De esta manera, en forma más rigurosa, debemos decir que “fijamos el estado del neutrino incidente, promediamos sobre los posibles estados iniciales del neutrón y sumamos sobre todos los estados finales.”

Volvamos ahora a la discusión del resto de los términos de la ec. (3.3). La amplitud de transición se obtiene con el módulo de la matriz de dispersión  $S_{fi}$  al cuadrado, dividido por el tiempo en cual se desarrolla la transición  $\mathcal{T}$ , como sigue,

$$\mathcal{W}_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{\mathcal{T}}. \quad (3.5)$$

La matriz de dispersión  $S_{fi}$ , se obtiene al evaluar entre el estado inicial y final al término principal del operador de dispersión  $\hat{S}$  en términos del operador evolución temporal  $\hat{S} = i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_{int}$ ; donde  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$  es el operador de densidad Hamiltoniana de la interacción. Por lo tanto la matriz de

dispersión queda,

$$S_{fi}^{dis} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_{n'} + p_{\nu'} - p_n - p_\nu)}{\sqrt{2E_\nu 2E_n 2E_{\nu'} 2E_{n'} V^4}} \mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}, \quad (3.6)$$

donde  $\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}$  es la matriz invariante de Møller. La expresión analítica de dicha matriz, varía según consideremos o no la polarización del medio.

Haciendo ahora todas las sustituciones pertinentes en la ec. (3.3), la expresión para el cálculo de la sección eficaz resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{dis}(\vec{p}_\nu)}{V} &= \int \frac{d\vec{p}_{\nu'}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_{n'}}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_n + p_\nu - p_{n'} - p_{\nu'}) \\ &\times f_{s_n}(E_n, \mu_n, T) (1 - f_{s_{n'}}(E_{n'}, \mu_{n'}, T)) \frac{\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}|^2 \rangle}{2^4 E_\nu E_{\nu'} E_n E_{n'}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

en esta expresión el símbolo  $\langle \rangle$  indica el promedio sobre el spin del neutrón inicial y la suma sobre el spin final. En lo que sigue, debemos dar en primer lugar una expresión analítica de la matriz  $\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}$  y luego operar sobre esta expresión para obtener valores de la misma que nos permitan evaluar la sección eficaz.

### 3.2. Matriz invariante de la transición $\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}$

Para poder evaluar la ec. (3.7), necesitamos hallar la matriz invariante de la transición  $\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}$  cuya expresión es

$$\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_f (\bar{u}_{\nu'} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\nu) (\bar{u}_{n'} \gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5) u_n). \quad (3.8)$$

Las cantidades  $C_V$  y  $C_A$  son las constantes de acoplamiento vectorial y axial-vectorial respectivamente y valen  $C_V = -1/2$ ,  $C_A = -1.23/2$ . En esta expresión,  $u_i$  representa al spinor de la partícula- $i$ . La expresión en sí, representa al elemento de matriz entre los estados inicial y final, mediada por la interacción débil (Griffiths (2008)). Podemos obtener la expresión del módulo del cuadrado de la matriz, como la contracción de dos tensores, uno leptónico que designaremos como  $l^{\mu\alpha}$  y otro hadrónico  $H_{\mu\alpha}$ :

$$|\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}|^2 = \frac{1}{2} G_F^2 l^{\mu\alpha} H_{\mu\alpha}, \quad (3.9)$$

donde el tensor leptónico viene dado por,

$$l^{\mu\alpha} \equiv (\bar{u}_{\nu'} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\nu)^\dagger (\bar{u}_{\nu'} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu); \quad (3.10)$$

mientras que el tensor hadrónico es,

$$H_{\mu\alpha} \equiv (\bar{u}_{n'} \gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5) u_n)^\dagger (\bar{u}_{n'} \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) u_n). \quad (3.11)$$

A partir de las definiciones dadas en las ecs. (3.10) y (3.11), se puede ver que se corresponde con la ec. (3.9). En lo que sigue, analizaremos separadamente los tensores leptónico y hadrónico.

### 3.2.1. Tensor Leptónico

Por conveniencia, repetimos la ec. (3.10):

$$l^{\mu\alpha} \equiv (\bar{u}_{\nu'}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_\nu)^\dagger(\bar{u}_{\nu'}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_\nu)$$

Haciendo uso de las propiedades de las matrices  $\gamma$ , podemos reexpresar el factor adjunto del tensor como sigue

$$(\bar{u}_{\nu'}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_\nu)^\dagger = u_\nu^\dagger(\gamma^\mu(1-\gamma_5))^\dagger\bar{u}_{\nu'}^\dagger = \bar{u}_{\nu'}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_\nu. \quad (3.12)$$

Por lo tanto, el tensor leptónico resulta,

$$l^{\mu\alpha} = (\bar{u}_{\nu'}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_\nu)(\bar{u}_{\nu'}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_\nu). \quad (3.13)$$

Del hecho de que los spinores satisfacen el momento espacial de la ecuación de Dirac y que son ortogonales, tenemos que,

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + mc). \quad (3.14)$$

Donde  $s = 1, 2$ , son las dos proyecciones del spin. Por lo tanto, para el caso de los neutrinos, y despreciando su masa

$$\sum_{s=1,2} u_{\nu'}\bar{u}^{\nu'} = \gamma^\nu p_{\nu'}. \quad (3.15)$$

Usando la notación de 'slash'  $\not{p}_{\nu'} = p^{\nu'}\gamma_{\nu'}$  y el truco de Casimir (ver Apéndice C), podemos escribir:

$$\sum_{spins} l^{\mu\alpha} = L^{\mu\alpha}, \quad (3.16)$$

con

$$L^{\mu\alpha} = Tr(\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}_{\nu'}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\not{p}_\nu) = 2Tr(\gamma^\mu\not{p}_{\nu'}\gamma^\alpha\not{p}_\nu + \gamma_5\gamma^\mu\not{p}_{\nu'}\gamma^\alpha\not{p}_\nu). \quad (3.17)$$

Usando propiedades de las trazas (Apéndice C), obtenemos para el primer término,

$$Tr(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\alpha\not{p}_3) = 4[p_1^\mu p_3^\alpha - g^{\mu\alpha}(p_1 p_3) + p_3^\mu p_1^\alpha] \quad (3.18)$$

mientras que para el segundo término,

$$Tr(\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\gamma\gamma^\lambda) = i\epsilon^{\mu\alpha\gamma\lambda}. \quad (3.19)$$

Obtenemos finalmente,

$$L^{\mu\alpha} = 8(p_{\nu'}^\mu p_\nu^\alpha + p_{\nu'}^\mu p_{\nu'}^\alpha - g^{\mu\alpha}(p_\nu p_{\nu'})) - i\epsilon^{\mu\alpha\gamma\lambda} p_{\mu'}\gamma p_{\mu\lambda}. \quad (3.20)$$

De este modo, fuimos capaces de realizar las sumas sobre spin y obtenemos una expresión que depende de la energía–momento de las partículas. Realizamos este cálculo (al igual que el del tensor hadrónico que sigue), en términos relativistas. Antes de obtener las expresiones finales, tomaremos el límite no–relativista.

### 3.2.2. Tensor Hadrónico

En el caso del tensor hadrónico, vamos a proceder de un modo levemente diferente al del caso del tensor leptónico. El motivo es que ahora las partículas son los neutrones y es conveniente mostrar separadamente las contribuciones de spin del neutrón inicial. Para ello, en el tensor hadrónico vamos a introducir el operador de proyección de spin,  $\Lambda_{s_n}$ , definido por,

$$\Lambda_{s_n} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \psi_{s_n}), \quad (3.21)$$

donde  $w_{s_n} = (0, 0, 0, s_n)$ , con  $s_n = 1$  para spin up y  $s_n = -1$  para spin down. La acción de este operador es proyectar sobre los estados de spin up o down del neutrón. Ahora, en la expresión del tensor hadrónico de la ec. (3.11), multiplicamos al neutrón inicial por el operador  $\Lambda_{s_n}$ :

$$H_{\mu\alpha}^{s_n} = (\bar{u}_{n'} \gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5) \Lambda_{s_n} u_n)^\dagger (\bar{u}_{n'} \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) \Lambda_{s_n} u_n). \quad (3.22)$$

Reescribimos los factores adjuntos del tensor hadrónico como:

$$(\bar{u}_{n'} \gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5) \Lambda_{s_n} u_n)^\dagger = \bar{u}_n \gamma^0 \Lambda_{s_n}^\dagger (\gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5))^\dagger \gamma^0 u_{n'}, \quad (3.23)$$

realizando la sustitución,

$$\gamma^0 \Lambda_s^\dagger (\gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5))^\dagger \gamma^0 = \Lambda_s (C_V + C_A \gamma_5) \gamma_\mu, \quad (3.24)$$

tenemos,

$$H_{\mu\alpha}^{s_n} = \bar{u}_n \Lambda_{s_n} (C_V + C_A \gamma_5) \gamma_\mu u_{n'} \bar{u}_{n'} \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) \Lambda_{s_n} u_n. \quad (3.25)$$

Como en el caso leptónico, la suma sobre spin se puede escribir en términos de una traza como,

$$\mathcal{H}_{\mu\alpha}^s = Tr(\Lambda_s (C_V + C_A \gamma_5) \gamma_\mu (\not{p}_{n'} + m_N) \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) \Lambda_s (\not{p}_n + m_N)). \quad (3.26)$$

Para evaluar esta traza, elegimos el sistema de referencia donde el neutrón inicial está en reposo. En este caso, resulta que el conmutador  $[\Lambda_s, \not{p}_n] = 0$ . Luego de un poco de álgebra y teniendo en cuenta que proyectar dos veces sobre la misma proyección de spin es igual a proyectar solo una vez ( $(\Lambda_s)^2 = \Lambda_s$ ), la traza hadrónica resulta,

$$H_{\mu\alpha}^s = tr((C_V + C_A \gamma_5) \gamma_\mu (\not{p}_{n'} + m_N) \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) \frac{(1 + \gamma_5 \psi_s)}{2} (\not{p}_n + m_N)). \quad (3.27)$$

Por conveniencia, separamos esta traza en tres contribuciones: aquellas que son proporcionales



a  $C_V^2$ ,  $C_A^2$  y  $C_V C_A$ , respectivamente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{s,V} &= 2C_V^2 \left( (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n) + m_N^2 g_{\mu\alpha}) \right. \\
&\quad \left. + im_N \left( \epsilon_{\mu\alpha\gamma\lambda} w^\gamma p_n^\lambda - \epsilon_{\mu\alpha\gamma\lambda} p_{n'}^\lambda w^\gamma \right) \right), \\
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{s,A} &= 2C_A^2 \left( (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n) - g_{\mu\alpha} m_N^2) \right. \\
&\quad \left. - im_N \left( \epsilon_{\mu\alpha\lambda\gamma} w^\lambda p_{n'}^\gamma + \epsilon_{\mu\alpha\lambda\gamma} w^\lambda p_n^\gamma \right) \right), \\
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{s,VA} &= 4C_V C_A \left( -m_N (p_{n'\mu} w_\alpha + p_{n'\alpha} w_\mu - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot w)) - i\epsilon_{\mu\alpha\gamma\lambda} p_{n'}^\gamma p_n^\lambda \right),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

donde por simplicidad, omitimos el índice de spin en todos los  $w$ . De este modo, tenemos,

$$\mathcal{H}_{\mu\alpha}^s = \mathcal{H}_{\mu\alpha}^{s,V} + \mathcal{H}_{\mu\alpha}^{s,A} + \mathcal{H}_{\mu\alpha}^{s,VA}. \tag{3.29}$$

Es conveniente tener expresiones explícitas para cada componente de spin. Para ello, damos valores explícitos a  $w_s = (0, 0, 0, s)$ . Además, usamos las siguientes propiedades,  $\epsilon_{\mu\alpha\gamma\lambda} w^\lambda = s\epsilon_{\mu\alpha\gamma z}$ , y  $w_\alpha = g_{\alpha\beta} w^\beta = sg_{\alpha z}$ , con  $s = +1(-1)$  para spin up (down). En lo que sigue, simplificaremos la notación de la proyección de spin por medio de la sustitución  $s = +1(-1) \rightarrow +(-)$ .

Para los términos con spin up, tenemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{+,V} &= 2C_V^2 \left( (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n) + m_N^2 g_{\mu\alpha}) \right. \\
&\quad \left. + im_N \left( \epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_n^\lambda - \epsilon_{\mu\alpha 3\gamma} p_{n'}^\gamma \right) \right), \\
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{+,A} &= 2C_A^2 \left( (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n) - g_{\mu\alpha} m_N^2) \right. \\
&\quad \left. - im_N \left( \epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_{n'}^\lambda + \epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_n^\lambda \right) \right), \\
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{+,VA} &= 4C_V C_A \left( -m_N (p_{n'\mu} g_{3\alpha} + p_{n'\alpha} g_{3\mu} + g_{\mu\alpha} p_{n'}^3) - i\epsilon_{\mu\alpha\gamma\lambda} p_{n'}^\gamma p_n^\lambda \right),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

mientras que para aquellos de spin down,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{-,V} &= 2C_V^2 \left( (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n) + m_N^2 g_{\mu\alpha}) \right. \\
&\quad \left. - im_N (\epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_n^\lambda - \epsilon_{\mu\alpha 3\gamma} p_{n'}^\gamma) \right), \\
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{-,A} &= 2C_A^2 \left( (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n) - g_{\mu\alpha} m_N^2) \right. \\
&\quad \left. + im_N (\epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_{n'}^\lambda + \epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_n^\lambda) \right), \\
\mathcal{H}_{\mu\alpha}^{-,VA} &= 4C_V C_A \left( m_N (p_{n'\mu} g_{3\alpha} + p_{n'\alpha} g_{3\mu} + g_{\mu\alpha} p_{n'}^3) - i\epsilon_{\mu\alpha\gamma\lambda} p_{n'}^\gamma p_n^\lambda \right).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

De este modo, tenemos ya todos los elementos que necesitamos para evaluar  $\langle |\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}|^2 \rangle$ .

### 3.2.3. Evaluación de $\langle |\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}|^2 \rangle$

A partir de la expresión de la matriz  $\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}$ , dada en la ec. (3.8), mostramos cómo construir el módulo al cuadrado de dicha expresión. De este modo, podemos pasar de  $|\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}|^2$  (donde aún no hicimos las sumas sobre spin), a  $\langle |\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}|^2 \rangle$ , que podemos escribir como,

$$\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^+|^2 \rangle = \frac{1}{2} G_F^2 L^{\mu\alpha} H_{\mu\alpha}^+, \tag{3.32}$$

$$\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^-|^2 \rangle = \frac{1}{2} G_F^2 L^{\mu\alpha} H_{\mu\alpha}^-, \tag{3.33}$$

dependiendo de si la proyección de spin del neutrón inicial es up o down. Las ecs. (3.32) y (3.33), representan un punto central, desde el punto de vista conceptual, de este trabajo: debemos saber cuál es la componente de spin de la función de onda del neutrón inicial. Lo que mostramos en estas expresiones son dos resultados diferentes, uno para el caso de spin up y el otro para el caso de spin down. Sería un error realizar la suma directa de estos dos términos, pues se violaría la normalización de la función de onda. En las próximas dos secciones, analizaremos el caso no polarizado en primer lugar, y luego el caso polarizado. Cuando no existe polarización, significa que existe el mismo número de neutrones con spin up, que el de down. De este modo y agregando un factor de normalización, cada uno de los términos de estas expresiones debe ser sumados con el mismo peso. En el caso de un sistema totalmente polarizado, nos debemos quedar solo con  $\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^-|^2 \rangle$ . Finalmente, en el caso de un sistema parcialmente polarizado debemos sumar los dos términos con los factores de peso adecuado. Esta idea la desarrollamos en las próximas secciones y constituye el núcleo central del trabajo.

Continuamos ahora con el álgebra de las ecs. (3.32) y (3.33), que nos permita obtener expresiones analíticas para el cálculo del camino libre medio. Debemos calcular la contracción entre las trazas  $L^{\mu\alpha}$  y  $H_{\mu\alpha}^s$ . Este es un proceso laborioso, pero conceptualmente simple. En esta subsección no mostraremos todos los detalles de esa cuenta, sino solo los resultados finales. En el Apéndice D, mostramos algunos resultados intermedios. En particular, mostramos el límite no-relativista,

que sintetizamos en las ecs. (D.4). No vamos a discutir cada una de todas estas expresiones, pero tomaremos dos casos que consideramos representativos. En primer lugar,

$$p_n \cdot p_{n'} \cong m_N^2, \quad (3.34)$$

como pensamos al neutrón en reposo, el producto escalar del cuadrimomento energía-impulso, se reduce al producto de su energía, que tomaremos como su masa en reposo. Debemos notar que en este mismo trabajo, ya establecimos un valor de la energía del neutrón diferente. A nivel del cálculo del elemento de transición débil, esto constituye una buena aproximación. En segundo lugar,

$$p_\nu \cdot p_{\nu'} = E_\nu E_{\nu'} (1 - \cos \theta_{\nu\nu'}). \quad (3.35)$$

Como pensamos que el neutrino no tiene masa, resulta  $E_\nu = |\vec{p}_\nu|$ , luego,

$$p_\nu \cdot p_{\nu'} = E_\nu E_{\nu'} - \vec{p}_\nu \cdot \vec{p}_{\nu'} = E_\nu E_{\nu'} - |\vec{p}_\nu| |\vec{p}_{\nu'}| \cos \theta_{\nu\nu'} = E_\nu E_{\nu'} (1 - \cos \theta_{\nu\nu'}).$$

Ahora y a partir de los resultados del Apéndice D, obtenemos finalmente,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}^+|^2 \rangle &= 16G_F^2 m_N^2 E_\nu E_{\nu'} \left( (C_V^2 + 3C_A^2) \cos(\theta_{\nu\nu'}) \right. \\ &\quad \left. + 2C_A \left( (C_a + C_V) \cos(\theta_\nu) + (C_V - C_A) \cos(\theta_{\nu'}) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

y

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}^-|^2 \rangle &= 16G_F^2 m_N^2 E_\nu E_{\nu'} \left( (C_V^2 + 3C_A^2) \cos(\theta_{\nu\nu'}) \right. \\ &\quad \left. - 2C_A \left( (C_a + C_V) \cos(\theta_\nu) + (C_V - C_A) \cos(\theta_{\nu'}) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

El paso siguiente es emplear estas expresiones en el cálculo de la sección eficaz total de dispersión.

### 3.3. Sección eficaz del neutrino para un sistema no polarizado

En esta sección construiremos las expresiones analíticas finales para el cálculo del camino libre medio de neutrinos. Comenzamos con el caso no polarizado; esto es, para el caso en que el campo magnético es nulo. Para ello, partimos de la expresión de la sección eficaz total, dada en la ec. (3.7); donde debemos emplear la expresión de la matriz  $\mathcal{M}_{\mu'n',\mu n}$ , adecuada a la situación física que estudiamos. De este modo, es igualmente probable que el neutrón se encuentre con spin up o down, por lo cual le damos el mismo peso a cada proyección de spin. Teniendo en cuenta la

normalización,

$$\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}|^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^+|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^-|^2 \rangle). \quad (3.38)$$

Usando las ecuaciones (3.36) y (3.37), obtenemos,

$$\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}|^2 \rangle = 16G_F^2 m_N^2 E_\nu E_{\nu'} \left( (C_V^2 + 3C_A^2) + (C_V^2 - C_A^2) \cos\theta_{\nu,\nu'} \right). \quad (3.39)$$

Notemos que al realizar esta suma, se produce una cancelación entre los términos proporcionales a  $\cos\theta_\nu$  y  $\cos\theta_{\nu'}$ , que están presentes en las ecs. (3.36) y (3.37). Estos ángulos son del neutrino entrante y saliente con el campo magnético. Al no haber campo magnético, el único ángulo que sobrevive es aquel entre el impulso del neutrino entrante y saliente ( $\theta_{\nu,\nu'}$ ).

Reemplazando ahora la ec. (3.39) en la ec. (3.7), tenemos,

$$\frac{\sigma_{dis}(\vec{p}_\nu)}{V} = G_F^2 \int \frac{d\vec{p}_{\nu'}}{(2\pi)^3} \left( C_V^2 (1 + \cos\theta_{\nu,\nu'}) + C_A^2 (3 - \cos\theta_{\nu,\nu'}) \right) S^0(q_0, \vec{q}, T), \quad (3.40)$$

donde usamos la función  $\delta^{(3)}(\vec{p}_\nu + \vec{p}_n - \vec{p}_{\nu'} - \vec{p}_{n'})$  para integrar sobre el momento  $\vec{p}_{n'}$  (notemos que en la ec. (3.7), tenemos una función delta- $\delta^4$ , sobre energía e impulso). La función  $S^0(q_0, \vec{q}, T)$ , se denomina función de estructura, describe la respuesta de la materia neutrónica a las excitaciones inducidas por los neutrinos, y está dada por,

$$S^0(q_0, \vec{q}, T) = \frac{1}{(2\pi)} \int d\vec{p}_n f_n(\vec{p}_n, T) (1 - f_{n'}(\vec{p}_n + \vec{q}, T)) \delta(q_0 + E_n(\vec{p}_n, T) - E_{n'}(\vec{p}_n + \vec{q}, T)), \quad (3.41)$$

donde  $q_0 = E_\nu - E_{\nu'} = |\vec{p}_\nu| - |\vec{p}_{\nu'}|$  y  $\vec{q} = \vec{p}_\nu - \vec{p}_{\nu'}$ , son la energía y el impulso transferido por la interacción. La integral de la función de estructura se puede calcular en forma analítica y su expresión explícita es (ver Reddy (1998), Margueron y cols. (2003)),

$$S^0(q_0, \vec{q}, T) = \frac{1}{1 - e^{-q_0/T}} \frac{m^2 T}{2\pi q} \ln \left( \frac{1 + e^{(A+q_0/2)/T}}{1 + e^{(A-q_0/2)/T}} \right), \quad (3.42)$$

donde  $A = \mu - m q_0^2 / (2q^2) - q^2 / (8m)$  y  $q = \sqrt{p_\nu^2 + p_{\nu'}^2 - 2|\vec{p}_\nu||\vec{p}_{\nu'}| \cos\theta_{\nu\nu'}}$

Antes de terminar esta sección, es interesante notar que en la ec. (3.41), aparece la diferencia de energía entre el neutrón inicial y final. De este modo, el término de la masa en reposo de la energía se cancela. Este punto ya lo habíamos comentado, pero es útil repetirlo cuando mostramos la función de estructura. Cuando evaluamos el elemento de matriz de la interacción débil y tomamos el límite no-relativista, en la ec. (3.34), sólo nos quedamos con el término de masa de la energía del neutrón. Este punto nos da una cierta justificación de la aproximación dada por la ec. (3.34): en ese caso el término de masa sobrevive y es el dominante. En la función de estructura ese término se cancela y debemos tomar los términos siguientes.

### 3.4. Sección eficaz del neutrino para un sistema polarizado

Analizaremos ahora el efecto de la polarización del medio neutrónico sobre la sección eficaz total de dispersión del neutrino. Como ya mencionamos anteriormente, consideramos un campo magnético localmente constante, en la dirección del eje- $z$ . La geometría del proceso de dispersión se muestra en la Fig. 3.2. Notemos que el neutrino incidente  $\nu$ , forma un ángulo con el campo magnético dado por  $\theta_\nu$ . Para el ángulo azimutal, tomamos arbitrariamente  $\phi_\nu = 0$ . Por otra parte, el neutrino saliente  $\nu'$ , forma un ángulo  $\theta_{\nu'}$  con el campo magnético y su ángulo azimutal es  $\phi_{\nu'}$ . El ángulo entre  $\nu$  y  $\nu'$  es  $\theta_{\nu\nu'}$ ; este ángulo se puede relacionar con los anteriores, empleando la expresión,

$$\cos \theta_{\nu\nu'} = \sin \theta_\nu \sin \theta_{\nu'} \cos \phi_{\nu'} + \cos \theta_\nu \cos \theta_{\nu'} . \quad (3.43)$$

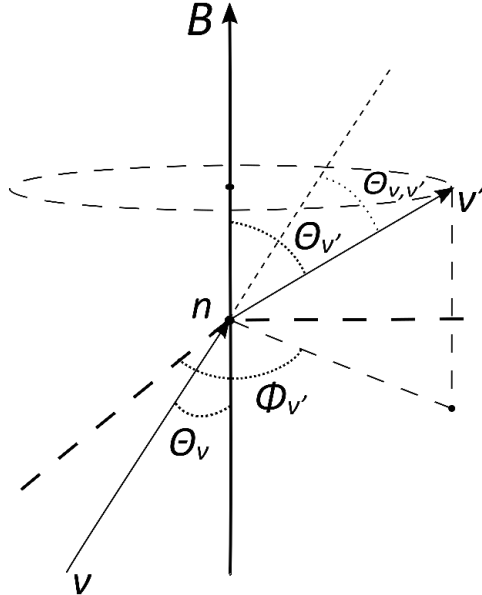


Figura 3.2: Geometría del proceso de dispersión para el caso polarizado. En el punto central tenemos a un neutrón en reposo. El eje- $z$  lo define el campo magnético. En esta figura mostramos la relación de ángulos para el neutrino incidente  $\nu$  y el neutrino dispersado  $\nu'$ .

A continuación para el cálculo de la sección eficaz, procederemos en forma análoga a como lo hicimos para el caso no-polarizado: debemos reemplazar las expresiones de la matriz de transición para spin up y down (ecs.( 3.36) y (3.37), respectivamente), en la expresión de la sección eficaz

total (ec. 3.7), tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^\pm(p_\nu)}{V} &= G_F^2 \int \frac{d\vec{p}_{\nu'}}{(2\pi)^3} \left( (C_V^2 + 3C_A^2) + (C_V^2 - C_A^2) \cos \theta_{\nu\nu'} \right. \\ &\quad \left. \pm 2C_A \left( (C_A + C_V) \cos \theta_\nu + (C_V - C_A) \cos \theta_{\nu'} \right) \right) \mathcal{S}_\pm^0(q_0, \vec{q}, T), \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde empleamos para la función de estructura una expresión aproximada dada por Margueron y cols. (2003):

$$\mathcal{S}_\pm^0(q_0, \vec{q}, T) = \frac{1}{1 - e^{-q_0/T}} \frac{m^2 T}{2\pi q} \ln \left( \frac{1 + e^{(A_\pm + q_0/2)/T}}{1 + e^{(A_\pm - q_0/2)/T}} \right), \quad (3.45)$$

con  $A_\pm = \mu \pm \mu_N g_n B - m q_0^2 / (2q^2) - q^2 / (8m)$ . Los valores de  $q_0$  y  $q$  son los mismos que para el caso no-polarizado.

Ahora bien, como señalamos, las expresiones de la sección eficaz total dadas por la ec. (3.44), son directamente aplicables solo en el caso de materia completamente polarizada. Pensemos en una situación física real de una estrella de neutrones con un campo magnético muy intenso, que determina una polarización parcial de los neutrones. Tendremos un cierto número de neutrones con spin down y otros con spin up. En este punto, debemos establecer una conexión entre el cálculo de la sección eficaz y el grado de polarización del sistema, que obtuvimos de la ecuación de estado. Consideremos un sistema formado por un número  $N$ , muy grande de neutrones. Podemos medir la proyección- $z$  del operador de spin para cada neutrón. Digamos que tenemos  $N_+$  ( $N_-$ ) neutrones con spin up (down). Naturalmente,  $N = N_+ + N_-$ . Dado el operador de proyección de spin  $\hat{S}_z$  ( $\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm(\hbar/2) |\pm\rangle$ ), por construcción el valor medio de este operador para todo el sistema  $\langle \hat{S}_z \rangle_{\text{sistema}}$ , resulta,

$$\langle \hat{S}_z \rangle_{\text{sistema}} = \left( \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \right) \frac{\hbar}{2}. \quad (3.46)$$

Notemos ahora que la densidad de número de neutrones es por definición,

$$\rho_n \equiv \frac{N}{V},$$

y análogamente  $\rho_{n,\pm} \equiv N_\pm / V$ . Recordando la expresión para la asimetría de spin,  $A_n$  en la ec. (2.11), obtenemos,

$$\langle \hat{S}_z \rangle_{\text{sistema}} = A_n \frac{\hbar}{2}, \quad (3.47)$$

donde simplemente en la ec. (3.46), multiplicamos y dividimos por el volumen  $V$ . Buscamos ahora una función de onda de spin, tal que al calcular el valor medio del operador  $\hat{S}_z$  con esa función de onda, obtengamos  $\langle \hat{S}_z \rangle_{\text{sistema}}$ . Para ello, comenzamos con una función de onda mezcla,

$$|\chi_n\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle. \quad (3.48)$$

Sea  $\langle \hat{S}_z \rangle_{\chi_n}$  el valor medio del operador  $\hat{S}_z$ , empleando la función de onda  $|\chi_n\rangle$ , esto es,  $\langle \hat{S}_z \rangle_{\chi_n} =$

$\langle \chi_n | \hat{S}_z | \chi_n \rangle$ . Tenemos entonces,

$$\langle \hat{S}_z \rangle_{\chi_n} = (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{\hbar}{2}. \quad (3.49)$$

Pedimos ahora que,

$$\langle \hat{S}_z \rangle_{\chi_n} = \langle \hat{S}_z \rangle_{\text{sistema}}. \quad (3.50)$$

Al pedir esto, estamos construyendo una función de onda de spin de un neutrón cuyo valor medio representa al conjunto de todas las partículas del sistema. Esta igualdad, junto con la normalización de la función de onda resulta en,

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 - |\beta|^2 &= A \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1, \end{aligned} \quad (3.51)$$

Obtenemos entonces,

$$|\alpha|^2 = \frac{1 + A_n}{2}, \quad |\beta|^2 = \frac{1 - A_n}{2}. \quad (3.52)$$

A partir de las cuales obtenemos dos funciones de onda independientes,

$$|\chi_n\rangle_1 = \sqrt{\frac{1 + A_n}{2}} |+\rangle + \sqrt{\frac{1 - A_n}{2}} |-\rangle, \quad (3.53)$$

$$|\chi_n\rangle_2 = \sqrt{\frac{1 + A_n}{2}} |+\rangle - \sqrt{\frac{1 - A_n}{2}} |-\rangle. \quad (3.54)$$

Dado que estas dos funciones de onda conducen al mismo valor medio, es indiferente cuál de las dos usar, ya que obtendremos el mismo resultado. Al reemplazar esta función de onda en el elemento de matriz de transición, obtenemos que los factores de peso de las componentes de la sección eficaz (ver ec.(3.44)), están dados por los factores  $|\alpha|^2$  y  $|\beta|^2$  de las ecs. (3.52). Obtenemos finalmente,

$$\frac{\sigma(p_\nu)}{V} = \left( \frac{1 + A_n}{2} \right) \frac{\sigma^+(p_\nu)}{V} + \left( \frac{1 - A_n}{2} \right) \frac{\sigma^-(p_\nu)}{V}. \quad (3.55)$$

Esta expresión nos permite calcular la sección eficaz total, y por lo tanto el camino libre medio, para materia parcialmente polarizada. Notemos que la expresión es válida para el caso de materia no-polarizada. En este caso, reemplazamos en la ec. (3.55) la asimetría de spin por su valor para el caso no polarizado ( $A_n = 0$ ), con lo cual obtenemos la ec. (3.40).

Vemos que la asimetría de spin,  $A_n$ , juega un papel directo en la expresión del camino libre medio de neutrinos para el caso de materia polarizada. Sin embargo, no es la única fuente de asimetría: en materia polarizada, cambia el potencial químico, lo cual se refleja en el camino libre medio. Éste es un resultado de la EdE para un medio polarizado, al igual que  $A_n$ . También, en el caso polarizado, aparecen términos proporcionales a  $\cos \theta_\nu$  y  $\cos \theta_{\nu'}$ , que se cancelan para el caso no-polarizado. Éste es un efecto dinámico de la interacción débil. Vemos entonces que tanto el medio (a través de la EdE), como el vértice de interacción débil; contribuyen a la asimetría en el camino libre medio. En la sección de Resultados discutiremos este punto.

### 3.5. Resumen del cálculo del camino libre medio

En este capítulo obtuvimos una expresión explícita para el cálculo del camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica. Lo hicimos calculando la sección eficaz total de dispersión por unidad de volumen para la reacción de dispersión inelástica de un neutrino por un neutrón. El carácter de inelasticidad está dado por el hecho de que la energía del neutrino incidente y del neutrino dispersado, pueden ser diferentes. Para calcular esta sección eficaz, empleamos la Regla de Oro de Fermi. Desde el punto de vista analítico, la mayor dificultad es el cálculo del elemento de matriz de transición de la interacción débil. Si bien ya lo hemos nombrado, vale la pena recordar que cuando calculamos el elemento de matriz débil, tomamos al neutrón en reposo. El término dominante de este elemento de matriz, es el que proviene de la masa en reposo del neutrón. Luego, en la misma expresión para la sección eficaz total, en la función de estructura empleamos para la energía del neutrón, la energía de partícula independiente (que postulamos en el capítulo anterior; ver ec. (2.1)). Esta energía contiene a la masa en reposo, más la energía cinética y el acoplamiento del neutrón con el campo magnético. Sin embargo, en el cálculo de la función de estructura el término de la masa en reposo se cancela; lo que nos obliga a incluir a los otros términos. Naturalmente, estas aproximaciones son válidas en tanto los neutrones se puedan considerar como no-relativistas.

Existe otro punto que vale la pena remarcar. Nuestro cálculo es autoconsistente, en el sentido de que en primer lugar calculamos una EdE, que nos da valores para la asimetría de spin y el potencial químico, que usamos en el cálculo del camino libre medio de neutrinos.

Antes de terminar y de la misma manera en que lo discutimos para el caso de la EdE, debemos hacer una referencia más explícita al caso realista de una estrella de neutrones. Lo discutido sobre la dependencia espacial con la densidad, temperatura y campo magnético; mantiene su validez en este capítulo. Queremos analizar en este párrafo un punto algo sutil. Cuando un neutrino interactúa con un neutrón, va a encontrar a éste con spin up o con spin down. Esto es general y vale aún en ausencia de campo magnético (fue por ello que para el caso  $B = 0$ , promediamos las dos contribuciones con el mismo peso). En el caso de materia polarizada, vamos a tener más neutrones con spin down, que con spin up. Podríamos imaginar un modelo de la estrella de neutrones en que distribuimos los neutrones con spin up y down, en forma arbitraria, pero respetando el valor de la asimetría de spin que resulta de la EdE. Así, modelaríamos numéricamente la dispersión de muchos neutrinos, obteniendo un valor medio para el camino libre medio. El llevar adelante esta idea no sería simple. Sin embargo, la mecánica cuántica nos dice que un solo neutrón en un estado mezcla, da cuenta del valor medio del sistema. En lugar de localizar los neutrones asignándoles spin up o down, decimos que cada uno de los neutrones tiene una cierta probabilidad de tener spin up y otra de down. De este modo, aún dentro de nuestro modelo, podemos dar cuenta de algo complejo en términos simples.



# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo presentaremos los resultados tanto de los valores obtenidos a partir de la ecuación de estado como del camino libre medio de los neutrinos en materia neutrónica. Vale la pena recordar que consideramos materia neutrónica degenerada, no-relativista, bajo un campo magnético intenso y temperatura finita; sin interacciones entre los neutrones. Los resultados son mostrados en un rango de densidades de entre  $0 \leq \rho \leq 0.4 \text{ fm}^{-3}$ , que corresponde a la región del núcleo externo de la estrella de neutrones, para temperaturas que alcanzan hasta los  $T = 30 \text{ MeV}$  y campos magnéticos constantes que van desde  $B = 0 \text{ G}$  hasta  $B = 10^{18} \text{ G}$ .

Para obtener los resultados, se desarrollaron tres programas utilizando FORTRAN 90. Cada programa fue escrito para un cálculo específico en el marco de la tesis: en primer lugar, un programa para el cálculo de los potenciales químicos. Luego, otro programa que nos da los valores de la EdE y la termodinámica del sistema con los potenciales químicos hallados. Por último, el programa del cálculo del camino libre medio, con los valores obtenidos anteriormente en función de la energía y del ángulo del neutrino incidente.

### 4.1. Resultados EdE

A partir de la construcción de una EdE para materia neutrónica como vimos en el capítulo 2, obtenemos valores del potencial químico y de la asimetría de spin, fijando el valor de la densidad de número de neutrones, la temperatura y el campo magnético. Mostraremos valores numéricos para estas cantidades. Además, mostraremos valores para la presión, la magnetización y la susceptibilidad magnética del medio.

En primer lugar, en las figuras 4.1 y 4.2, se muestran valores del potencial químico  $\mu$  en función de la densidad  $\rho$  para diferentes temperaturas y para diferentes campos magnéticos. El potencial químico crece monótonamente con la densidad, y no muestra una dependencia apreciable con el campo magnético, pero sí muestra una fuerte dependencia con la temperatura. Llegando a tomar valores negativos a bajas densidades y altas temperaturas. Un punto a destacar, es que la masa en reposo del neutrón puede estar contenida tanto en la energía independiente de la partícula, como en el potencial químico. Vale aclarar que sólo por conveniencia y para mayor claridad de los resultados, la masa no está contenida en nuestra definición de potencial químico. Ésto no

cambia el resto de los resultados, ya que en la función de distribución, al estar la resta de la energía de partícula independiente con el potencial químico, la masa en reposo se cancela. Es por este motivo, que en los gráficos podemos ver que a bajas densidades, el potencial químico puede tomar valores negativos.

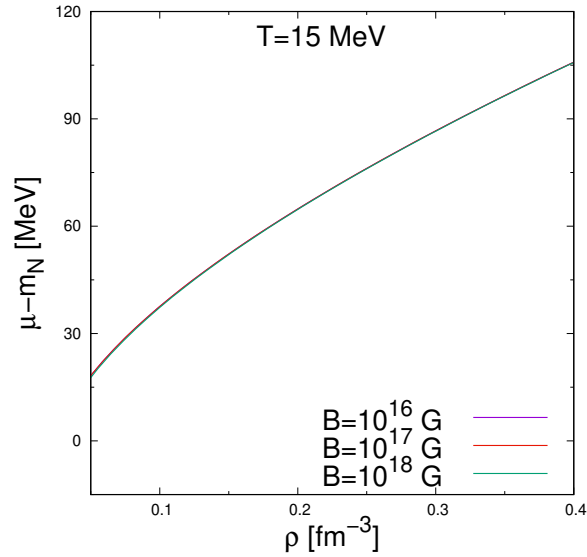


Figura 4.1: Potencial químico en función de la densidad. Mostramos el potencial químico para  $B = 10^{16}$ ,  $10^{17}$ ,  $10^{18}$  G y  $T=15$  MeV

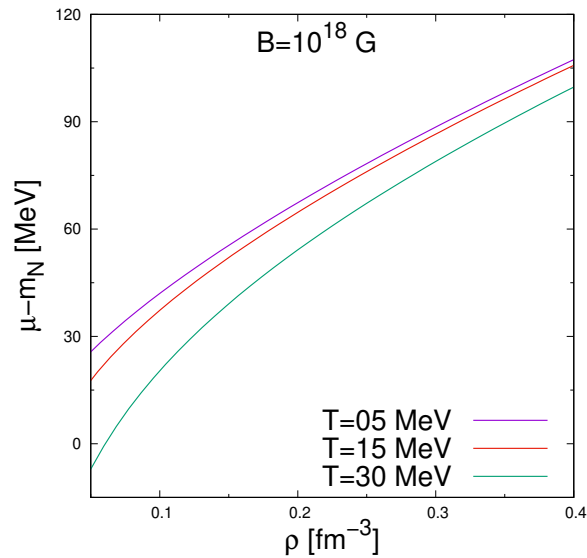


Figura 4.2: Potencial químico en función de la densidad. Mostramos el potencial químico para  $T= 5, 15, 30$  MeV y  $B = 10^{16}$  G

Mostraremos ahora la asimetría de spin  $A$  como función de la densidad, la temperatura y el campo magnético. Recordemos que la asimetría de spin caracteriza el grado de polarización del sistema. En el caso no polarizado, es decir, en ausencia de campo magnético, el valor de la asimetría es  $A = 0$ ; por lo que tenemos el mismo número de neutrones con spin up y down. Cuando la materia está totalmente polarizada todos los spines se encuentran up o down. Esto es,  $A = 1$  o  $A = -1$  respectivamente.

En las figuras 4.3 y 4.4 analizamos la asimetría de spin en función de la densidad. En la figura 4.3 vemos como cambia la asimetría para distintos valores del campo magnético. Notamos que la asimetría disminuye a medida que disminuye el campo magnético. Como habíamos dicho en el capítulo 2 el valor de la asimetría resulta de la competencia entre el campo magnético que busca alinear todos los spines y el principio de Pauli que busca el mismo número de partículas con spin up y down. De esta manera, a medida que aumenta la densidad el Principio de Pauli se hace más efectivo y la asimetría disminuye. Obviamente, para densidades muy bajas, las partículas se comportan como partículas libres y la asimetría aumenta. En la figura 4.4 estudiamos para un campo magnético fijo de  $B = 10^{18}$  G la dependencia de la asimetría con la temperatura. Vemos que a medida que la temperatura aumenta la asimetría disminuye. Ésto es consecuencia del desorden térmico de las partículas, que desfavorece el estado polarizado que es más ordenado.

En las figuras 4.5 y 4.6 mostramos el potencial de Helmholtz en función de la densidad para diferentes valores de temperaturas y campo magnético. En la figura 4.5 podemos notar que la dependencia del potencial con el campo magnético es extremadamente débil, mientras que en la figura 4.6, se ve que no sucede lo mismo con la dependencia del potencial con la temperatura, mostrando que el potencial disminuye a medida que aumenta la temperatura. El por qué de este comportamiento, resulta del análisis numérico en donde vemos que el término de entropía se incrementa a medida que aumenta la temperatura determinando este comportamiento. Notemos que eventualmente el potencial puede hacerse negativo.

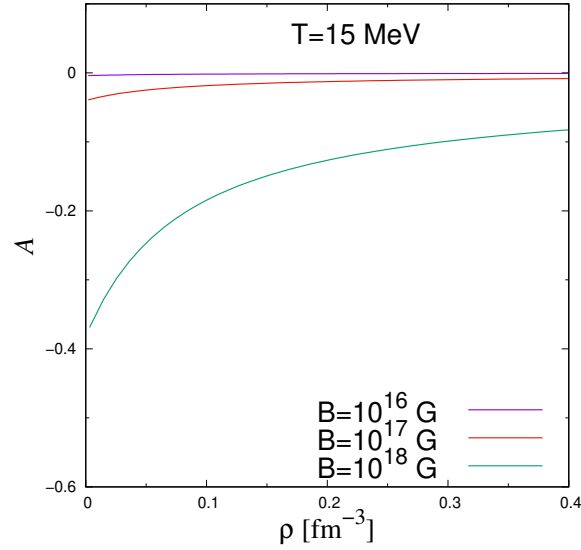


Figura 4.3: Asimetría de spin en función de la densidad. Mostramos la asimetría de spin para  $B = 10^{16}$ ,  $10^{17}$ ,  $10^{18}$  G y  $T=15$  MeV

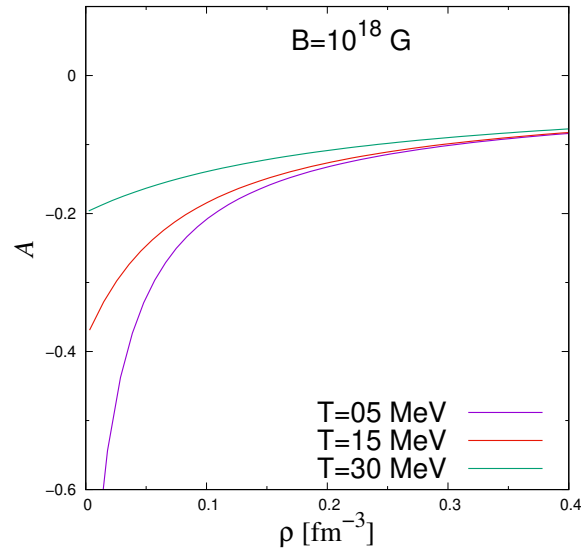


Figura 4.4: Asimetría de spin en función de la densidad. Mostramos la asimetría de spin para  $T= 5, 15, 30$  MeV y  $B = 10^{18}$  G

Analizaremos ahora la dependencia de la presión con la densidad, para diferentes valores de la temperatura y campo magnético. Se puede ver en la figuras 4.7 y 4.8, que la presión crece monótonamente con la densidad. En la figura 4.7 estudiamos la dependencia de la presión con distintos valores del campo magnético. Al igual que con el potencial del Helmholtz, la dependencia es débil con el campo magnético. Para entender este punto, en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3, analizamos las diferentes contribuciones a la presión para diferentes campos magnéticos. Vemos que el término de la magnetización por el campo magnético ( $\mu_N g_n W_n B$ , ver la ecuación (2.14)) muestra una fuerte dependencia con el campo magnético pero su magnitud relativa es pequeña, aún para el caso de  $B = 10^{18}$  G. Esto nos permite entender la débil dependencia de la presión con el campo magnético. En la figura 4.8 estudiamos cómo varía la presión respecto de la temperatura. Vemos que el cambio con la temperatura es importante. Para una densidad fija la presión aumenta con

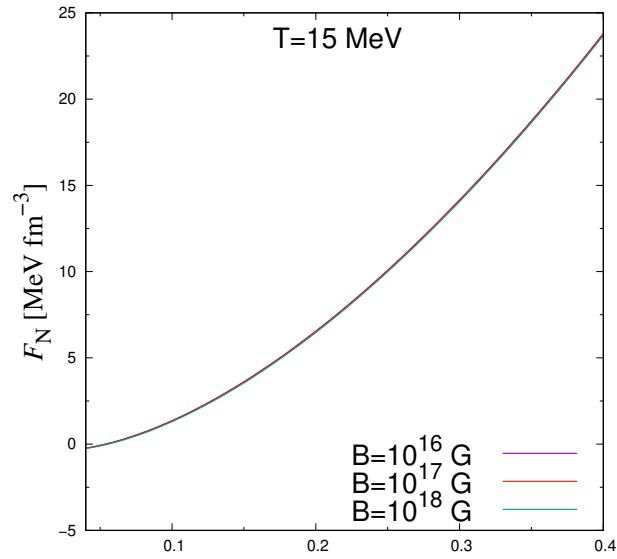


Figura 4.5: Potencial de Helmholtz en función de la densidad. Mostramos el potencial de Helmholtz para  $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$  G y  $T=15$  MeV

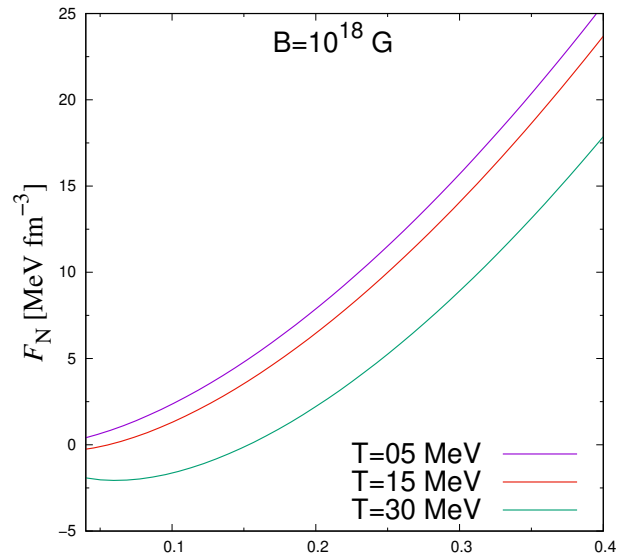


Figura 4.6: Potencial de Helmholtz en función de la densidad. Mostramos el potencial de Helmholtz para  $T = 5, 15, 30$  MeV y  $B = 10^{18}$  G

la temperatura; lo cual está de acuerdo con la termodinámica de sistemas en general.

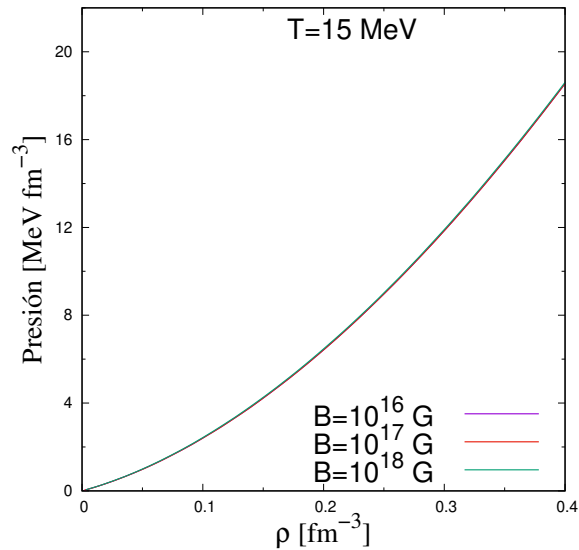


Figura 4.7: Presión en función de la densidad. Mostramos la presión para  $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$  G y  $T=15$  MeV

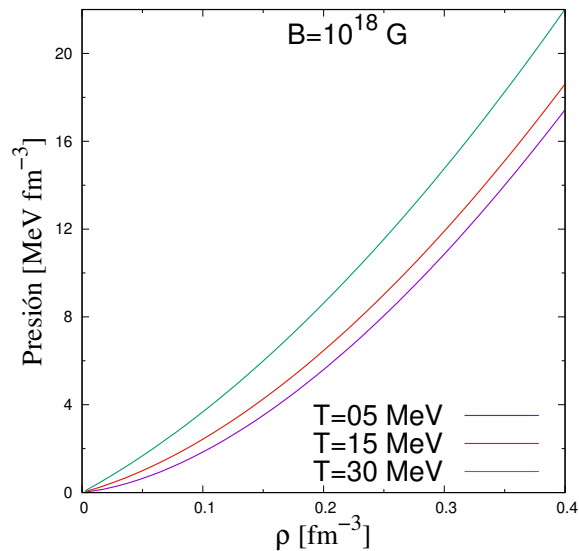


Figura 4.8: Presión en función de la densidad. Mostramos la presión para  $T = 5, 15, 30$  MeV y  $B = 10^{18}$  G

En las figuras 4.9 y 4.10, se muestran resultados de la magnetización del sistema en función de la densidad, para diferentes valores de la temperatura y del campo magnético. Al igual que observamos para el caso de la asimetría del spin, para un campo magnético del orden de  $B = 10^{16}$  G, la magnetización de la materia no es relevante, mientras que para campos magnéticos más intensos, se observa un crecimiento fuerte de la magnetización, especialmente a altas densidades. Notemos que la magnetización nos indica el grado de polarización del sistema con el campo magnético. Por lo tanto, es una cantidad que satura. Si aumentamos arbitrariamente el campo magnético, para algún valor del campo magnético, el sistema se polariza completamente y a partir de ahí la magnetización permanece constante. Si bien hay una dependencia con la temperatura (a menor temperatura, menor magnetización), ésta no es tan relevante como la dependencia que se observa con el campo magnético. Notamos además, que en el gráfico 4.4,

$\rho$	$\mu_n \rho_n$	$-\sum_{s_n=\pm 1} \frac{K_{n,s_n}}{2m}$	$\mu_N g_n W_n B$	$TS_n$	$P$
$\rho_0/2$	2.47	-2.68	$9.97 \times 10^{-6}$	2.00	1.79
$\rho_0$	8.78	-6.95	$1.39 \times 10^{-5}$	2.80	4.63
$2\rho_0$	29.02	-19.64	$1.83 \times 10^{-5}$	3.71	13.09

Cuadro 4.1: Contribuciones de los términos a la presión en función de la densidad para  $T=15$  MeV y  $B=10^{16}$  G

$\rho$	$\mu_n \rho_n$	$-\sum_{s_n=\pm 1} \frac{K_{n,s_n}}{2m}$	$\mu_N g_n W_n B$	$TS_n$	$P$
$\rho_0/2$	2.5	-2.71	$1.00 \times 10^{-3}$	2.01	1.80
$\rho_0$	8.78	-6.95	$1.39 \times 10^{-3}$	2.80	4.63
$2\rho_0$	29.01	-19.63	$1.83 \times 10^{-3}$	3.71	13.09

Cuadro 4.2: Contribuciones de los términos a la presión en función de la densidad para  $T=15$  MeV y  $B=10^{17}$  G

$\rho$	$\mu_n \rho_n$	$-\sum_{s_n=\pm 1} \frac{K_{n,s_n}}{2m}$	$\mu_N g_n W_n B$	$TS_n$	$P$
$\rho_0/2$	2.44	-2.72	$9.90 \times 10^{-2}$	2.00	1.81
$\rho_0$	8.75	-7.00	$1.30 \times 10^{-1}$	2.79	4.67
$2\rho_0$	29.03	-19.75	$1.80 \times 10^{-1}$	3.71	13.17

Cuadro 4.3: Contribuciones de los términos a la presión en función de la densidad para  $T=15$  MeV y  $B=10^{18}$  G

para el caso de un campo magnético intenso como es el caso de  $B=10^{18}$  G que la asimetría disminuye en magnitud para altas densidades, en cambio, la magnetización aumenta conforme aumenta la densidad. Esto se debe a que la asimetría representa una densidad relativa de polarización mientras la magnetización representa la densidad de número de partículas polarizadas. En resumen, para mayor densidad existen más partículas polarizadas pero la densidad relativas de partículas polarizadas del sistema es menor.

Luego, es conveniente analizar la susceptibilidad magnética en función de la densidad. En la figura 4.11 vemos la susceptibilidad en función de la densidad cuando varía el campo magnético a una temperatura dada, y cuando varía la temperatura, para un campo magnético fijo. En los gráficos, a los efectos de analizar la susceptibilidad, dividimos por  $\mu_N^2$  y multiplicamos por  $\hbar c$ , resultando en unidades de  $\text{fm}^{-2}$ . Se puede apreciar una mayor variación de la susceptibilidad para diferentes temperaturas, en particular, crece a menores temperaturas y mayores densidades. No se observa lo mismo con el campo magnético, siendo muy poca la variación de la susceptibilidad al cambiar la intensidad del campo. Sin embargo, en la figura 4.9, se veía una fuerte dependencia de la magnetización con el campo magnético. Si recordamos la ecuación (2.21), la susceptibilidad se obtiene como la derivada de la magnetización respecto del campo magnético. Por lo tanto, que la magnetización varíe notablemente según el campo magnético pero la susceptibilidad magnética no, da cuenta de que la dependencia funcional de la magnetización con el campo magnético es similar para la magnetización correspondiente a diferentes campos magnéticos. Sin embargo, tal como observamos en los gráficos anteriores, la susceptibilidad magnética aumenta a mayores

densidades, lo cual tiene sentido, ya que al aumentar la susceptibilidad magnética con la densidad, aumenta la capacidad del material para magnetizarse.

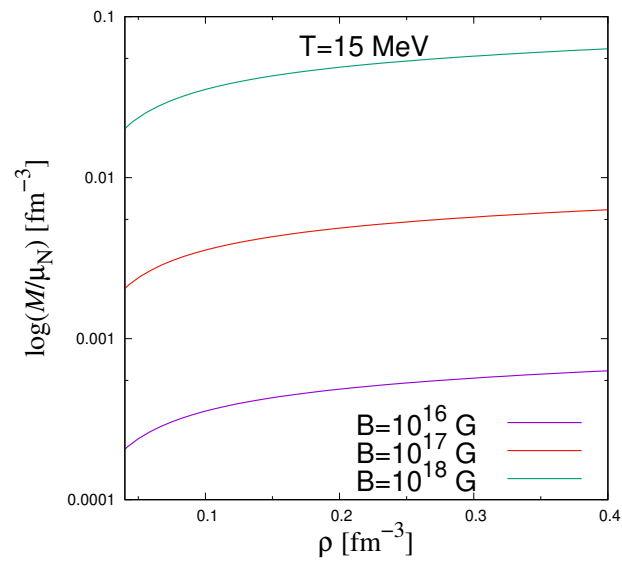


Figura 4.9: Magnetización en función de la densidad. Mostramos la magnetización para  $B = 10^{16}$ ,  $10^{17}$ ,  $10^{18}$  G y  $T=15$  MeV



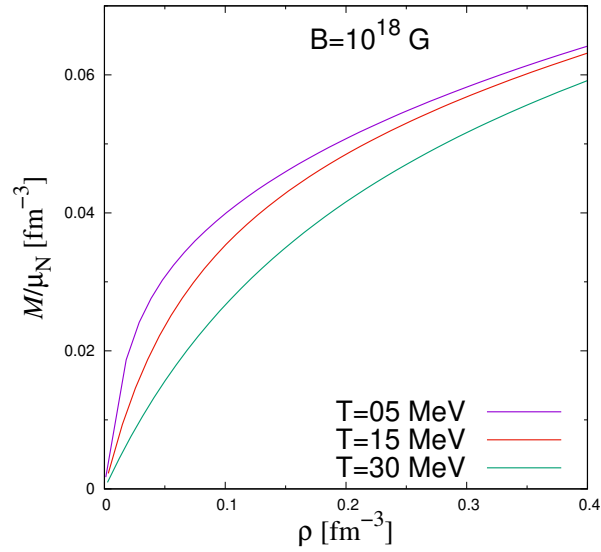


Figura 4.10: Magnetización en función de la densidad. Mostramos la magnetización para  $T = 5, 15, 30$  MeV y  $B = 10^{18}$  G

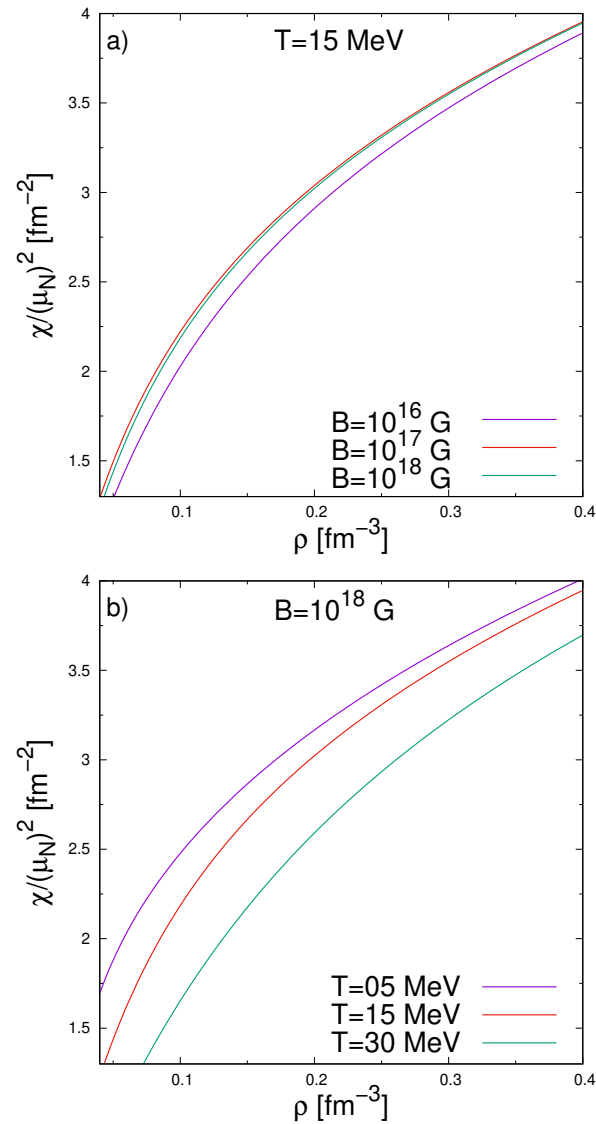


Figura 4.11: Susceptibilidad en función de la densidad. Mostramos en a) la susceptibilidad para  $B = 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}$  G y  $T = 15$  MeV y en b) para  $T = 5, 15, 30$  MeV y  $B = 10^{18}$  G

## 4.2. Resultados Sección Eficaz

En el capítulo 3, mostramos las expresiones de la sección eficaz total de dispersión por unidad de volumen para la reacción de dispersión inelástica de un neutrino por un neutrón. Luego, obtuvimos una expresión explícita para el cálculo del camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica. En esta sección, calcularemos el camino libre medio de neutrino en materia neutrónica. Nos concentraremos en la dependencia del camino libre medio con la densidad para lo cual tomaremos a la energía del neutrino incidente igual a tres veces la temperatura ( $|\vec{p}_\nu| = 3T$ ). También analizaremos cómo depende el camino libre medio con la energía del neutrino incidente. Por conveniencia analizaremos primero el camino libre medio en ausencia del campo magnético; esto es, el caso no polarizado. Luego, analizaremos el camino libre medio en presencia de un campo magnético intenso (sistema polarizado).

### 4.2.1. Caso no polarizado

En ausencia de campo magnético, no hay dirección preferencial en el espacio. En este caso la sección eficaz además de depender de la temperatura y de la densidad, depende también del momento del neutrino incidente, sin mostrar ninguna dependencia angular. Recordar que consideramos  $|\vec{p}_\nu| = 3T$ . La función de estructura  $S_0$  que usaremos para este caso, será la dada en la ecuación (3.42).

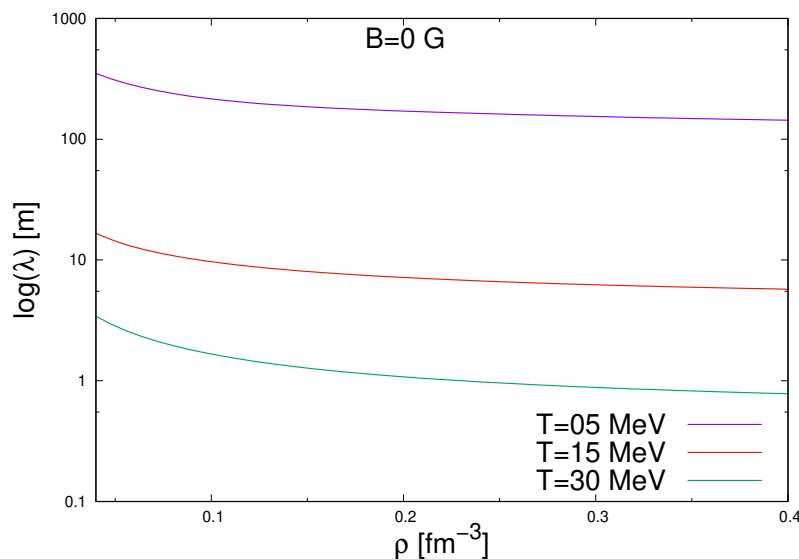


Figura 4.12: Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para temperaturas  $T= 5, 15$  y  $30$  MeV en ausencia de campo magnético.

En la figura 4.12, mostramos el camino libre medio  $\lambda$  en función de la densidad, para un campo magnético nulo y diferentes temperaturas. Para una mayor claridad en los gráficos, tomamos la escala logarítmica. Lo primero a destacar, es que el camino libre medio disminuye para mayores temperaturas. Recordando la ecuación (3.1) y la relación con la sección eficaz  $\sigma$ , que el camino libre medio disminuya, nos indica que aumenta la sección eficaz, por lo cual tendremos una mayor probabilidad de interacción con la materia. El aumento de la temperatura determina

un incremento del espacio de fases accesible de los posibles estados finales, esto provoca un incremento en la sección eficaz total por lo tanto una disminución en el camino libre medio.

#### 4.2.2. Caso polarizado

Veremos a continuación, cómo se comporta el camino libre medio en función de la temperatura, el ángulo de incidencia, la densidad, la energía del neutrino incidente y el campo magnético. Como ya vimos, la materia se polariza en presencia de un campo magnético, por lo que es de esperar que el camino libre medio adquiera una dependencia con el ángulo entre la dirección del campo y la dirección de movimiento del neutrino incidente. Además, como vimos en la expresión del camino libre medio para el caso polarizado (ec. 3.55), la asimetría de spin juega un papel directo en la sección eficaz, por lo tanto, en  $\lambda$ .

En primer lugar, a modo comparativo con lo visto para el caso no polarizado, en la figura 4.13 vemos el camino libre medio para distintas temperaturas y campos magnéticos  $B = 0$  G y  $B = 10^{18}$  G, para  $\theta_\nu = \pi/2$ . Es interesante ver que cuando el neutrino incide en forma perpendicular al campo magnético, el camino libre medio aún para campos magnéticos intensos difiere muy poco del caso no polarizado.

A continuación, mostramos en las figuras 4.14, 4.15 y 4.16, el camino libre medio en función de la densidad, para temperaturas  $T = 5, 15$  y  $30$  MeV respectivamente. En los tres casos, se muestra para diferentes campos magnéticos y ángulos de incidencia del neutrino, habiendo tomado una energía del neutrino incidente fija como se mencionó anteriormente. Se puede observar que independientemente de la temperatura, el camino libre medio muestra una fuerte dependencia con el ángulo para campos magnéticos intensos, siendo mayor cuando el neutrino incide en la misma dirección que el campo magnético. También notamos que el camino libre medio tiene una fuerte dependencia con la temperatura, variando hasta dos órdenes de magnitud al pasar de  $T = 5$  MeV a  $T = 30$  MeV. Por último, se observa un comportamiento decreciente del camino libre medio respecto a la densidad, siendo mayor a bajas densidades. Del análisis de estas figuras resulta que la probabilidad de interacción de los neutrinos con la materia es mayor para altas temperaturas, altas densidades y neutrinos que inciden antiparalelos al campo magnético.

Vimos cómo varía el camino libre medio para una energía de neutrino incidente fija, al variar la densidad, temperatura y campo magnético. Veremos ahora cómo se comporta el camino libre medio en función de la energía del neutrino incidente  $|\vec{p}_\nu|$  para la densidad de saturación nuclear  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ . Fijamos el valor del campo magnético en  $B = 10^{17}$  G, y variamos  $|\vec{p}_\nu|$  desde valores cercanos a 0 MeV hasta  $|\vec{p}_\nu| = 3T$ , para  $T = 5, 15$  y  $30$  MeV. En la figura 4.17 se muestran estos resultados. Debido a la escala del gráfico y del valor del campo magnético, la diferencia entre los distintos ángulos no puede apreciarse. Nuevamente, hay una diferencia en órdenes de magnitud al variar la temperatura. Es notorio cómo disminuye drásticamente el camino libre medio a medida que aumenta la energía, ésta dependencia está dentro de la función de estructura (ec. 3.45). De aquí podemos concluir, que la probabilidad de interacción de los neutrinos con la materia, es mayor a mayor temperatura y a mayor energía de partícula.

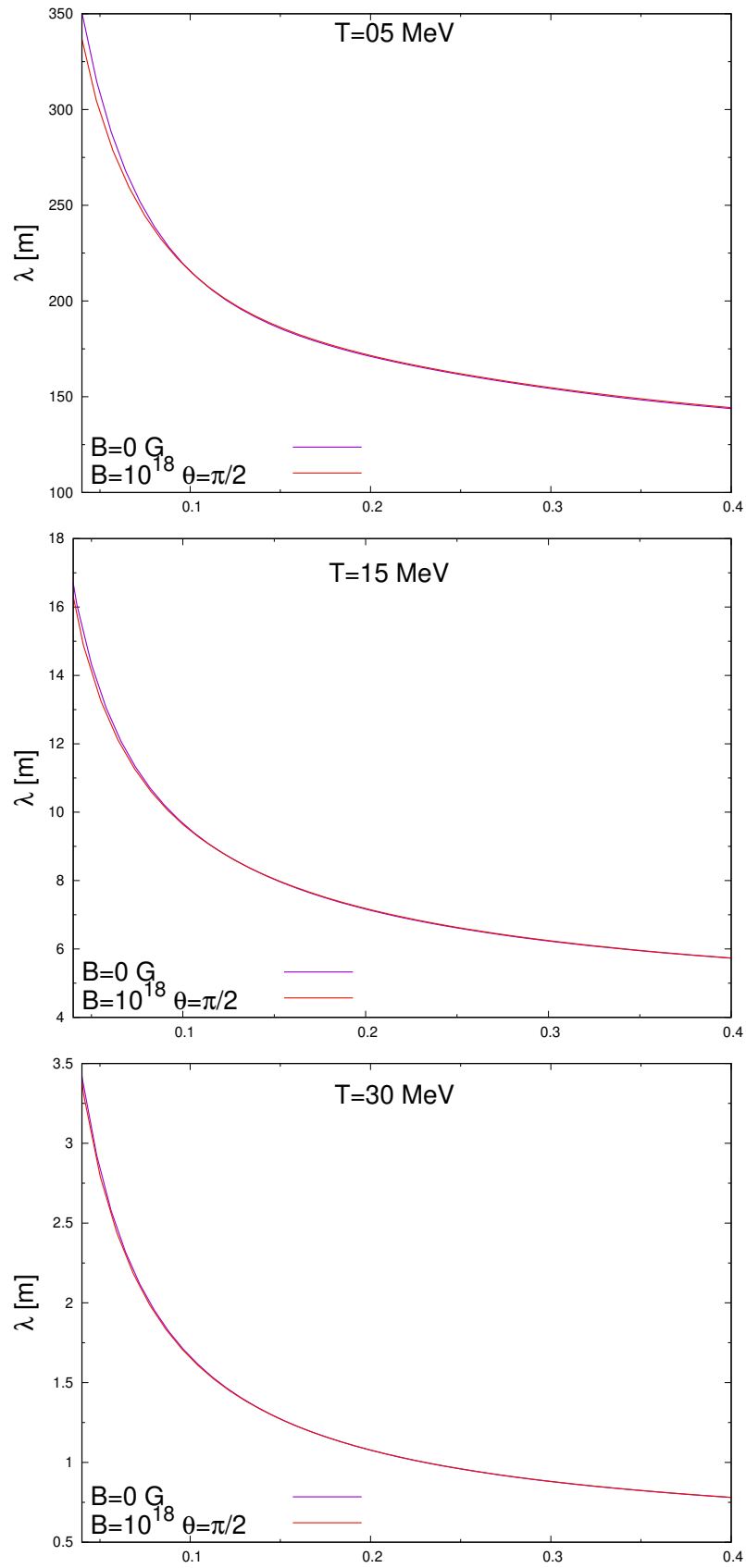


Figura 4.13: Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para campos magnéticos  $B = 0$  G y  $B = 10^{18}$  G para  $\theta_\nu = \pi/2$ , para temperaturas  $T = 5, 15$  y  $30$  MeV.

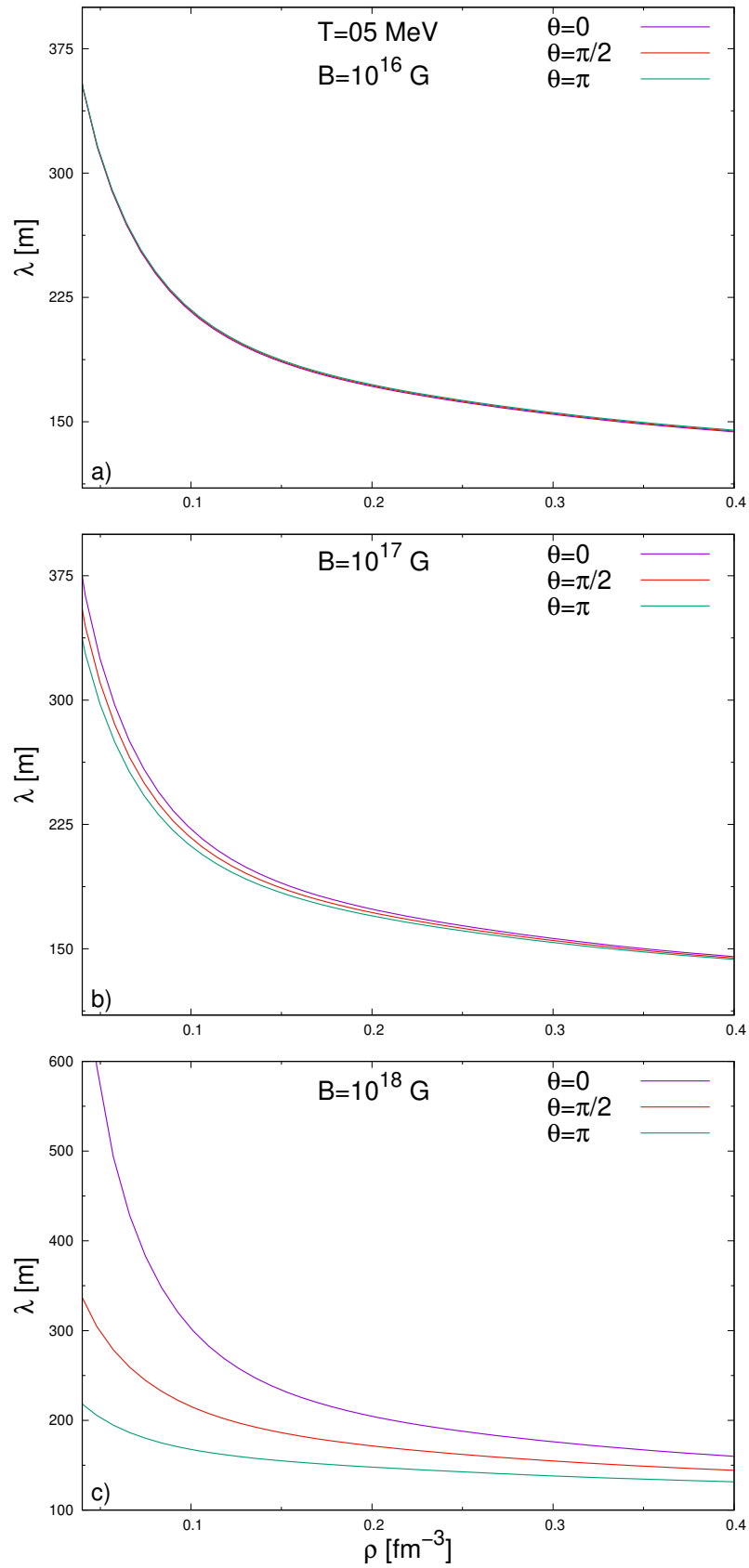


Figura 4.14: Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para  $T=5$  MeV, para campos magnéticos  $B=10^{16}$  G en a),  $B=10^{17}$  G en b) y  $B=10^{18}$  G en c). En los tres casos, se muestra para  $\theta=0, \pi/2$  y  $\pi$

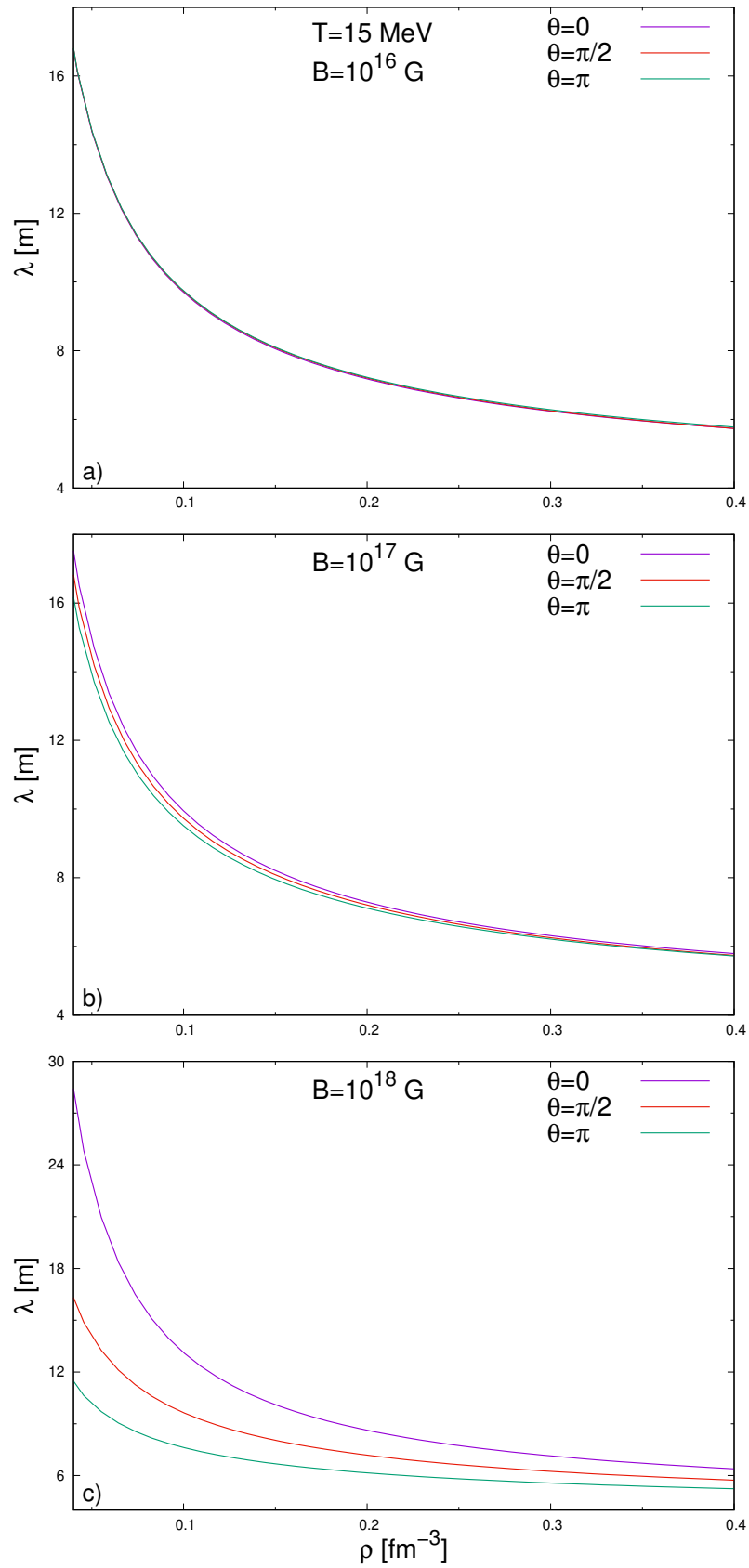


Figura 4.15: Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para  $T=15$  MeV, para campos magnéticos  $B = 10^{16}$  G en a),  $B = 10^{17}$  G en b) y  $B = 10^{18}$  G en c). En los tres casos, se muestra para  $\theta = 0, \pi/2$  y  $\pi$

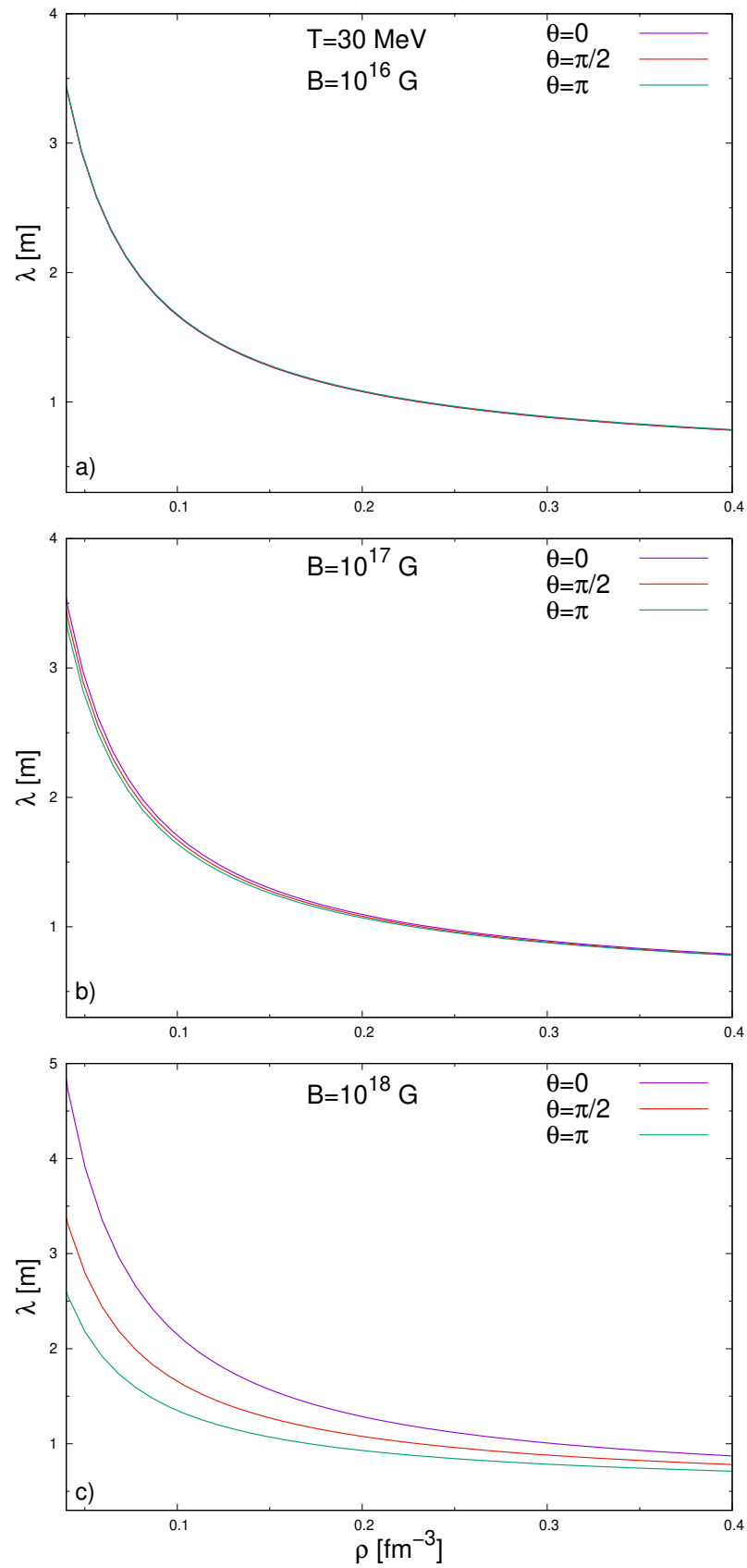


Figura 4.16: Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio para  $T=30$  MeV, para campos magnéticos  $B = 10^{16}$  G en a),  $B = 10^{17}$  G en b) y  $B = 10^{18}$  G en c). En los tres casos, se muestra para  $\theta_\nu = 0, \pi/2$  y  $\pi$

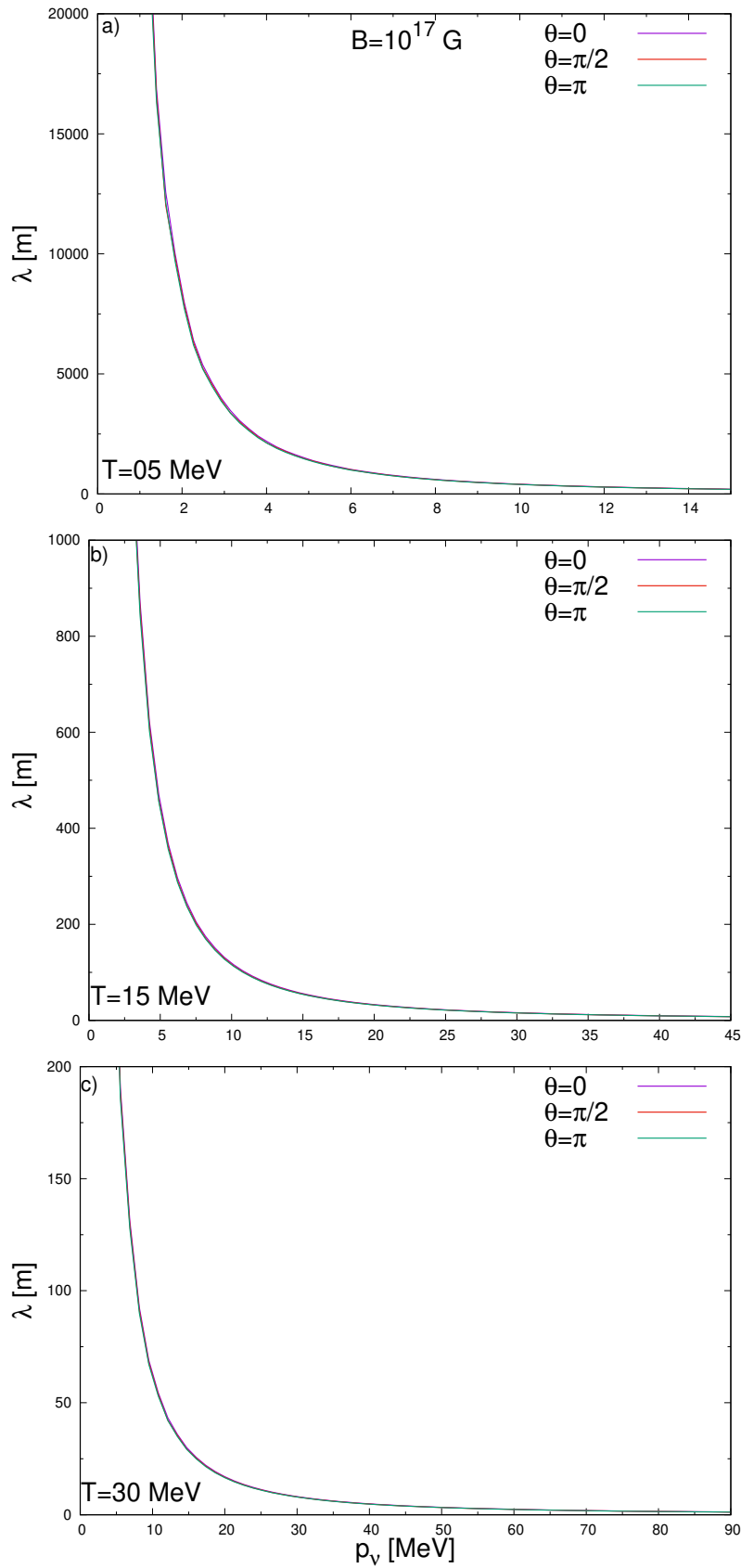


Figura 4.17: Camino libre medio en función de la energía. Mostramos el camino libre medio para la densidad de saturación  $\rho_0$  en presencia de un campo magnético  $B = 10^{17}$  G, para temperatura  $T=5$  MeV en a),  $T=15$  MeV en b) y  $T=30$  MeV en c). En los tres casos, se muestran resultados para  $\theta_\nu = 0, \pi/2$  y  $\pi$



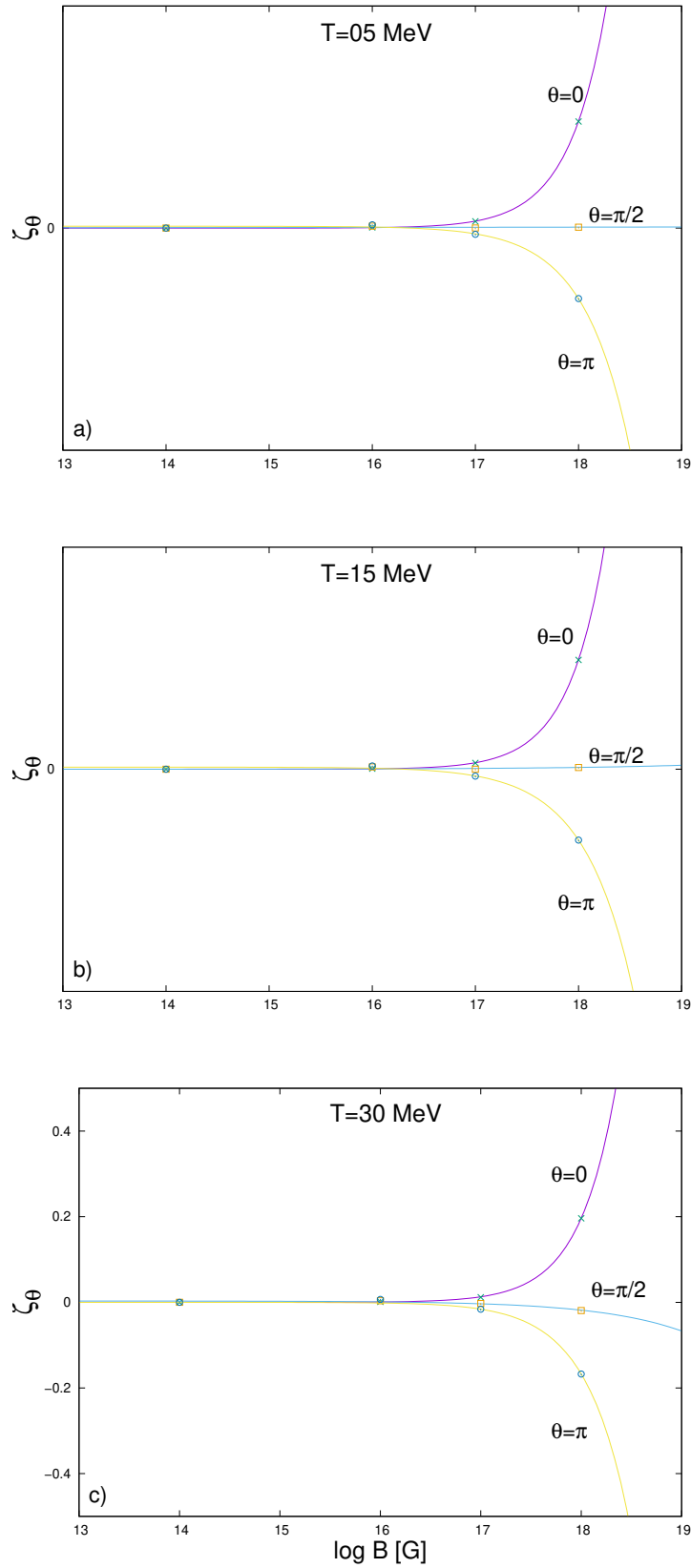


Figura 4.18: Asimetría en función del campo magnético. Mostramos la asimetría para densidad  $\rho_0$ ,  $T=5$  MeV en a),  $T=15$  MeV en b) y  $T=30$  MeV en c). En los tres casos, se muestran resultados para  $\theta_\nu = 0, \pi/2$  y  $\pi$ .

En la figura 4.18 mostramos cómo varía el camino libre medio en función del campo magnético para una densidad fija igual a la densidad de saturación  $\rho_0$  y una energía fija  $|\vec{p}_\nu| = 3T$ , para diferentes temperaturas. Para una mejor interpretación de los gráficos definimos una asimetría angular dada por:

$$\zeta_\theta = \frac{\lambda_\theta - \lambda_{B=0}}{\lambda_{B=0}}.$$

Se observa que la asimetría tiene una dependencia despreciable con el campo magnético para el caso de  $\theta_\nu = \pi/2$ , que coincide con lo que observamos al comienzo de la sección, y éste resultado es independiente de la temperatura. A partir de  $B = 10^{17}$  G, empieza a ser apreciable la asimetría en el camino libre medio, aumentando en magnitud a medida que el ángulo se aparta de  $\theta_\nu = \pi/2$ ; esto es cuando el neutrino incide en la misma dirección que el campo magnético ( $\theta_\nu = 0$ ), y disminuyendo cuando se mueven de manera antiparalela ( $\theta_\nu = \pi$ ).

En la tabla 4.4 mostramos los valores porcentuales de la asimetría total del camino libre medio total dada por:

$$\zeta_T = \frac{\lambda_{\theta=0} - \lambda_{\theta=\pi}}{\lambda_{\theta=0} + \lambda_{\theta=\pi}},$$

para diferentes valores de campo magnético y de la densidad. Observamos que la asimetría es mayor a bajas densidades, tal como pasaba con la asimetría de spin que analizamos en la sección anterior.

$\rho$	$\zeta_T$		
	$B = 10^{16}$	$B = 10^{17}$	$B = 10^{18}$
$\rho_0/2$	0.18 %	2.53 %	29.69 %
$\rho_0$	0.11 %	1.48 %	19.48 %
$2\rho_0$	0.07 %	0.73 %	11.82 %

Cuadro 4.4: Asimetría total del camino libre medio en función de la densidad para temperatura  $T = 15$  MeV y campos magnéticos  $B = 10^{16}$ ,  $10^{17}$  y  $10^{18}$  G

### 4.3. Comparación con el modelo de Skyrme

En esta subsección compararemos algunos de nuestros resultados con los que se obtienen dentro del modelo de Skyrme, que tomamos de Torres Patiño y cols. (2019). Notemos que en el modelo que desarrollamos en este trabajo no consideramos la interacción de los neutrones entre sí. Ya que los neutrones son partículas neutras, la interacción entre dos neutrones está dada por la interacción fuerte, que no conocemos. Existe un número muy grande de modelos para dar cuenta de la interacción fuerte y cada uno reproduce alguna propiedad particular. Entre los modelos más simples de campo medio, el de Skyrme es uno de los más empleados. Dependiendo de qué propiedades se quiere reproducir, se emplea un conjunto particular de parámetros de Skyrme. Los resultados que mostraremos fueron calculados con la parametrización LNS (Cao y cols. (2006)), que resulta adecuada para nuestro problema. Aún así, a altas densidades esta interacción induce

una polarización conocida como inestabilidad ferromagnética. Existe acuerdo en la literatura de que esta polarización no es física, sino que se trata de una patología del modelo.

Para realizar la comparación, elegimos como un caso representativo, el de un campo  $B = 10^{18}$  G y una temperatura  $T = 15$  MeV. Comenzamos mostrando en las Figs. 4.19 y 4.20, los resultados del potencial químico y el potencial de Helmholtz. En las figuras denotaremos a nuestros resultados con la palabra “libre”. Lo primero que notamos es que el orden de magnitud de estas dos cantidades es el mismo para los dos modelos. La interacción nuclear es atractiva para las densidades que consideramos. Debido a ello, los valores del potencial de Helmholtz son siempre menores que los de nuestro modelo. Por otra parte, el potencial químico tiene una dependencia funcional notoriamente diferente entre ambos modelos. La interacción nuclear modifica fuertemente a las energías de partícula independiente de los neutrones. Esto repercute directamente en los valores del potencial químico, como vemos en la figura.

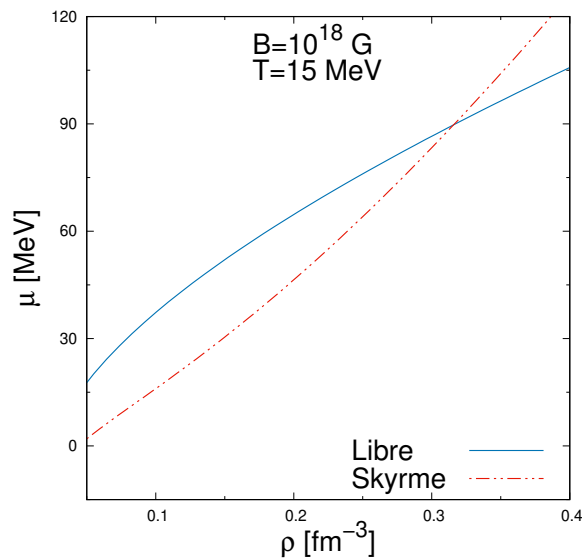


Figura 4.19: Potencial químico en función de la densidad. Mostramos el potencial químico en función de la densidad para  $T = 15$  MeV y  $B = 10^{18}$  G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme.

Discutimos ahora la presión en función de la densidad, siempre para los mismos valores del campo magnético y de la temperatura. En la Fig. 4.21, mostramos los valores para cada modelo. Podemos comprender cualitativamente esta figura mirando las Figs. 4.19 y 4.20, junto con la ec. (2.17): si limitamos el análisis al potencial de Helmholtz, esperaríamos que la presión fuera siempre mayor para el modelo de Skyrme. El potencial químico favorece una presión menor para el modelo de Skyrme hasta una densidad del orden de  $\approx 0.3 \text{fm}^{-3}$  y luego suma su efecto al del potencial de Helmholtz. A bajas densidades domina el potencial químico. A medida que aumenta la densidad el peso del potencial de Helmholtz aumenta y el cruce de las curvas ocurre para una densidad  $\approx 0.2 \text{fm}^{-3}$ , a partir de la cual, la presión para el modelo de Skyrme es mayor.

Antes de discutir el camino libre medio, en la Fig. 4.22, mostramos la asimetría de spin para ambos modelos. Vemos que para densidades bajas y medias, la magnitud de la asimetría de spin es menor para el modelo de Skyrme. Esto nos dice que la interacción nuclear actúa favoreciendo el mismo número de neutrones con spin up y down. El hecho de que para densidades altas se

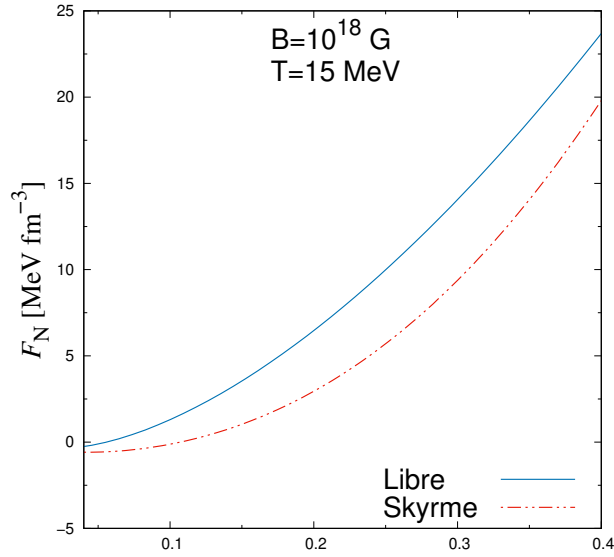


Figura 4.20: Potencial de Helmholtz en función de la densidad. Mostramos el potencial de Helmholtz en función de la densidad para  $T=15$  MeV y  $B=10^{18}$  G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme.

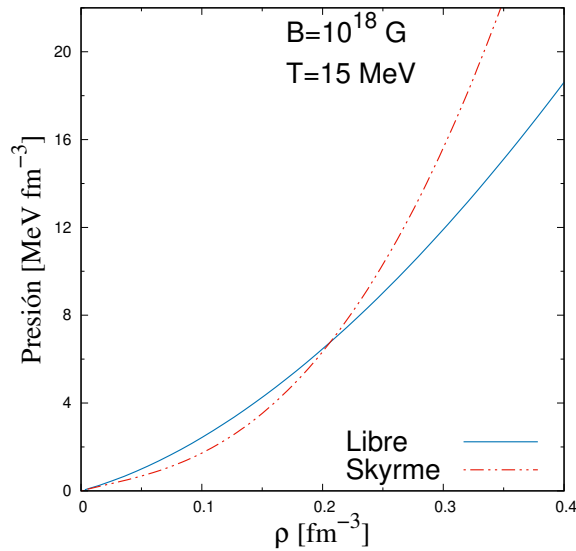


Figura 4.21: Presión en función de la densidad. Mostramos la presión en función de la densidad para  $T=15$  MeV y  $B=10^{18}$  G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme.

cruzan las curvas, se debe a la inestabilidad ferromagnética. En este sentido, el resultado de nuestro modelo es mejor que el de Skyrme.

Finalmente, en la Fig. 4.23, mostramos el camino libre medio para tres ángulos del neutrino incidente respecto del campo magnético. Para un ángulo  $\theta = \pi/2$  y bajas densidades, vemos que la coincidencia entre ambos modelos es muy buena. El grado en que el camino libre medio para  $\theta = 0$  y  $\pi$ , se aparta del caso  $\theta = \pi/2$ , es menor para Skyrme que para el caso Libre. De la figura de la asimetría de spin, Fig. 4.22; esperamos este resultado: como acabamos de comentar, la asimetría de spin es menor en magnitud para el caso de Skyrme. La asimetría en el camino libre medio para altas densidades es mayor para Skyrme, que para el caso libre. Nuevamente, esto se advierte en la Fig. 4.22. Además, el camino libre medio para cualquier ángulo, toma valores mayores para el caso de Skyrme respecto del Libre, a medida que aumenta la densidad.

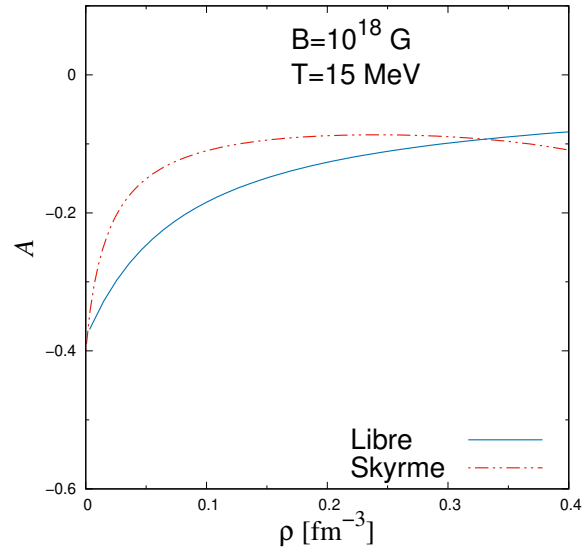


Figura 4.22: Asimetría en función de la densidad. Mostramos la asimetría en función de la densidad para  $T=15$  MeV y  $B=10^{18}$  G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme.

La interacción nuclear es más efectiva cuando las partículas se encuentran más próximas entre sí (mayor densidad). Este resultado nos muestra entonces que la interacción nuclear establece restricciones en el espacio de fases de los neutrones que determinan un incremento en el camino libre medio.

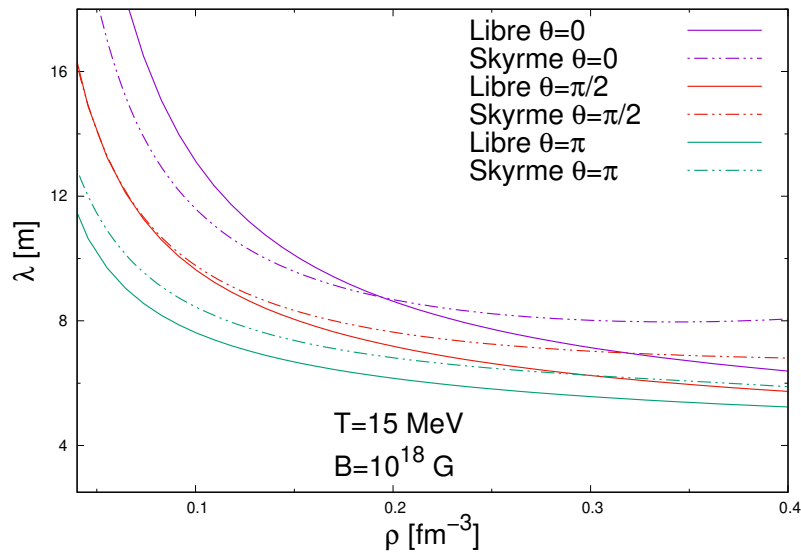


Figura 4.23: Camino libre medio en función de la densidad. Mostramos el camino libre medio en función de la densidad para  $T=15$  MeV y  $B=10^{18}$  G para nuestro modelo y el modelo de Skyrme, para ángulos de incidencia de  $\theta_\nu = 0, \pi/2$  y  $\pi$ .



## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajos a futuro

En este trabajo hemos calculado el camino libre medio de neutrinos en materia neutrónica, a temperatura finita y para un campo magnético intenso. Consideramos solo la reacción de dispersión inelástica de neutrinos sobre neutrones. Para ello y en primer lugar, desarrollamos una ecuación de estado (EdE) para describir al medio neutrónico. Esta EdE, al igual que el cálculo del camino libre medio, fue hecha en términos no relativistas, para temperatura finita y para un campo magnético intenso. En este sentido, afirmamos que nuestro cálculo es autoconsistente, pues la EdE fue evaluada en los mismos términos en que luego fue calculado el camino libre medio.

Para el cálculo de la EdE, consideramos la interacción de los neutrones con el campo magnético externo. Esta interacción ocurre debido al acoplamiento del momento magnético del neutrón con el campo. Sin embargo, no consideramos ninguna interacción de los neutrones entre sí. En este sentido, realizamos una comparación de nuestros resultados con una EdE similar, pero que incluye una interacción entre los neutrones por medio de un campo medio, denominada en forma genérica “modelo de Skyrme”. De la comparación entre ambos modelos notamos que si bien los efectos de la interacción nuclear son importantes, nuestro modelo simple reproduce en forma cualitativa los resultados del modelo de Skyrme. Como discutimos en la sección de Resultados, el modelo de Skyrme presenta a altas densidades una inestabilidad, conocida como inestabilidad ferromagnética, que nuestro modelo no muestra. De este modo, se puede inducir que nuestros resultados para densidades altas son más realistas que los del modelo de Skyrme.

De la EdE, necesitamos conocer los valores del potencial químico y la asimetría de spin para poder calcular el camino libre medio de neutrinos, que es el objetivo central de este trabajo. Los neutrinos interactúan con los neutrones por medio de la fuerza débil. Para poder calcular el camino libre medio, además de los valores de la EdE, debemos calcular el elemento de matriz débil de transición entre el estado inicial y final del neutrino y del neutrón. Para ello, reproducimos un cálculo ya publicado (Torres Patiño y cols. (2019)). Por conveniencia, el cálculo de este elemento de matriz se realiza en términos relativistas y al final del cálculo se toma el límite no relativista. Debemos señalar que este elemento de matriz de transición es idéntico al del cálculo de la sección eficaz de dispersión inelástica de un neutrino por un neutrón en el espacio libre. El efecto del medio aparece al sumar sobre los posibles estados por medio de funciones de distribución el limita

el espacio de fases de los estados inicial y final del neutrón y por la polarización en la función de onda inicial del neutrón.

Nuestros resultados para el camino libre medio muestran una función decreciente con la densidad, como es de esperarse. El camino libre medio tiene una fuerte dependencia con la temperatura: se hace más corto a medida que la temperatura aumenta. Aún para bajas temperaturas y densidades, el camino libre medio es menor al radio de una estrella de neutrones. En este punto, vale la pena recordar que el objetivo de nuestro cálculo es dar los valores para diferentes densidades, temperaturas y campos magnéticos, modelándolos como localmente constantes; con el fin potencial de que sean empleados en algún modelo de estrella de neutrones, donde en la misma estrella estas cantidades toman diferentes valores. Naturalmente, ese cálculo excede este trabajo.

Realizamos el cálculo del camino libre medio para diferentes ángulos del neutrino incidente respecto de la dirección del campo magnético. El camino libre medio muestra una dependencia con este ángulo, dando lugar a una asimetría que para un campo  $B = 10^{18}$  G, una temperatura  $T = 15$  MeV y la densidad de saturación nuclear, es del orden del 20 %. Este mecanismo implica una emisión asimétrica de neutrinos, especialmente en las instancias iniciales de la estrella de neutrones. Eventualmente, éste podría ser un elemento importante para explicar el llamado pulsar kick. El origen de esta asimetría es múltiple: el cálculo del elemento de matriz débil conduce a una asimetría, el estado inicial de spin del neutrón contiene en forma explícita la asimetría de spin y las funciones de distribución (debido al término magnético en las energías de partícula independiente), contiene también una dependencia implícita con el ángulo de dispersión. Estos tres elementos son importantes y solo podemos estar seguros de pesar correctamente a cada uno de ellos por medio de un cálculo autoconsistente. Comparamos también nuestros resultados con los del modelo de Skyrme, donde valen las mismas consideraciones que ya hicimos respecto de la EdE.

De la comparación con el modelo de Skyrme, podemos concluir que nuestro modelo reproduce razonablemente bien al modelo más complejo de Skyrme. Este acuerdo es cuantitativamente mejor para el camino libre medio que para la EdE. Esto indica que el camino libre medio posee una dependencia más fuerte con el espacio de fases; mientras que la EdE lo hace con la interacción nuclear. En cualquier caso, una discrepancia fuerte no indicaría una falla de nuestro modelo, sino del de Skyrme: el campo medio supone un desarrollo perturbativo y si se aparta mucho del orden cero, indica que el método no es aplicable.

Finalmente, comentamos brevemente las perspectivas futuras de esta línea de investigación. Entendemos que el próximo paso es repetir este cálculo en términos relativistas. Para llevar adelante un modelo completo de una estrella de neutrones, debemos alcanzar densidades más altas, en las que un modelo no relativista sería objetable. Además, deben considerarse otras reacciones más allá de la que analizamos en este trabajo. En particular, la dispersión de neutrinos sobre electrones. Por el valor de su masa, un tratamiento no relativista de los electrones sería simplemente incorrecto. Antes de terminar, debemos mencionar que las llamadas reacciones con intercambio de carga, como la reacción en que un neutrino es absorbido por un neutrón, terminando en un



protón y un electrón, juegan un papel muy importante en la nucleosíntesis de una supernova, pues estas reacciones alteran la fracción de protones. Esta es otra aplicación de esta línea de investigación que pensamos explorar.



## Apéndice A

# Valores numéricos de diferentes constantes

En este apéndice, mostraremos los valores numéricos de las diferentes constantes empleadas en este trabajo. Masas:

$$\begin{aligned}m_e &= 0.510998946 \text{ MeV}/c^2, \\m_n &= 939.5654133 \text{ MeV}/c^2.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Momentos magnéticos de Bohr:

$$\begin{aligned}\mu_e &= 5.7883818012 \times 10^{-15} \text{ MeV/Gauss}, \\ \mu_N &= \mu_e m_e/m_n \cong 3.14811 \times 10^{-18} \text{ MeV/Gauss}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Factor giromagnético del neutrón:

$$g_n = -1.913.\tag{A.3}$$

Es conveniente escribir,  $eB$ :

$$eB = 2m_e\mu_e B = 5.91571 \times 10^{-15} B \text{ MeV}^2.\tag{A.4}$$

Por comodidad, damos los valores numéricos de las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}|e| &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ Coul}, \\ c &= 299792458 \text{ m/s}, \\ \hbar &= 6.582119569 \times 10^{-22} \text{ MeV s}, \\ \hbar c &= 197.3 \text{ MeV fm}.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Mostramos también el siguiente cambio de unidades,

$$G = 10^{-4} \frac{\text{Kg}}{\text{Coul s}} \cong 5.60951 \times 10^{25} \frac{\text{MeV}}{\text{Coul s c}^2}, \quad (\text{A.6})$$

donde hemos empleado,

$$1 \text{ Kg} \cong 5.60951 \times 10^{29} \text{ MeV}/c^2.$$

Podemos escribir,

$$\text{Coul} \cong 5.60951 \times 10^{25} \frac{\text{MeV}}{\text{G s c}^2}, \quad (\text{A.7})$$

de este modo, la carga del electrón se puede expresar como,

$$|e| = 8.98742 \times 10^6 \frac{\text{MeV}}{\text{G s c}^2}. \quad (\text{A.8})$$

En particular, para el magnetón de Bohr del electrón:

$$\mu_e = \frac{|e|\hbar}{2m_e} = \frac{(8.98742 \times 10^6) (6.582119569 \times 10^{-22})}{2 \times 0.510998946} \frac{\text{MeV MeV s c}^2}{\text{G s c}^2 \text{ MeV}} \quad (\text{A.9})$$

Confirmando el resultado,

$$\mu_e = 5.7883818012 \times 10^{-15} \text{ MeV/Gauss}. \quad (\text{A.10})$$

Para  $|e|$ , tenemos,

$$|e|\hbar c^2 = 5.91571 \times 10^{-15} \frac{\text{MeV}^2}{\text{G}}. \quad (\text{A.11})$$

Constante de acoplamiento de Fermi:  $G_f \simeq 1.436 \times 10^{-49} \text{ erg cm}^{-3}$

## Apéndice B

# Cálculo de la susceptibilidad magnética

En este apéndice mostramos cómo obtener una expresión analítica para la susceptibilidad magnética dentro de nuestro modelo para la EdE. Recordemos que su expresión es,

$$\chi_n = \left( \frac{\partial \mathcal{M}_n}{\partial B} \right)_{\rho_n, T}, \quad (\text{B.1})$$

donde la magnetización es simplemente  $\mathcal{M}_n = \mu_n g_n W_n$  (ec. 2.20). Antes de seguir adelante, es conveniente simplificar un poco la notación: cuando debamos dar el valor explícito de la proyección de spin, en lugar de  $s_n = +1/s_n = -1$ , emplearemos  $+/-$ , respectivamente. Además, no mostraremos la dependencia funcional explícita de las densidades parciales o total. Finalmente, llamamos,

$$\kappa_{s_n} \equiv \frac{\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n}{T}.$$

Para calcular la susceptibilidad, básicamente debemos calcular la derivada de  $W_n$  respecto de  $B$ , con  $\rho_n$  y  $T$  constantes. Es conveniente recordar que,

$$\begin{aligned} W_n &= \rho_+ - \rho_-, \\ \rho_n &= \rho_+ + \rho_-. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ahora derivamos respecto de  $B$ . Al hacerlo, debemos recordar que pedimos que la densidad permanezca constante, por lo cual su derivada es cero:

$$\frac{\partial W_n}{\partial B} = \frac{\partial \rho_+}{\partial B} - \frac{\partial \rho_-}{\partial B}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial B} = \frac{\partial \rho_+}{\partial B} + \frac{\partial \rho_-}{\partial B} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Es conveniente emplear,

$$\frac{\partial}{\partial B} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \kappa_{s_n}} \frac{\partial \kappa_{s_n}}{\partial B},$$

De este modo, podemos escribir,

$$\frac{\partial \rho_{s_n}}{\partial B} = \frac{\partial \rho_{s_n}}{\partial \kappa_{s_n}} \frac{\partial \kappa_{s_n}}{\partial B}, \quad (\text{B.5})$$

con,

$$\frac{\partial \kappa_{s_n}}{\partial B} = \frac{1}{T} \left( -\mu_N g_n s_n - \frac{\partial \mu_n}{\partial B} \right),$$

junto con,

$$\frac{\partial \rho_{s_n}}{\partial \kappa_{s_n}} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\exp(\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n)/T}{[1 + \exp(\varepsilon_n(p, s_n) - \mu_n)/T]^2} \equiv -\xi_n(T, B, s_n), \quad (\text{B.6})$$

En resumen, tenemos,

$$\frac{\partial \rho_{s_n}}{\partial B} = \frac{1}{T} \left( \mu_N g_n s_n + \frac{\partial \mu_n}{\partial B} \right) \xi_n(T, B, s_n). \quad (\text{B.7})$$

Resolviendo la ec. (B.4), obtenemos el valor de la derivada del potencial químico, cuando la densidad es constante:

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial B} = \mu_n g_n \frac{\xi_n(T, B, -) - \xi_n(T, B, +)}{\xi_n(T, B, -) + \xi_n(T, B, +)} \quad (\text{B.8})$$

Reemplazando este valor en la ec. (B.3) y en la expresión de la susceptibilidad, obtenemos finalmente,

$$\chi_n = 4 \mu_n^2 g_n^2 \frac{\xi_n(T, B, +) \xi_n(T, B, -)}{\xi_n(T, B, +) + \xi_n(T, B, -)} \quad (\text{B.9})$$

## Apéndice C

# Truco de Casimir y cálculo de trazas

En este apéndice, mostraremos un conjunto de elementos necesarios para el cálculo de las sumas sobre spin. En particular, la propiedad denominada “truco de Casimir”, junto con propiedades y valores de trazas.

El truco de Casimir nos permite reescribir una suma sobre spin como una traza:

$$\sum_{spins} [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b][\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* = Tr[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a)], \quad (C.1)$$

donde la suma del término de la izquierda corre sobre todos los valores del spin.

Propiedades de las trazas utilizadas:

- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$
- $Tr(AB) = Tr(BA)$
- $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
- $Tr(\not{a}\not{b}) = 4a.b$
- $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda})$
- La traza del producto de una cantidad impar de matrices gamma es cero.
- $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , es el producto de un número par de matrices  $\gamma$ . Dada la propiedad anterior, siempre siempre que  $\gamma^5$  esté multiplicada por un número impar de matrices  $\gamma$ , la traza dará cero.
- Para el caso que  $\gamma^5$  esté multiplicada por un número par de matrices  $\gamma$ :
  - $Tr(\gamma) = 0$
  - $Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$

- $Tr(\gamma^5 \not{a} \not{b}) = 0$
- $Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$
- $Tr(\gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma$

Donde  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  puede tomar los valores  $-1$ ,  $1$  o  $0$ , según si  $\mu\nu\lambda\sigma$  es una permutación par de  $0123$ , una permutación impar, o si dos índices son iguales.



## Apéndice D

### Detalles del cálculo de $\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^{\pm}|^2 \rangle$

En este apéndice, mostramos algunos resultados intermedios en el cálculo de  $\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^{\pm}|^2 \rangle$ . Debemos calcular la contracción de las trazas leptónica y hadrónica, empleando las ecs. (3.20), (3.30) y (3.31). Después de un poco de álgebra, tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^+|^2 \rangle &= 4G_\beta^2 (p_{\nu'}^\mu p_\nu^\alpha + p_\nu^\mu p_{\nu'}^\alpha - g^{\mu\alpha} (p_{\nu'} \cdot p_\nu) - i\epsilon^{\mu\alpha\gamma\rho} p_{\nu'\gamma} p_{\nu\rho}) \\
&\times \left( 2(C_V^2 + C_A^2) (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n)) \right. \\
&+ 2(C_V^2 - C_A^2) m_N^2 g_{\mu\alpha} + 2(C_V^2 - C_A^2) i m_N \epsilon_{\mu\alpha 3\theta} p_n^\theta \\
&- 2m_N i (C_V^2 + C_A^2) \epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_{n'}^\lambda \\
&\left. - 4C_V C_A (m_N (p_{n'\mu} g_{3\alpha} + p_{n'\alpha} g_{3\mu} + g_{\alpha\mu} p_{n'}^3) + i\epsilon_{\mu\alpha\lambda\theta} p_{n'}^\lambda p_n^\theta) \right) \\
\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^-|^2 \rangle &= 4G_\beta^2 (p_{\nu'}^\mu p_\nu^\alpha + p_\nu^\mu p_{\nu'}^\alpha - g^{\mu\alpha} (p_{\nu'} \cdot p_\nu) - i\epsilon^{\mu\alpha\gamma\rho} p_{\nu'\gamma} p_{\nu\rho}) \\
&\times \left( 2(C_V^2 + C_A^2) (p_{n'\mu} p_{n\alpha} + p_{n'\alpha} p_{n\mu} - g_{\mu\alpha} (p_{n'} \cdot p_n)) \right. \\
&+ 2(C_V^2 - C_A^2) m_N^2 g_{\mu\alpha} - 2(C_V^2 - C_A^2) i m_N \epsilon_{\mu\alpha 3\theta} p_n^\theta \\
&+ 2m_N i (C_V^2 + C_A^2) \epsilon_{\mu\alpha 3\lambda} p_{n'}^\lambda \\
&\left. + 4C_V C_A (m_N (p_{n'\mu} g_{3\alpha} + p_{n'\alpha} g_{3\mu} + g_{\alpha\mu} p_{n'}^3) - i\epsilon_{\mu\alpha\lambda\theta} p_{n'}^\lambda p_n^\theta) \right)
\end{aligned} \tag{D.1}$$

El paso siguiente es realizar todas las contracciones y tomar el límite no-relativista. Esto lo hacemos en varios pasos. Recordemos que en esta etapa del cálculo tomamos al neutrón en reposo. Usando además las propiedades,  $\epsilon^{\xi\phi\gamma\nu} \epsilon_{\lambda\rho\gamma\nu} = -2 \left( \delta_\lambda^\xi \delta_\rho^\phi - \delta_\rho^\xi \delta_\lambda^\phi \right)$ , tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_{\nu'n',\nu n}^+|^2 \rangle &= 16G_\beta^2 \left( (C_V^2 + C_A^2) ((p_{n'} \cdot p_{\nu'}) (p_n \cdot p_\nu) + (p_{n'} \cdot p_\nu) (p_n \cdot p_{\nu'})) \right. \\
&- (C_V^2 - C_A^2) m_N^2 (p_\nu \cdot p_{\nu'}) + C_V^2 m_N (p_{\nu'}^3 (p_\nu \cdot (p_n - p_{n'})) + p_\nu^3 (p_{\nu'} \cdot (p_{n'} - p_n))) \\
&+ C_A^2 m_N (p_\nu^3 (p_{\nu'} \cdot (p_n + p_{n'})) - p_{\nu'}^3 (p_\nu \cdot (p_n + p_{n'}))) \\
&\left. + 2C_V C_A m_N ((p_{\nu'} \cdot p_{n'}) p_\nu^3 + (p_\nu \cdot p_{n'}) p_{\nu'}^3) \right)
\end{aligned} \tag{D.2}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_{\nu n', \nu n}^-|^2 \rangle &= 16G_\beta^2 \left( (C_V^2 + C_A^2) \left( (p_{n'} \cdot p_{\nu'}) (p_n \cdot p_\nu) + (p_{n'} \cdot p_\nu) (p_n \cdot p_{\nu'}) \right) \right. \\
&\quad - (C_V^2 - C_A^2) m_N^2 (p_\nu \cdot p_{\nu'}) - C_V^2 m_N (p_{\nu'}^3 (p_\nu \cdot (p_n - p_{n'})) + p_\nu^3 (p_{\nu'} \cdot (p_{n'} - p_n))) \\
&\quad - C_A^2 m_N (p_\nu^3 (p_{\nu'} \cdot (p_n + p_{n'})) - p_{\nu'}^3 (p_\nu \cdot (p_n + p_{n'}))) \\
&\quad \left. - 2C_V C_A m_N ((p_{\nu'} \cdot p_{n'}) p_\nu^3 + (p_\nu \cdot p_{n'}) p_{\nu'}^3) \right) \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Nota sobre la notación: el superíndice “3”, en  $p_\nu^3$  y  $p_{\nu'}^3$ , se refiere a la componente  $z$  del impulso del neutrino (no es el cubo).

Para obtener el límite no-relativista, reemplazamos,

$$\begin{aligned}
(p_n \cdot p_{n'}) &\cong m_N^2 \\
(p_n \cdot p_\nu) &\cong m_N E_\nu \\
(p_n \cdot p_{\nu'}) &\cong m_N E_{\nu'} \\
(p_\nu \cdot p_{\nu'}) &\cong m_N E_\nu \\
(p_{\nu'} \cdot p_{n'}) &\cong m_N E_{\nu'} \\
(p_\nu \cdot p_{\nu'}) &= E_\nu E_{\nu'} (1 - \cos \theta_{\nu\nu'}) \\
p_\nu^3 &= E_\nu \cos \theta_\nu \\
p_{\nu'}^3 &= E_{\nu'} \cos \theta_{\nu'} , \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Empleando estas expresiones, obtenemos el resultado final que se escribe en las ecs. (3.36) y (3.37) del texto principal.

# Bibliografía

- Baade, W., y Zwicky, F. (1934). Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays. *Physical Review*, *46*(1), 76-77.
- B.Callen, H. (1981). *Termodinámica*. Editorial AC, Madrid.
- Bethe, H. A. (1990). Supernova mechanisms. *Reviews of Modern Physics*, *62*.
- Burrows, A. (2000). Supernova explosions in the universe. *Nature (London)*, *403*(6771).
- Cao, L. G., Lombardo, U., Shen, C. W., y Giai, N. V. (2006). From Brueckner approach to Skyrme-type energy density functional. *Phys. Rev. C*, *73*(1), 014313.
- Cordes, J. M., Romani, R. W., y Lundgren, S. C. (1993). The Guitar nebula: a bow shock from a slow-spin, high-velocity neutron star. *Nature*, *362*(6416), 133-135.
- Duncan, R. C., y Thompson, C. (1992). Formation of Very Strongly Magnetized Neutron Stars: Implications for Gamma-Ray Bursts. *Astrophys. J.*, *392*.
- G.Lyne, A., y Lorimer, D. R. (1994). High birth velocities of radio pulsars. *Nature*. (Tesis Doctoral)
- Griffiths, D. (2008). *Introduction to elementary particles*. Editorial Wiley-VCH.
- Horowitz, C. J., y Li, G. (1998). Cumulative Parity Violation in Supernovae. *Phys. Rev. Lett.*, *80*(17), 3694-3697.
- Janka, H. T., y Mueller, E. (1996). Neutrino heating, convection, and the mechanism of type-ii supernova explosions. *Astron. Astrophys.*, *306*.
- Kauts, V. L., Savochkin, A. M., y Studenikin, A. I. (2006). Asymmetry of neutrino emission from neutron beta decay in superdense matter and a strong magnetic field. *Physics of Atomic Nuclei*, *69*(9), 1453-1460.
- Margueron, J., Vidaña, I., y Bombaci, I. (2003). Microscopic calculation of the neutrino mean free path inside hot neutron matter. *Phys. Rev. C*, *68*, 055806.
- Maruyama, T., Cheoun, M.-K., Hidaka, J., Kajino, T., Kuroda, T., Mathews, G. J., ... Yasutake, N. (2014). Asymmetric neutrino production in strongly magnetized proto-neutron stars. *Phys. Rev. D*, *90*(6), 067302.

- Pathria, R. K., y Beale, P. D. (2011). *Statistical mechanics*. Editorial Elsevier.
- Reddy, S. K. (1998). *Neutrinos from protoneutron stars : probing hot and dense matter*. State University of New York at Stony Brook.
- Shibanov, Y. A., y Yakovlev, D. G. (1996). On cooling of magnetized neutron stars. *Astron. Astrophys.*, 309, 171-178.
- Torres Patiño, J., Bauer, E., y Vidaña, I. (2019). Asymmetry of the neutrino mean free path in hot neutron matter under strong magnetic fields. *Phys. Rev. C*, 99(4), 045808.
- Yakovlev, D. G., y Pethick, C. J. (2004). Neutron star cooling. *Rev. Astron. Astrophys.*, 42(1), 169-210.