

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

AREA MATEMATICA

ESPECTROS FUNCIONALES

EN LA CATEGORIA DE CW -ESPECTROS

León Arturo Reyes Castro

Trabajo presentado ante
la Universidad Nacional
de La Plata para optar
al título de Doctor en
Matemáticas.

Octubre de 1974.

a mi madre
a la memoria de mi padre

Introducción

El presente trabajo tiene por objeto el estudio del espectro funcional $F(X,Y)$ asociado a un par de espectros X e Y . De manera más precisa, se trata de determinar ciertos "isomorfismos estructurales" en términos de objetos más manejables - en la categoría homotópica estable, la categoría estable construida por Boardman ([3]).

En el tratamiento investigativo del espectro $F(X,Y)$ haremos de considerar el "caso inicial" del espectro "dual" $F(X,S^0)$, y en particular cuando $X = K(G)$, el espectro de Eilenberg-MacLane asociado al grupo abeliano G .

Entre los resultados aquí obtenidos están los que establecen que $F(X,Y)$ es un espectro "racional" cuando X es generado "aditivamente por $K(Z)$, e Y está generado "multiplicativamente" por MU , el espectro de Thom correspondiente al grupo unitario. Esto permite mostrar entre otras cosas, que el dual $F(K(G),S^0)$ es isomorfo a una suspensión del espectro de Eilenberg-MacLane asociado al grupo racional $\text{Ext}(G \otimes Q, Z)$. Asimismo se pueden determinar el cobordismo complejo de $K(G)$, para cada grupo abeliano G , y el cobordismo-ortogonal- especial para los grupos en los cuales la multiplicación por el entero primo 2 es un isomorfismo. Demostraremos también algunos teoremas de "factorización" de $F(X,Y)$ y del smash-producto $X \wedge Y$, como productos directos de suspensiones de Y , para

ciertos espectros X e Y ; lo que permitirá calcular la Y -cohomología y la Y -homología de X , en términos de su cohomología ordinaria, y de la homotopía de Y . Como este resultado incluye el caso particular $Y = MU$, se podrán calcular así el bordismo y el cobordismo complejo de ciertos espectros. Por último, y como consecuencia de los resultados anteriores, daremos una nueva respuesta a una conjetura de Jean P. Serre, [15], pg. 219. (Ver también J. Adams: "Lect. on generalised cohomology". Lect. Notes in Math. Springer-Verlag. Vol. 99, pg. 116).

El presente trabajo ha surgido como resultado de actividades de investigación que el autor ha realizado bajo la dirección del Profesor Rodolfo Ricabarra, primero en la Universidad Central, Caracas-Venezuela, y luego en la Universidad N. de La Plata. Algunos de los resultados obtenidos hasta el presente forman el cuerpo principal de esta exposición. Deseo pues expresar mi más sincero agradecimiento a mi maestro y profesor, Dr. R. Ricabarra, quien siempre hubo de orientarme a través de innumerables conversaciones y sugerencias sobre los temas aquí tratados, y cuya colaboración fue en todo momento imprescindible.

Quiero finalmente agradecer a mi compañera Evelin todo el estímulo y el apoyo brindados, los cuales me sirvieron de gran aliento en el transcurso de las tareas que culminaron con la presente tesis.

El autor

1. Diagramas y Límites.

Sea \underline{S} la categoría de CW-espectros, la categoría de Boardman (ver [3] y [17]); y sea \underline{S}_h la categoría homotópica correspondiente. Los objetos de \underline{S}_h se llaman CW-espectros o simplemente espectros. Si X e Y son espectros, un morfismo de X en Y de grado n o cogrado $-n$ es un morfismo $S^n X \longrightarrow Y$ en \underline{S}_h donde $S^n X$ denota la n -suspensión de X . Tales morfismos forman un grupo abeliano $\{X, Y\}_n = \{X, Y\}^{-n}$. Así aparece asociada a \underline{S}_h una categoría graduada, la categoría homotópica graduada \underline{S}_h^* , que tiene los mismos objetos de \underline{S}_h , y como morfismos de X en Y se toma el grupo graduado $\{X, Y\}_* = \{X, Y\}^*$. Si $f \in \{X, Y\}_n$ usaremos la notación $|f| = n$ para indicar que f es un morfismo de grado n .

Si S^0 es el espectro 0-esfera y X es un espectro cualquiera, el grupo $\{S^0, X\}_n$ se llama el n -simo grupo de homotopía de X , y se denota por $\pi_n(X)$. Si X es tal que $\pi_i(X) = 0$ para $i \leq n$, diremos que X es n -conexo, y que X es conexo, si es n -conexo para algún n . Así mismo se dice que X es n -coconexo si $\pi_i(X) = 0$ para $i > n$, y que X es coconexo, si es n -coconexo para algún n .

Si G es un grupo abeliano existe un espectro X tal que $\pi_i(X) = 0$ si $i \neq 0$ y $\pi_0(X) \cong G$. Más aún dos espectros cualesquiera que verifiquen estas propiedades son canónicamente isomorfos en \underline{S}_h . Por lo tanto podemos denotar con $K(G)$ uno cualquiera de tales espectros.

Si X es un espectro y G es un grupo abeliano, el grupo $\{X, K(G)\}^n$ se llama el n -simo grupo de cohomología de X con coeficientes en G y se denota por $H^n(X;G)$. Asimismo el grupo $\{S^0, X \wedge K(G)\}_n = H_n(X;G)$ es el n -simo grupo de homología de X con coeficientes en G . Para el caso particular de $G = \mathbb{Z}$ el grupo de los enteros, convendremos en poner simplemente $H^n(X) = H^n(X; \mathbb{Z})$ y $H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z})$.

Sumas y productos directos. De acuerdo con C.20 y C.22 de [3] la categoría \underline{S}_n contiene sumas y productos directos arbitrarios, únicos salvo isomorfismos; es decir, si $\{X_a : a \in J\}$ es una familia cualquiera de espectros, entonces existen espectros :

$$\bigvee_{a \in J} X_a \quad \text{y} \quad \prod_{a \in J} X_a$$

llamados respectivamente el co-producto y producto de los espectros X_a . Para cada $a \in J$ existen morfismos de grado cero :

$$i_a : X_a \longrightarrow \bigvee X_b \quad \text{y} \quad p_a : \prod X_b \longrightarrow X_a .$$

El co-producto y el producto junto con las familias de morfismos $\{i_a : a \in J\}$ y $\{p_a : a \in J\}$ gozan de la siguiente propiedad universal :

Si Y es un espectro cualquiera y para cada $a \in J$ se tiene un morfismo $g_a : X_a \longrightarrow Y$ con $|g_a| = n$ para todo a , entonces existe un único morfismo $g : \bigvee X_a \longrightarrow Y$ tal que $|g| = n$ y $g \cdot i_a = g_a$.

Análogamente si para cada $a \in J$ tenemos $g_a : Y \longrightarrow X_a$

con $|g_a| = n$ para todo $a \in J$, existe un único morfismo $g : Y \longrightarrow \prod X_a$ tal que $|g| = n$ y $p_a \cdot g = g_a$ para cada $a \in J$.

De acuerdo con esta propiedad universal resulta que los morfismos $\{i_a\}$ y $\{p_a\}$ inducen isomorfismos canónicos:

$$i_* : \{\vee X_a, Y\}_* \longrightarrow \prod \{X_a, Y\}_* \quad \text{y} \quad p_* : \{Y, \prod X_a\}_* \longrightarrow \prod \{Y, X_a\}_*.$$

1.1 Definición. Un Z -diagrama en \underline{S}_h , o un diagrama en \underline{S}_h indiciado por el conjunto de enteros Z , es una sucesión de espectros y morfismos de grado cero, de una de las siguientes formas :

$$(1.1a) \quad \dots \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_{i+2} \longrightarrow \dots,$$

$$(1.1b) \quad \dots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} X_i \xrightarrow{g_i} X_{i-1} \longrightarrow \dots.$$

Asociado a un diagrama de la forma (1.1a) está la construcción telescópica de Milnor, que se obtiene definiendo un morfismo de grado cero :

$$f : \vee X_i \longrightarrow \vee X_i$$

mediante las relaciones $f \cdot k_i = k_i - k_{i+1} \cdot f_i$, donde el morfismo $k_i : X_i \longrightarrow \vee X_j$ es la inclusión canónica; y formando el triángulo exacto correspondiente a f , (J.11 de [3]):

$$\vee X_i \xrightarrow{f} \vee X_i \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} \vee X_i$$

donde $|f| = |g| = 0$ y $|h| = -1$. El espectro X se llama el telescopio de los X_i y se denota por $X = \varinjlim X_i$. De manera análoga se hace la construcción para diagramas de la forma (1.1b).

Denotando con $g_i : X_i \rightarrow X$ la restricción $g|_{X_i} \circ g \cdot k_i$ resulta entonces :

(1.1c) Para cada $i \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{g_i} & X \\
 f_i \searrow & & \nearrow g_{i+1} \\
 & X_{i+1} &
 \end{array}$$

(1.1d) Los morfismos g_i inducen un isomorfismo de grupos abelianos :

$$\varinjlim \pi_k(X_i) \longrightarrow \pi_k(X)$$

para cada entero k . Las propiedades (1.1c) y (1.1d) determinan X unívocamente salvo isomorfismo. Más precisamente tenemos la siguiente proposición .

1.2 Proposición . Supongamos que tenemos un \mathbb{Z} -diagrama en \underline{S}_h :

$$\dots \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_{i+2} \longrightarrow \dots$$

y un espectro Y tal que para cada entero i , existe un morfismo de grado cero $d_i : X_i \rightarrow Y$, que cumplen las propiedades siguientes :

(a) Para cada $i \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{d_i} & Y \\
 f_i \searrow & & \nearrow d_{i+1} \\
 & X_{i+1} &
 \end{array}$$

(b) El homomorfismo de grupos $\varinjlim \pi_k(X_i) \rightarrow \pi_k(Y)$ inducido por los morfismos d_i de acuerdo con la propiedad anterior, es un isomorfismo para cada entero k .

En estas condiciones existe un isomorfismo de grado cero $t: X \rightarrow Y$, tal que $t \cdot g_i = d_i$ para cada i .

Demostración : Los morfismos $d_i: X_i \rightarrow Y$ definen un morfismo $d: \bigvee X_i \rightarrow Y$, donde la restricción de d a X_i , $d|_{X_i} = d \cdot k_i = d_i$. En el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigvee X_i & \xrightarrow{f} & \bigvee X_i & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{h} & \bigvee X_i \\
 & & d \searrow & & \nearrow t & & \\
 & & & & Y & &
 \end{array}$$

tenemos $(d \cdot f)|_{X_i} = d \cdot f \cdot k_i = d(k_i - k_{i+1})f_i = d_i - d_{i+1} \cdot f_i = 0$, donde la última igualdad se sigue de (a). En consecuencia $d \cdot f = 0$, y por lo tanto existe un morfismo $t: X \rightarrow Y$ tal que $t \cdot g = d$. La condición (b) implica ahora que el homomorfismo inducido $\pi_1(t): \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ es un isomorfismo para cada $i \in \mathbb{Z}$, y por consiguiente t es un isomorfismo en S_h . (L.6 de [3]).

Dado un diagrama y un espectro Y como en la proposi-

ción anterior, se dirá que el diagrama es una filtración convergente del espectro Y.

Ejemplos de filtraciones convergentes.

1.3 Para cada espectro Y existe una filtración - convergente de Y, dada por sus esqueletos.

1.4 Para cada entero n pongamos $G_n = \pi_n(Y)$ y para cada $\alpha \in G_n$, sea $g_\alpha^n : S_\alpha^n \rightarrow Y$ representar α , y donde $S_\alpha^n = S^n$ para todo α . Si $g^n : L_n(Y) \rightarrow Y$ es el morfismo definido a partir de los g_α^n , donde $L_n(Y)$ esta dado por $L_n(Y) = \bigvee_{\alpha \in G_n} S_\alpha^n$, entonces el homomorfismo inducido :

$$\pi_n(g^n) : \pi_n(L_n Y) \longrightarrow \pi_n(Y)$$

es un epimorfismo. Si definimos LY como el co-producto de todos los $L_n Y$, entonces los morfismos g^n definen un morfismo $LY \rightarrow Y$, el cual induce epimorfismos en homotopía. En conclusión tenemos que para cada espectro Y, existe un morfismo de grado cero $g(Y) : LY \rightarrow Y$, donde LY es un coproducto de esferas, y tal que para cada entero n :

$$\pi_n(g(Y)) : \pi_n(LY) \longrightarrow \pi_n(Y)$$

es un epimorfismo.

Definamos por inducción una sucesión de espectros Y_n y morfismos $f_n : Y_n \rightarrow Y_{n+1}$, $g_n : Y_n \rightarrow Y$, tales que $g_{n+1} \cdot f_n = g_n$ y $\ker. \pi_n(g_n) \subseteq \ker. \pi_n(f_n)$ para cada par

de enteros m y n .

Pongamos $Y_n = 0$, $f_n = 0$ y $g_n = 0$ para $n < 0$, y sea $Y_0 = LY$, $g_0 = g(Y) : Y_0 \longrightarrow Y$. Supongamos definidos Y_j , $g_j : Y_j \longrightarrow Y$, $f_j : Y_j \longrightarrow Y_{j+1}$ para $j \leq n-1$ verificando las condiciones arriba mencionadas. Consideremos ahora el triángulo exacto dado por g_n :

$$V \xrightarrow{h} Y_n \xrightarrow{g_n} Y \longrightarrow V$$

y sea $g(V) : LV \longrightarrow V$. La composición $d = h.g(V)$ define un triángulo exacto:

$$LV \xrightarrow{d} Y_n \xrightarrow{f_n} Y_{n+1} \longrightarrow LV$$

que da implícitamente Y_{n+1} y $f_n : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$.

Observando que en el primer triángulo $g_n.h = 0$, entonces $g_n.d = 0$, y por lo tanto del último triángulo se obtiene un morfismo $g_{n+1} : Y_{n+1} \longrightarrow Y$ tal que $g_{n+1}.f_n = g_n$. Más aún la definición de Y_{n+1} implica la siguiente relación: $\ker. \pi_m(g_n) \subseteq \ker. \pi_m(f_m)$ para cada entero m , con lo cual termina el paso inductivo. Ahora bien, como consecuencia de esta última relación y de que cada g_n induce epimorfismos en homotopía, se deduce que efectivamente los espectros Y_n y los morfismos f_n y g_n definen una filtración convergente del espectro Y . Debemos destacar por último que para cada entero n , en el triángulo exacto dado por el morfismo f_n :

$$Y_n \xrightarrow{f_n} Y_{n+1} \longrightarrow Q_n \longrightarrow Y_n$$

el espectro Q_n es isomorfo a un coproducto de esferas.

1.5 La filtración de Postnikov. Para cada espectro X y cada entero n , existe un morfismo de grado cero :

$$g_n = g_n(X) : X_n'' \longrightarrow X$$

donde X_n'' es $(n-1)$ -conexo y $\pi_1(g_n) : \pi_1(X_n'') \longrightarrow \pi_1(X)$ es un isomorfismo para $i \geq n$. Tal morfismo goza de la siguiente propiedad universal:

Para cada espectro $(n-1)$ -conexo T y cada morfismo de grado cero $f : T \longrightarrow X$, existe un único morfismo de grado cero $h : T \longrightarrow X_n''$ que hace el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ & \swarrow h & \downarrow f \\ X_n'' & \xrightarrow{g_n} & X \end{array} .$$

De acuerdo con esta propiedad resulta que para cada espectro Y y cada morfismo $f : Y \longrightarrow X$, existe un único morfismo $f_n : Y_n'' \longrightarrow X_n''$ donde $|f| = |f_n| = 0$, y tal que el siguiente cuadrado es conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} Y_n'' & \xrightarrow{g_n(Y)} & Y \\ f_n \downarrow & & \downarrow f \\ X_n'' & \xrightarrow{g_n(X)} & X \end{array} .$$

Como consecuencia de estos resultados se obtiene un único morfismo de grado cero $f_{n+1} : X''_{n+1} \longrightarrow X''_n$ tal que $g_n \circ f_{n+1} = g_{n+1}$. Por consiguiente la sucesión de morfismos de grado cero

$$\dots \longrightarrow X''_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} X''_n \xrightarrow{f_n} X''_{n-1} \longrightarrow \dots$$

y los morfismos $g_n : X''_n \longrightarrow X$ definen una filtración convergente del espectro X , puesto que $\pi_i(g_n) : \pi_i(X''_n) \longrightarrow \pi_i(X)$ es un isomorfismo para $i \geq n$.

Más aún en el triángulo exacto dado por g_n :

$$X''_n \xrightarrow{g_n} X \xrightarrow{h_n} X'_n \xrightarrow{t_n} X''_n$$

donde $|g_n| = |h_n| = 0$ y $|t_n| = -1$, resulta que $\pi_i(X'_n) = 0$ para $i > n-1$, es decir, X'_n es un espectro $n-1$ coconexo. Los espectros X''_n y X'_n se llaman respectivamente la n -fibra y la n -cofibra de Postnikov del espectro X .

Finalmente la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} X''_n & \xrightarrow{f_n} & X''_{n-1} \\ & \searrow g_n & \swarrow g_{n-1} \\ & X & \end{array}$$

implica que $\pi_i(f_n) : \pi_i(X''_n) \longrightarrow \pi_i(X''_{n-1})$ es un isomorfismo para $i \geq n$. Tomando ahora en consideración que X''_n es

(n-1)-conexo, resulta entonces que en el triángulo exacto dado por el morfismo f_n :

$$X''_n \xrightarrow{f_n} X''_{n-1} \xrightarrow{d_n} Y_{n-1} \xrightarrow{c_n} X''_n$$

donde $|f_n| = |d_n| = 0$ y $|c_n| = -1$, el espectro Y_{n-1} es tal que $\pi_i(Y_{n-1}) = 0$ si $i \neq (n-1)$ y para $i = n-1$ se tiene un isomorfismo $\pi_{n-1}(Y_{n-1}) \cong \pi_{n-1}(X)$. Por consiguiente Y_{n-1} es isomorfo en \underline{S}_h a la (n-1)-suspensión del espectro de Eilenberg-MacLane correspondiente al grupo $\pi_{n-1}(X)$; es decir $Y_{n-1} \cong S^{n-1}K(\pi_{n-1}(X))$.

La existencia y unicidad - salvo isomorfismo- de la filtración de Postnikov de un espectro cualquiera será una consecuencia del siguiente lema .

1.6 Lema. Si $g : Y \rightarrow X$ es un morfismo de grado cero, donde Y es (n-1)-conexo; entonces existe un morfismo de grado cero $h : J \rightarrow X$, y una factorización de g :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \bar{g} \swarrow & & \searrow g \\ J & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

donde J es (n-1)-conexo y $\pi_i(h) : \pi_i(J) \rightarrow \pi_i(X)$ es un isomorfismo para $i \geq n$.

1.7 Corolario. Sean L y T espectros (n-1)-conexos y sean $f : L \rightarrow X$ y $t : T \rightarrow X$ morfismos de grado cero tales que $\pi_i(f)$ y $\pi_i(t)$ son isomorfismos para cada $i \geq n$,

Entonces existe un morfismo de grado cero $k : L \longrightarrow T$ tal que $t.k = f$, y por lo tanto k es un isomorfismo.

En efecto, tomando $Y = L \vee T$ y $g : Y \longrightarrow X$ con $g|L = f$ y $g|T = t$; y usando el lema anterior, se obtiene un diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \bar{g} \swarrow & & \searrow g \\ J & \xrightarrow{h} & X \end{array} .$$

Las hipótesis sobre f y t implican que las restricciones $\bar{g}|L$ y $\bar{g}|T$ son isomorfismos. Por lo tanto bastará definir $k : L \longrightarrow T$ por $k = (\bar{g}|T)^{-1} . (\bar{g}|L)$.

Demostración del lema : Sea m un entero fijo, y sea $\alpha : A \longrightarrow X$ un morfismo de grado cero. Supongamos que existen enteros p y q con $p < q$ y $q \geq 0$ tales que $\pi_i(\alpha)$ es un monomorfismo para $i \leq m+p$ y un epimorfismo cuando $m \leq i \leq m+q$. Sea $g^r(X) : L_r X \longrightarrow X$ como en el ejemplo 1.4, y definir $h : A \vee L_{m+q} X \longrightarrow X$ por $h|A = \alpha$ y $h|L_{m+q} = g^{m+q}$. Pongamos $G = \ker. \pi_{m+q}(h)$ y $K = \bigvee_x S_x^{m+q}$ donde el coproducto se toma sobre todos los $x \in G$ y $S_x^{m+q} = S^{m+q}$ para cada $x \in G$. Entonces existe un morfismo de grado cero $t : K \longrightarrow A \vee L_{m+q}$ tal que $G = \text{imag. } \pi_{m+q}(t)$ y $h.t=0$. Por consiguiente, si

$$K \xrightarrow{t} A \vee L_{m+q} \xrightarrow{s} M \longrightarrow K$$

es el triángulo exacto correspondiente a t , donde $|t|=|s|=0$,

existe un morfismo $h_1 : M \longrightarrow X$ que hace el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{t} & A \vee L_{m+q} & \xrightarrow{s} & M & \longrightarrow & K \\
 & \nearrow \sigma & \downarrow h & & \nwarrow h_1 & & \\
 A & \xrightarrow{\alpha} & X & & & &
 \end{array}$$

donde $\sigma : A \longrightarrow A \vee L_{m+q}$ es la inclusión canónica.

La hipótesis sobre α y la definición de t implican que $\pi_i(h_1) : \pi_i(M) \longrightarrow \pi_i(X)$ es un monomorfismo para cada $i \leq m+p+1$ y un epimorfismo para $m \leq i \leq m+q$. Finalmente si ponemos $A_1 = M \vee L_{m+q+1}(X)$, y $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow X$ es el morfismo definido por h_1 y $g^{m+q+1}(X)$, obtenemos un diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \beta \swarrow & & \searrow \alpha \\
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X
 \end{array}$$

en el que β es la composición $A \xrightarrow{\sigma} A \vee L_{m+q} \xrightarrow{s} M \xrightarrow{i} A_1$, donde i es la inclusión de M en A_1 . En conclusión, este último diagrama es una factorización de α , en donde como consecuencia de la construcción hecha, se deduce que $\pi_i(\alpha_1)$ es un monomorfismo para $i \leq m+p+1$, y un epimorfismo para $m \leq i \leq m+q+1$. Más aún el espectro A_1 es r -conexo, siempre que A sea r -conexo con $r < m+q$.

Sea ahora $g : Y \longrightarrow X$ como en la hipótesis del lema, y sea $K_0 = Y \vee L_n X$ y $t_0 : K_0 \longrightarrow X$ con $t_0|_Y = g$ y $t_0|_{L_n X} = g^n(X)$. Aplicando la conclusión anterior tomando

$t_0 = \alpha$, $m = n$, $p = -1$ y $q = 0$, obtenemos un diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} & K_0 & \\ \beta_0 \swarrow & & \searrow t_0 \\ K_1 & \xrightarrow{t_1} & X \end{array}$$

donde $\chi_i(t_1)$ es un isomorfismo para $m \leq i \leq m$ y un epimorfismo para $i = m+1$. Razonando análogamente con t_1 e inductivamente obtenemos morfismos $t_r : K_r \longrightarrow X$ y $\beta_r : K_r \longrightarrow K_{r+1}$ tales que $t_{r+1} \cdot \beta_r = t_r$ para cada $r \geq 0$, y donde $\chi_i(t_j)$ es un isomorfismo para $m \leq i \leq m+j-1$ y un epimorfismo para $i = m+j$, con $j \geq 1$.

Tenemos así una sucesión de espectros y morfismos:

$$\dots \longrightarrow K_r \xrightarrow{\beta_r} K_{r+1} \xrightarrow{\beta_{r+1}} K_{r+2} \longrightarrow \dots$$

donde $K_j = 0$ y $\beta_j = 0$ para $j < 0$. Sea $J = \varinjlim K_i$ en el triángulo exacto:

$$\varinjlim K_i \xrightarrow{\beta} \varinjlim K_i \xrightarrow{d} J \xrightarrow{c} \varinjlim K_i$$

y sea $t : \varinjlim K_i \longrightarrow X$ el morfismo dado por los t_r . Entonces, puesto que para cada r , $t_{r+1} \cdot \beta_r = t_r$, tenemos $t \cdot \beta = 0$, y por consiguiente existe un morfismo $h : J \longrightarrow X$ tal que $(h \cdot d) |_{K_i} = t_i$ para cada i . Esta última relación junto con las propiedades de los homomorfismos $\chi_i(t_r)$ implican que $\chi_i(h)$ es un isomorfismo para cada $i \geq n$. Finalmente si

definimos $\bar{g} : Y \longrightarrow J$ como la composición $Y \longrightarrow K_0 \longrightarrow J$ donde el primer morfismo es la inclusión y el segundo es la restricción $d|_{K_0}$, resulta entonces que $h.\bar{g} = g$, con lo cual finaliza la demostración del lema.

Volviendo a la fibración de Postnikov, tomando $Y = 0$ en el lema, se obtiene un morfismo de grado cero :

$$g_n(X) : X_n'' \longrightarrow X$$

donde X_n'' es $(n-1)$ -conexo, y $g_n(X)$ induce isomorfismo en homotopía en dimensiones mayores o iguales a n . El corolario del lema implica que X_n'' está unívocamente determinado salvo isomorfismo. Más aún, si T es un espectro $(n-1)$ -conexo, y $f : T \longrightarrow X$ es un morfismo de grado cero, usando el lema nuevamente con $Y = T$ y la unicidad de X_n'' se determina un morfismo $h : T \longrightarrow X_n''$ tal que $g_n(X).h = f$. Por último nos falta por mostrar que h está unívocamente determinado por f . A tal efecto, supongamos que J es un espectro m -coconexo con $m \leq n-1$ y T es un espectro $(n-1)$ -conexo. Entonces $\{T, J\} = 0$ puesto que $J_n'' \approx 0$. Más generalmente tenemos que si J y T son tales que T es $n-1$ conexo y J es m -coconexo, entonces $\{T, J\}_k = 0$ para $k > m-n$. De aquí se deduce inmediatamente que el morfismo $g_n(X)$ induce un isomorfismo $\{T, X_n''\} \approx \{T, X\}$ para cada espectro $(n-1)$ -conexo T , lo que muestra la universalidad de $g_n(X)$, y en particular la unicidad del morfismo h determinado por f .

Consideremos de nuevo los triángulos exactos correspondientes a los morfismos $g_n = g_n(X)$ y f_{n+1} :

$$X''_n \xrightarrow{g_n} X \xrightarrow{h_n} X'_n \xrightarrow{f_n} X''_n ;$$

$$X''_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} X''_n \xrightarrow{g_n} S^n K(\pi_n(X)) \xrightarrow{t_n} X''_{n+1} ,$$

donde $|g_n| = |h_n| = 0$, $|f_n| = -1$; $|f_{n+1}| = |g_n| = 0$ y $|t_n| = -1$.

El morfismo composición $X'_n \xrightarrow{f_n} X''_n \xrightarrow{g_n} S^n K(\pi_n(X))$ es un morfismo de grado -1 , y representa una clase de cohomología $k^{n+1}(X) \in H^{n+1}(X'_n; \pi_n(X))$, que se llama el k -invariante $(n+1)$ -dimensional o invariante de Postnikov del espectro X . Una propiedad que queremos resaltar sobre tales invariantes, y que nos será útil más adelante está resumida en la proposición que sigue a continuación.

1.8 Proposición. Si X es un espectro conexo, entonces para cada entero n , $k^{n+1}(X)$, el $(n+1)$ -invariante de Postnikov de X es un elemento de torsión en el grupo $H^{n+1}(X'_n; \pi_n(X))$.

Demostración: Supongamos que X es $(n-1)$ -conexo. Entonces de acuerdo con L.3 de [3], podemos asumir que el $(n-1)$ -esqueleto de X , $X^{n-1} \approx 0$. Si $j_n : X^n \rightarrow X^{n+1}$ es la inclusión, entonces en el triángulo exacto:

$$X^n \xrightarrow{j_n} X^{n+1} \xrightarrow{c_n} Y_{n+1} \xrightarrow{d_n} X^n$$

el espectro Y_{m+1} es isomorfo a un coproducto de esferas de dimensión $m+1$. Por consiguiente, por inducción en m - con $m \geq n-1$, y tomando en cuenta que $\pi_r(S^0)$ es un grupo finito para cada $r > 0$, se demuestra que el núcleo y el conúcleo del homomorfismo de Hurewicz :

$$\pi_i(X^m) \longrightarrow H_i(X^m; Z)$$

son grupos de torsión acotada para cada entero i . Ahora bien, puesto que la inclusión $X^m \longrightarrow X$ induce isomorfismos $\pi_i(X^m) \cong \pi_i(X)$ para $i < m$, resulta finalmente que para cada espectro conexo X , el núcleo y el conúcleo del homomorfismo de Hurewicz, son grupos de torsión acotada en cada dimensión. Como X'_n , la n -cofibra de Postnikov de X es $(n-1)$ -coconexo y X es conexo, entonces la conclusión anterior muestra que los grupos $H_n(X'_n)$ y $H_{n+1}(X'_n)$ son grupos de torsión acotada para cada entero n .

Usando ahora el teorema de coeficientes universales:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_n(Y), G) \longrightarrow H^{n+1}(Y; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_{n+1}(Y), G) \longrightarrow 0$$

en el caso $Y = X'_n$, se deduce que el grupo $H^{n+1}(X'_n; G)$ es un grupo de torsión para cualquier grupo G ; con lo que finaliza la demostración de la proposición.

Se pueden construir otras filtraciones convergentes, de las cuales la filtración de Moore es una de las más in-

portantes, y cuya construcción exige algunos preliminares que serán considerados en las secciones siguientes.

1.9 Límites inversos . Consideremos una sucesión de espectros y morfismos de grado cero, de la forma (1.1b) :

$$\dots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i-1} \longrightarrow \dots$$

Sea $p_j : \prod_i X_i \longrightarrow X_j$ la proyección canónica, y definamos un morfismo de grado cero $f : \prod X_i \longrightarrow \prod X_i$ mediante las relaciones $p_i f = p_i - f_{i+1} \cdot p_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Formando el triángulo exacto correspondiente a f :

$$X \xrightarrow{g} \prod X_i \xrightarrow{f} \prod X_i \xrightarrow{h} X$$

donde $|g| = |f| = 0$ y $|h| = -1$, convendremos en poner $X = \varprojlim X_i$, haciendo notar que X no es en general un límite inverso en la categoría \underline{S}_h .

Como $f \cdot g = 0$, entonces para cada entero i , tenemos:

$$p_i(f \cdot g) = (p_i - f_{i+1} \cdot p_{i+1})g = p_i \cdot g - f_{i+1}(p_{i+1} \cdot g) = 0,$$

y por lo tanto poniendo $g_j = p_j \cdot g$, resulta conmutativo el diagrama siguiente :

$$\begin{array}{ccc} & & X_{i+1} \\ & \nearrow^{g_{i+1}} & \downarrow f_{i+1} \\ X & & X_i \\ & \searrow_{g_i} & \end{array} .$$

Los morfismos g_i inducen para cada espectro Y y

cada entero k , un homomorfismo de grupos abelianos:

$$(1.9a) \quad \{Y, X\}^k \longrightarrow \varinjlim \{Y, X_i\}^k$$

de manera que, de acuerdo con la siguiente relación :

$$\text{imag.}(\{Y, X\}^k \xrightarrow{g_*} \{Y, \prod X_i\}^k) = \text{ker.}(\{Y, \prod X_i\}^k \xrightarrow{f_*} \{Y, \prod X_i\}^k)$$

resulta que la imagen del homomorfismo (1.9a) es precisamente $\varinjlim \{Y, X_i\}^k$, y en consecuencia es un epimorfismo ; aunque en general no es un monomorfismo, siendo esta última condición equivalente con que el homomorfismo inducido por f :

$$(1.9b) \quad \{Y, \prod X_i\}^{k-1} \xrightarrow{f_*} \{Y, \prod X_i\}^{k-1}$$

sea un epimorfismo.

En lo que sigue vamos a establecer condiciones suficientes para que (1.9b) sea un epimorfismo, en términos de consideraciones relacionadas con la teoría de grupos abelianos.

Sea entonces $\dots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \longrightarrow \dots$ una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos.

Definamos homomorfismos $f_m^n : G_n \longrightarrow G_m$ para $n \geq m$, tomando como f_n^n el homomorfismo identidad de G_n , y para $n > m$, f_m^n es la composición :

$$G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow G_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} G_m .$$

Sea $p_n : \prod_1 G_1 \longrightarrow G_n$ la proyección canónica sobre G_n y consideremos el homomorfismo $f : \prod_1 G_1 \longrightarrow \prod_1 G_1$ dado por las relaciones $p_n \cdot f = p_n - f_{n+1} \cdot p_{n+1}$. Entonces $\ker f$ es precisamente $\varprojlim G_1$. Más aún existe una sucesión exacta:

$$(1.9c) \quad 0 \longrightarrow \varprojlim G_1 \longrightarrow \prod_1 G_1 \xrightarrow{f} \prod_1 G_1 \longrightarrow \varprojlim^1 G_1 \longrightarrow 0$$

donde \varprojlim^1 denota el primer funtor derivado a la derecha del funtor \varprojlim . ([12]).

1.10 Definición. Diremos que un subconjunto de enteros $J \subseteq \mathbb{Z}$ es cofinal en \mathbb{Z} , si para cada $m \in \mathbb{Z}$, existe algún $n \in J$ tal que $n \geq m$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, sea m_i el primer elemento del conjunto $\{t \in J : t > i\}$; y definamos un homomorfismo $f_J :$

$$f_J : \prod_{i \in J} G_1 \longrightarrow \prod_{i \in J} G_1$$

por las relaciones $p_i f_J = p_i - f_i^{m_i} \cdot p_{m_i}$ para cada $i \in J$.

Consideremos finalmente los homomorfismos ρ y $\lambda :$

$$\rho, \lambda : \prod_{i \in \mathbb{Z}} G_1 \longrightarrow \prod_{i \in J} G_1$$

donde ρ es la proyección canónica y λ está dado para cada $j \in J$ por la fórmula:

$$(1.10a) \quad p_j \cdot \lambda = p_j + \sum_{j \in r(m_j)} f_j^r \cdot p_r \quad .$$

Con estas definiciones tenemos el siguiente lema.

1.11 Lema. Si $J \subseteq Z$ es cofinal, entonces existe un morfismo de sucesiones exactas :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \varinjlim_{i \in Z} G_i & \longrightarrow & \prod_{i \in Z} G_i & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in Z} G_i & \longrightarrow & \varinjlim^1_{i \in Z} G_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \bar{\rho} & & \downarrow \rho & & \downarrow \lambda & & \downarrow \bar{\lambda} & & \\
 0 & \longrightarrow & \varinjlim_{i \in J} G_i & \longrightarrow & \prod_{i \in J} G_i & \xrightarrow{f_J} & \prod_{i \in J} G_i & \longrightarrow & \varinjlim^1_{i \in J} G_i & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde $\bar{\rho}$ y $\bar{\lambda}$, inducidas respectivamente por ρ y λ son isomorfismos.

Demostración : En primer lugar, usando las definiciones anteriores, una fácil computación muestra que $f_J \cdot \rho = \lambda \cdot f$, y por lo tanto ρ y λ inducen homomorfismos $\bar{\rho}$ y $\bar{\lambda}$ de manera que el diagrama anterior es conmutativo.

En segundo lugar, si definimos u y $v: \prod_{i \in J} G_i \longrightarrow \prod_{i \in Z} G_i$ mediante las relaciones $p_j \cdot u = 0$ si $j \notin J$, y $p_j \cdot u = p_j$ si $j \in J$; $p_j \cdot v = p_j$ si $j \in J$; y $p_j \cdot v = f_j^{m_j} \cdot p_{m_j}$ si $j \notin J$; entonces una sencilla verificación muestra que $\lambda \cdot u = 1$; $\rho \cdot v = 1$, y además $f \cdot v = u \cdot f_J$. De aquí resulta entonces que $\bar{\rho}$ y $\bar{\lambda}$ son epimorfismos. Para ver que $\bar{\rho}$ es un monomorfismo será suficiente mostrar que $(\ker \rho) \cap (\ker f) = 0$. Sea pues $x = (x_i)$ donde $x_i \in G_i$ para cada $i \in Z$, tal que $f(x) = 0$ y $\rho(x) = 0$; entonces $f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$, y en consecuencia $f_j^i(x_i) = x_j$ para cada $i > j$. Como J es cofinal en Z , para cada $n \in Z$, existe $m \in J$, con $m > n$, y

por lo tanto $f_n^m(x_m) = x_n$. La hipótesis $f(x) = 0$ implica que $x_m = 0$ para cada $m \in J$; y así en conclusión tenemos que $x_n = 0$ para cada $n \in Z$, es decir $x = 0$.

Finalmente nos resta por mostrar que $\bar{\lambda}$ es un monomorfismo. Ahora bien, tomando en cuenta que ρ es un epimorfismo, será suficiente entonces mostrar que $\ker.\lambda \subseteq \text{imag}.f$.

Sea entonces $y \in \ker.\lambda$, $y = (y_i)$ con $y_i \in G_i$ para cada $i \in Z$. Entonces de acuerdo con la definición (1.10a), para cada $j \in J$, tenemos la relación :

$$(1.11a) \quad y_j + \sum_{j \in r \in m_j} f_j^r(y_r) = 0.$$

Para cada $j \in Z$, definir elementos $x_j \in G_j$ por las fórmulas siguientes :

$$x_j = 0 \text{ si } j \in J, \text{ y } x_j = y_j + \sum_{j \in r \in m_j} f_j^r(y_r) \text{ si } j \notin J.$$

Con esta definición resulta finalmente:

(a) Si $j \in J$ y $(j+1) \in J$, entonces $m_j = j+1$; $y_j = 0$ de acuerdo con (1.11a), y así $x_j = x_{j+1} = 0$. En conclusión resulta $x_j - f_{j+1}(x_{j+1}) = 0 = y_j$.

(b) Si $j \in J$ y $(j+1) \notin J$, entonces $m_j = m_{j+1}$, $x_j = 0$; mientras que la definición de x_{j+1} da la siguiente relación:

$$-f_{j+1}(x_{j+1}) = -\left[f_{j+1}(y_{j+1}) + \sum_{j+1 \in r \in m_{j+1}} f_{j+1}^r(y_r) \right] = -\sum_{j+1 \in r \in m_{j+1}} f_{j+1}^r(y_r) = y_j$$

donde la última igualdad se sigue de la relación (1.11a).

En conclusión tenemos que $x_j - f_{j+1}(x_{j+1}) = y_j$.

En los casos restantes, una comprobación análoga permite mostrar que $x_j - f_{j+1}(x_{j+1}) = y_j$; y por consiguiente si ponemos $x = (x_i)$, resulta $f(x) = y$; con lo que termina la demostración del lema.

Consideremos ahora un Z-diagrama en \underline{S}_h :

$$\dots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i-1} \longrightarrow \dots$$

de espectros y morfismos de grado cero; y sea J un subconjunto cofinal en Z. Imitando la construcción anterior podemos definir un morfismo de grado cero $f_J : \prod_{i \in J} X_i \longrightarrow \prod_{i \in J} X_i$ y obtener un morfismo de triángulos exactos:

$$X = \begin{array}{ccccccc} \varinjlim_{i \in Z} X_i & \xrightarrow{g} & \prod_{i \in Z} X_i & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in Z} X_i & \xrightarrow{h} & \varinjlim_{i \in Z} X_i \\ \sigma_J \downarrow & & \rho \downarrow & & \lambda \downarrow & & \downarrow \sigma_J \\ X_J & \xrightarrow{g_J} & \prod_{i \in J} X_i & \xrightarrow{f_J} & \prod_{i \in J} X_i & \xrightarrow{h_J} & X_J \end{array}$$

donde X_J se denota por $\varinjlim_{i \in J} X_i$. Más aún, tomando en cuenta que para cada $r \in Z$, tenemos un diagrama conmutativo de grupos y homomorfismos, deducido del diagrama anterior:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \varinjlim_{i \in Z}^1 \kappa_{r+1}(X_i) & \longrightarrow & \kappa_r(X) & \longrightarrow & \varinjlim_{i \in Z} \kappa_r(X_i) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \kappa_r(\sigma) & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \varinjlim_{i \in J}^1 \kappa_{r+1}(X_i) & \longrightarrow & \kappa_r(X_J) & \longrightarrow & \varinjlim_{i \in J} \kappa_r(X_i) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

y aplicando el lema, obtenemos que el primer y último ho -

homomorfismos verticales son isomorfismos, y en consecuencia $\pi_r(\sigma_J)$ es un isomorfismo para cada $r \in \mathbb{Z}$. En resumen tenemos el siguiente corolario del lema.

1.12 Corolario. Si $\dots \rightarrow X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i-1} \rightarrow \dots$ es una sucesión de morfismos de grado cero en \underline{S}_h , y $J \subseteq \mathbb{Z}$ es un subconjunto cofinal; entonces existe un isomorfismo :

$$\sigma_J : \varprojlim_{i \in \mathbb{Z}} X_i \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{i \in J} X_i$$

tal que para cada $i \in J$, el siguiente diagrama es conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{i \in \mathbb{Z}} X_i & \xrightarrow{\sigma_J} & \varprojlim_{i \in J} X_i \\ & \searrow g_i & \swarrow g_j^i \\ & X_i & \end{array}$$

y donde g_i y g_j^i son las proyecciones canónicas.

Del mismo lema 1.11 se obtiene otro corolario que da una condición suficiente para que $\varprojlim^1 G_i = 0$. Pero antes debemos dar una definición.

1.13 Definición. Diremos que una sucesión de grupos y homomorfismos:

$$(1.13a) \quad \dots \rightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \rightarrow \dots$$

es una sucesión Mittag-Leffler (M-L), si para cada entero n , existe algún entero m con $m \geq n$, tal que $f_n^r(G_r) = f_n^m(G_m)$ para cada $r \geq m$. (Ver pg. 18 para la def. de f_n^i).

Ejemplos de sucesiones M-L se obtienen en el caso de que cada grupo G_n es un grupo finito, o bien cuando cada f_n es un epimorfismo a partir de algún n en adelante.

1.14 Corolario. Si una sucesión de grupos y homomorfismos de la forma (1.13a) es una sucesión M-L, entonces el funtor derivado, $\varprojlim^1 G_i = 0$.

Demostración : Para cada entero i denotemos con $n(i)$ uno de los enteros correspondientes a i que satisfacen la condición M-L; y definamos una sucesión m_i por inducción, poniendo $m_0 = 0$ y $m_i = n(m_{i-1})$ y donde $m_i < m_j$ si $i < j$. Tal sucesión determina entonces un subconjunto cofinal $J \subseteq \mathbb{Z}$.

Para cada $i \geq 1$, pongamos $T_{i-1} = f_{m_{i-1}}^{m_i}(G_{m_i}) \subseteq G_{m_{i-1}}$. Entonces, de acuerdo con la definición de los m_i , tenemos:

$$(1.14a) \quad f_{m_{i-1}}^{m_i}(T_i) = f_{m_{i-1}}^{m_i} \cdot f_{m_i}^{m_{i+1}}(G_{m_{i+1}}) = f_{m_{i-1}}^{m_i}(G_{m_i}) = T_{i-1}.$$

Como J es cofinal en \mathbb{Z} , entonces de acuerdo con el lema 1.11, para la demostración del corolario, será suficiente mostrar que $\varprojlim_{i \in J}^1 G_i = 0$, o equivalentemente, que para cada $x = (x_i)$ con $x_i \in G_{m_i}$, existen elementos $y_i \in G_{m_i}$ tales que $y_{i-1} - f_{m_{i-1}}^{m_i}(y_i) = x_{i-1}$ para cada $i \geq 1$.

Sea entonces $z_{i-1} = f_{m_{i-1}}^{m_i}(x_i) \in T_{i-1}$ para $i \geq 1$, y definamos por inducción elementos $u_j \in T_j$, de modo que verifiquen la relación siguiente:

$$(1.14b) \quad u_{i-1} - f_{m_{i-1}}^{m_i}(u_i) = s_{i-1}$$

para cada entero $i \geq 1$. Elegir $u_0 \in T_0$ arbitrariamente, y supongamos que tenemos definidos elementos $u_j \in T_j$ para $j \leq i$ y que satisfacen la relación anterior (1.14b). Entonces, puesto que $u_i - s_i \in T_i = f_{m_i}^{m_{i+1}}(T_{i+1})$ - según (1.14a) - , existe un elemento $u_{i+1} \in T_{i+1}$ tal que $u_i - s_i = f_{m_i}^{m_{i+1}}(u_{i+1})$, con lo cual termina el paso inductivo.

Por último poniendo $y_i = x_i + u_i \in G_{m_i}$ para $i \geq 0$, obtenemos :

$$y_{i-1} - f_{m_{i-1}}^{m_i}(y_i) = x_{i-1} - s_{i-1} + (u_{i-1} - f_{m_{i-1}}^{m_i}(u_i)) = x_{i-1},$$

donde la última igualdad se sigue de (1.14b). Con esto finaliza la demostración del corolario.

1.15 Aplicaciones . Consideremos las siguientes sucesiones de morfismos de grado cero en S_h :

$$\dots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i-1} \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow T_i \xrightarrow{f_i} T_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} T_{i+2} \longrightarrow \dots \quad ;$$

y sean :

$$X \xrightarrow{g} \prod X_i \xrightarrow{f} \prod X_i \xrightarrow{h} X$$

$$T \xrightarrow{g'} \prod T_i \xrightarrow{f'} \prod T_i \xrightarrow{h'} T$$

donde $|f| = |g| = 0$, $|f'| = |h'| = 0$, los triángulos exac-

tos que definen $X = \varprojlim X_i$ y $T = \varinjlim T_i$. Entonces para cada espectro Y , y cada entero j , los morfismos f_i y f'_i inducen las siguientes sucesiones de grupos y homomorfismos :

$$(1.15a) \quad \dots \longrightarrow \{Y, X_{i+1}\}^j \longrightarrow \{Y, X_i\}^j \xrightarrow{f_i} \{Y, X_{i-1}\}^j \longrightarrow \dots$$

$$(1.15b) \quad \dots \longrightarrow \{T_{i+1}, Y\}^j \longrightarrow \{T_i, Y\}^j \xrightarrow{f'_i} \{T_{i-1}, Y\}^j \longrightarrow \dots$$

Usando ahora los homomorfismos dados por (1.9a) y (1.9b), y la sucesión exacta dada por (1.9c), obtenemos las siguientes sucesiones exactas de Milnor, ([11]) :

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 \{Y, X_i\}^{k-1} \longrightarrow \{Y, X\}^k \xrightarrow{\alpha_k} \varprojlim \{Y, X_i\}^k \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 \{T_i, Y\}^{k-1} \longrightarrow \{T, Y\}^k \xrightarrow{\beta_k} \varprojlim \{T_i, Y\}^k \longrightarrow 0 .$$

En consecuencia si para $j = k-1$, (1.15a) o bien (1.15b) es una sucesión M-L, entonces α_k o bien β_k es un isomorfismo.

Así por ejemplo, si

$$\dots \longrightarrow X''_{n+1} \longrightarrow X''_n \xrightarrow{f_n} X''_{n-1} \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow X'_{n+1} \longrightarrow X'_n \xrightarrow{g_n} X'_{n-1} \longrightarrow \dots$$

son las sucesiones correspondientes a las fibras y cofibras de Postnikov de un espectro X , entonces para cada entero j ,

las sucesiones de grupos y homomorfismos :

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \pi_j(X''_{n+1}) &\longrightarrow \pi_j(X''_n) \xrightarrow{\pi_j(f_n)} \pi_j(X''_{n-1}) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_j(X'_{n+1}) &\longrightarrow \pi_j(X'_n) \xrightarrow{\pi_j(g_n)} \pi_j(X'_{n-1}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

son sucesiones M-L; la primera de ellas porque $\pi_j(f_n)$ es un isomorfismo para $j < n$ y más precisamente porque $\pi_j(X_n)$ es nulo para cada $n > j$; y la segunda de ellas porque $\pi_j(g_n)$ es un isomorfismo para $n > j$. Por lo tanto los morfismos canónicos $X \rightarrow X'_n$ inducen un isomorfismo $X \approx \varprojlim X'_n$; mientras que para las fibras tenemos $\varprojlim X''_n \approx 0$; y así para cada espectro Y , se obtiene trivialmente:

$$(1.15c) \quad \varprojlim \{Y, X''_n\}^* = 0 \quad \text{y} \quad \varprojlim^1 \{Y, X''_n\}^* = 0.$$

L.15d. Lema. Si X e Y son espectros tales que X es conexo, entonces para cada entero k , el homomorfismo canónico $\alpha_k : \{Y, X\}^k \rightarrow \varprojlim \{Y, X'_n\}^k$ es un isomorfismo en cada uno de los siguientes casos:

- (i) $H_n(Y; Z)$ es finito y $\pi_n(X)$ es finitamente generado para cada $n \in \mathbb{Z}$.
- (ii) $H_n(Y; Z)$ es finitamente generado y $\pi_n(X)$ es un grupo finito para cada entero n .

En efecto, el teorema de coeficientes universales implica que $H^n(Y; \pi_m(X))$ es un grupo finito para cada par de enteros m y n , en cualquiera de los casos (i) y (ii).

Suponiendo ahora que X es $(m-1)$ -conexo, entonces sus cofibras de Postnikov X'_n son tales que $X'_n \approx 0$ para $n \leq m$, y $X'_{m+1} \approx S^m K(\pi_m(X))$. Usando los triángulos exactos:

$$X'_{n+1} \longrightarrow X'_n \longrightarrow S^n K(\pi_n(X)) \longrightarrow X'_{n+1}$$

y las sucesiones exactas inducidas:

$$\{Y, X'_{n+1}\}^* \longrightarrow \{Y, X'_n\}^* \longrightarrow H^*(Y; \pi_n(X)) \longrightarrow \{Y, X'_{n+1}\}^* ;$$

y haciendo inducción en $n \geq m$, el resultado anterior permite mostrar que $\{Y, X'_n\}^j$ es un grupo finito para cada par de enteros n y j . Por consiguiente la sucesión de grupos y homomorfismos:

$$\dots \longrightarrow \{Y, X'_{n+1}\}^j \longrightarrow \{Y, X'_n\}^j \longrightarrow \{Y, X'_{n-1}\}^j \longrightarrow \dots$$

es una sucesión M-L, y en consecuencia del lema-corolario 1.14, se sigue que $\varprojlim^1 \{Y, X'_n\}^j = 0$ para cada entero j . Usando por último la sucesión exacta de Milnor, se obtiene la conclusión del lema.

1.15e Corolario. Si X e Y son espectros tales que X es conexo, y $H_*(Y; Z)$ y $\pi_*(X)$ son finitamente generados en cada dimensión; entonces en la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 \{Y, X'_n\}^{k-1} \longrightarrow \{Y, X\}^k \longrightarrow \varprojlim \{Y, X'_n\}^k \longrightarrow 0 ,$$

el grupo $\varprojlim^1 \{Y, X'_n\}^{k-1}$ coincide con el subgrupo de $\{Y, X\}^k$ de sus elementos divisibles.

En efecto , considerando el caso de una sucesión de grupos (G_i) como (1.13a) , en la cual cada G_i es finitamente generado, y usando los homomorfismos canónicos : $G_i \rightarrow G_i \otimes \mathbb{Z}_p$, donde \mathbb{Z}_p es el grupo de enteros módulo un primo entero p , se obtiene un diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \varprojlim G_i & \longrightarrow & \prod G_i & \xrightarrow{f} & \prod G_i & \xrightarrow{h} & \varprojlim^1 G_i \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \\
 & & & \prod G_i \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\bar{f}} & \prod G_i \otimes \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

donde la sucesión exacta horizontal es (1.9c), y donde \bar{f} es el homomorfismo inducido por f . Como los grupos $G_i \otimes \mathbb{Z}_p$ son grupos finitos, puesto que los G_i son finitamente generados, entonces \bar{f} es un epimorfismo; y por consiguiente para cada $x \in \varprojlim^1 G_i$ existe un $z \in \ker. \alpha$ y tal que $h(z) = x$. Tomando en cuenta ahora que existe un isomorfismo canónico $\rho : \mathbb{Z}_p \otimes \prod G_i \rightarrow \prod \mathbb{Z}_p \otimes G_i$, que hace conmutativo el diagrama :

$$\begin{array}{ccccc}
 \prod G_i & \xrightarrow{p} & \prod G_i & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p \otimes \prod G_i \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow \alpha & & \swarrow \rho \\
 & & \prod \mathbb{Z}_p \otimes G_i & &
 \end{array} ;$$

y donde la sucesión horizontal es exacta, se obtiene un elemento $u \in \prod G_i$ tal que $p.u = z$. Así que en conclusión tenemos $x = p.h(u)$ es divisible por p , y en consecuencia $\varprojlim^1 G_i$ es un grupo divisible.

Volviendo a los espectros X e Y , un razonamiento - análogo al hecho en el corolario anterior, muestra que los grupos $\{Y, X'_n\}^{k-1}$ son grupos finitamente generados para cada par de enteros n y k ; y por consiguiente, de acuerdo con el resultado anterior, $\varprojlim^1 \{Y, X'_n\}^{k-1}$ es un grupo divisible para cada k . Observemos así mismo que si tomamos el espectro $T = X \wedge \mu\mathbb{Z}_p$, donde $\mu\mathbb{Z}_p$ es el espectro de Moore correspondiente al grupo \mathbb{Z}_p (ver 2.1 de [14]), entonces de acuerdo con la sucesión exacta 2.10 de [14], los grupos $\pi_1(T)$ son grupos finitos; y por lo tanto podemos aplicar el lema anterior al par Y, T para arribar a la misma conclusión: $\varprojlim^1 \{Y, X'_n\}^{k-1}$ es un grupo divisible.

Por último si $z \in \{Y, X\}^k$ es un elemento divisible por cada entero, entonces su imagen por el homomorfismo:

$$\{Y, X\}^k \longrightarrow \{Y, X'_n\}^k$$

es cero para cada n , puesto que $\{Y, X'_n\}^k$ es un grupo finitamente generado. Así termina la demostración del corolario.

Otros ejemplos y aplicaciones de las sucesiones exactas de Milnor y del corolario 1.14 están relacionados con filtraciones dadas en términos de los grupos de homología, y en particular con la filtración de Moore, que consideraremos a continuación.

1.16 La filtración de Moore . Para cada espectro X y cada entero n , existe un morfismo de grado cero:

$$h_n = h_n(X) : X_n \longrightarrow X$$

que goza de las siguientes propiedades:

- (i) $H_j(X_n; \mathbb{Z}) = 0$ para $j > n$.
- (ii) El homomorfismo inducido $H_j(h_n) : H_j(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_j(X)$ es un isomorfismo para cada $j \neq n$. Más aún $\pi_j(h_n)$ es un isomorfismo para $j < n$.
- (iii) Para cada par de enteros m y n con $m > n$, existe un morfismo de grado cero $k_n^m : X_n \longrightarrow X_m$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X_n & & X \\
 \downarrow k_n^m & \searrow h_n & \\
 X_m & \nearrow h_m &
 \end{array}$$

Si t, m y n son enteros tales que $t > m > n$, entonces $k_m^t \cdot k_n^m = k_n^t$.

De acuerdo con estas propiedades, resulta entonces que los morfismos $h_n : X_n \longrightarrow X$, y el diagrama de morfismos:

$$\dots \longrightarrow X_n \xrightarrow{g_n} X_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} X_{n+2} \longrightarrow \dots ;$$

donde $g_n = k_n^{n+1}$, definen una filtración convergente de X .

Construcción de los X_n . Sea G un grupo abeliano , y sea μG el espectro de Moore correspondiente. Entonces , de acuerdo con 2.3 de [14] , para cada espectro J y cada entero n , existe una sucesión exacta:

$$(1.16a) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}(G, \pi_{n+1}(J)) \rightarrow [\mu G, J]_n \rightarrow \text{Hom}(G, \pi_n(J)) \rightarrow 0.$$

Tomando en particular $G = \pi_n(J) = G_n$ se obtiene que para cada entero n , existe un morfismo de grado cero:

$$(1.16b) \quad \sigma_n = \sigma_n(J) : S^n \mu(G_n) \rightarrow J$$

tal que $\pi_n(\sigma_n) : G_n \approx \pi_0(\mu(G_n)) \rightarrow \pi_n(J) = G_n$ es el homomorfismo identidad del grupo G_n .

Sea ahora X un espectro cualquiera, X^n su n -esqueleto y $j_n : X^n \rightarrow X$ la inclusión canónica. Entonces existe un triángulo exacto:

$$X^n \xrightarrow{j_n} X \xrightarrow{k_n} X/X^n \xrightarrow{\partial_n} X^n$$

donde $|j_n| = |k_n| = 0$ y $|\partial_n| = -1$. Tenemos también una morfismo de sucesiones exactas de grupos abelianos :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X/X^n) & \longrightarrow & \pi_n(X^n) & \longrightarrow & \pi_n(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X/X^n) & \xrightarrow{d_n} & H_n(X^n) & \xrightarrow{\hat{j}_n} & H_n(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $d_n = H_{n+1}(\partial_n)$ y $\hat{j}_n = H_n(j_n)$ son los homomorfis-

mos inducidos por ∂_n y j_n respectivamente

Sea $G = \text{imag. } d_n = \ker. \hat{j}_n$; entonces G es un grupo libre puesto que $H_n(X^n)$ lo es, y por lo tanto μG es isomorfo a un coproducto de esferas de dimensión cero. - Más aún, existe un monomorfismo de grupos :

$$\rho : G \longrightarrow H_{n+1}(X/X^n) \approx \pi_{n+1}(X/X^n)$$

tal que $d_n \cdot \rho$ es la inclusión de G en $H_n(X^n)$.

La sucesión exacta (1.16a) implica ahora que a partir de ρ se puede obtener un morfismo de grado cero :

$\hat{\rho} : S^{n+1} \mu G \longrightarrow S^{n+1} \mu \pi_{n+1}(X/X^n)$ de tal manera que si denotamos con $\theta : S^n \mu G \longrightarrow X^n$ la composición :

$$S^{n+1} \mu G \xrightarrow{\hat{\rho}} S^{n+1} \mu \pi_{n+1}(X/X^n) \xrightarrow{\sigma_{n+1}, X/X^n} X^n \xrightarrow{\partial_n} X^n$$

donde $|\partial_n| = -1$ y $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}(X/X^n)$ es como (1.16b); entonces el homomorfismo inducido $H_n(\theta) : G \longrightarrow H_n(X^n)$ es la inclusión de G en $H_n(X^n)$. Más aún, la definición de θ implica que $j_n \cdot \theta = 0$, y por consiguiente si

$$S^n \mu G \xrightarrow{\theta} X^n \xrightarrow{\lambda} V \xrightarrow{\rho} S^n \mu G$$

es el triángulo definido por θ , con $|\theta| = |\lambda| = 0$; entonces existe un morfismo de grado cero $h_n : V \longrightarrow X$ que hace conmutativo el diagrama siguiente :

$$\begin{array}{ccccc}
 S^n \mu G & \xrightarrow{\theta} & X^n & \xrightarrow{\lambda} & V & \xrightarrow{\rho} & S^n \mu G \\
 & & \searrow j_n & & \swarrow h_n & & \\
 & & & & X & &
 \end{array}$$

Como $\pi_i(S^n \mu G) = 0$ para $i < n$ y $\pi_i(j_n)$ es un isomorfismo para $i < n$, resulta que $\pi_i(h_n): \pi_i(V) \rightarrow \pi_i(X)$ es un isomorfismo cuando $i < n$. Finalmente, puesto que por definición $G = \text{imag. } H_n(\theta) = \ker. H_n(j_n)$, el homomorfismo inducido $H_n(h_n): H_n(V) \rightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo.

En resumen tenemos que si tomamos $V = X_n$ y h_n , entonces $H_i(h_n)$ verifica (ii). Recordando ahora que el homomorfismo $H_n(\theta)$ es una inclusión y que $H_j(X^n) = 0$ si $j > n$, se deduce que $H_j(X_n) = 0$ para $j > n$, lo que demuestra que el espectro X_n verifica la propiedad (i).

Nos resta por último construir los morfismos k_n^m y verificar las propiedades mencionadas en (iii). Para ello haremos uso del siguiente lema, cuya demostración haremos posteriormente.

1.17 Lema. Sean A y B espectros tales que los grupos $H^i(A; Z) = 0$ para $i > N$ y $\pi_i(B) = 0$ para $i \leq q$. Entonces $\{A, B\}^k = 0$ si $k > N - q$, y en dimensión $N - q$ tenemos un isomorfismo:

$$\{A, B\}^{N - q} \cong H^{N+1}(A; \pi_{q+1}(B)) .$$

Si $H_N(A; Z)$ es finitamente generado, o si $\pi_i(B)$ es finitamente generado para cada entero i , entonces tenemos

que $\{A, B\}^k = 0$ si $k > N - q - 1$, y en dimensión $N - q - 1$ hay un isomorfismo :

$$\{A, B\}^{N-q-1} \cong H^N(A; \chi_{q+1}(B)) .$$

En cualquier caso los isomorfismos anteriores son inducidos por el morfismo canónico $B \longrightarrow S^{q+1}K(\chi_{q+1}(B))$.

Volviendo a la filtración de Moore, consideremos ahora el triángulo exacto dado por el morfismo $h_r : X_r \longrightarrow X$:

$$X_r \xrightarrow{h_r} X \xrightarrow{t_r} R_r \xrightarrow{v_r} X_r ,$$

donde $|h_r| = |t_r| = 0$ y $|v_r| = -1$. Entonces en el siguiente diagrama :

$$\begin{array}{ccccc} X_i & & & & R_i \\ & \searrow^{h_i} & & \nearrow^{t_i} & \\ & & X & & \\ & \nearrow_{h_j} & & \searrow_{t_j} & \\ X_j & & & & R_j \end{array} ,$$

tenemos $H_r(X_i) = 0$ si $r > i$, y R_i es i -conexo.

El teorema de coeficientes universales implica que para la cohomología tenemos $H^r(X_i) = 0$ para $r > i + 1$; y así podemos aplicar el lema anterior con $A = X_i$, $B = R_j$, $q = j$, $N = i + 1$, tomando en consideración que $H_N(X_i) = 0$. Resulta entonces que $\{X_i, R_j\}^s = 0$ si $s > N - q - 1 = i - j$, y como consecuencia de este resultado obtenemos que los grupos $\{X_i, R_j\} = 0$ si $j > i$ y $\{X_i, R_j\}^{-1} = 0$ si $j > i + 1$.

Esta última conclusión implica entonces que el morfismo $h_j : X_j \rightarrow X$ induce un epimorfismo $\{X_i, X_j\} \rightarrow \{X_i, X\}$ si $j > i$, y un isomorfismo si $j > i+1$. Por consiguiente para cada par de enteros $m > n$, existe un morfismo de grado -cero $k_n^m : X_n \rightarrow X_m$ tal que $h_m \cdot k_n^m = h_n$; y si n, m y p son tales que $p > m > n$, entonces $k_m^p \cdot k_n^m = k_n^p$.

Para terminar, observemos que si

$$X_n \xrightarrow{g_n} X_{n+1} \xrightarrow{d_n} Y_{n+1} \xrightarrow{b_n} X_n$$

des el triángulo exacto definido por $g_n = k_n^{n+1} : X_n \rightarrow X_{n+1}$, y donde $|g_n| = |d_n| = 0$, entonces el espectro Y_{n+1} es isomorfo al espectro $S^{n+1} \mu H_{n+1}(X)$, la $(n+1)$ -suspensión del espectro de Moore correspondiente al grupo $H_{n+1}(X; Z)$.

Vayamos ahora a la demostración del lema: La hipótesis sobre A y el teorema de coeficientes universales implica que $\text{Ext}(H_N(A), Z) = 0$, y para cada grupo G , $H^i(A; G) = 0$ si $i > N+1$, y $H^{N+1}(A; G) \approx \text{Ext}(H_N(A), G)$. Por consiguiente si $H_N = H_N(A)$ es un grupo finitamente generado, entonces es un grupo libre puesto que $\text{Ext}(H_N, Z) = 0$, de donde se obtiene que $\text{Ext}(H_N, G) = 0$ para cualquier grupo G . En el caso de que G sea finitamente generado también se obtiene que $\text{Ext}(H_N, G) = 0$, puesto que $\text{Ext}(H_N, Z) = 0$. Así que en cualquiera de los dos casos tenemos $H^i(A; G) = 0$ para cada $i > N$. En conclusión, existe un entero k , $k = N+1$,

o $k=N$, tal que para cada m , $H^i(A; \chi_m(B)) = 0$ si $i > k$.

Fijemos este entero k , y consideremos para un m cualquiera, el triángulo exacto correspondiente al morfismo $g_{m+1} : B''_{m+1} \longrightarrow B''_m$ de la filtración de Postnikov de B :

$$B''_{m+1} \xrightarrow{g_{m+1}} B''_m \longrightarrow S^m K(\chi_m(B)) \longrightarrow B''_{m+1} .$$

De este triángulo obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos y homomorfismos :

$$\dots \rightarrow H^{t+m-1}(A; \chi_m(B)) \rightarrow \{A, B''_{m+1}\}^t \xrightarrow{g_{m+1}} \{A, B''_m\}^t \rightarrow H^{t+m}(A; \chi_m(B)) \rightarrow$$

Como $H^{t+m}(A; \chi_m(B)) = 0$ si $t > k-m$, entonces para entero $m \geq q+1$, el homomorfismo g_{m+1} es un epimorfismo en dimensiones $t > k-q-1$. Tomando en cuenta ahora que B es q -conexo, $B''_{q+1} \approx B$, resulta entonces que $\{A, B\}^t = 0$ para cada $t > k-q-1$, puesto que de acuerdo con (1.15c), el límite inverso, $\varprojlim_m \{A, B''_m\}^t = 0$.

De este resultado obtenemos también que $\{A, B''_{q+2}\}^t = 0$ si $t > k-q-2$, puesto que B''_{q+2} es $(q+1)$ -conexo. Usando de nuevo la sucesión exacta anterior con $m = q+1$ y $t = k-q-1$, resulta finalmente el isomorfismo:

$$\{A, B\}^{k-q-1} \approx H^k(A; \chi_{q+1}(B)) .$$

Aplicando estos resultados a los casos $k = N+1$, $k = N$, según corresponda, se obtienen las conclusiones del lema.

1.18 Corolario . Si M es un espectro cualquiera, entonces $H^*(M;Z) = 0$ si y sólo si $[M,B]^* = 0$ para cada espectro conexo B .

1.19 Aplicaciones relacionadas con la filtración de Moore.

Consideremos la filtración de Moore de un espectro conexo X :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X_i & \xrightarrow{g_i} & X_{i+1} & \longrightarrow & X_{i+2} \longrightarrow \dots \\
 & & \searrow h_i & & \swarrow h_{i+1} & & \\
 & & & & X & &
 \end{array}$$

De tal filtración se obtiene, para cada espectro Y y cada entero k , la siguiente sucesión exacta de Milnor :

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 \{X_i, Y\}^{k-1} \longrightarrow \{X, Y\}^k \xrightarrow{h^k} \varprojlim \{X_i, Y\}^k \longrightarrow 0 .$$

Supongamos ahora que $H_1(X;Z)$ y $\pi_1(Y)$ son grupos finitamente generados para cada entero i . En estas condiciones tenemos :

(1.19a) El núcleo de h^k coincide con el subgrupo de $\{X, Y\}^k$ formado por sus elementos divisibles.

(1.19b) Si X o Y es un espectro de torsión, entonces $\ker.h^k = 0$ para cada entero k . - Un espectro de torsión es un espectro cuyos grupos de homotopía son grupos de torsión.

Demostremos solamente (1.19b), puesto que (1.19a)

es una consecuencia que se demuestra de manera análoga a (1.15e) .

Supongamos pues que X es $(n-1)$ -conexo. Entonces $X_i \approx 0$ para $i \leq n-1$, y $X_n \approx S^n / \mu H_n(X)$. Poniendo $H_i = H_i(X)$ y usando la sucesión exacta 2.3 de [14] :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_i, \pi_{k+1}(Y)) \longrightarrow \{\mu H_i, Y\}_k \longrightarrow \text{Hom}(H_i, \pi_k(Y)) \longrightarrow 0 ,$$

resulta entonces que $\{\mu H_i, Y\}_k$ es un grupo finitamente generado para cada par de enteros (i, k) , puesto que $H_i(X)$ y $\pi_k(Y)$ son finitamente generados en cada dimensión. Así mismo si,

$$X_{n-1} \xrightarrow{\xi_{n-1}} X_n \longrightarrow S^n / \mu H_n \longrightarrow X_{n-1}$$

es el triángulo exacto dado por el morfismo ξ_{n-1} , y

$$\dots \longrightarrow \{X_{n-1}, Y\}^{t-1} \xrightarrow{\quad} \{\mu H_n, Y\}^{t-n} \xrightarrow{\quad} \{X_n, Y\}^t \xrightarrow{\quad} \{X_{n-1}, Y\}^t \longrightarrow \dots$$

es la sucesión exacta correspondiente; entonces por inducción en $n \geq m$, se demuestra que $\{X_n, Y\}^t$ es un grupo finitamente generado para cada par n y t . Por último, si X o bien Y es un espectro de torsión, entonces los grupos $\{X_n, Y\}^t$ son grupos de torsión finitamente generados, y por lo tanto finitos. En consecuencia, usando el corolario 1.14 - condición ML - , resulta $\varprojlim^1 \{X_n, Y\}^t = 0$ para cada t ; con lo cual damos por terminada la demostración .

Para finalizar con esta primera parte del presente trabajo expondremos a continuación un lema, cuya demostración nos fue facilitada por el Dr. R. Ricabarra. Algunas aplicaciones de este lema nos serán de gran utilidad para la demostración de ciertas propiedades importantes relacionadas con los resultados finales de esta exposición.

1.20 Lema. Sea Y un espectro conexo y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de grado cero. Supongamos que para cada entero r :

$$(i) \quad 0 = H^r(f; \kappa_r(Y)) : H^r(Y; \kappa_r(Y)) \longrightarrow H^r(X; \kappa_r(Y)) .$$

$$(ii) \quad H^r(X; \kappa_r(Y)) \text{ es un grupo sin torsión.}$$

En estas condiciones el morfismo $f = 0$.

Demostración : Supongamos que Y es $(n-1)$ -conexo . Entonces $Y \approx Y''_n$, la n -fibra de Postnikov de Y .

Para la demostración del lema será suficiente mostrar que existen morfismos de grado cero $f_i : X \rightarrow Y_i$ para cada $i \geq n$, con $f_n = f$, y que hacen conmutivos los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f_{i+1} \swarrow & & \searrow f_i \\ Y''_{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & Y''_i \end{array} .$$

En efecto, tomando en cuenta que $\varprojlim \{X, Y''_i\} = 0$, de acuerdo con (1.15c), resultará entonces $f_i = 0$ para cada $i \geq n$, así que en particular $f_n = f = 0$.

Pongamos pues $f_n = f$, y construyamos los f_i por inducción. A tal efecto, consideremos en primer lugar el siguiente diagrama :

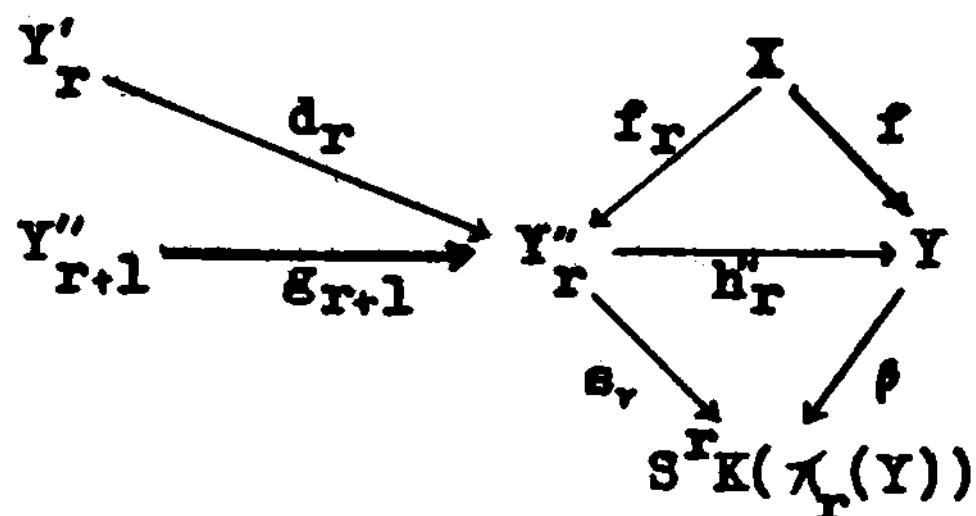
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & X & & & \\
 & & & \downarrow f & & & \\
 Y''_{n+1} & \xrightarrow{\mathcal{E}_{n+1}} & Y''_n \approx Y & \xrightarrow{s_n} & S^n K(\kappa_n(Y)) & \longrightarrow & Y''_{n+1}
 \end{array}$$

donde el triángulo horizontal es el triángulo exacto dado por el morfismo $\mathcal{E}_{n+1} : Y''_{n+1} \longrightarrow Y''_n \approx Y$. Entonces la hipótesis (i) implica que $s_n \cdot f = 0$, y por consiguiente existe un morfismo de grado cero $f_{n+1} : X \longrightarrow Y''_{n+1}$ tal que $\mathcal{E}_{n+1} \cdot f_{n+1} = f_n = f$. Supongamos inductivamente que existen morfismos $f_j : X \longrightarrow Y''_j$ para $n \leq j \leq r$ con $\mathcal{E}_j \cdot f_j = f_{j-1}$; y consideremos los triángulos exactos :

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y''_{r+1} & \xrightarrow{\mathcal{E}_{r+1}} & Y''_r & \xrightarrow{s_r} & S^r K(\kappa_r(Y)) & \longrightarrow & Y''_{r+1} \\
 & & Y''_r & \xrightarrow{h''_r} & Y & \xrightarrow{h'_r} & Y'_r \xrightarrow{d_r} Y''_r
 \end{array}$$

Entonces, de acuerdo con la proposición 1.8, el k -invariante $(r+1)$ -dimensional de Y , $k^{r+1}(Y) = s_r \cdot d_r$ es un elemento de torsión en el grupo $H^{r+1}(Y'_r; \kappa_r(Y))$, puesto que Y es conexo. Así que existe un entero m tal que $m(s_r \cdot d_r) = (m \cdot s_r) d_r = 0$, y por lo tanto existe un morfismo de grado cero $\rho : Y \longrightarrow S^r K(\kappa_r(Y))$ tal que $\rho \cdot h''_r = m \cdot s_r$.

Finalmente en el siguiente diagrama :



tenemos $h''_r \cdot f_r = f$ por inducción, y por consiguiente ,
 $m(s_r \cdot f_r) = (m \cdot s_r) f_r = (\beta \cdot h''_r) f_r = \beta \cdot f = 0$, donde la última igualdad se sigue de la hipótesis (i) . Así resulta que la clase de cohomología $s_r \cdot f_r \in H^r(X; \pi_r(Y))$ es una clase de torsión, y en consecuencia , de acuerdo con la hipótesis (ii) , $s_r \cdot f_r = 0$. Esta relación permite levantar f_r a un morfismo $f_{r+1} : X \rightarrow Y''_{r+1}$ tal que $g_{r+1} \cdot f_{r+1} = f_r$. Con esto termina el paso inductivo y finaliza la demostración del lema.

La próxima sección será dedicada al estudio de ciertas clases de objetos de la categoría \underline{S}_h . Tal estudio nos lleva a enfocar la categoría \underline{S}_h desde un punto de vista "geométrico-Hilbertiano", introduciendo conceptos apropiados de ortogonalidad " de espectros. Así surgen de manera natural una serie de problemas relacionados con la determinación de las " coordenadas ortogonales" de un objeto cualquiera de \underline{S}_h . El tratamiento de tales problemas se reduce generalmente al estudio de ciertos funtores, y principalmente a investigar la posibilidad de que tales funtores sean "repre-

sentables ". Este estudio es lo que se llama la "teoría de localización" , y un avance muy importante en esta dirección lo constituye el trabajo del Dr. R. Ricabarra [14], en el cual se hace una exposición bastante detallada de la "localización en la categoría de grupos abelianos". En particular , el § 4 de tal trabajo está dedicado a la localización en la categoría \underline{S}_h .

2. Clases Estables.

2.1 Definición . Si \mathcal{M} es una clase no vacía de espectros, diremos que \mathcal{M} es una clase estable, si verifica las siguientes propiedades:

(e.1) \mathcal{M} es isomórficamente cerrada, es decir, \mathcal{M} contiene cada espectro isomorfo a algún espectro de \mathcal{M} .

(e.2) Si $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$ es un triángulo exacto en \underline{S}_h , tal que dos de sus vértices pertenecen a \mathcal{M} , entonces el tercer vértice también pertenece a \mathcal{M} .

(e.3) Si X e Y son espectros tales que el coproducto $X \vee Y$ pertenece a \mathcal{M} , entonces X e Y pertenecen a \mathcal{M} .

Así por ejemplo, la clase \mathcal{F} de los espectros isomorfos a espectros finitos es una clase estable. También la clase de todos los espectros es una clase estable, que a diferencia de la anterior, contiene con cada familia de espectros, el coproducto y el producto de la familia.

Diremos que una clase \mathcal{M} es aditiva (resp. múltiplicativa)

cativa), si con cada familia de espectros $\{X_a : a \in J\} \in \mathcal{M}$, contiene tambien el coproducto $\bigvee X_a$ (resp. el producto $\prod X_a$).

Finalmente una clase que sea a la vez estable y aditiva, será llamada una clase estable aditiva : c.e.a. . Asi mismo una clase estable multiplicativa es una clase que es simultáneamente estable y multiplicativa.(c.e.m.).

Como consecuencia de estas definiciones se obtiene que dado un diagrama de morfismos de grado cero en \underline{S}_h :

$$\dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_{1+1} \longrightarrow X_{1+2} \longrightarrow \dots$$

y una clase \mathcal{M} estable aditiva (resp. multiplicativa), que contiene a cada X_i , entonces el $\varinjlim X_i$ (resp. $\varprojlim X_i$), pertenece a \mathcal{M} .

2.2 Ejemplos . Para cada espectro X , la clase $\perp X$, formada por los espectros A , tales que $[A, X]_* = 0$ es una clase estable aditiva. En efecto, (e.1) es evidente ;(e.2) y la aditividad se deducen del isomorfismo canónico:

$$\{\bigvee Y_a, X\}_* \approx \prod \{Y_a, X\}_*$$

válido para cualquier espectro X y cualquier familia de espectros $\{Y_a : a \in J\}$.

Finalmente , si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A$ es un triángulo exacto, con $|f| = |g| = 0$ y $|h| = -1$, entonces de la sucesión exacta :

$$\dots - \{A, X\}^{n-1} \xrightarrow{h^n} \{0, X\}^n \xrightarrow{g^n} \{N, X\}^n \xrightarrow{f^n} \{A, X\}^n \xrightarrow{h^n} \{0, X\}^{n+1}$$

se deduce, que si dos de los vértices del triángulo están en $\perp X$, entonces el tercer vértice también está en $\perp X$.

Análogamente se demuestra que la clase X^\perp formada por los espectros A , tales que $\{X, A\}_* = 0$ es una clase estable multiplicativa. Las clases $\perp X$ y X^\perp se llaman respectivamente las clases ortogonales a la izquierda y derecha de X . Así un espectro $Y \in \perp X$ (resp. $Y \in X^\perp$) se dice que es "ortogonal a la izquierda" (resp. a la derecha) de X .

Para cada espectro X , la clase $\text{Nul}(X)$ formada por los espectros A , tales que el smash-producto $X \wedge A \approx 0$ es una c.e.a. . En efecto, las propiedades de la definición 2.1 se demuestran usando la naturalidad y exactitud del funtor smash-producto: Si $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$ es un triángulo exacto, entonces tomando el smash-producto con X , se obtiene un triángulo exacto $X \wedge A \longrightarrow X \wedge B \longrightarrow X \wedge C \longrightarrow X \wedge A$. (Ver J.17 y J.18 de [3]) . La aditividad se deduce a partir del isomorfismo D.5 de [3] :

$$\bigvee_a (X \wedge Y_a) \approx X \wedge \left(\bigvee_a Y_a \right) .$$

Las clases NUL y \underline{Q} formadas respectivamente por los espectros isomorfos al espectro nulo, y por los espectros racionales - espectros cuyos grupos de homotopía son grupos

racionales, son clases estables aditivas y multiplicativas. Basta observar que la suma directa y el producto directo de grupos racionales son también grupos racionales. La clase de los espectros de torsión - (1.19b) - forman una clase estable aditiva, que no es multiplicativa: el producto de grupos de torsión no es en general un grupo de torsión.

2.3 Para cada espectro X existe una c.e.a. (X) y una clase c.e.m. $[X]$, cada una de las cuales contiene a X , y que gozan de la siguiente propiedad universal: Si \mathcal{M} es una c.e.a. (resp. una c.e.m.) que contiene a X , entonces $(X) \in \mathcal{M}$ (resp. $[X] \in \mathcal{M}$).

2.3a Si $\dots \rightarrow Y_i \xrightarrow{f_i} Y_{i+1} \rightarrow Y_{i+2} \rightarrow \dots$ es la filtración de un espectro Y cualquiera como definida en 1.4, entonces para cada i , en el triángulo exacto dado por el morfismo f_i :

$$Y_i \xrightarrow{f_i} Y_{i+1} \longrightarrow Q_i \longrightarrow Y_i \quad ,$$

el espectro Q_i es isomorfo a un coproducto de esferas, y por lo tanto $X \wedge Q_i \in (X)$ para cada espectro X . Recordando ahora que $Y_i = 0$ para $i < 0$, y haciendo inducción en $n \geq 0$, se demuestra que $X \wedge Y_n \in (X)$ para cada entero n . Así que en conclusión tenemos :

$$X \wedge Y \approx X \wedge \left(\varinjlim_n Y_n \right) \approx \varinjlim_n (X \wedge Y_n) \in (X) \quad ,$$

relación válida para cada par de espectros X e Y .

Tomando en particular $X = S^0$ y usando el isomor-
fismo $Y \wedge S^0 \approx S^0 \wedge Y \approx Y$, se obtiene que $(S^0) = \underset{\sim}{S}_h$ co-
mo clases estables aditivas.

2.3b Para cada grupo abeliano G , $K(G) \in (K(Z))$.
En efecto, tomando una presentación libre del grupo G :

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow 0 \quad ,$$

y recordando que el funtor K transforma sumas directas en
coproducto, resulta entonces que los espectros $K(L)$ y $K(M)$
están en $(K(Z))$, lo que junto con el triángulo exacto dedu-
cido de la presentación de G ,

$$K(L) \rightarrow K(M) \rightarrow K(G) \rightarrow K(L)$$

implican finalmente que $K(G) \in (K(Z))$.

Como una consecuencia de este resultado, obtenemos -
que si X es un espectro con un número finito m de gru-
pos de homotopía posiblemente no triviales, entonces X es
está en $(K(Z))$. Para ver que esto es así se usa la filtra-
ción de Postnikov, haciendo inducción en m . Finalmente, si
 X es un espectro coconexo, entonces de acuerdo con esta úl-
tima conclusión, cada fibra de Postnikov X''_n de X está
en $(K(Z))$, y por lo tanto $X \approx \varinjlim X''_n \in (K(Z))$.

2.3c Si X es un espectro conexo, entonces $X \in [K(Z)]$,
la clase estable multiplicativa generada por $K(Z)$.

En efecto, suponiendo que $K(G) \in [K(Z)]$ para cada grupo abeliano G , entonces un razonamiento análogo al anterior permite mostrar que cada cofibra de Postnikov de X , $X'_n \in [K(Z)]$, y en consecuencia $X \approx \varprojlim_n X'_n \in [K(Z)]$.

Falta ver que $K(G) \in [K(Z)]$ para cada grupo G , para lo cual será suficiente considerar el caso donde G es un grupo libre, y tomar luego una presentación libre de G para el caso general, como hicimos en 2.3b. La demostración de que $K(G) \in [K(Z)]$ si G es libre será una consecuencia de los dos lemas que siguen a continuación.

2.4 Lema. Si $f : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de grupos abelianos, entonces existe un triángulo exacto en S_h :

$$K(\hat{A}) \vee S^{-1}K(\hat{B}) \xrightarrow{h} K(A) \xrightarrow{K(f)} K(B) \xrightarrow{g} K(\hat{A}) \vee S^{-1}K(\hat{B}),$$

donde $|h| = |K(f)| = 0$, $|g| = -1$; $\hat{A} = \ker.f$ y $\hat{B} = \text{cok}.f$.

2.5 Lema. Si L es un grupo libre, entonces el homomorfismo de Kronecker $h : L \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(L, Z), Z)$ da una inclusión de L como un sumando directo de $\text{Hom}(\text{Hom}(L, Z), Z)$.

Supongamos que los lemas han sido demostrados, y sea $0 \rightarrow L \xrightarrow{d} M \rightarrow P \rightarrow 0$ una presentación libre de un grupo cualquiera P . Aplicando el lema 2.4 al homomorfismo $f = \text{Hom}(d) : \text{Hom}(M, Z) \rightarrow \text{Hom}(L, Z)$ se obtiene un triángulo exacto :

$$K(R) \vee S^{-1}K(V) \longrightarrow K(\text{Hom}(M, Z)) \longrightarrow K(\text{Hom}(L, Z)) \longrightarrow K(R) \vee S^{-1}K(V) ,$$

en donde $R = \ker.f = \text{Hom}(P, Z)$ y $V = \text{cok}.f = \text{Ext}(P, Z)$. Como $\text{Hom}(T, Z)$ es un grupo isomorfo a un producto de copias de Z , si T es libre, y el funtor K transforma producto directo de grupos en producto de espectros, entonces resulta que $K(\text{Hom}(T, Z)) \in [K(Z)]$. Este resultado y el triángulo exacto anterior implican que $K(\text{Hom}(P, Z))$ y $K(\text{Ext}(P, Z))$ estan tambien en $\in [K(Z)]$ para cualquier grupo P ; y por consiguiente si N es un grupo que es un sumando directo de $\text{Hom}(P, Z)$, entonces $K(N) \in [K(Z)]$, de acuerdo con e.3 de definición 2.1. Aplicando esta última conclusión al grupo $P = \text{Hom}(L, Z)$ donde L es un grupo libre, y usando el lema 2.5 se obtiene finalmente que $K(L) \in [K(Z)]$ para cada grupo libre L .

Demostración del lema 2.4 : Sea $f : A \longrightarrow B$ el homomorfismo dado, y consideremos la sucesión exacta deducida:

$$0 \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \hat{B} \longrightarrow 0 ,$$

en donde $\hat{A} = \ker.f$ y $\hat{B} = \text{cok}.f$.

Asociado a f existe un morfismo de grado cero en S_h , $K(f) : K(A) \longrightarrow K(B)$, y un triángulo exacto dado por $K(f)$:

$$T \xrightarrow{h} K(A) \xrightarrow{K(f)} K(B) \xrightarrow{g} T$$

donde $|h| = |K(f)| = 0$ y $|g| = -1$.

Aplicando los funtores de homotopía y homología en el triángulo anterior, y tomando en cuenta que $H_1(K(M); \mathbb{Z}) = 0$ para cada grupo M , se obtiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \hat{A} \approx \pi_0(T) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & \pi_{-1}(T) \approx \hat{B} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & H_0(T) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & H_{-1}(T) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

De este diagrama se deduce que el homomorfismo α es un isomorfismo, y por lo tanto, de acuerdo con el teorema de coeficientes universales, existe un morfismo de grado cero $\lambda: T \rightarrow K(\pi_0(T))$ tal que $H_0(\lambda) = \alpha^{-1}$. Por consiguiente, si $\sigma: K(\pi_0(T)) \approx T''_0 \rightarrow T''_{-1} \approx T$ es el morfismo dado por la filtración de Postnikov de T , entonces $\lambda \cdot \sigma$ es la identidad del espectro $K(\pi_0(T))$, y en consecuencia existe un isomorfismo $T \approx K(\hat{A}) \vee S^{-1}K(\hat{B})$, con lo cual finaliza la demostración del lema.

Demostración del lema 2.5 : Sea L un grupo libre, y sea $h: L \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(L, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ el homomorfismo de Kronecker. Supongamos que $\{g_a: a \in J\} \subseteq L$ es un conjunto de generadores de L , y denotemos con $Z(a)$ el grupo libre con generador g_a . Entonces $\text{Hom}(L, \mathbb{Z}) \approx \prod_{a \in J} Z(a)$ y el homomorfismo $h: \bigoplus_{a \in J} Z(a) \rightarrow \text{Hom}(\prod_{a \in J} Z(a), \mathbb{Z})$ queda definido de la siguiente manera : si $x = (x_a) \in \bigoplus_{a \in J} Z(a)$, entonces el homomorfismo $h(x): \prod_{a \in J} Z(a) \rightarrow \mathbb{Z}$ está dado por la fórmula :

$$h(x)(y) = \sum_{a \in J} x_a \cdot y_a$$

donde $y = (y_a) \in \prod Z(a)$; observando que la suma contiene a lo sumo un número finito de términos no nulos, puesto que $x_a = 0$ para casi todo $a \in J$.

Sea $d = \text{Hom}(i) : \text{Hom}(\prod Z(a), Z) \longrightarrow \prod Z(a)$ el homomorfismo inducido por la inclusión $i : \oplus Z(a) \longrightarrow \prod Z(a)$. Entonces existe un diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} \oplus Z(a) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(\prod Z(a), Z) \\ & \searrow i & \swarrow d \\ & & \prod Z(a) \end{array}$$

De acuerdo con este diagrama, para mostrar que h da una inclusión de $\oplus Z(a)$ como un sumando directo del grupo $\text{Hom}(\prod Z(a), Z)$, será suficiente demostrar que $\text{Im} d \subseteq \text{Im} i$, puesto que en este caso el homomorfismo d se factoriza a través de la suma directa; es decir, existe un homomorfismo $d_1 : \text{Hom}(\prod Z(a), Z) \longrightarrow \oplus Z(a)$ tal que $i \cdot d_1 = d$, y por lo tanto $d_1 \cdot h$ es la identidad del grupo $\oplus Z(a)$. Así que en conclusión debemos demostrar que para cada homomorfismo $b : \prod Z(a) \longrightarrow Z$, el conjunto $C(b) = \{a \in J : b(g_a) \neq 0\}$ es un conjunto finito; donde g_a es el generador de $Z(a)$.

Supongamos entonces por reducción al absurdo, que para algún homomorfismo $b \in \text{Hom}(\prod Z(a), Z)$ el conjunto $C(b)$ contiene un subconjunto numerable infinito $N = \{a_0, a_1, \dots\}$ y pongamos $e_i = g_{a_i}$ para cada $i \geq 0$.

Sea $\{q_j : j \geq 0\}$ una sucesión de enteros primos tales que para cada $j > 0$, $q_j \notin \{q_0, \dots, q_{j-1}\}$; y q_j no divide a $b(e_j)$ si $j \geq 0$. Construyamos a continuación una sucesión de elementos $\{c_0, c_1, \dots, c_n, \dots\}$ tales que $c_j \in Z(a_j)$, y que verifican las dos condiciones siguientes:

- (1) $c_j = k(q_0 \dots q_{j-1})e_j$ para algún número entero $k = k(j)$, y donde $j > 0$.
- (2) $b(c_0 + c_1 + \dots + c_j)$ es divisible por q_j , si $j > 0$.

Pongamos $c_0 = e_0$, y supongamos, por inducción, que tenemos definidos elementos c_i para $i \leq j-1$, verificando las condiciones (1) y (2). Entonces la definición de los primos q_j implica que existen enteros m y n tales que $1 = m \cdot q_j + n(q_0 \dots q_{j-1})b(e_j)$. Multiplicando esta relación por $z = b(c_0 + \dots + c_{j-1})$, y definiendo c_j por la fórmula, $c_j = -z \cdot n(q_0 \dots q_{j-1})e_j \in Z(a_j)$, resulta finalmente que $b(c_0 + c_1 + \dots + c_{j-1} + c_j) = z \cdot n \cdot q_j$, y por consiguiente c_j verifica las condiciones (1) y (2).

Sea ahora $x \in \prod Z(a)$ el elemento determinado por los c_i ; es decir, $x_a = 0$ si $a \notin \mathbb{N}$, y para $a_i \in \mathbb{N}$, $x_{a_i} = c_i$. Entonces como consecuencia de la propiedad (1) de los c_i , se obtiene que q_0 divide a $b(x - c_0)$; pero como por hipótesis, q_0 no divide a $b(c_0)$, se deduce finalmente que el entero $b(x) = b(c_0) + b(x - c_0)$ no es divisible por q_0 , lo que implica en particular que $b(x) \neq 0$. Pero por otra parte, si para cada $j > 0$, ponemos $v_j = c_0 + \dots + c_j$, entonces usando de nuevo las propiedades (1) y (2), se dedu-

ce que $b(v_j)$ y $b(x-v_j)$ son divisibles por q_j para cada $j > 0$. Así que en definitiva tenemos que el entero $b(x)$ es divisible por un conjunto infinito de primos, a saber, el conjunto $\{q_j : j > 0\}$; y esto sólo puede ocurrir si $b(x) = 0$, lo que contradice la conclusión anterior, $b(x) \neq 0$. Con esto damos por terminada la demostración del lema.

Seguimos a continuación enunciando algunos otros resultados referidos a las clases estables, los cuales van a ser aplicados en las secciones subsiguientes, y en particular en aquellas relacionadas con los "espectros funcionales"

2.6 Para cada espectro X y cada grupo abeliano G , el smash-producto $X \wedge K(G) \in [K(Z)]$. La demostración de esta tesis requiere de algunos preliminares que señalamos de inmediato.

2.7 Definición. Diremos que un espectro Y es un espectro generalizado de Eilenberg-MacLane (abreviado GEM), si para cada número n , existe un morfismo de grado cero: $\alpha_n : S^n K(\pi_n(Y)) \rightarrow Y$, tal que $\pi_n(\alpha_n) : \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(Y)$ es un isomorfismo. En este caso los morfismos α_n definen un morfismo de grado cero:

$$\alpha : \bigvee_n S^n K(\pi_n(Y)) \rightarrow Y$$

el cual induce un isomorfismo en homotopía, y por consiguiente es un isomorfismo en \underline{S}_h . Tomando en cuenta

que el morfismo canónico $\sigma : \bigvee_n S^n K(\pi_n(Y)) \longrightarrow \prod_n S^n K(\pi_n(Y))$ es un isomorfismo, resulta entonces que la composición $d = \sigma \cdot d^{-1} : Y \longrightarrow \prod S^n K(\pi_n(Y))$ es un isomorfismo.

Sean ahora Y''_j, Y'_j la j -fibra y la j -cofibra de Postnikov de Y , y consideremos los triángulos exactos:

$$Y''_j \xrightarrow{h''_j} Y \xrightarrow{h'_j} Y'_j \xrightarrow{\rho_j} Y''_j,$$

$$Y''_{j+1} \xrightarrow{s_{j+1}} Y''_j \xrightarrow{s_j} S^j K(\pi_j(Y)) \xrightarrow{t_j} Y''_{j+1}.$$

Entonces $k^{j+1}(Y) = s_{j+1} \cdot \rho_j \in H^{j+1}(Y''_j; \pi_j(Y))$ es el invariante $(j+1)$ -dimensional del espectro Y . Si Y es un GEM, en el diagrama :

$$\begin{array}{ccccc} Y'_j & \xrightarrow{\rho_j} & Y''_j & \xrightarrow{h''_j} & Y \\ & & \searrow s_j & & \searrow d_j \\ & & & & S^j K(\pi_j(Y)) \end{array}$$

tenemos $s_j \cdot \rho_j = k^{j+1}(Y) = 0$, puesto que $\pi_j(d_j)$ es un isomorfismo y además $H^j(Y''_j; \pi_j(Y)) \approx \text{Hom}(\pi_j(Y), \pi_j(Y))$.

Recíprocamente, si Y es un espectro tal que para cada entero j , el $(j+1)$ -invariante de Postnikov de Y es nulo, entonces existe un morfismo de grado cero $d_j : Y \longrightarrow S^j K(\pi_j(Y))$ tal que $\pi_j(d_j)$ es un isomorfismo, y por lo tanto Y es un GEM.

Volviendo a 2.6, nosotros demostraremos que el smash-producto $Y = X \wedge K(2)$ es un GEM, mostrando que para cada en

tero j , $k^{j+1}(Y) = 0$.

Sea entonces:

$$X_n \xrightarrow{h_n} X \xrightarrow{\lambda_n} R_n \longrightarrow X_n$$

el triángulo exacto correspondiente a la n -fibra de Moore de X , y sea $h''_{n+1} : Y''_{n+1} \longrightarrow Y = X \wedge K(Z)$ el morfismo correspondiente a la $(n+1)$ -fibra de Postnikov de Y . Entonces, poniendo $\hat{\lambda}_n = \lambda_n \wedge 1_{K(Z)} : X \wedge K(Z) \longrightarrow R_n \wedge K(Z)$, se obtiene que en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y''_{n+1} & & \\ \downarrow h''_{n+1} & & \\ Y = X \wedge K(Z) & \xrightarrow{\hat{\lambda}_n} & R_n \wedge K(Z) \end{array}$$

los homomorfismos inducidos $\pi_i(h''_{n+1})$ y $\pi_i(\hat{\lambda}_n)$ son isomorfismos para cada $i > n$, y por consiguiente el morfismo $\hat{\lambda}_n \circ h''_{n+1}$ es un isomorfismo, puesto que los espectros Y''_{n+1} y $R_n \wedge K(Z)$ son n -conexos. En consecuencia el morfismo h''_{n+1} es un monomorfismo en S_n . Por lo tanto, retornando a las fibras de Postnikov de $Y = X \wedge K(Z)$:

$$\begin{array}{ccccccc} Y''_j & \xrightarrow{h''_j} & Y = X \wedge K(Z) & \xrightarrow{h'_j} & Y'_j & \xrightarrow{\rho_j} & Y''_j \\ Y''_{j+1} & \longrightarrow & Y''_j & \xrightarrow{s_j} & S^j K(\pi_j(Y)) & \longrightarrow & Y''_{j+1} \end{array}$$

tenemos que $\rho_j = 0$, y así $k^{j+1}(Y) = s_j \cdot \rho_j = 0$ para cada entero j , y en conclusión $Y = X \wedge K(Z)$ es un GEM.

Finalmente si G es un grupo abeliano cualquiera, entonces del isomorfismo $(\mu G) \wedge K(Z) \approx K(G)$ se deduce que $X \wedge K(G) \approx X \wedge (\mu G \wedge K(Z)) \approx (X \wedge \mu G) \wedge K(Z)$, lo que junto al resultado anterior implica que $X \wedge K(G)$ es un GEM para cada espectro X y cada grupo abeliano G . Pero si un espectro T es un GEM, entonces el isomorfismo $T \approx \prod_n S^n K(\kappa_n(T))$ y el resultado 2.3c dan como consecuencia que $T \in [K(Z)]$, con lo cual damos por terminada la demostración de 2.6.

2.8 Si X e Y son espectros tales que $\{X, Y\}^* = 0$, entonces $\{A, B\}^* = 0$ para cada $A \in (X)$ y cada $B \in (Y)$.

En efecto, la relación $\{X, Y\}^* = 0$ es equivalente a $X \in {}^\perp Y$ y a $Y \in X^\perp$, y en consecuencia $(X) \subseteq {}^\perp Y$ e $(Y) \subseteq X^\perp$. Por lo tanto si $A \in (X) \subseteq {}^\perp Y$, el mismo resultado implica que $(Y) \subseteq A^\perp$, y así $B \in A^\perp$ para cada $B \in (Y)$, o lo que es lo mismo $\{A, B\}^* = 0$.

Así por ejemplo, si N es un espectro tal que su cohomología $H^*(N; Z) = 0$, entonces $\{N, B\}^* = 0$ para cada espectro conexo B , puesto que de acuerdo con 2.3c, $B \in [K(Z)]$.

2.9 Si X e Y son espectros tales que $X \wedge Y \approx 0$, entonces $A \wedge B \approx 0$, para cada $A \in (X)$ y cada $B \in (Y)$. La demostración se hace de manera análoga al caso anterior tomando en consideración que la hipótesis es equivalente con las relaciones $Y \in \text{Nul}(X)$ y $X \in \text{Nul}(Y)$.

Así por ejemplo, si M es un espectro con homología nula, entonces $J \wedge M \approx 0$ para cada $J \in (K(Z))$, y en particular si J es coconexo (2.3b). Si tomamos como M el espectro

representante de la K-teoría compleja-módulo un primo p , entonces de acuerdo con M.18 de [3], éste es un ejemplo no trivial de espectro con homología nula. Esto implica en particular que la esfera $S^0 \wedge (K(Z))$, por que de lo contrario se tendría $M \approx S^0 \wedge M \approx M \wedge S^0 \approx 0$.

2.10 Un espectro M es un espectro de torsión (1.19b), si y sólo si el smash-producto $\mu Q \wedge M \approx 0$, donde Q denota el cuerpo de los racionales.

En efecto, del isomorfismo $\pi_i(X) \otimes Q \approx \pi_i(\mu Q \wedge X)$ que se obtiene de la sucesión 2.10 de [14], se deduce tomando primero $X = S^0$ y luego $X = M$, que $K(Q) \approx \mu Q$, y que $\pi_i(\mu Q \wedge M) \approx \pi_i(M) \otimes Q = 0$, puesto que los grupos $\pi_i(M)$ son grupos de torsión.

Si $h : S^0 \rightarrow K(Q) \approx \mu Q$ representa el morfismo correspondiente a la inclusión de Z en Q , dado por el teorema de coeficientes universales, entonces usando de nuevo el isomorfismo anterior, se demuestra que un espectro X es racional si y sólo si el morfismo inducido $1_X \wedge h : X \rightarrow X \wedge K(Q)$ es un isomorfismo. Así que en particular cada espectro racional es un GEM.

Sea $T \xrightarrow{g} S^0 \xrightarrow{h} \mu Q \rightarrow T$ el triángulo dado por h , donde $|g| = |h| = 0$. Entonces $T \approx S^{-1} \mu(Q/Z)$. Tomando el smash-producto de un espectro X con este triángulo se obtiene un triángulo exacto:

$$X \wedge T \longrightarrow X \longrightarrow X \wedge \mu Q \longrightarrow X \wedge T \quad .$$

$X \wedge T$ y $X \wedge \mu Q$ son las "coordenadas" de torsión y racional de X .

3. Espectros Funcionales.

La presente sección está dedicada a destacar ciertas propiedades relacionadas con el espectro funcional $F(X, Y)$, asociado a un par de espectros X e Y . En particular trataremos el caso del espectro dual $F(X, S^0)$ de un espectro cualquiera X .

Algunos de los resultados a obtener permitirán mostrar, por ejemplo, que si X o bien Y es un espectro generalizado de Eilenberg-MacLane, entonces lo mismo ocurre con el espectro funcional $F(X, Y)$. Así mismo obtendremos algunas "formulaciones explícitas" de $F(X, Y)$ como producto o coproducto de suspensiones de Y , lo que permitirá calcular la homotopía $\pi_n(F(X, Y)) \approx \{X, Y\}_n \approx \{X, Y\}^n$ en términos de la cohomología y de la homotopía de X e Y . Así que en particular, para ciertos espectros M , podremos determinar el álgebra de Steenrod $\{M, M\}^* \approx \pi_*(F(M, M))$.

Para comenzar introducimos a continuación el concepto de "functor exacto" en la categoría \underline{S}_h .

3.1 Definición. Diremos que functor $E : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ es un functor exacto si E transforma triángulos exactos en triángulos exactos. Esto quiere decir que si $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ es un triángulo exacto en \underline{S}_h , entonces $EA \rightarrow EB \rightarrow EC \rightarrow EA$ es un triángulo exacto, si E es covariante; y si E es un functor contravariante, entonces $EA \rightarrow EC \rightarrow EB \rightarrow EA$ es un triángulo exacto.

Así por ejemplo, si X es un espectro cualquiera, y definimos $E_X : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ por $E_X(A) = X \wedge A$, y para un morfismo $f : A \longrightarrow B$, $E_X(f) = 1_X \wedge f : X \wedge A \longrightarrow X \wedge B$, entonces usando J.17 de [3], se demuestra que E_X es un funtor covariante exacto.

Sea $E : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ un funtor covariante, y consideremos una familia de espectros $\{Y_a : a \in J\}$. Entonces existen morfismos $E(i_a) : E(Y_a) \longrightarrow E(\bigvee_b Y_b)$ y $E(\pi_b) : E(\prod_b Y_b) \longrightarrow E(Y_a)$ inducidos respectivamente por las inclusiones y las proyecciones canónicas : $i_a : Y_a \longrightarrow \bigvee_b Y_b$, $p_a : \prod_b Y_b \longrightarrow Y_a$. Los morfismos $E(i_a)$ y $E(p_a)$ definen morfismos de grado cero :

$$E(i) : \bigvee_a E(Y_a) \longrightarrow E(\bigvee_a Y_a) ,$$

$$E(p) : E(\prod_a Y_a) \longrightarrow \prod_a E(Y_a) .$$

Diremos que un funtor covariante $E : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ es un funtor aditivo (resp. multiplicativo) si el morfismo $E(i)$ (resp: $E(p)$) es un isomorfismo para cada familia de espectros $\{Y_a : a \in J\}$.

Así por ejemplo, el funtor covariante $E_X : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ dado por $E_X(A) = X \wedge A$ es un funtor covariante aditivo para cada espectro X ; y es multiplicativo si X es isomorfo a un espectro finito.

Análogamente como en el caso covariante, si $E : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ es un funtor contravariante, existe un morfismo canónico: $E(i) : E(\bigvee_a Y_a) \longrightarrow \prod_a E(Y_a)$. Si este morfismo es un isomorfis

mo, diremos que E es un funtor contravariante aditivo.

3.2 Proposición. Sea $E : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ un funtor exacto, y sea $\mathcal{M} \subseteq \underline{S}_h$ una clase estable. Pongamos $E^{-1}(\mathcal{M})$ la clase formada por los espectros X tales que $E(X) \in \mathcal{M}$. En estas condiciones tenemos :

(a) Si E es covariante-aditivo y \mathcal{M} es aditiva, entonces $E^{-1}(\mathcal{M})$ es una clase estable aditiva; y si \mathcal{M} es multiplicativa y E es covariante-multiplicativo, $E^{-1}(\mathcal{M})$ es estable y multiplicativa.

(b) Si E es contravariante-aditivo y \mathcal{M} es multiplicativa, entonces $E^{-1}(\mathcal{M})$ es una clase estable aditiva.

La demostración es muy sencilla, pues sólo requiere usar las definiciones anteriores para verificar las propiedades de la definición 2.1 .

Así por ejemplo si $\mathcal{M} = \text{NUL}$ la clase estable aditiva formada por los espectros isomorfos al espectro nulo, entonces para cada espectro X , la clase $\ker.E_X = E_X^{-1}(\text{NUL})$ - donde $E_X(A) = X \wedge A$ - coincide con la clase estable aditiva $\text{Nul}(X)$ definida en 2.2 .

3.3 Teorema. Para cada par de espectros (X, Y) existe un espectro funcional $F(X, Y)$ en \underline{S}_h , tal, que para cada espectro T , $\{T, F(X, Y)\} \simeq \{X \wedge T, Y\}$.

El morfismo de evaluación $e : X \wedge F(X, Y) \longrightarrow Y$ es la imagen de $1_{F(X, Y)}$ por este isomorfismo.

Para cada X fijo definir $F_X : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$ por la re-

lación $F_X(Y) = F(X, Y)$. Si $f : Y \rightarrow B$, entonces a la composición $X \wedge F(X, Y) \xrightarrow{e} Y \xrightarrow{f} B$, le corresponde por el isomorfismo anterior, un morfismo $F_X(f) : F(X, Y) \rightarrow F(X, B)$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X \wedge F(X, Y) & \xrightarrow{h} & X \wedge F(X, B) \\ \downarrow e & & \downarrow e \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

y en el cual $h = 1_X \wedge F_X(f)$. Con estas definiciones F_X resulta ser un funtor covariante exacto y multiplicativo.

Análogamente, fijando Y se define un funtor contravariante : $F^Y : \underline{S}_h \rightsquigarrow \underline{S}_h$, $F^Y(X) = F(X, Y)$. Este funtor es exacto y aditivo. Para la demostración de este teorema y algunos detalles relacionados con el mismo, remitimos al lector a Vogt [17].

Como consecuencia de estos resultados, se deduce que si :

$$\dots \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow \dots$$

es un diagrama de morfismos de grado cero en \underline{S}_h , entonces para cada espectro Y , existen isomorfismos canónicos:

$$F(Y, \varprojlim_i X_i) \approx \varprojlim_i F(Y, X_i) \quad \text{y} \quad F(\varinjlim_i X_i, Y) \approx \varinjlim_i F(X_i, Y).$$

A continuación enunciamos un resultado que relaciona-

na el espectro funcional y las clases estables.

3.4 Proposición. Si X e Y son espectros, entonces el espectro funcional $F(A,B) \in [F(X,Y)]$ para cada $A \in (X)$ y cada $B \in (Y)$.

Demostración : Fijado X , sea F_X el funtor covariante exacto multiplicativo definido en 3.3. Aplicando la proposición 3.2 con $\mathcal{M} = [F(X,Y)]$, la clase estable multiplicativa generada por $F(X,Y)$, obtenemos que la clase de los espectros J , tales que $F(X,J) \in [F(X,Y)]$ es una clase estable multiplicativa. Como dicha clase contiene al espectro Y , entonces $F(X,B) \in [F(X,Y)]$ para cada espectro $B \in (Y)$.

Análogamente si fijamos L , y consideramos el funtor contravariante exacto aditivo F^L , entonces se obtiene que $F(J,L) \in [F(X,L)]$ para cada $J \in (X)$. Este resultado y el anterior implican finalmente que $F(A,B) \in [F(X,Y)]$ para cada $A \in (X)$ y cada $B \in (Y)$.

3.5 Definición. El funcional dual DX de un espectro X está dado por la fórmula $DX = F(X, S^0)$.

El morfismo de evaluación correspondiente $e: X \wedge DX \rightarrow S^0$ da lugar a un morfismo canónico $d: X \rightarrow DDX$, usando el isomorfismo de 3.3 :

$$\{X, DDX\} = \{X, F(DX, S^0)\} \approx \{DX \wedge X, S^0\} \approx \{X \wedge DX, S^0\} .$$

Si X es un espectro finito, entonces $d: X \rightarrow DDX$ es un isomorfismo.

La evaluación $e: X \wedge DX \rightarrow S^0$ induce para cada espec

tro Y , un morfismo $X \wedge (DX \wedge Y) \longrightarrow Y$, el cual corresponde por el isomorfismo 3.3 a un morfismo $e(X, Y): DX \wedge Y \longrightarrow F(X, Y)$. Si X o Y son espectros finitos, entonces $e(X, Y)$ es un isomorfismo. ([17], ter. 13.2 y sg.).

Usando la proposición 2.11 de [14] , obtendremos otros casos en los cuales $e(X, Y)$ es un isomorfismo.

3.6 Teorema. Si X e Y son espectros tales que X es conexo con un número finito de grupos de homología no triviales, y $\pi_i(Y)$ es finitamente generado para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces :

- (a) $e(X, Y) : DX \wedge Y \longrightarrow F(X, Y)$ es un isomorfismo.
- (b) El smash-producto $X \wedge Y \in [Y]$.

Demostración: Supongamos que X es $(n-1)$ -conexo, y tiene a lo sumo $m+1$ grupos de homología no triviales. Consideremos el triángulo exacto correspondiente a la $(n+m-1)$ -fibra de Moore de X :

$$X_{n+m-1} \longrightarrow X \longrightarrow S^{n+m} \wedge \mu H_{n+m}^i(X) \longrightarrow X_{n+n-1}$$

Entonces existe un morfismo de triángulos exactos:

$$\begin{array}{ccccccc} DX_{m+n-1} \wedge Y & \longrightarrow & DS^{m+n} \wedge \mu H_{n+m}^i(X) \wedge Y & \longrightarrow & DX \wedge Y & \longrightarrow & DX_{m+n-1} \wedge Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow e(X,Y) & & \downarrow \\ F(X_{m+n-1}, Y) & \longrightarrow & F(S^{m+n} \wedge \mu H_{n+m}^i(X), Y) & \longrightarrow & F(X, Y) & \longrightarrow & F(X_{m+n-1}, Y) \end{array} ;$$

y un triángulo exacto:

$$X_{m+n-1} \wedge Y \longrightarrow X \wedge Y \longrightarrow S^{m+n} \wedge \mu H_{n+m}^i(X) \wedge Y \longrightarrow X_{m+n-1} \wedge Y .$$

Por consiguiente, si procedemos por inducción sobre el número de grupos de homología de X , será suficiente entonces demostrar que $e(X, Y)$ es un isomorfismo para $X \approx \mu G$, y que $\mu G \wedge Y \in [Y]$ para cada grupo abeliano G . En este caso la proposición 2.11 de [14] establece que $e(\mu G, Y)$ es un isomorfismo si G es finitamente generado, o si $\pi_1(Y)$ es finitamente generado para cada entero i .

Para mostrar que $\mu G \wedge Y \in [Y]$, consideremos una presentación libre de G : $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow 0$. Entonces de acuerdo con 2.6 de [14], existe un triángulo exacto:

$$\mu L \rightarrow \mu M \rightarrow \mu G \rightarrow \mu L .$$

Tomando el smash-producto de este triángulo con Y , se deduce será suficiente considerar el caso en que G es un grupo libre. En esta situación G es un sumando directo del grupo $\text{Hom}(\text{Hom}(G, Z), Z)$ - lema 2.5 - , y por lo tanto existe un monomorfismo en \mathcal{S}_h :

$$j : \mu G \rightarrow \mu \text{Hom}(T, Z)$$

donde $T = \text{Hom}(G, Z)$. (lema 2.8 de [14]).

El resultado de la parte (a) del teorema da un isomorfismo:

$$F(\mu T, Y) \approx D\mu T \wedge Y \approx (S^{-1} \mu \text{Ext}(T, Z) \vee \mu \text{Hom}(T, Z)) \wedge Y,$$

y en donde el segundo isomorfismo es 2.14 de [14].

Por último el monomorfismo j induce un monomorfismo $j \wedge 1_Y : \mu G \wedge Y \rightarrow \mu \text{Hom}(T, Z) \wedge Y$, lo que junto al isomorfismo anterior implican que existe un monomorfismo en \mathcal{S}_h :

$$h : \mu_{G \wedge Y} \longrightarrow F(\mu_T, Y).$$

Como $F(\mu_T, Y) \in [Y]$ -prop. 3.4- , entonces el monomorfismo h , y e.3 de 2.1 dan finalmente que $\mu_{G \wedge Y} \in [Y]$, con lo que finaliza la demostración del teorema.

3.7 Teorema. Para cada espectro Y y cada grupo abeliano G , los espectros funcionales $F(K(G), Y)$ y $F(Y, K(G))$ son espectros generalizados de Eilenberg-MacLane.

Demostración : Sea \tilde{S} la \mathbb{J} -fibra de Postnikov de la esfera 0 -dimensional S^0 , y consideremos el triángulo exacto correspondiente:

$$\tilde{S} \xrightarrow{f} S^0 \xrightarrow{h} K(Z) \longrightarrow \tilde{S} ,$$

donde $|f| = |h| = 0$, $\pi_1(f)$ es un isomorfismo para $i > 0$ y h representa el generador canónico de $\pi_0(S^0) \approx \mathbb{Z}$. El morfismo h se llama el "morfismo de Hurewicz"; y si X es un espectro cualquiera, entonces $l_X^h \equiv h(X) : X \longrightarrow X \wedge K(Z)$ es el morfismo de Hurewicz correspondiente a X .

Como \tilde{S} es 0 -conexo, entonces para cada grupo G , los morfismos $f \wedge l_{K(G)} = 0$ y $l_{K(G)} \wedge f = 0$. Por lo tanto dado un morfismo $d : A \longrightarrow X$, tal que $h(X).d = 0$, entonces tam bien $d \wedge l_{K(G)} = 0$ y $l_{K(G)} \wedge d = 0$. Más aún el homomorfismo inducido $H^*(d; G) : H^*(X; G) \longrightarrow H^*(A; G)$ es idénticamente nu lo. Así que en particular ésto mismo vale para el morfismo $f(X) = l_X^f$, y en consecuencia, usando la "conmutatividad" y "asociatividad" del funtor smash-producto, se deduce tam bien que para cada grupo abeliano G , el morfismo indu-

cido $1_{K(G)} \wedge f(X) = 0 : K(G) \wedge (X \wedge \tilde{S}) \longrightarrow K(G) \wedge X$. Por lo tanto, para cada espectro Y , el homomorfismo d :

$$(3.7a) \quad d : \{K(G) \wedge X, Y\} \longrightarrow \{K(G) \wedge X \wedge \tilde{S}, Y\} ,$$

inducido por $1_{K(G)} \wedge f(X)$, es idénticamente nulo.

Considerando ahora el espectro funcional $F(K(G), Y)$, y usando sus propiedades functoriales, obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{X, F(K(G), Y)\} & \xrightarrow{f^*(X)} & \{X \wedge \tilde{S}, F(K(G), Y)\} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \{K(G) \wedge X, Y\} & \xrightarrow{d} & \{K(G) \wedge X \wedge \tilde{S}, Y\} \end{array}$$

en el que las flechas verticales corresponden a los isomorfismos dados por 3.3; y donde $f^*(X)$ es el homomorfismo inducido por $f(X)$. De este diagrama y del hecho de que el homomorfismo d dado en (3.7a) es nulo, se deduce que el homomorfismo $f^*(X) = 0$. Por lo tanto dado un morfismo cualquiera $b : X \longrightarrow F(K(G), Y)$, existe un morfismo b_1 , $b_1 : X \wedge K(Z) \longrightarrow F(K(G), Y)$, con $|b| = |b_1|$, y que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X \wedge \tilde{S} & \xrightarrow{f(X)} & X & \xrightarrow{h(X)} & X \wedge K(Z) \\ & & \searrow b & & \searrow b_1 \\ & & & & F(K(G), Y) \end{array}$$

Así que en particular tomando $X = F(K(G), Y)$ y eligiendo $b =$ identidad de $F(K(G), Y)$, se deduce que el morfismo

de Hurewicz $h(F(K(G), Y)) : F(K(G), Y) \longrightarrow F(K(G), Y) \wedge K(Z)$ correspondiente al espectro $F(K(G), Y)$, es un monomorfismo en \underline{S}_h ; y por consiguiente $F(K(G), Y)$ es un espectro generalizado de Eilenberg-MacLane, puesto que de acuerdo con 2.7, lo mismo vale para $F(K(G), Y) \wedge K(Z)$.

Análogamente, considerando el espectro $F(Y, K(G))$, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{X, F(Y, K(G))\} & \xrightarrow{f^*(X)} & \{X \wedge \tilde{S}, F(Y, K(G))\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{Y \wedge X, K(G)\} & \xrightarrow{d} & \{Y \wedge (X \wedge \tilde{S}), K(G)\} \end{array}$$

donde d es el homomorfismo inducido por $l_Y \wedge f(X)$.

Tomando en cuenta la asociatividad del funtor smash-producto se obtiene que $f(X \wedge Y) \cdot b = c \cdot (l_Y \wedge f(X))$ para un par de isomorfismos b y c . Como $f(X \wedge Y)$ induce homomorfismos triviales en cohomología, entonces de la igualdad anterior, y de la conmutatividad del diagrama se deduce que $d = 0$. Razonando ahora exactamente como en el caso precedente, resulta finalmente que $h(F(Y, K(G)) : F(Y, K(G)) \rightarrow F(Y, K(G)) \wedge K(Z)$ es un monomorfismo en \underline{S}_h ; y por consiguiente $F(Y, K(G))$ es un espectro generalizado de Eilenberg-MacLane, con lo cual damos por terminada la demostración del teorema.

A continuación demostraremos un teorema de "factorización del smash-producto $M \wedge X$, el cual nos permitirá, entre otras cosas, calcular la M -homología de X , en términos de la

homotopía de M y la homología de X , para ciertos M y X .

3.8 Teorema. Si X y M son espectros conexos tales que $G_* = H_*(X)$ es libre y $H^f(M; \pi_*(M) \otimes G_*)$ no tiene torsión, entonces existe un isomorfismo:

$$M \wedge X \approx \bigvee_i M \wedge S^i \mu H_i(X) .$$

Demostración: Supongamos que X es (-1) -conexo, lo - que no resta generalidad a la demostración; y consideremos la sucesión X_0, \dots, X_n, \dots de las fibras de Moore de X .

Demostremos en primer lugar, que para cada entero n , existe un isomorfismo:

$$(3.8a) \quad d_n : M \wedge X_n \approx \bigvee_i M \wedge S^i \mu H_i(X_n) .$$

En efecto, para $n = 0$, $X_0 \approx \mu H_0(X)$, y por lo tanto hay un isomorfismo $d_0 : M \wedge X_0 \approx M \wedge \mu H_0(X_0)$. Supongamos entonces por inducción, que para cada $i \leq n$ existe un isomorfismo d_i como en (3.8a); y consideremos el triángulo exacto:

$$(3.8b) \quad X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \xrightarrow{g_n} S^{n+1} \mu H_{n+1}(X) \xrightarrow{b_n} X_n$$

correspondiente al morfismo f_n dado por la filtración de Moore.

En 2.7, en la demostración de que $Y K(Z)$ es un GEM, vimos que para cada entero n , el morfismo de Moore

$$h_n : Y_n \longrightarrow Y$$

era tal que $h_n^{\wedge 1} K(Z) : Y_n^{\wedge} K(Z) \longrightarrow Y^{\wedge} K(Z)$ era un monomorfismo en \mathbb{S}_h . Por lo tanto en el triángulo (3.8b) tenemos que $b_n^{\wedge 1} K(Z) = 0$, y en consecuencia el morfismo de grado cero:

$$c_n = l_M^{\wedge} b_n : M^{\wedge} S^{n+1} \mu H_{n+1}(X) \longrightarrow M^{\wedge} X_n$$

es tal que el homomorfismo inducido $H^r(c_n; G) = 0$ para cada entero r y cada grupo abeliano G , (ver demostración de teor. 3.7). Observando ahora que las hipótesis del teorema y la hipótesis de inducción implican que los espectros $J_n = M^{\wedge} \mu H_{n+1}(X)$ y $M^{\wedge} X_n$ son conexos y que $M^{\wedge} X_n$ es isomorfo a un coproducto de suspensiones de M , se deduce que $H^*(J_n; \pi_*(M^{\wedge} X_n))$ no tiene torsión. Estamos entonces en condiciones de aplicar el lema 1.20 al morfismo c_n , para obtener $c_n = 0$. Por consiguiente, tomando el smash-producto de M con el triángulo (3.8b), tenemos un triángulo :

$$M^{\wedge} X_n \longrightarrow M^{\wedge} X_{n+1} \longrightarrow M^{\wedge} S^{n+1} \mu H_{n+1}(X) \xrightarrow{c_n=0} M^{\wedge} X_n$$

en el cual $c_n = 0$; y así existe un isomorfismo :

$$M^{\wedge} X_{n+1} \approx M^{\wedge} X_n \vee M^{\wedge} S^{n+1} \mu H_{n+1}(X) .$$

Este isomorfismo y el isomorfismo d_n dado por inducción , implican que existe un isomorfismo:

$$d_{n+1} : M^{\wedge} X_{n+1} \approx \bigvee_1 M^{\wedge} S^1 \mu H_1(X_{n+1}) .$$

Con ésto termina el paso inductivo, y así tenemos iso morfismos d_n como en (3.8a).

Consideremos en segundo lugar el diagrama de morfismos de grado cero:

$$(3.8c) \quad \dots \rightarrow M \wedge X_n \xrightarrow{\tilde{f}_n} M \wedge X_{n+1} \rightarrow M \wedge X_{n+2} \rightarrow \dots$$

Entonces este diagrama es una filtración convergente de $M \wedge X$, en el cual, de acuerdo con lo visto anteriormente, cada morfismo $\tilde{f}_n = l_M \wedge f_n$ es un monomorfismo en S_h .

Más generalmente, suponagamos que tenemos una filtración convergente de un espectro Y :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & Y_i & \xrightarrow{b_i} & Y_{i+1} & \xrightarrow{b_{i+1}} & Y_{i+2} \rightarrow \dots \\ & & \searrow \varepsilon_i & & \swarrow \varepsilon_{i+1} & & \\ & & & & Y & & \end{array}$$

tal que cada b_i es un monomorfismo en S_h . Formando los triángulos exactos correspondientes:

$$Y_i \xrightarrow{b_i} Y_{i+1} \xrightarrow{t_i} T_{i+1} \xrightarrow{s_i} Y_i$$

donde $|b_i| = |t_i| = 0$, resulta $s_i = 0$, y por lo tanto hay morfismos de grado cero $k_i : T_{i+1} \rightarrow Y_{i+1}$ tales que $t_i \cdot k_i = l_{T_{i+1}}$ para cada i .

Para cada entero r , definir $h : Y_r \vee \bigvee_{i \geq r} T_i \rightarrow Y$ por

las relaciones : $h|Y_r = g_r : Y_r \longrightarrow Y$ y $h|T_i = g_i \cdot k_{i-1}$ para cada $i > r$. Entonces una sencilla comprobación muestra que h induce un isomorfismo en homotopía, y por lo tanto h es un isomorfismo en \underline{S}_h .

Aplicando este resultado a la filtración (3.8c) de $M \wedge X$, obtenemos un isomorfismo:

$$d : M \wedge X \approx \bigvee_i M \wedge S^i \mu H_i(X) \approx \prod_i M \wedge S^i \mu H_i(X)$$

donde el segundo isomorfismo se deduce de la conexión de los espectros M y X . Con ésto termina la demostración del teorema.

3.9 Aplicaciones: Si X y M son como en el teorema anterior, entonces el isomorfismo d permite calcular la M -homología de X , donde el n -simo grupo de M -homología de X es por definición $M_n(X) = \pi_n(M \wedge X)$. En efecto tenemos:

$$M_n(X) \approx \bigoplus_{r+s=n} \pi_r(M) \otimes H_s(X) \approx \bigoplus_{r+s=n} H_s(X; \pi_r(M)).$$

Así por ejemplo si tomamos como M el espectro de Thom correspondiente al grupo unitario, entonces la fórmula anterior permite calcular los grupos de bordismo de X en términos de sus grupos de homología. (ver al respecto [7], [8] y [10]).

3.10 Corolario . Si X y M verifican las hipótesis del teorema 3.8, y si $H_n(X)$ o $\pi_n(M)$ son finitamente generados en cada dimensión; entonces $M \wedge X \in [M]$.

En efecto, el teorema 3.6 implica que para cada grupo abeliano G , $M \wedge G \in [M]$ si G o $\pi_r(M)$ son finitamente generados para cada r . Este resultado y el isomorfismo del teorema anterior dan que $M \wedge X \in [M]$.

3.11 Teorema. Sean X y M espectros conexos tales que $H_r(X)$, $H_r(M)$ y $\pi_r(M)$ son libres en cada dimensión. Supongamos que M es (-1) -conexo y que $\pi_0(M) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(M) = 0$. En estas condiciones tenemos:

(a) Existe un diagrama de morfismos de grado cero:

$$\dots \rightarrow X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \rightarrow X_0 = 0$$

y morfismos de grado cero $g_i : X \rightarrow X_i$, tales que $f_{i+1} \cdot g_{i+1} = g_i$ para cada i . Más aún, el morfismo $g : X \rightarrow \varprojlim X_i$ inducido por los g_i , es un isomorfismo.

(b) Si $\pi_r(M)$ es finitamente generado en cada dimensión, entonces $X_i \in [M]$ para cada i , y por lo tanto el isomorfismo anterior implica que $X \in [M]$.

Demostración: Sea $b : S^0 \rightarrow M$ el generador de $\pi_0(M)$, y formemos el triángulo exacto correspondiente:

$$(3.11a) \quad V \xrightarrow{d} S^0 \xrightarrow{b} M \xrightarrow{h} V$$

donde $|d| = |b| = 0$ y $|h| = -1$. Definamos por inducción espectros V_i mediante las relaciones $V_1 = V$, $V_{i+1} = V_i \wedge V$.

Tomando el smash-producto de V_i con el triángulo anterior se obtienen morfismos $d_i : V_i \longrightarrow S^0$ y $t_{i+1} : V_{i+1} \longrightarrow V_i$, que hacen conmutativos los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{d_i} & S^0 \\ t_{i+1} \uparrow & & \parallel \\ V_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & S^0 \end{array},$$

y en donde $|t_{i+1}| = |d_i| = 0$ para cada i , y $d_1 = d$.

Formando ahora los triángulos correspondientes a los morfismos d_i se obtiene el siguiente diagrama de morfismos de triángulos exactos:

$$(3.11b) \quad \begin{array}{ccccccc} V_i & \xrightarrow{d_i} & S^0 & \xrightarrow{b_i} & M_i & \xrightarrow{h_i} & V_i \\ t_{i+1} \uparrow & & \parallel & & s_{i+1} \uparrow & & \uparrow t_{i+1} \\ V_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & S^0 & \xrightarrow{b_{i+1}} & M_{i+1} & \xrightarrow{h_{i+1}} & V_{i+1} \end{array}$$

Por último, en el triángulo exacto correspondiente al morfismo s_{i+1} :

$$(3.11c) \quad L_i \xrightarrow{c_i} M_{i+1} \xrightarrow{s_{i+1}} M_i \longrightarrow L_i$$

donde $|c_i| = |s_{i+1}| = 0$, el espectro $L_i \approx V_i \wedge M$.

Sea ahora X como en la hipótesis del teorema, y definamos espectros X_i y morfismos $f_{i+1} : X_{i+1} \longrightarrow X_i$, y $g_i : X \longrightarrow X_i$, poniendo $X_i = 0$ si $i \leq 0$ y $X_i = X \wedge M_i$ si

$i > 0$. Así mismo $g_i = 1_{X \wedge b_i} : X \longrightarrow X \wedge M_i = X_i$, y

$$f_{i+1} = 1_{X \wedge s_{i+1}} : X_{i+1} \longrightarrow X_i .$$

Con estas definiciones resulta $f_{i+1} \cdot g_{i+1} = g_i$, de acuerdo con la conmutatividad del diagrama (3.11b).

Por otra parte , en el diagrama (3.11a), el espectro V es 0 -conexo, puesto que M es (-1) -conexo, $H_0(b)$ es un isomorfismo y $H_1(M) = 0$. Así que usando L.4 de [3], y por inducción en i , se demuestra que V_i es $(i-1)$ -conexo para cada $i > 0$. Por lo tanto existe una sucesión de enteros $n_1 < n_2 < \dots$, tales que $X \wedge V_i$ es (n_i-1) -conexo, puesto que X es conexo. En consecuencia, tomando el smash-producto de X con el diagrama (3.11b) se deduce finalmente que los morfismos $g_i : X \longrightarrow X_i$ inducen un isomorfismo $g : X \approx \varprojlim X_i$, con lo cual queda demostrada la parte (a) del teorema.

Nos resta por demostrar (b). A tal efecto, consideremos de nuevo el triángulo (3.11a) y apliquemos el funtor de homología para deducir que $H_i(h) : H_i(M) \longrightarrow H_{i-1}(V)$ es un isomorfismo para cada $i \geq 1$; lo que implica que los grupos de homología de V son grupos libres. Usando ahora la fórmula de Kunneth, y por inducción en i , se demuestra que $H_*(X \wedge V_i)$ es libre en cada dimensión. Por lo tanto, si para cada n , $\pi_n(M)$ es finitamente generado, entonces el corolario 3.10 implica que $X \wedge V_i \wedge M \approx X \wedge L_i \in [M]$. Procediendo

ahora por inducción, y tomando el smash-producto de X con el triángulo (3.11c), se demuestra que $X_i = X \wedge M_i \in [M]$ para cada $i \geq 1$, donde $M_1 = M$. Por consiguiente del isomorfismo anterior $g : X \approx \varprojlim X_i$, se deduce finalmente que el espectro $X \in [M]$, con lo cual termina la demostración del teorema.

Ejemplos : Tomar $X = S^0$, y $M = MU$ el espectro de Thom correspondiente al grupo unitario. Entonces MU verifica las hipótesis del teorema, puesto que en efecto, MU es (-1) -conexo; $\pi_1(MU) = 0$, $H_i(MU) = 0$ si i es impar, y $\pi_{2n}(MU)$ y $H_{2n}(MU)$ son grupos libres con generadores en correspondencia biunívoca con las particiones del entero n . (Ver [10] y [13]).

3.12 Aplicaciones . Si X y M son espectros que verifican las hipótesis del teorema anterior, y si $H_n(X)$ y $\pi_n(M)$ son finitamente generados en cada dimensión, entonces para cada entero i , el espectro $J_i = X \wedge V_i \wedge M$ es un espectro "débilmente inyectivo" respecto de M ; es decir, si $b : A \rightarrow J_i$ es un morfismo tal que el homomorfismo inducido, $0 = M^*(b) : \{J_i, M\}^* \rightarrow \{A, M\}^*$, entonces $b = 0$.

En efecto, el isomorfismo del teorema 3.8 da que

$$J_i \approx \bigvee_m S^m \wedge H_{m,i} \wedge M \approx \prod_m S^m \wedge H_{m,i} \wedge M$$

donde $H_{m,i} = H_m(X \wedge V_i)$. Usando ahora las hipótesis y procediendo por inducción, se demuestra que $H_{m,i}$ es un grupo libre finitamente generado, para cada par de enteros (i, m) .

Por consiguiente el espectro $\mu H_{m,i}$ es isomorfo a un producto de σ -esferas con número finito de factores. Así que - en conclusión el isomorfismo anterior implica que J_1 es isomorfo a un producto $\prod_{n_r} S^{n_r} M$ de suspensiones de M , en donde $n_r = n$ para un número finito de r 's. En consecuencia, el espectro $J_1 = X \wedge V_1 \wedge M$ es débilmente inyectivo.

Poniendo $Y_i = X \wedge V_i$ y $c_i = 1_X \wedge t_i : Y_i \longrightarrow Y_{i-1}$ para cada $i > 1$, se obtiene un diagrama:

$$\dots \longrightarrow Y_i \xrightarrow{c_i} Y_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{c_2} Y_1 \xrightarrow{c_1} X ,$$

en el cual $c_1 = 1_X \wedge d : Y_1 = X \wedge V \longrightarrow X$, y donde d y t_i son los morfismos dados en (3.11a) y (3.11b) respectivamente.

Este diagrama verifica las siguientes propiedades:

(a) Para cada entero $i \geq 0$, el homomorfismo inducido por c_{i+1} , $M^*(c_{i+1}) : \{Y_i, M\}^* \longrightarrow \{Y_{i+1}, M\}^*$ es trivial : $M^*(c_{i+1}) = 0$. ($Y_0 = X$). Esto se demuestra usando lema 1.20, tomando en cuenta que el morfismo inducido $t_i \wedge 1_{K(Z)} = 0$.

(b) En el triángulo exacto dado por c_{i+1} :

$$Y_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}} Y_i \longrightarrow J_i \longrightarrow Y_{i+1},$$

el espectro J_i es "débilmente inyectivo" respecto de M .

Un diagrama como el anterior es lo que se llama un "

"complejo sobre X , débilmente inyectivo respecto de M ", en la terminología de Baas ([1] y [2]). En este caso, para cada espectro T , se tiene una filtración de los grupos $\{T, X\}$ poniendo $F_n(\{T, X\}) = \text{imag.}(\{T, Y_n\} \rightarrow \{T, X\})$. Si T es un espectro finito, entonces $F_n = 0$ para n suficientemente grande, y por lo tanto la intersección $\bigcap_n F_n = 0$, siendo ésto último una condición suficiente para la "convergencia" de la sucesión espectral de Adams asociada al "complejo" anterior.

Para terminar con esta sección demostraremos a continuación un teorema de descomposición del espectro funcional $F(X, M)$. Tal descomposición permitirá, entre otras cosas, calcular los grupos de cobordismo complejo de ciertos espectros.

3.13 Teorema. Sean X y M espectros conexos tales que $H_r(X)$ es libre y finitamente generado en cada dimensión, y $H^r(M; \pi_j(M))$ es un grupo sin torsión para cada par de enteros r y j . Entonces existe un isomorfismo:

$$d : F(X, M) \approx \prod_1 S^{-1} \mu H_1(X) \wedge M .$$

Demostración: Supongamos que X es (-1) -conexo, y sean X_0, \dots, X_n, \dots , las fibras de Moore de X . Demostremos en primer lugar que para cada entero n , existe un isomorfismo:

$$d_n : F(X_n, M) \approx \bigvee_1 S^{-1} \mu H_1(X_n) \wedge M .$$

Para $n = 0$, tenemos $X_0 \simeq \mu H_0(X)$, y como por hipótesis $H_0(X)$ es libre y finitamente generado, entonces el espectro X_0 es isomorfo a un producto de 0 -esferas con un número finito de factores; y por lo tanto hay un isomorfismo $d_0 : F(X_0, M) \simeq \mu H_0(X) \wedge M$.

Supongamos por inducción que existe un isomorfismo d_i para cada $i \leq n$; y consideremos el triángulo exacto dado por el morfismo f_n de la filtración de Moore de X :

$$(3.13a) \quad X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \longrightarrow S^{n+1} \mu H_{n+1}(X) \xrightarrow{b_n} X_n.$$

Entonces existe un morfismo de grado cero, inducido por b_n , $F(b_n) : F(X_n, M) \longrightarrow F(S^n \mu H_{n+1}(X), M)$. Usando el isomorfismo natural dado por teorema 3.3 :

$$h : \{S^n \mu H_{n+1}(X) \wedge F(X_n, M), M\} \simeq \{F(X_n, M), F(S^n \mu H_{n+1}(X), M)\}$$

y la exactitud y funtorialidad del espectro funcional, se deduce que al morfismo $c_n = e.(b_n \wedge t)$:

$$c_n : S^n \mu H_{n+1}(X) \wedge F(X_n, M) \longrightarrow X_n \wedge F(X_n, M) \longrightarrow M,$$

donde e es el morfismo de evaluación de 3.3, y t es el morfismo identidad de $F(X_n, M)$, le corresponde el morfismo $F(b_n)$ por el isomorfismo h ; es decir, $h(c_n) = F(b_n)$.

Como $b_n \wedge 1_{K(Z)} = 0$, entonces el morfismo c_n in-

duce homomorfismos triviales en cohomología con cualquier grupo de coeficientes. Tomando en cuenta ahora la hipótesis inductiva y las propiedades de la homología de X , se deduce que el espectro $J_n = \mu H_{n+1}(X) \wedge F(X_n, M)$ es isomorfo a un coproducto de un número finito de suspensiones de M , y en consecuencia $H^r(J_n; \pi_j(M))$ es un grupo sin torsión para cada r y j , porque lo mismo vale para el espectro M . Estamos así en condiciones de aplicar el lema 1.20 para concluir que $c_n = 0$; y por consiguiente $F(b_n) = h(c_n) = 0$.

Aplicando la conclusión anterior al triángulo (3.13a) se deduce que existe un isomorfismo:

$$d_{n+1}: F(X_{n+1}, M) \approx F(S^{n+1} \mu H_{n+1}, M) \vee F(X_n, M) \approx \bigvee_i S^{-1} \mu H_{i, n+1} \wedge M,$$

donde $H_{n+1} = H_{n+1}(X)$ y $H_{i, n+1} = H_i(X_{n+1})$, y en el cual el segundo isomorfismo se obtiene tomando en cuenta que hay un isomorfismo d_n por inducción, y que H_{n+1} es libre y finitamente generado.

De la misma manera se deduce que para cada entero n , el morfismo inducido por f_n , $F(f_n) = \tilde{f}_n: F(X_{n+1}, M) \rightarrow F(X_n, M)$ es un epimorfismo en S_{-n} .

Tenemos entonces un diagrama de epimorfismos:

$$(3.13b) \quad \dots \rightarrow F(X_{n+1}, M) \xrightarrow{\tilde{f}_n} F(X_n, M) \rightarrow F(X_{n-1}, M) \rightarrow \dots$$

Procediendo como en 3.8, consideremos un diagrama -

cualquiera de epimorfismos de grado cero en \underline{S}_h :

$$\dots \longrightarrow Y_{i-1} \xrightarrow{t_{i-1}} Y_i \longrightarrow Y_{i+1} \longrightarrow \dots$$

Formando los triángulos exactos dados por los morfismos t_{i+1} :

$$L_i \xrightarrow{s_i} Y_{i+1} \xrightarrow{t_{i+1}} Y_i \longrightarrow L_i$$

donde $|s_i| = |t_{i+1}| = 0$, se obtienen morfismos de grado cero $k_i : Y_{i+1} \longrightarrow L_i$ tales que $k_i \cdot s_i = 1_{L_i}$.

Sea $Y = \varprojlim Y_i$, $g_i : Y \longrightarrow Y_i$ el morfismo canónico ; y definir $h_j : Y \longrightarrow L_j$ poniendo $h_j = k_j \cdot g_{j+1}$. Entonces los morfismos h_j con $j > r$ y g_r definen un morfismo de grado cero:

$$h : Y \longrightarrow Y_r \vee \prod_{i>r} L_i$$

Usando ahora que los t_i son epimorfismos, se demuestra que h induce isomorfismos en homotopía, y por lo tanto h es un isomorfismo en \underline{S}_h . Aplicando este resultado al diagrama (3.13b), y recordando que $X \approx \varinjlim X_i$, obtenemos finalmente:

$$F(X, M) \approx F(\varinjlim X_i, M) \approx \varprojlim F(X_i, M) \approx \prod_i S^{-1} \mu H_i(X) \wedge M .,$$

y con esto finaliza la demostración del teorema.

3.14 Aplicaciones. Si X es un espectro conexo tal

que sus grupos de homología y de homotopía son grupos libres y finitamente generados, entonces el isomorfismo del teorema anterior permite calcular el álgebra $\{X, X\}^*$. Tal álgebra recibe el nombre de "Álgebra de Steenrod correspondiente al espectro X". Así por ejemplo se puede considerar el caso particular cuando $X = MU$, el U-espectro de Thom.

Si X y M verifican las hipótesis del teorema anterior, entonces el isomorfismo dado permite calcular los grupos de M -cohomología de X en términos de la homología de X y de la homotopía de M . El n -simo grupo de M -cohomología de X es por definición el grupo $\{X; M\}^n$. En efecto, recordando que el mencionado isomorfismo está dado por la relación siguiente:

$$F(X, M) \approx \prod_i S^{-i} \wedge H_i(X) \wedge M ,$$

se deduce entonces que para el n -simo grupo de M -cohomología de X , tenemos el isomorfismo:

$$M^n(X) = \{X, M\}^n \approx \prod_{s+t=n} H^s(X; \pi_{-t}(M)) .$$

Tomando en particular $M = MU$, se pueden calcular así los grupos de cobordismo complejo de X .

Algunos cálculos análogos a los hechos aquí, pero usando "sucesiones espectrales", se pueden hallar en [7] y [8].

4. El Algebra de Steenrod y el espectro BP.

En esta sección consideraremos ciertas propiedades relacionadas con la estructura del álgebra A_p , el álgebra de Steenrod correspondiente al grupo Z_p . Tales consideraciones serán hechas sobre la base de los resultados obtenidos por J. Milnor. ([9] y [10]).

En una segunda parte trataremos la construcción del espectro $BP(p)$, el espectro de Brown-Peterson correspondiente a un entero primo p . Paralelo a ello iremos señalando algunas conclusiones extraídas de los trabajos de E. H. Brown y F. P. Peterson. ([4]).

Sea entonces $A = \{K(Z_p), K(Z_p)\}^*$ el álgebra de Steenrod correspondiente al grupo Z_p , el grupo de los enteros-módulo un primo p . Sea \mathcal{R} el conjunto de las sucesiones $(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots)$ de enteros no negativos, tales que $r_i = 0$ a partir de algún n en adelante. Para cada sucesión $R = (r_i) \in \mathcal{R}$, definimos la longitud y la dimensión de R , respectivamente por las fórmulas $b(R) = \sum_1 r_i$, y $d(R) = \sum_1 2r_i(p^i - 1)$.

En [9] y [10] Milnor define elementos Q_i y \mathcal{P}^R de A , para cada $i \geq 0$ y cada $R \in \mathcal{R}$. Tales elementos, según demuestra Milnor, verifican las siguientes propiedades:

- 4.1 Dimensión de $Q_i = 2p^i - 1$, y $\dim(\mathcal{P}^R) = d(R)$.
 $Q_i \cdot Q_j = 0$ si y sólo si $i \neq j$. Mientras que

para $i \neq j$, $Q_i \cdot Q_j = -Q_j \cdot Q_i$.

Los elementos $Q_0^{e_0} \cdot Q_1^{e_1} \cdot \dots \cdot \mathcal{P}^R$ en donde $e_i = 0, 1$ y casi todos los e_i son nulos, forman una base de \mathcal{A} como un espacio vectorial sobre el cuerpo Z_p .

Usando estos resultados se pueden demostrar de manera inmediata los siguientes lemas.

4.2 Lema. Si $f \in \mathcal{A}$, entonces $f = 0$ si y sólo si $Q_i \cdot f = 0$ para cada $i \geq 0$. Más precisamente, por cuestiones de dimensión, para cada f en \mathcal{A} , $f \neq 0$, existe un entero $r = r(\dim.f)$ tal que $Q_i \cdot f \neq 0$ para cada $i \geq r$.

4.3 Lema. Si $f \in \mathcal{A}$ y $Q_i \cdot f = 0$ para algún i , existe un elemento $g \in \mathcal{A}$, tal que $f = Q_i \cdot g$. Y si convenimos en poner $e_i(h) =$ el mínimo de los exponentes e_i de Q_i , que aparecen en la expresión de $h \in \mathcal{A}$, en términos de los elementos básicos dados por 4.1; entonces si $Q_i \cdot f = 0$, existe una única g con $e_i(g) = 0$ y tal que $f = Q_i \cdot g$.

4.4 Lema. Para cada $i \geq 0$ y cada f en \mathcal{A} , existen elementos u y v en \mathcal{A} , tales que $f = Q_i \cdot u + v$. Más aún, u y v están unívocamente determinados por f , si exigimos además $e_i(u) = e_i(v) = 0$.

Si $R = (r_i)$ es una sucesión en \mathcal{R} , definimos el soporte de R , denotado por $\sigma(R)$, como el conjunto dado por

$$\sigma(R) = \{i \in \mathbb{Z} : r_i > 0\}.$$

Si $T = (t_i)$ es otra sucesión, definimos $R-T$ como la sucesión $(r_i - t_i)$, siempre y cuando $r_i \geq t_i$ para cada i .

Sea Δ_i la sucesión con 1 en el lugar i , y ceros en los otros lugares; entonces $d(\Delta_i) = 2(p^i - 1)$ y $b(\Delta_i) = 1$. Si R es una sucesión, entonces $R - \Delta_i$ está definida si $i \in \sigma(R)$.

Para terminar con lo referente al álgebra de Steenrod, señalamos a continuación otros resultados de Milnor ([9] y [10]), los cuales serán usados explícitamente en el presente trabajo.

4.5 Si $c : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es el automorfismo canónico, entonces:

$$Q_0 \cdot c(\mathcal{P}^R) = c(\mathcal{P}^R) \cdot Q_0 + \sum_{i \in \sigma(R)} c(\mathcal{P}^{R - \Delta_i}) \cdot Q_i.$$

Tomando $R = \Delta_i$ en esta relación, se obtiene:

$$4.6 \quad Q_i = Q_0 \cdot c(\mathcal{P}^{\Delta_i}) - c(\mathcal{P}^{\Delta_i}) \cdot Q_0.$$

4.7 El espectro $BP(p)$.

Siguiendo Brown-Peterson [4], definimos a continuación una sucesión de espectros V_s para cada $s \geq 0$. Para $s = 0$ pondremos $V_0 = K(Z)$, y para $s \geq 1$, V_s está dado por la fórmula:

$$V_s = \bigvee S^{d(R)} K(Z) \approx \prod S^{d(R)} K(Z)$$

donde el coproducto se toma sobre todas las sucesiones R con longitud de R , $b(R) = s$, y donde $d(R)$ denota la dimensión de R . Análogamente definimos $W_0 = K(Z_p)$, y para $s \geq 1$, $W_s = \bigvee S^{d(R)} K(Z_p)$ donde $b(R) = s$.

Para cada sucesión R con $b(R) = s$, denotemos con $f_R : V_s \longrightarrow S^{d(R)} K(Z)$ y $\hat{f}_R : W_s \longrightarrow S^{d(R)} K(Z_p)$ la R -esimproyecciones canónicas., y definamos morfismos de grado cero, $\hat{\varphi}_{rs} : W_s \longrightarrow W_r$ para $r > s$. Primero para $s = 0$, $\hat{\varphi}_{r0} : W_0 = K(Z_p) \longrightarrow W_r$ está dado por $\hat{f}_R \cdot \hat{\varphi}_{r0} = c(\mathcal{P}^R)$, para cada sucesión R con $b(R) = r$; y para $s \geq 1$, pondremos :

$$\hat{f}_R \cdot \hat{\varphi}_{rs} = \sum c(\mathcal{P}^U) \cdot \hat{f}_{R-U}$$

para cada R con $b(R) = r$, y donde la suma se extiende a todas las sucesiones U , tales que $R-U$ está definida y la longitud $b(R-U) = s$.

Con estas definiciones y notaciones pasamos a continuación a enunciar una versión de algunos de los resultados de Brown-Peterson ([4]), los cuales van a ser usados más adelante, y que son los siguientes:

4.8 Existen espectros conexos X_s , $s \geq 0$, y morfismos :

$$h_{rs} : X_s \longrightarrow V_r \quad \text{y} \quad t_s : X_s \longrightarrow K(Z_p) ,$$

donde $r > s$, $|h_{rs}| = -1$ y $|t_s| = 0$.

Los espectros X_s están relacionados mediante triángulos exactos :

$$V_s \xrightarrow{k_s} X_s \xrightarrow{\pi_s} X_{s-1} \xrightarrow{g_s} V_s$$

donde $|k_s| = |\pi_s| = 0$, $|g_s| = -1$ y $g_s = h_{s,s-1}$.
Además $X_0 = K(Z)$, $t_0 : X_0 \rightarrow K(Z_p)$ es la clase canónica de cohomología, y $t_s = t_{s-1} \cdot \pi_s$.

Sea $0 \rightarrow Z \xrightarrow{p} Z \rightarrow Z_p \rightarrow 0$ la sucesión exacta correspondiente a la multiplicación por p , y consideremos el triángulo exacto asociado:

$$K(Z) \xrightarrow{"p"} K(Z) \xrightarrow{\alpha=t_0} K(Z_p) \xrightarrow{\partial} K(Z),$$

donde el morfismo ∂ , de grado -1 , es el morfismo de Bockstein correspondiente. Entonces para cada entero m , hay un triángulo exacto :

$$V_m \xrightarrow{"p"} V_m \xrightarrow{\alpha_m} W_m \xrightarrow{\partial_m} V_m$$

donde $"p" = p \cdot 1_{V_m}$, y α_m y ∂_m son los morfismos canónicos inducidos respectivamente por α y ∂ .

Con estas notaciones así definidas, procedemos a señalar otro de los resultados extraídos de Brown-Peterson, y que está relacionado con el resultado anterior.(4.8).

4.9 Existen morfismos de triángulos exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 V_s & \xrightarrow{k_s} & X_s & \xrightarrow{\pi_s} & X_{s-1} & \xrightarrow{g_s} & V_s \\
 \hat{\varphi}_{ms} \cdot \alpha_s \downarrow & & \downarrow h_{ms} & & \downarrow h_{m,s-1} & & \downarrow \hat{\varphi}_{ms} \cdot \alpha_s \\
 W_m & \xrightarrow{\partial_m} & V_m & \xrightarrow{p} & V_m & \xrightarrow{\alpha_m} & W_m
 \end{array}$$

en el cual g_s es un morfismo de torsión, y más precisamente, para cada $s \geq 1$, $p^s \cdot g_s = 0$.

El espectro que se obtiene como "límite inverso" de los espectros X_s , recibe el nombre de "espectro de Brown-Peterson" correspondiente al primo p , y será denotado por $BP(p) = \varprojlim_s X_s$, o simplemente por BP , cuando no haya lugar a confusión respecto al primo p .

Para terminar con esta sección construiremos a continuación dos sucesiones de espectros y morfismos, las cuales juegan un papel fundamental en la obtención de los resultados finales del presente trabajo.

A tal efecto definimos morfismos $\hat{\varphi}_s : W_s \rightarrow W_{s+1}$ para cada $s \geq 0$, por la fórmula $\hat{\varphi}_s = \hat{\varphi}_{s,s+1}$, y en donde $\hat{\varphi}_{s,s+1}$ es como en 4.7. Así mismo pondremos $\varphi_s : V_s \rightarrow V_{s+1}$, el morfismo dado por la siguiente composición:

$$V_s \xrightarrow{\alpha_s} W_s \xrightarrow{\hat{\varphi}_s} W_{s+1} \xrightarrow{\partial_{s+1}} V_{s+1}$$

De acuerdo con estas definiciones tenemos $|\hat{\psi}_s| = 0$
 $|\psi_s| = -1$ para cada $s \geq 0$.

Por último, sea $\psi_0 : W_0 = K(\mathbb{Z}_p) \rightarrow W_1$ el morfismo
 dado por $f_{\Delta_1} \cdot \psi_0 = Q_1$ para cada sucesión Δ_1 ; y cuando
 $s > 0$, $\psi_s : W_s \rightarrow W_{s+1}$ está definido mediante la siguiente
 relación:

$$(4.9a) \quad f_R \cdot \psi_s = \sum_{1 \leq i \leq b(R)} Q_i \cdot f_{R - \Delta_i},$$

para cada sucesión R con $b(R) = s+1$. Con esto así tenemos
 $|\psi_s| = -1$ para cada $s \geq 0$.

Como consecuencia de las definiciones anteriores, obtenemos
 las siguientes sucesiones de morfismos de grado -1 :

$$(4.10) \quad \begin{array}{ccccccc} V_0 & \xrightarrow{\psi_0} & V_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \dots & \xrightarrow{\psi_s} & V_{s+1} \xrightarrow{\dots} \\ W_0 & \xrightarrow{\psi_0} & W_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \dots & \xrightarrow{\psi_s} & W_{s+1} \xrightarrow{\dots} \end{array}$$

Para finalizar consideremos el siguiente diagrama:

$$(4.11) \quad \begin{array}{ccc} V_s & \xrightarrow{\psi_s} & V_{s+1} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ W_s & \xrightarrow{\psi_s} & W_{s+1} \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ V_s & \xrightarrow{\psi_s} & V_{s+1} \end{array}$$

donde hemos denotado con α y ∂ simplemente los morfismos α_R y ∂_R definidos en pg. 86 .

Para cada sucesión R con $b(R) = s+1$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \hat{f}_R(\alpha \cdot \psi_s) &= \alpha(f_R \cdot \psi_s) = \alpha\left(\partial \sum_{i \in \sigma(R)} c(\mathcal{P}^{\Delta_i}) \cdot \alpha \cdot f_{R-\Delta_i}\right) \\ &= \sum Q_0 \cdot c(\mathcal{P}^{\Delta_i}) \cdot \alpha \cdot f_{R-\Delta_i} \end{aligned}$$

Ahora usando la relación 4.6 se deduce $Q_0 c(\mathcal{P}^{\Delta_i}) \alpha = Q_1 \alpha$ y por consiguiente de las igualdades anteriores obtenemos:

$$\hat{f}_R(\alpha \cdot \psi_s) = \sum Q_1 \alpha f_{R-\Delta_i} = \left(\sum Q_1 \hat{f}_{R-\Delta_i}\right) \alpha = (\hat{f}_R \cdot \psi_s) \alpha = \hat{f}_R(\psi_s \cdot \alpha)$$

Como esta igualdad es válida para cada sucesión R , entonces $\alpha \cdot \psi_s = \psi_s \cdot \alpha$, es decir, el primer cuadrado del diagrama anterior (4.11) es conmutativo.

Para el segundo cuadrado tenemos:

$$f_R(\partial \cdot \psi_s) = \partial(\hat{f}_R \cdot \psi_s) = \partial \cdot \sum Q_1 \cdot \hat{f}_{R-\Delta_i}$$

Por otra parte, usando de nuevo la relación 4:6 :

$$f_R(\psi_s \cdot \partial) = \partial \cdot \sum c(\mathcal{P}^{\Delta_i}) \cdot Q_0 \cdot \hat{f}_{R-\Delta_i} = - \partial \cdot \sum Q_1 \cdot \hat{f}_{R-\Delta_i}$$

Comparando estos dos últimos resultados, resulta entonces que $\partial \cdot \psi_s = - \psi_s \cdot \partial$, es decir, el segundo cuadrado del diagrama es "anticonmutativo".

5. Resultados Finales y Aplicaciones.

En la presente sección expondremos los resultados más importantes del presente trabajo, entre cuyas aplicaciones podemos señalar las que se refieren al cálculo de los grupos de cohomotopía y de cobordismo de los espectros de Eilenberg-MacLane.

5.1 Teorema . Para cada espectro X en $(K(Z))$, la clase estable aditiva generada por $K(Z)$, y cada espectro Y en $[MU]$, la clase estable multiplicativa generada por el U -espectro de Thom MU ; el espectro funcional $F(X, Y)$ es un espectro racional.

Por lo tanto, de acuerdo con 2.10, $F(X, Y)$ es un espectro generalizado de Eilenberg-MacLane; es decir, existe un isomorfismo : $F(X, Y) \approx \bigvee_i S^1 K(G_i)$, donde G_i es el grupo $G_i = \pi_i(F(X, Y)) \approx \{X, Y\}_i$.

Usando la sucesión exacta 2.3 de [14] :

$$(5.1a) \quad 0 \longrightarrow \text{Ext}(G, \pi_{k+1}(T)) \longrightarrow \{\mu G, T\}_k \longrightarrow \text{Hom}(G, \pi_k(T)) \longrightarrow 0$$

y tomando $T = F(X, Y)$ y $G = Q$ el cuerpo de los racionales, resulta $\{\mu Q, T\}_k \approx \pi_k(T) = G_k$. Como $\mu Q \approx K(Q)$, se-

gún 2.10, obtenemos finalmente el isomorfismo :

$$(5.1b) \quad F(X, Y) \simeq F(X \wedge K(Q), Y) \simeq \prod_1 S^{-1} F(K(\pi_1 X \otimes Q), Y) .$$

Aplicando ahora los teoremas 3.6 y 3.11 se deduce que $\mu_H \in [S^0] \subseteq [MU]$ para cada grupo abeliano H ; y por consiguiente podemos usar el isomorfismo anterior, tomando en cuenta que $K(G) \wedge K(Q) \simeq K(G \otimes Q) \simeq \mu(G \otimes Q)$, para obtener $F(K(G), \mu_H) \simeq F(\mu(G \otimes Q), \mu_H)$. Este isomorfismo junto con el teorema 2.14 de [14], nos permiten concluir con la siguiente fórmula:

$$(5.1c) \quad F(K(G), \mu_H) \simeq S^{-1} K(\text{Ext}(G \otimes Q, H)) \vee K(\text{Hom}(G \otimes Q, H)) ,$$

válida para cada par de grupos abelianos G y H . Este isomorfismo corrige la fórmula dada en 2.16 de [14].

Tomando $H = Z$ en (5.1c), tenemos la siguiente "formulación explícita" del espectro dual de cualquier $K(G)$:

$$(5.1d) \quad F(K(G), S^0) \simeq S^{-1} K(\text{Ext}(G \otimes Q, Z)) .$$

Esta relación permite así calcular los grupos de cohomotopía de $K(G)$, a saber :

$$\pi^i(K(G)) = \{K(G), S^0\}^i = 0 \quad \text{si } i \neq 1 ;$$

$$y \quad \pi^1(K(G)) \simeq \text{Ext}(G \otimes Q, Z) .$$

Como consecuencia de estos resultados se deduce que un grupo G es un grupo de torsión si y sólo si $F(K(G), S^0) \approx 0$.

Para calcular los grupos de cobordismo complejo de un $K(G)$ cualquiera, es decir los grupos $MU^i(K(G)) = \{K(G), MU\}^i$ recordemos que $\pi_{2n+1}(MU) = 0$ y $\pi_{2n}(MU)$ es un grupo libre finitamente generado ([10] y [13]). Entonces la sucesión exacta (5.1a) y la fórmula (5.1b) dan que :

$$(5.1e) \quad F(K(G), MU) \approx \bigvee_n S^{2n-1} K(\text{Ext}(G \otimes Q, \pi_{2n}(MU))) \quad .$$

Por consiguiente los grupos de cobordismo complejo de $K(G)$ estan dados por:

$$MU^i(K(G)) = 0 \quad \text{si } i \text{ es par o si } i=2n+1 \text{ y } n > 0$$

$$\text{y } MU^{2n+1}(K(G)) \approx \text{Ext}(G \otimes Q, \pi_{-2n}(MU)) \quad \text{si } n \leq 0 \quad .$$

Finalmente si $X \in (K(Z))$ e $Y \in [MU]$, entonces (5.1a) (5.1b) y la proposición 3.6a de Cartán-Eilenberg ([6], pg 116), implican que $F(X, Y) \approx \bigvee_k S^k K(G_k)$, donde el grupo G_k está dado por la fórmula:

$$G_k = \text{Hom}(Q, J_k) \oplus \text{Ext}(Q, J_{k+1}) \oplus \text{Hom}(Q, R_{k+1})$$

$$\text{donde } J_m = \prod_i \text{Hom}(\pi_i(X), \pi_{m+i}(Y)) \quad \text{y} \quad R_m = \prod_i \text{Ext}(\pi_i(X), \pi_{m+i}(Y))$$

5.2 Teorema. Para cada entero primo p , el espectro funcional $F(K(Z_p), BP(p)) \approx 0$, donde $BP(p)$ denota el espectro De Brown-Peterson correspondiente al primo p .

5.3 Teorema. Si T es un espectro conexo tal que su cohomología $H^*(T; Z)$ no posee p -torsión y $H^*(T; Z_p)$ es un módulo libre sobre \hat{A} , con un número finito de generadores en cada dimensión, entonces existe un morfismo de grado cero $f : T \rightarrow \prod_n S^{n_i} BP(p)$, tal que $H^*(f; Z_p)$ es un isomorfismo. Los enteros n_i forman una sucesión creciente acotada inferiormente, tal que $n_j = n$ para un número finito de j 's ; y donde $\hat{A} = A/(Q_0)$, siendo (Q_0) el ideal bilátero generado por Q_0 .

Este teorema es un resultado parcial del teorema 1.3 de Brown y Peterson ([4]).

5.4 Corolario. Si T es un espectro que verifica las hipótesis del teorema anterior, entonces $F(K(Z_p), T) \approx 0$, o equivalentemente $\{K(Z_p), T\}^* = 0$.

Demostración del Corolario : Si $T \xrightarrow{f} \prod_n S^{n_i} BP \rightarrow R \rightarrow T$ es el triángulo exacto correspondiente al morfismo f dado por el teorema 5.3, entonces $H^*(R; Z_p) = 0$, y por lo tanto si $p_R : R \rightarrow R$ es p -veces la identidad de R , resulta que $H^*(p_R) : H^*(R; Z) \rightarrow H^*(R; Z)$ es un isomorfismo. Tomando en cuenta ahora que R es conexo, el teorema de Whitehead im-

plica que p_R es un isomorfismo. Como por otra parte $p \cdot 1_{K(Z_p)} = 0$, entonces $\{K(Z_p), R\}^* = 0$. Usando ahora el teorema 5.2 y el triángulo exacto anterior, resulta finalmente que $\{K(Z_p), T\}^* = 0$, lo que demuestra el corolario

Demostración del Teorema 5.1 : De acuerdo con los resultados de J. Milnor [10] (ver también [16]), los espectros de Thom MU y MSO correspondientes al grupo unitario y al grupo ortogonal especial respectivamente, verifican las hipótesis del corolario anterior. El primero de ellos para cada primo p , y el segundo para cada primo impar. Por consiguiente el corolario da que $\{K(Z_p), MU\}^* = 0$ para cualquier primo p , y además $\{K(Z_q), MSO\}^* = 0$ si q es impar. En consecuencia los grupos de homotopía del espectro funcional $F(K(Z), MU)$ son grupos divisibles y sin torsión, es decir, son grupos racionales. Usando ahora la proposición 3.4 se deduce finalmente que $F(X, Y)$ es un espectro racional para cada $X \in (K(Z))$ y cada $Y \in [MU]$; y con lo cual damos por terminada la demostración del teorema.

Nos resta sólo por demostrar el teorema 5.2, y la demostración del mismo será hecha en cuatro partes, a saber:

(1) Para cada primo p , el homomorfismo canónico:

$$\{K(Z_p), BP(p)\}^* \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{S}} \{K(Z_p), X_{\mathfrak{S}}\}^*$$

es un isomorfismo. Recordemos que por definición el espectro $\text{HP}(p) = \varprojlim_s X_s$, donde los X_s son como en 4.9.

- (2) Si $\varphi_s : V_s \longrightarrow V_{s+1}$ y $\psi_s : W_s \longrightarrow W_{s+1}$ con $|\varphi_s| = |\psi_s| = -1$, son los morfismos dados en 4.10; entonces la siguiente sucesión de grupos y homomorfismos es una sucesión exacta en G_{si} para cada $s \geq 0$ y cada entero i :

$$G_{s-1,i} \xrightarrow{\lambda_{s-1}} G_{si} \xrightarrow{\lambda_s} G_{s+1,i}$$

en donde $G_{si} = \{K(\mathbb{Z}_p), W_s\}^{i+s}$, $G_{-1,i} = 0$ para cada i , y λ_s es el homomorfismo inducido por ψ_s . De acuerdo con (4.9a) el efecto del homomorfismo λ_s es como sigue : Cada elemento x en G_{si} está dado por una colección (x_R) de elementos de \mathcal{A} , uno por cada sucesión R con $b(R) = s$. Entonces, si $\lambda_s(x) = y = (y_T)$, resulta $y_T = \sum_{1 \leq i \leq T} Q_i x_{T-A_i}$ para cada sucesión T con $b(T) = s+1$.

- (3) Análogamente si $H_{si} = \{K(\mathbb{Z}_p), V_s\}^{i+s}$ y ρ_s es el homomorfismo inducido por φ_s , entonces la sucesión de grupos y homomorfismos

$$H_{s-1,i} \xrightarrow{\rho_{s-1}} H_{si} \xrightarrow{\rho_s} H_{s+1,i}$$

es exacta en $H_{s,i}$ para cada $s \geq 0$ y cada entero i , donde $H_{-1,i} = 0$ para cada i .

$$(4) \varprojlim_s \{K(Z_p), X_s\}^k = 0 \text{ para cada entero } k.$$

Nosotros demostraremos en primer lugar que (2) implica (3) y que (3) implica (4), y así (1) y (4) da-rán que $\{K(Z_p), BP\}^* = 0$.

Demostración de (2) \Rightarrow (3) : Sea $V_s \xrightarrow{p} V_s \xrightarrow{\alpha} W_s \xrightarrow{\partial} V_s$ el triángulo exacto dado por " p " = $p \cdot 1_{V_s}$. (ver 4.8 y 4.9) Entonces para cada $s \geq 0$ y cada j , hay una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H_{s,j} \xrightarrow{\alpha} G_{s,j} \xrightarrow{\partial} H_{s,j+1} \longrightarrow 0,$$

deducida del triángulo anterior. A partir de estas sucesiones se obtiene el siguiente diagrama "conmutativo":

$$(D) \begin{array}{ccccc} G_{s,i-1} & \xrightarrow{\lambda_s} & G_{s+1,i-1} & \xrightarrow{\lambda_{s+1}} & G_{s+2,i-1} \\ \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\ H_{s,i} & \xrightarrow{\rho_s} & H_{s+1,i} & \xrightarrow{\rho_{s+1}} & H_{s+2,i} \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ G_{s,i} & \xrightarrow{\lambda_s} & G_{s+1,i} & \xrightarrow{\lambda_{s+1}} & G_{s+2,i} \end{array},$$

donde "conmutativo" significa que los cuadrados superiores son anticonmutativos, y los inferiores son conmutativos -

- ver 4.11 - .

Para mostrar exactitud en $H_{s+1,1}$, usemos la conmutatividad de 4.9 y la definición de las φ_s en 4.10 para deducir que $\varphi_{s+1} \cdot \varphi_s = 0$, y de aquí $\rho_{s+1} \cdot \rho_s = 0$, es decir $\text{imag. } \rho_s \subseteq \ker. \rho_{s+1}$.

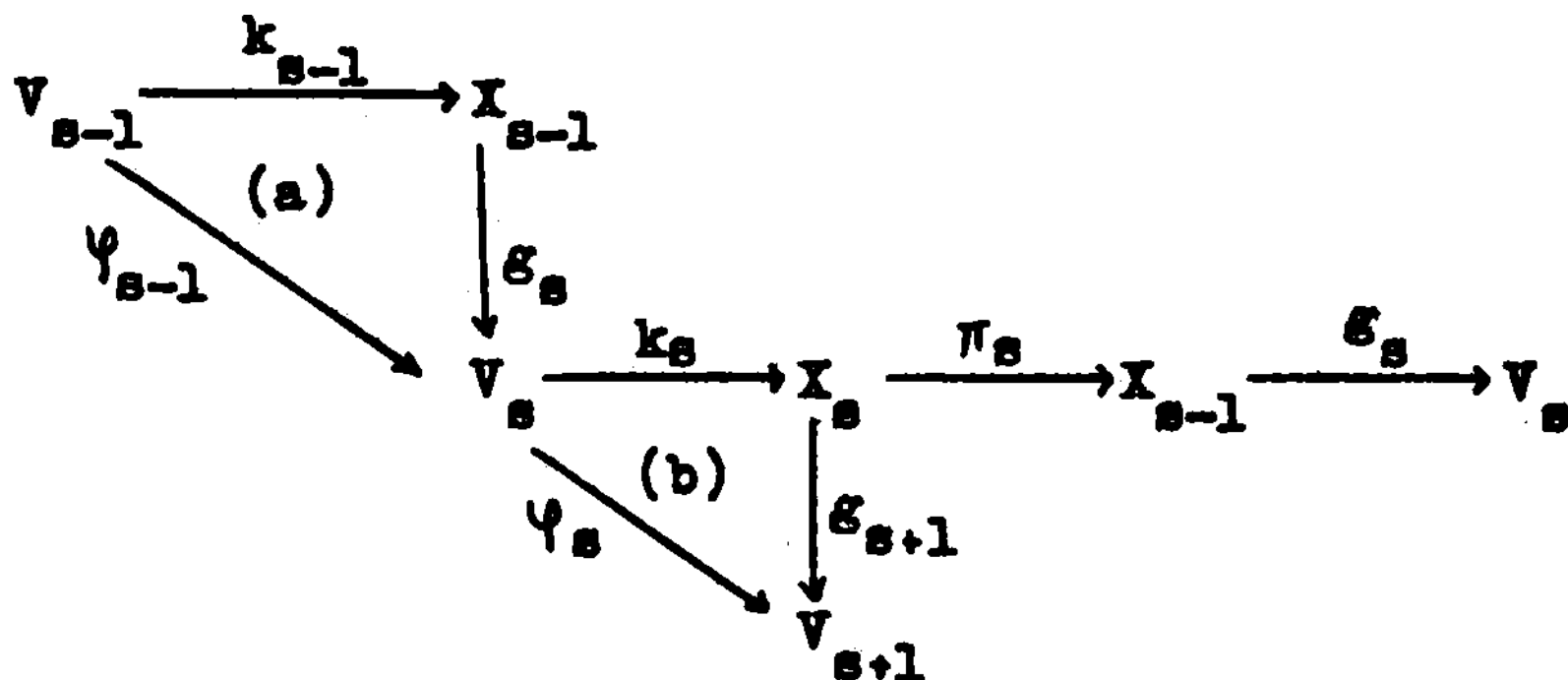
Sea ahora $z \in \ker. \rho_{s+1}$. Entonces como ∂ es un epimorfismo existe un $v \in G_{s+1,1-1}$ tal que $\partial(v) = z$, y así $\alpha(z) = Q_0 \cdot v$. Aplicando ahora 4.3, podemos suponer que $v = (v_R)$ es tal que $e_0(v_R) = 0$ para cada sucesión R . La "conmutatividad" del diagrama anterior (D) implica ahora que $\lambda_{s+1}(Q_0 \cdot v) = -Q_0 \cdot \lambda_{s+1}(v) = 0$; y por consiguiente, de acuerdo con el efecto del homomorfismo λ_{s+1} dado en (3), tenemos que para cada sucesión T con longitud $b(T) = s+2$, $Q_0(\sum Q_1 \cdot v_{T-\Delta_i}) = 0$. Ahora bien la definición de e_0 en 4.3 y la hipótesis $e_0(v_R) = 0$ para cada R , implican entonces que $\sum Q_1 \cdot v_{T-\Delta_i} = 0$ para cada T ; es decir $\lambda_{s+1}(v) = 0$.

Asumiendo (2), entonces existe un elemento $u \in G_{s,1-1}$ tal que $\lambda_s(u) = v$, y así $\rho_s \cdot \partial(u) = -\partial \cdot \lambda_s(u) = -z$, lo que demuestra que $z \in \text{imag. } \rho_s$; y en consecuencia (2) \Rightarrow (3).

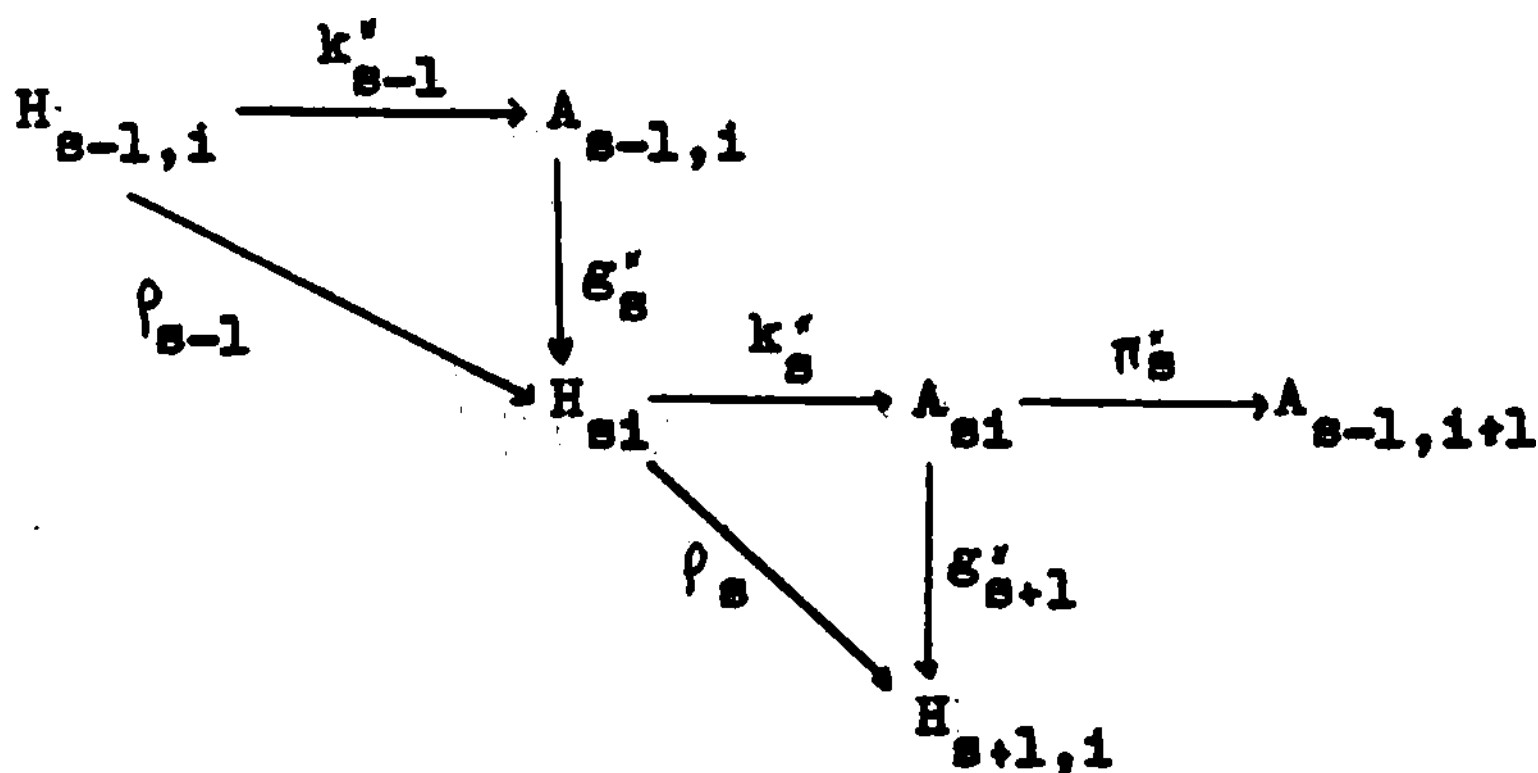
Demostración de (3) \Rightarrow (4): De acuerdo con 4.9 para cada $n \geq 1$, hay un morfismo de triángulos exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 V_n & \xrightarrow{k_n} & X_n & \xrightarrow{\pi_n} & X_{n-1} & \xrightarrow{\xi_n} & V_n \\
 \downarrow \hat{\varphi}_n \cdot \alpha & & \downarrow \xi_{n+1} & & \downarrow & & \downarrow \hat{\varphi}_n \cdot \alpha \\
 W_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & V_{n+1} & \xrightarrow{"p"} & V_{n+1} & \xrightarrow{\alpha} & W_{n+1}
 \end{array}$$

Así que $\varepsilon_{n+1} \cdot k_n = \partial \cdot \hat{\varphi}_n \cdot \alpha = \varphi_n$ según la definición del morfismo φ_n ; y en consecuencia en el siguiente diagrama:



los triángulos (a) y (b) son conmutativos y $k_s \cdot \varepsilon_s = 0$. Por consiguiente, poniendo $A_{si} = \{K(\mathbb{Z}_p), X_s\}^{i+s}$, el diagrama anterior da un diagrama de grupos y homomorfismos:



donde los triángulos son conmutativos, y donde ρ_s es el homomorfismo inducido por φ_s .

Asumiendo ahora (3), es decir, que la sucesión dada

por los homomorfismos ρ_{s-1} y ρ_s es exacta, se deduce que $(\ker.\pi_s) \cap (\ker.g_{s+1}^*) = 0$; relación válida para cada $s \geq 0$, si convenimos en poner $A_{-1,i} = 0$ para todo i . De aquí se sigue que si $u = (u_s) \in \varprojlim_s \{K(Z_p), X_s\}^*$ en donde $u_s \in \{K(Z_p), X_s\}^*$ y $\pi_s(u_s) = u_{s-1}$, entonces $u_i = 0$ para cada i . Con esto queda probado que $(3) \Rightarrow (4)$.

Para terminar con la demostración del teorema 4.2 nos queda por demostrar las partes (1) y (2).

Demostración de (1): Debemos probar que el homomorfismo canónico:

$$h : \{K(Z_p), BP(p)\}^* \longrightarrow \varprojlim_s \{K(Z_p), X_s\}^*$$

es un isomorfismo.

A tal efecto consideremos de nuevo los triángulos exactos dados por 4.8, y los morfismos canónicos correspondientes al límite inverso: $\theta_s : BP = \varprojlim_n X_n \longrightarrow X_s$, para tener un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 V_s & \xrightarrow{k_s} & X_s & \xrightarrow{\pi_s} & X_{s-1} & \xrightarrow{g_s} & V_s \\
 & & \theta_s \swarrow & & \searrow \theta_{s-1} & & \\
 & & & BP & & &
 \end{array}$$

donde por definición $V_s = \bigvee S^{d(R)} K(Z)$, y el coproducto se toma sobre todas las sucesiones R con $b(R) = s$. Para cualquiera de una de tales sucesiones, la definición de la

dimensión $d(R)$ de R , implica que $2s(p-1) \leq d(R)$, y en consecuencia $\pi_i(V_s) = 0$ si $i < 2s(p-1)$. Aplicando el funtor de homotopía al diagrama anterior, se deduce que el homomorfismo inducido $\pi_i(\theta_s) : \pi_i(BP) \rightarrow \pi_i(X_s)$ es un isomorfismo para $i < 2s(p-1)$. Como $X_0 = K(Z)$, entonces procediendo por inducción, se demuestra que para cada s , $\pi_*(X_s)$ es finitamente generado en cada dimensión, y por consiguiente, de acuerdo con el isomorfismo anterior, lo mismo vale para $\pi_*(BP)$.

Sean ahora $Y_0, Y_1, \dots, Y_n \dots$ las fibras de Moore de $K(Z_p)$. Entonces como $H_i(Y_n) = 0$ si $i > n$, los isomorfismos anteriores $\pi_i(\theta_s)$ y el lema 1.17 implican que el morfismo $\theta_s : BP \rightarrow X_s$ induce isomorfismos de grupos abelianos, $\theta_s(Y_n) : \{Y_n, BP\}^t \rightarrow \{Y_n, X_s\}^t$ si $t > n - 2s(p-1) + 2$; y por consiguiente el homomorfismo canónico:

$$h_n : \{Y_n, BP\}^* \rightarrow \varprojlim_s \{Y_n, X_s\}^*$$

es un isomorfismo para cada $n \geq 0$.

Usando ahora el morfismo $w_n : Y_n \rightarrow K(Z_p)$ correspondiente a la n -fibra de Moore de $K(Z_p)$, se obtiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{K(Z_p), BP\}^* & \xrightarrow{h} & \varprojlim_s \{K(Z_p), X_s\}^* \\ \downarrow a_n & & \downarrow b_n \\ \{Y_n, BP\}^* & \xrightarrow{h_n} & \varprojlim_s \{Y_n, X_s\}^* \end{array}$$

donde a_n y b_n son inducidas por w_n ; y h_n es un isomorfismo. Por lo tanto $\ker.h \subseteq \ker.a_n$ para cada n . Pero por otra parte, si $\alpha: \{K(Z_p), BP\}^* \longrightarrow \varprojlim_n \{Y_n, BP\}^*$ es el homomorfismo canónico dado a partir de los a_n , entonces como $\pi_*(BP)$ es finitamente generado y $H_1(K(Z_p))$ es un grupo finito para cada i (Cartán [5]), (1.19b) implica que α es un isomorfismo. En consecuencia $\ker.\alpha = \bigcap_n \ker.a_n = 0$, lo que da en particular que $\ker.h = 0$. Como además h es un epimorfismo (ver 1.15), resulta entonces que h es un isomorfismo; con lo cual queda demostrado (1).

Demostración de (2) : Debemos probar que la sucesión

$$\{K(Z_p), W_{s-1}\}^* \xrightarrow{\lambda_{s-1}} \{K(Z_p), W_s\}^* \xrightarrow{\lambda_s} \{K(Z_p), W_{s+1}\}^*$$

es una sucesión exacta para cada $s \geq 0$, donde para el caso $s = 0$, tomamos $W_{-1} = 0$.

Para cada $n > 0$, sea $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$, y para cada $s > 0$, sea W_s^n el subespectro de W_s determinado por las sucesiones R con soporte $\sigma(R) \subseteq \bar{n}$. Explícitamente, W_s^n está dado por la siguiente identidad:

$$W_s^n = \bigvee_{\sigma(R) \subseteq \bar{n}} S^{d(R)} K(Z_p)$$

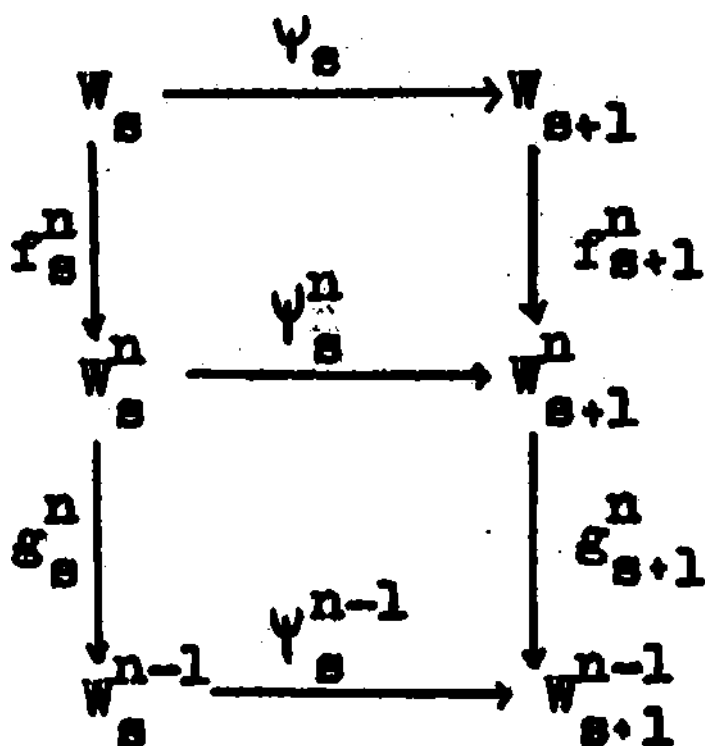
donde $b(R) = s$ para cada R . Con esta definición resulta que la inclusión canónica $j_s^n: W_s^n \longrightarrow W_s$ es un monomorfis-

no en S_h . Más aún para cada $n > 1$, existe una inclusión $t_s^{n-1} : W_s^{n-1} \rightarrow W_s^n$, que es también un monomorfismo en S_h , y tal que verifica la relación $j_s^n \cdot t_s^{n-1} = j_s^{n-1}$. En consecuencia existen epimorfismos canónicos :

$$f_s^n : W_s \rightarrow W_s^n \quad \text{y} \quad g_s^{n+1} : W_s^{n+1} \rightarrow W_s^n$$

tales que $g_s^{n+1} \cdot f_s^{n+1} = f_s^n$ para cada $n \geq 1$, y cada $s \geq 0$, si además ponemos $W_0^n = W_0$, $f_0^n = g_0^n = 1_{W_0}$ para cada n . Los epimorfismos f_s^n inducen así mismo un isomorfismo $W_s \approx \varprojlim_n W_s^n$ para cada $s \geq 0$.

Por último los morfismos $\psi_s : W_s \rightarrow W_{s+1}$ inducen canónicamente morfismos $\psi_s^n : W_s^n \rightarrow W_{s+1}^n$, de manera que el siguiente diagrama es conmutativo:



Fijemos ahora un entero k , y sea $G_s = \{K(Z_p), W_s\}^{k+s}$, $G_s^n = \{K(Z_p), W_s^n\}^{k+s}$; y denotemos también con :

$$g_s^n : G_s^n \longrightarrow G_s^{n-1} \quad \text{y} \quad r_s^n : G_s \longrightarrow G_s^n$$

los morfismos inducidos por g_s^n y r_s^n . Entonces existe un isomorfismo $G_s \approx \varprojlim_n G_s^n$ para cada $s \geq 0$; y un diagrama conmutativo de sucesiones de grupos y homomorfismos, deducido del diagrama anterior,

$$\begin{array}{ccccccc}
 (L) : & 0 \longrightarrow & G_0 & \xrightarrow{\lambda_0} & G_1 & \longrightarrow \dots \longrightarrow & G_s & \xrightarrow{\lambda_s} & G_{s+1} & \longrightarrow \dots \\
 & & \parallel & & \downarrow r_1^n & & \downarrow r_s^n & & \downarrow r_{s+1}^n & \\
 (L_n) : & 0 \longrightarrow & G_0 & \xrightarrow{\lambda_0^n} & G_1^n & \longrightarrow \dots \longrightarrow & G_s^n & \xrightarrow{\lambda_s^n} & G_{s+1}^n & \longrightarrow \dots \\
 & & \parallel & & \downarrow g_1^n & & \downarrow g_s^n & & \downarrow g_{s+1}^n & \\
 (L_{n-1}) : & 0 \longrightarrow & G_0 & \xrightarrow{\lambda_0^{n-1}} & G_1^{n-1} & \longrightarrow \dots \longrightarrow & G_s^{n-1} & \xrightarrow{\lambda_s^{n-1}} & G_{s+1}^{n-1} & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Para probar que la sucesión (L) es una sucesión exacta, recordemos en primer lugar que si $x = (x_R) \in G_s$, y $\lambda_s(x) = z = (z_T) \in G_{s+1}$, entonces $z_T = \sum Q_i \cdot x_{T-\Delta_i}$. Usando las relaciones $Q_i \cdot Q_i = 0$ y $Q_i \cdot Q_j = -Q_j \cdot Q_i$ si $i \neq j$, dadas por 4.1, se deduce que $\lambda_{s+1} \cdot \lambda_s = 0$ y $\lambda_{s+1}^n \cdot \lambda_s^n = 0$.

Falta ver que para cada $s \geq 0$, $\ker \lambda_s \subseteq \text{imag} \lambda_{s-1}$ en donde $\lambda_{-1} = 0$. A tal efecto usemos el lema 4.2 para deducir que existe un entero n_0 , que depende sólo del entero fijo k , tal que λ_0^n es un monomorfismo si $n \geq n_0$, y en

consecuencia λ_0 también es un monomorfismo. Por consiguiente, si probamos que $\ker. \lambda_s^n \subseteq \text{imag. } \lambda_{s-1}^n$ para cada $s \geq 1$ y cada $n \geq n_0$, entonces la sucesión (L) será una sucesión exacta, puesto que para el caso que nos compete, el funtor \varprojlim preserva exactitud.

Nosotros demostraremos más aún, que la relación dada $\ker. \lambda_s^n \subseteq \text{imag. } \lambda_{s-1}^n$ vale para cada $s \geq 1$ y cada $n \geq 1$, y la demostración se hará por inducción en n .

Para $n = 1$, el homomorfismo λ_s^1 es simplemente multiplicación por Q_1 , y por lo tanto si $x \in G_s^1$ y verifica $\lambda_s^1(x) = Q_1 \cdot x = 0$, entonces del lema 4.3 se obtiene un elemento $z \in G_{s-1}^1$ tal que $Q_1 \cdot z = x$, y así $\lambda_{s-1}^1(z) = x$, es decir $\ker. \lambda_s^1 \subseteq \text{imag. } \lambda_{s-1}^1$ para todo $s \geq 1$.

Supongamos ahora que $\ker. \lambda_s^{n-1} \subseteq \text{imag. } \lambda_{s-1}^{n-1}$ para cada $s \geq 1$; y sea $x \in \ker. \lambda_s^n$. Como los homomorfismos g_x^i son epimorfismos, podemos suponer además que x verifica la condición $g_s^n(x) = 0$. En tal caso el elemento $x \in G_s^n$ está dado por una colección (x_R) de elementos de \mathcal{A} , tales que :

- (a) Para cada sucesión R , $b(R) = s$ y $\sigma(R) \leq \bar{n}$.
- (b) $x_R = 0$ para cada sucesión $R = (r_i)$ con $r_n = 0$.
Esta es la condición $g_s^n(x) = 0$.
- (c) Para cada sucesión T con $b(T) = s+1$ y $\sigma(T) \leq \bar{n}$,

$$\sum_{i \in T} Q_1 \cdot x_{T-A_i} = 0$$

es decir, $\lambda_{\mathfrak{s}}^n(x) = 0$.

Si de acuerdo con el lema 4.4, para cada sucesión R , elegimos un par de elementos u_R y z_R de \mathcal{A} , tales que $x_R = Q_n \cdot u_R + z_R$ y con $e_n(u_R) = e_n(z_R) = 0$; entonces para cada sucesión $T = (t_i)$ con $b(T) = s+1$, $\epsilon(T) \subseteq \bar{n}$ y $t_n \neq 0$, la condición (c) da las siguientes relaciones:

$$(d) \quad \sum_{i \neq n} Q_i \cdot z_{T-\Delta_i} = 0 \quad y \quad z_{T-\Delta_n} = \sum_{i \neq n} Q_i \cdot u_{T-\Delta_i}$$

Así que en particular si $t_n = 1$, entonces (b) implica que $z_{T-\Delta_n} = 0$, y por consiguiente:

$$(e) \quad \sum Q_i \cdot z_{T-\Delta_i} = 0 \quad y \quad \sum Q_i \cdot u_{T-\Delta_i} = 0.$$

Por último poniendo $y_S = u_{S+\Delta_n}$ para cada sucesión S con $b(S) = s-1$ y $\epsilon(S) \subseteq \bar{n}$, queda definido un elemento $y = (y_S) \in G_{s-1}^n$. Las relaciones (d) y (e) permiten mostrar ahora que $\lambda_{s-1}^n(y) = x$. Con esto termina la inducción, y en consecuencia la sucesión (L) es una sucesión exacta. Así el teorema 5.2 ha sido finalmente demostrado.

Para terminar con la presente exposición, demostraremos a continuación un teorema, una de cuyas aplicaciones permite dar una nueva demostración de una conjetura de J. Serre (ver [15], pg. 219). (cfr. J. Adams: "Lectures on generalised cohomology". Lect. Not. in Math. Springer-Verlag. Vol. 99, pg.116).

5.5 Teorema. Si J es un espectro tal que $H^*(J; Z_p) \neq 0$ y $\text{Tor}(Z_p, H^i(J; Z)) = 0$ para $i > \text{algún } N$ fijo; entonces existen infinitos enteros j , tales que la multiplicación por $p : \pi_j(J) \longrightarrow \pi_j(J)$ no es un isomorfismo.

Demostración : Supongamos que la conclusión del teorema es falsa. En tal caso la sucesión exacta dada por proposición 2.10 de [14] :

$$0 \longrightarrow \pi_1(J) \otimes Z_p \longrightarrow \pi_1(J \wedge \mu Z_p) \longrightarrow \text{Tor}(\pi_{1-1}(J), Z_p) \longrightarrow 0$$

implica que el espectro $J \wedge \mu Z_p$ es coconexo, y por consiguiente de acuerdo con 2.3b, $J \wedge \mu Z_p \in (K(Z))$, la clase estable aditiva generada por $K(Z)$. Así que podemos aplicar el teorema 5.1 usando la fórmula (5.1b) para deducir que $F(J \wedge \mu Z_p, MU) \approx F(J \wedge \mu Z_p \wedge K(Q), MU) \approx 0$, puesto que según 2.10, $\mu Z_p \wedge K(Q) \approx 0$.

Usando ahora el teorema 5.3 con $T = MU$ se deduce que también $F(J \wedge \mu Z_p, BP(p)) \approx 0$. Tomando en cuenta ahora que $BP = \varprojlim X_s$, y que en triángulo exacto :

$$V_s \xrightarrow{k_s} X_s \xrightarrow{\pi_s} X_{s-1} \xrightarrow{g_s} V_s$$

$p^s \cdot g_s = 0$ (ver 4.9), se deduce que el homomorfismo inducido $\pi_s^*(J) : \{J, X_s\}^i \longrightarrow \{J, X_{s-1}\}^i$ es un epimorfismo para cada $i > N$ y todo $s \geq 1$, puesto que por hipótesis los grupos $\text{Tor}(Z_p, H^i(XJ; Z)) = 0$ si $i > N$ y $V_s = \bigvee S^{\hat{d}(R)} K(Z)$,

en donde $d(R) \geq 2s(p-1) > 0$ para cada R . Por consiguiente si $\theta_0 : BP \rightarrow X_0 = K(Z)$ es la proyección sobre X_0 , entonces también $\theta_0(J) : \{J, BP\}^i \rightarrow H^i(J; Z)$ es un epimorfismo si $i > N$. Como por otra parte $\{J \wedge \mu Z_p, BP\}^* = 0$, entonces en el diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} \{J, BP\}^i & \xrightarrow{\theta_0(J)} & H^i(J; Z) \rightarrow 0 \\ \downarrow "p_J" & & \downarrow "p" \\ \{J, BP\}^i & \xrightarrow{\theta_0(J)} & H^i(J; Z) \rightarrow 0 \end{array}$$

" p_J " es un isomorfismo, y por lo tanto " p " es epimorfismo para $i > N$. Como en tales dimensiones $\text{Tor}(Z_p, H^i(J; Z)) = 0$, resulta que $H^i(J; Z_p) = 0$ si $i > N$, lo que implica que $H^i(J \wedge \mu Z_p; Z) = 0$ para cada $i > N+1$.

Por último el resultado $F(J \wedge \mu Z_p, MU) \approx 0$ implica que el dual $F(J \wedge \mu Z_p, S^0) \approx 0$ por que $S^0 \in [MU]$. Aplicando ahora el lema 1.17 con $A = J \wedge \mu Z_p$ y $B = S^0$ se deduce que $H^*(J \wedge \mu Z_p; Z) = 0$, o equivalentemente que $H^*(J; Z_p) = 0$, lo que contradice la hipótesis del teorema. Con esto damos - por terminada la demostración.

Aplicaciones: Sea X un espectro que verifica las hipótesis del teorema anterior, y supongamos además que $H^*(X; Z)$ es finitamente generado en cada dimensión, y que $H^i(X; Z_p) = 0$ si $i >$ algún entero fijo N . Entonces existen infinitos valores de j , tales que $\pi_j(X)$ contiene un subgrupo isomorfo

al grupo Z_p .

En efecto, tomando en cuenta que el núcleo y el conúcleo del homomorfismo de Hurewicz : $\pi_i(X) \longrightarrow H_i(X;Z)$ son grupos de torsión, que $p : H_i(X;Z) \longrightarrow H_i(X;Z)$ es un isomorfismo si $i > N+1$, y que $H^*(X;Z)$ es finitamente generado en cada dimensión; se deduce que existe un entero $m \geq N$ tal que $\pi_i(X)$ es un grupo de torsión para cada $i > m$. Esta última conclusión y el teorema anterior implican que existen infinitos j 's, tales que $\text{Tor}(Z_p, \pi_j(X)) \neq 0$.

Como consecuencia de este resultado, se deduce que para cada espectro finito no trivial X , existe algún entero primo p , tal que $\pi_j(X)$ contiene un subgrupo isomorfo a Z_p , para infinitos valores de j . En particular esto vale para los grupos estables de homotopía de las esferas, y cada entero primo p .

Las conclusiones anteriores dan así una nueva respuesta a una conjetura formulada por J. Serre ([15], pg. 219), y cuya demostración ha sido dada anteriormente por J. M. Cohen y J. F. Adams, usando técnicas algebraicas. (ver J. F. Adams, - obra citada) .

...oooOooo...

BIBLIOGRAFIA

1. Nils A. BAAS : On the stable Adams spectral sequences.
(mimeographed), Publication Series No.6
University of Aarhus. April 1969.
2. : A theorem concerning the convergence of
the Adams spectral sequences. Preprint
Series No.26 . University of Aarhus.
February 1969.
3. J. M. BOARDMAN: Stable homotopy theory. Mimeographed
Notes. University of Warwick. November
1965.
4. E. H. BROWN Jr.
and F. Peterson.: A spectrum whose Z_p -cohomology is the
algebra of reduce p^{th} powers. Topology.
Vol. 5 . Año 1966.
5. Henri CARTAN : Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane .
Proc. Nat. Ac. of Sciences U.S.A. Vol.
40. Año 1954 .
6. Henri CARTAN
and S. Eilenberg: Homological Algebra. Princeton Univer-
sity Press.(1956).
7. P. E. CONNER
and E. E. Floyd: Torsion in SU-bordism. Mem. Amer. Math.
Soc. No. 60 .(1966).

8. P. E. CONNER
and E.E. Floyd: Differentiable periodic maps. Springer
Verlag, Berlin. (1964)
9. J. MILNOR : The Steenrod Algebra and its dual. Ann. of
Math. Vol. 67. No. 1 . January 1958.
10. : On the Cobordism ring Ω and a complex
analogue. Part I .Amer. J. Math. 82(1960).
11. : On axiomatic homology theory. Pacific J.
of Math. 12(1962).
12. G. NÖBELING : Über die Derivierten des inversen und des
direkten Limes einer Modulfamilie. Topo-
logy. Vol.1 . (1962).
13. S.P. NOVIKOV : Homotopy properties of Thom complexes. -
Mat. Sb. 57(1962). (Russian).
14. R. RICABARRA : On stable homotopy, I. Notas mimeografias
das. Univ. Nac. de La Plata. Argentina.
Año 1972.
15. J.P. SERRE : Cohomologie modulo 2 des complexes d'Ei-
lenberg-MacLane. Comment. Math. Helv .
Vol. 27 (1953).
16. R.E. STONG : Notes on Cobordism Theory. Math. Notes
Princeton University Press(1968).
17. R. VOGT : Boardman's stable homotopy theory. Lec-
tures Notes Series No. 21. Aarhus Univer-
sitet. (1970).

INDICE

Introducción

| | | |
|------|---|----|
| 1. | <u>Diagramas y Límites en S_n</u> | 1 |
| 1.1 | | |
| 1.2 | Definiciones. Límites directos. Filtraciones. | 3 |
| 1.5 | La Filtración de Postnikov. | 8 |
| 1.9 | Límites Inversos. | 17 |
| 1.15 | Las Sucesiones Exactas de Milnor. | 26 |
| 1.16 | La filtración de Moore. | 31 |
| 2. | <u>Clases Estables.</u> | |
| 2.1 | Definiciones y Ejemplos. Clases estables aditivas y Clases estables multiplicativas. | 43 |
| 2.3 | Las Clases (X) y $[X]$ | 46 |
| 2.7 | Espectros Generalizados de Eilenberg-MacLane. | 53 |
| 3. | <u>Espectros Funcionales.</u> | |
| 3.1 | Funtores Exactos. Definiciones y Ejemplos. | 58 |
| 3.3 | El Espectro Funcional $F(X, Y)$ | 60 |
| 3.7 | Los espectros $F(K(G), X)$ y $F(X, K(G))$ | 65 |
| 3.8 | Teorema de "factorización" del smash-producto. Aplicaciones y ejemplos en Bordismo Complejo. | 68 |
| 3.9 | Teorema de "factorización" de $F(X, Y)$. Aplica- ciones al Cobordismo Complejo. | 77 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4. | <u>El Algebra de Steenrod y el Espectro HP.</u> | . |
| 5. | <u>Resultados Finales y Aplicaciones.</u> | |
| 5.1 | Condiciones suficientes para que $F(X,Y)$ sea un espectro racional. | 90 |
| 5.1d | El espectro dual $F(K(G),S^0)$. Comomotopia de los espectros de Eilenberg-MacLane. | 91 |
| 5.1e | Cobordismo de los espectros de Eilenberg-MacLane | |
| | El espectro funcional $F(K(G),MU)$. | 92 |
| 5.5 | Sobre una Conjetura de J. Serre. | 106 |
| | Bibliografía. | 109 |

...oooOooo...

L. Alaya