UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

NOTAS DE MATEMATICAS

2

Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

DOCTOR
Rodolfo Ricabarra

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

MARZO 1961

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
LABORATORIO Y SEMINARIO DE MATEMATICAS
SERIE TERCERA
FASCICULO 2
NOTAS DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE PUBLICACION Y BIBLIOTECA
CALLE 1 y 47 LA PLATA República Argentina
Marzo de 1961

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

•

NOTAS DE MATEMATICAS

2

Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

DOCTOR
Rodolfo Ricabarra

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

MARZO 1961

AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Decano

Ing. ALBERTO R. GRAY

Vicedecano

Dr. FLORENCIO CHAROLA

Consejeros Académicos

Profesores: Dr. Florencio Charola; Dr. Germán Fernándes; Dr. Rafael Grinfeld; Ing. Roberto D. Cotta; Ing. Felipe F. Freyre; Ing. Julio Alderete. Graduados: Ing. Osvaldo E. Caracciolo e Ing. Hugo Sarraillet. Estudiantes: Sres. Guillermo Barba; Abel Perugorría; Eduardo C. Medrano y Mario J. Caravaglia.

Secretario Técnico

Ing. ROLANDO MUGETTI

Jefes de Departamento

Aeronaútica: Ing. Clodoveo Pasqualini; Arquitectura: Arq. Adolfo Rafael Chamorro; Construcciones: Ing. César J. Luisoni; Electrotecnia: Ing. Juan Manuel Barcala; Física: Dr. Rafael Grinfeld; Hidraúlica: Ing. Camilo B. Rodrígues; Matemáticas: Dr. Germán Fernándes; Mecánica: Ing. Mario S. Carri; Publicaciones y Biblioteca: Ing. Fernando Lisarán.

SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1 - El problema restringido local .

Sea $f: U \longrightarrow R^n$, de clase C^k , una aplicación dada , de un abierto de R^n en R^n. Se busca una aplicación $v: I \longrightarrow U$, de clase C^k , de un abierto I de R^1 , en U ,que mande un punto fijado en I en un punto fijado en U , y que satisfaga la ecuación diferencial $Dv = fv$. Como se sabe , si $k \geqq 1$,tal solución v existe y es "única" . Expondremos aquí estos hechos , introduciendo las definiciones que nos resulten convenientes .

Llamemos D_{bk} , $k = 0,1,2,\ldots\ldots,\infty,\omega$, y b un número real positivo , al conjunto de las aplicaciones $f: I_b^n \longrightarrow R^n$, de clase C^k , con dominio en el policubo cerrado de amplitud b en torno al origen 0^n del espacio R^n . En símbolos ,

$I_b^n = \left\{ x \in R^n \ : \ \|x\| \leqq b \right\}$; siendo $\|x\|$ la norma policúbica $\|x\| = \text{máx}\,(|x^1|, |x^2|, \ldots\ldots, |x^n|)$,

$$x = (x^1, x^2, \ldots\ldots\ldots, x^n).$$

Puesto que por definición cada $f \in D_{bk}$ admite una extensión C^k a un abierto de R^n ,tiene sentido hablar de $Df(x)$ para los x de norma b si $k \geqq 1$; más generalmente ,las derivadas parciales de las componentes de f hasta el orden k están definidas en la frontera de I_b^n (son independientes de la extensión) .

Ejercicio . Sea A un subconjunto de R^n y z un punto de A . A se dice un conjunto de unicidad para las derivadas parciales , en el punto z ,si toda aplicación $g: A \longrightarrow R^n$ de clase C^1 en un entorno de z tiene derivadas parciales determinadas independientes de la extensión . Es claro que puede sustituirse R^n por R^1 y admitir que g es a valores reales . Dar propiedades necesarias y suficientes para que A sea de unicidad en z . (Si $k \geqq 2$ no se obtiene novedad. Por qué ?)

Los elementos de D_{bk} se llamarán <u>datos del problema restringido local</u> que consideraremos enseguida . D_{bk} se puede normar con cada una de las normas $\| \quad \|_p$ $(0 \leqq p \leqq k)$ definidas, para cada dato f como el supremo en I^n_b de todas las derivadas parciales de las componentes de f hasta el orden p inclusive . Es claro que $D_{bo} \supset D_{b1} \supset \ldots\ldots\ldots \supset D_{b\infty} \supset D_{b\omega}$, que las normas $\| \quad \|_p$ tienen fuerza creciente con p , que $\| \quad \|_k$ convierte a D_{bk} en espacio de Banach , que la completación métrica de D_{bk} respecto de $\| \quad \|_p$ es canónicamente isométrica con D_{bp} , y que $D_{b\infty}$ es un espacio métrico completo separable no normable respecto de la topología de la convergencia simultanea no uniforme de las normas $\| \quad \|_p$ (topología supremo) : topología llamada C^∞ . Sobre $D_{b\omega}$ operan todas estas topologías .

Si a es un número positivo y k como antes definimos el conjunto S_{ak} de las aplicaciones $v: I^1_a \longrightarrow I^n_b$, con $v(0^1) = 0^n$, de clase C^k . Aquí I^1_a es el conjunto de los $t \in R^1$ tales que $-a \leqq t \leqq a$. S_{ak} es el espacio de las "<u>soluciones</u> " del problema restringido local . Para estos espacios, pueden introducirse las normas análogas a las precedentemente definidas, que indicaremos con los mismos símbolos : $\| \quad \|_p$; y valen análogas consideraciones sobre las relaciones entre los distintos tipos de convergencia . En particular S_{ak} es un espacio métrico completo y separable respecto de $\| \quad \|_k$.

<u>Definición</u> . Llamamos <u>problema</u> restringido local

(con dato f , donde f es un elemento de un conjunto D_{bk}) al problema de encontrar una aplicación $u : I \longrightarrow R^n$, donde I es un intervalo abierto que contiene el origen de R^1 y que verifica

1) u es de igual clase que f ;
2) $u(0^1) = 0^n$;
3) se tiene $u(I) \subset I^n_b$, y para todo $t \in I$ es : $Du(t) = fu(t) = f(u(t))$.

Una tal aplicación u se denomina una <u>solución</u> del problema restringido local de dato f .

El problema se considera "restringido" porque no incluye las importantes cuestiones de condiciones iniciales y parámetros . Se considera local porque se pide que la solución esté definida solamente en <u>algún</u> intervalo I que contiene el origen 0^1 , y por tanto no se busca "prolongar" la solución hasta donde puede ser definida .

Si u es una solución para un f dado, y si J es un subintervalo abierto de I que contiene 0^1, la restricción de u a J es otra solución del mismo problema (evidente) .

<u>Teorema de existencia y unicidad para el problema restringido local</u> :

El problema con dato $f^{(k \geq 1)}$ admite al menos una solución ; dos soluciones del mismo problema poseen restricciones idénticas .

El método de demostración que usaremos se debe a Picard ,se llama el método de aproximaciónes sucesivas , y es caso particular del teorema ya visto en Exp. 1 que afirma que toda aplicación continua contractiva de un espacio métrico completo posee un y sólo un punto fijo . El método de demostración proporciona elementos accesorios al enunciado del teorema , y entre ellos muestra que la solución depende , en un sentido a precisar , en forma continua del dato , y también da el tamaño mínimo del intervalo I de dominio de la solución en base al dato f. Ambos hechos conviene incorporarlos en un "enunciado precisado" del teorema de existencia y unicidad .

<u>Teorema</u> (de E.U.C.) <u>Existencia-Unicidad-Continuidad</u>.- Sea f un dato , en D_{bk} con $k \geq 1$. Sea $I = I_f$ el intervalo abierto simétrico en torno al origen de amplitud (radio)

$$a_f = \frac{\min(b, 1/n)}{\| f \|_1}$$

Existe una solución u_f del problema con dato f ,con dominio I_f que verifica

a) u_f es de clase C^{k+1} (<u>conservación o mejora de la clase</u>);

b) si u es una solución con dato f ,salvo por suponerse solamente de clase C^o,derivable en todo punto de su dominio, entonces u y u_f admiten restricciones idénticas (<u>unicidad local fuerte</u>) ,al mayor intervalo abierto J simétrico en torno al origen,contenido en ambos dominios.

c) la aplicación $f \longrightarrow u_f$ determinada por lo que precede , es continua ,para las dos normas $\| \ \|_o$,cuando se la restringe a un conjunto de D_{bk} acotado en norma $\| \ \|_1$. Más precisamente y correctamente ; sean f y g en D_{bk} , y $a < \min(a_f, a_g)$; entonces existen las restricciones de u_f y u_g al segmento $I_a = \{ t: |t| \leq a \}$,y son dos funciones u_f^a y u_g^a ,elementos de S_{ak} ; y se tiene

$$(1) \qquad \| u_f^a - u_g^a \|_o \leq \frac{a}{1-r} \| f-g \|_o \quad , \quad \text{con}$$

$$r = an \| f \|_1 \quad .$$

Observación . La condición(b) asegura que u_f es única ,luego, la aplicación $f \longrightarrow u_f$ está bien definida . La desigualdad(1) implica que si f y f_n varían en D_{bk}, mánteniendose acotadas en norma $\| \|_1$, y si f_n converge uniformemente hacia f,entonces en primer lugar la soluciones u_f tienen un dominio común de definición (porque los a_{f_n} están acotados por encima de cero) y segundo que dichas soluciones convergen uniformemente sobre cada intervalo común de dominio, y precisamente hacia la solución u_f
La aplicación $f \longrightarrow u_f$ es continua ,restringida a conjuntos acotados en norma C^1,también para las demás normas C^p ; en particular si $k = \infty$ (Generalización para el lector) . La cota en (1) puede mejorarse con la cota ae^r, lo que significa reemplazar la serie geométrica $1/(1-r)$ por la serie exponencial e^r . La continuidad de $f \longrightarrow u_f$ en el fondo es un refinamiento de la unicidad de la solución : si f y g difieren en cero*. Situación análoga a lo que ocurre en el teorema de la función inversa (Exp.1): si un operador contractivo $h = h_f$ depende "continuamente " de un dato f ,entonces el punto fijo también depende continuamente de f ;consecuencia del hecho que el punto fijo depende continuamente de h , y de la transitividad de las aplicaciones continuas .
En el caso presente ,los operadores h_f operan en espacios que dependen de f ; pero si f varía en un conjunto C^1-acotado ,entonces los h_f pueden ser restringidos a un mismo espacio ,y el razonamiento anterior es aplicable .

Demostración . Se toma f en D_{bk}, luego se toma un a cualquiera menor que a_f ; luego se define en S_{ao} un operador h que manda S_{ap} en S_{ap} (los valores estarán en S_{ap+1}) ,mediante :

$$h(v)(t) = \int_0^t f(v(s))ds \quad , \quad v \in S_{ao}, -a \leq t \leq a \tag{2}$$

Usando las desigualdades elementales :

* entonces u_f y u_g difieren en cero.

$$(3)\qquad \begin{aligned} \|f(x)\| &\leq \|f\|_o \leq \|f\|_1 \\ \|f(x)-f(y)\| &\leq n\,\|f\|_1\,\|x-y\| \end{aligned}$$

(la segunda consecuencia del teorema del valor medio ; obsérve - se que estamos perdiendo mucha plata en estas desigualdades , y que por tanto podrá ampliarse si se quiere el a_f y el r del enunciado), resulta que h opera en S_{ao} y es contractivo . Luego posee un punto fijo y solo uno . Llamémoslo v_a ($h = h_a$ depende de a y de f) .La ecuación $hv = v$ equivale, como es facil ver , a : $v(0) = 0^n$, $v(I^1_a) \subset I^n_b$, $Dv(t) = fv(t) = f(v(t))$, para todo t de I^1_a . De esta última ecuación, por ser $fv(t)$ continua ,resulta que $Dv(t)$ es continua . Luego v es C^1 ; luego $fv(t)$ es $C^1 (k \geq 1)$ luego $Dv(t)$ es C^1, luego v es C^2, etc....... Se tiene así que $v_a \in S_{a\,k+1}$, y a $S_{a\infty}$ si $k = \infty, \omega$. Para deducir ,cuando $k = \omega$ que v_a no sólo pertenece a $S_{a\infty}$ sino a $S_{a\omega}$, se necesita un razonamiento enteramente diferente . Dejémoslo de lado por elmomento.

Llamemos u_a a la restricción de v_a al intervalo abierto $(-a,a)$. Es claro que u_a es una solución del problema restringido local con dato f . Si a y c son dos números positivos menores que a_f , por ejemplo $a < c$,es claro que v_a y la restricción de v_c a I^1_a son puntos fijos para $h = h_a$. Luego coinciden .Luego las soluciones u_a con $a < a_f$ determinan en forma evidente una aplicación u_f del intervalo I_f en I^n_b que es una solución del problema restringido local con dato f . Para demostrar la condi - ción (b) del enunciado se observa que la u dada por ser deriva - ble es continua ,luego su restricción a cualquier segmento I^1_a

contenido en J está en S_{ao} y es punto fijo para $h = h_{a}^{1}$; luego coincide con la restricción de u_f a I_a^1 .

Para demostrar (c) adoptemos la notación del enunciado . f y g están dados ,lo mismo a < a_f, a_g . Nos colocamos en S_{ak} . Tomemos en S_{ak} los elementos $v_o = w_o$ = aplicación idénticamente igual a 0^n . Llamamos v_m ,w_m los m-ésimos iterados de (resp.) v_o, w_o por (resp.) $h = h_f$, $h = h_g$. Y tomemos la acotación grosera evidente :

$$\|v_m(t)-w_m(t)\| \leq a.\max_{I_a^1} \|f(v_{m-1})-g(w_{m-1})\| \leq a\max_{I_a^1}\Big\{\|f(v_{m-1})-f(w_{m-1})\| + \|f(w_{m-1})-g(w_{m-1})\|\Big\}.$$

Aplicando valor medio a la primera diferencia sigue (ver (3)):

$$\|v_m-w_m\|_o \leq a.n.\|f\|_1\|v_{m-1}-w_{m-1}\|_o + a\|f-g\|_o \quad ,$$

fórmula recurrente que nos da (1)inmediatamente . Pruebe el lector de mejorar la cota , tomando como función común de partida $v_o = w_o$ al punto fijo de entre h_f y h_g que tenga "menores" acotaciones para los valores y derivadas de la correspondiente f y g . En un caso práctico puede interesar .

El problema restringido global tiene como dato una aplicación $f: U \longrightarrow R^n$ de clase C^k y como solución la descomposición de U en curvas diferenciables parametrizadas (puntos , circunferencias y rectas diferenciablemente sumergidas),el parámetro estando determinado ,para cada curva salvo una constante aditiva .

En lugar de tratarlo especialmente expondremos el problema general global ,que incluye dependencia de las condiciones iniciales y de los parámetros,ambos importantes para las aplicaciones .

2 . El problema general .

Sean U^n y W^m conjuntos abiertos conexos de los espacios (resp.) R^n , R^m , y sea $f:U^n xW^m \longrightarrow R^n$ una aplicación de clase C^k , k 0,1,......,∞, ω . Llamaremos a f el dato del problema general, o el segundo miembro de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden,explícita ,con m parámetros,caso general, (independiente de t) .

Definición de solución local del problema general .

Dado f llamaremos una solución local del problema general con dato f a una aplicación $u: UxWxI \longrightarrow R^n$, donde :

1) U y W son abiertos no vacíos contenidos (resp.) en U^n y W^m I es un intervalo abierto de R^1 que contiene el origen 0^1; el dominio de u es el producto cartesiano UxWxI ;la imagen de u está contenida en U^n .
2) para cada par $(y,z) \in UxW,(y=(y^1,y^2,...,y^n),z=(z^1,z^2..z^m))$ la aplicación $t \longrightarrow u(y,z,t)$, de I en R^n es derivable en todo punto de su dominio ,y para todo tal punto t verifica :
$$D_t u(y,z,t) = f(u(y,z,t),z) \quad .$$
3) para todo $(y,z)\in UxW$ es $u(y,z,0) = y$

Comentario . 3) es la condición inicial clásica ; estamos considerando datos f que no dependen de t ;como se sabe esto no importa restricción para los teoremas de existencia y unicidad: si $g: U^{n-1} \times V^1 \times W^m \longrightarrow R^{n-1}$ es un dato que depende del "tiempo" t ($g(x^1,\ldots,x^{n-1},t,z^1,\ldots,z^m)$) se pasa al dato que no depende de t ,

$$f(x^1,\ldots,x^{n-1},x^n,z^1,\ldots,z^m) = (g^1(x^1,\ldots,x^n,z^1,\ldots,z^m),g^2(..),\ldots,g^{n-1}(..),f^n(..) = 1) .$$

En particular aceptamos el teorema de E.U.C. para estos datos más generales, formulación restringida . Físicamente : una corriente no estacionaria puede concebirse en un dominio dado , como la proyección sobre el dominio ,de una corriente estacionaria en el cilindro producto cartesiano del dominio por el eje del tiempo;la sección material del cilindro se desplaza con velocidad constante igual a 1 , o sea cada partícula tiene vector velocidad con proyección constante igual a 1 en la dirección del eje del tiempo .

Reunimos en el siguiente teorema el resultado básico sobre las soluciones locales del problema general .

TEOREMA S.P.G. (Solución del problema general) .

1) Dados dos conjuntos compactos A , B contenidos (resp.) en U^n , W^m existe una solución local, continua en sus $n+m+1$ variables, sea u, con dominio $U \times W \times I$, con $U \supset A$, $W \supset B$ (EXISTENCIA) .

(ii) Dos soluciones locales (mismo dato f) coinciden en la intersección de sus dominios (UNICIDAD) .

(iii) toda solución local es k veces continuamente diferenciable en sus $n+m+1$ variables; es $k+1$ veces en su variable t . CONSERVACION DE LA CLASE (Conservación de la" categoría") .

Vamos a definir ,antes de pasar a la demostración ,la solución completa del problema general .

Definición . Problema restringido de dato f,y,z , es el problema de hallar una $v: I \to U^n$,derivable en I ,tal que

$$v(0) = y, Dv = f(v,z) \quad .$$

Una tal v se llama una solución local de dicho problema .

PROPOSICION 1 . Existe al menos una solución local,datos f,y, z ,dos tales coinciden en un entorno de 0^1 , y toda solución local es de clase C^{k+1}, si k es la clase de f .

DEMOSTRACION : La última afirmación :v,supuesta solución local,es derivable luego continua,luego f(v,z) es continua , luego Dv es continua ,luego v es C^1,luego f(v,z) es C^1,...... Demostremos las dos primeras afirmaciones . f,y,z dados . b igual a la mitad de la distancia de y al complementario de U^n si $U^n = R^n$, ponemos $b=1$. Definimos $f_{yz} : U^n - y \to R^n$ (diferencia vectorial) mediante $f_{yz}(x) = f(x+y,z)$; llamamos f^b_{yz} su restricción a I^n_b , y llamamos v_{yz} la solución canónica definida en el teorema EUC de sección 1,con dato f^b_{yz} (la u_f de allf); entonces $u_{yz} = y + v_{yz}$ (y = aplicación constantemente iguala y, con dominio igual al de v_{yz}) es una solución local del problema restringiso de datos f, y, z. Verificación para el lector. Se ve que si v_1, v_2 son soluciones, dato f, y, z, entonces $v_1 - y$, $v_2 - y$ son soluciones, después de restringidas a un intervalo conveniente del origen 0^1, del problema restringido de dato f^b_{yz} (sección 1), luego por EUC coinciden localmente, luego v_1 y v_2 también, en torno de 0^1. Q. E. D.

PROPOSICION 2. Dos soluciones locales, datos f, y, z, coinciden en la intersección de sus dominios.

DEMOSTRACION. Sean I, J dichos dominios. Ambos son intervalos abiertos que contienen 0^1, y su intersección es otro tal, sea H. Bastará demostrar que el subconjunto C de H donde las soluciones coinciden es un conjunto no vacío abierto y cerrado. C contiene 0^1 y es cerrado, porque las soluciones, son continuas. Si $s \in C$, y v_1, v_2 son las soluciones dadas, $u_1(t) = v_1(s+t), u_2(t) = v_2(s+t)$, son soluciones locales, datos:

$$f, v_1(s) = v_2(s), z,$$

t restringido a un intervalo abierto bastante pequeño en torno a 0^1.

Luego $u_1 = u_2$ en un entorno de 0^1, por prop. 1, luego $v_1 = v_2$ en un entorno de s. Luego C es abierto. Luego $C = H$.

Corolario. Existe una solución local del problema restringido con datos f, y, z que tiene dominio máximo, unívocamente determinada por f, y, z.

Será denominada la solución global del problema restringido de datos f, y, z, y será indicada $t \longrightarrow u_f(y,z,t)$, su dominio con I_{yz}

Definición de solución completa del problema general de dato f . Es la aplicación u_f, con dominio $Df = \bigcup \{y\} x \{z\} x I_{yz} \subset R^n x R^m x R^1 = R^{n+m+1}$, (y, z variando en (resp.) U^n, W^m), definida por el corolario precedente. La solución completa está caracterizada por la siguiente propiedad . (SC) sea $v: I \longrightarrow U^n$ una aplicación de un intervalo abierto cualquiera de R^1, que verifica identicamente la ecuación diferencial $Dv = f(v,z)$ para algún z . Entonces se tiene idénticamente en s , t : $v(s+t) = u_f(v(s),z,t)$, s variando en I , y t variando de modo que $s+t$ varía en I . Fijando un s en I, se tiene así que la aplicación v es una restricción de una traslación de la solución global de un problema restringido (preciso : datos $f, v(s), z$) .

Es en el sentido (SC) que la solución completa contiene TODO lo que puede deducirse de la ecuación diferencial dada . A partir de ahora, se podría decir, demostrar propiedades de la ecuación equivale lógicamente con demostrar propiedades de u_f.

PROPOSICION 3 . Si para el par (y,z) se tiene $f(y,z) = 0^n$, entonces $I_{yz} = R^1$, $u(y,z,t,) = y$ idénticamente en t: la solución global del problema restringido con datos f, y, z es constante .

DEMOSTRACION . La aplicación $v: R^1 \longrightarrow y$ es una solu -

ción local del problema restringido de datos f,y,z . Como su dominio máximo absoluto en R^1 ,entonces coincide con la solución global del mismo problema restringido .

<u>Definición</u> . $f^{-1}(0^n)$ se llama el <u>conjunto singular</u> de la ecuación con dato f . Es un subconjunto cerrado relativamente y contenido en $U^n x W^m$. Por lo visto en Exp.1 ,si f es regular de rango constantemente igual a r en todo punto de $f^{-1}(0^n)$, el conjunto singular es una subvariedad diferenciable de dimensión $n+m-r$. Normalmente interesa más la regularidad de la restricción de f a $U^n x \{ z \}$, y el conjunto singular correspondiente .

<u>PROPOSICION 4</u> . Sean $u_1 : I \to U^n$, $u_2 : J \longrightarrow U^n$, las soluciones globales de los problemas restringidos de datos ,resp., f , y_1 ,z ; f,y_2,z . Supongamos que para un $s \in I$ se tenga $y_2 = u_1(s)$ Entonces :

1) $J = I-s$

2) $u_2(t) = u_1(t+s)$,para todo $t \in I - s$.

<u>DEMOSTRACION</u> . Definimos v_2 con dominio $I-s$ mediante , $v_2(t) = u_1(t+s)$. Se tiene $v_2(0) = u_1(s) = y_2 = u_2(0)$; además , v_2 es solución de la ecuación diferencial con dato f ,luego por ser u_2 la solución maximal ,u_2 es una extensión de v_2 ,en particular $J \supset I - s$, y por tanto J contiene $-s$. Definimos ahora : $v_1(t) = u_2(t-s)$ sobre $J+s$. Como antes ,resulta $v_1(0) = u_2(-s) =$ $= v_2(-s) = u_1(0)$,etc. , y $I \supset J+s$. Luego $J = I-s$, $v_2 = u_2$, $v_1 = u_1$ ..

Conviene formular esta propos.4 mediante la u_f :

(4) $$u_f(u_f(y,z,s),z,t) = u_f(y,z,t+s) \quad ,$$

interpretado : si $(y,z,s),(y,z,t+s)$ están en D_f (dominio de u_f) ,entonces también $(u_f(y,z,s),z,t) \in D_f$, y se cumple (4);más las otras dos variantes,si dos de esas ternas están en D_f lo está la tercera y vale (4) .

Supongamos z fijo . (4) puede interpretarse como una propiedad de homomorfismo .Para cada número positivo a definamos D_a como el subconjunto de U^n formado por los y tales que $I_{xy} \supset I_a = \left\{ t: -a \leq t \leq a \right\}$. O también $D_a = \left\{ y: (y,z,t) \in D_f \right\}$ para todo t con $|t| \leq a$,bastando que $(y,z,\pm a) \in D_f$. Si $|t| \leq a$ definamos $h_t: D_a \longrightarrow U^n$,mediante

(5) $$h_t(y) = u_f(y,z,t) \qquad (h_t \text{ depende de } z)$$

Entonces la (4) se escribe

(4') $$h_t h_s = h_{t+s}$$

o sea la correspondencia $t \longrightarrow h_t$ es un homomorfismo local de R^1 en un"grupo"de aplicaciones . h_0 es la identidad sobre D_a Luego de $h_t h_{-t}$ = identidad se deduce que cada h_t($|t| \leq a$) es inyectiva .

Otra forma de interpretar la proposición 4 se obtiene introduciendo el concepto de <u>órbita</u> .

Supongamos z fijo . Sea u_1 la solución global correspondiente al problema restringido de dato f, y_1 ,z , $u_1: I \longrightarrow U^n$.

Como se sabe u_1 es una "curva parametrizada",con parámetro t, k+1 veces diferenciable . La imagen de I por u_1 se llama el <u>soporte</u> de la curva . El soporte es un subconjunto de U^n

que contiene al punto y_1 .

Veamos que el soporte de u_1 es una subvariedad $(k+1)$ - diferenciable de U^n . Si $f(y_1,z) = 0^n$,el soporte es el punto y_1 , (por prop.3) ,luego la variedad tiene dimensión 0.Si $f(y_1,z) \neq 0^n$ se presentan dos casos :

1) <u>solución periódica</u> . existe un punto s tal que $u_1(0) = u_1(s)$, $s \neq 0$. De prop.4,con $y_2 = u_1(s) = u_1(0) = y_1$ sigue $u_1(t) = u_1(t+s)$, y el dominio de u_1 es invariable respecto de la traslación en $-s \neq 0$. Luego coincide con $R^1 : I = R^1$, y u_1 es periódica con período que divide a s, no siendo dicho período 0 ,porque u_1 sería constante contra lo supuesto $f(y_1,z) \neq 0^n$ (la derivada sería nula) . Pasando a cuociente u_1 es una aplicación (k+1)-veces diferenciable de la circunferencia ,en su estructura ordinaria de variedad ,en U^n, inyectiva por construcción . Luego es una sumersión , y su imagen -soporte - es una subvariedad $(k+1)$ veces diferenciablemente sumergida ,isomorfa a la circunferencia .

2) <u>solución aperíodica</u> . si para $s \neq t$ es $u_1(s) = u_1(t)$ se está en el caso anterior . Luego supongamos que u_1 es inyectiva . Es evidente que el soporte es una "recta " $(k+1)$ veces diferenciablemente sumergida .

De prop. 4 resulta que la relación " y_2 pertenece al soporte de y_1 " es una equivalencia (entendemos por soporte de y_1 a la imagen de la función $t \longrightarrow u_f(y_1,z,t)$) .

Luego U^n (para este z fijo) queda descompuesto en soportes :puntos,circunferencias y rectas diferenciablemente ha -

blando . Llamamos <u>órbita</u> a cada uno de estos soportes ,supuestos con su estructura de variedad diferenciable ,pero sin orientación y menos aún sin parametrización . El soporte es el conjunto ,la órbita es la variedad diferenciable .

Para cada z fijo,entonces,la ecuación diferencial general de dato f ,origina una descomposición de U^n en órbitas : puntos,órbitas compactas,o "cerradas" ,o "periódicas" ,y órbitas no compactas ,o "abiertas" ,o aperiódicas . La ecuación diferencial da más todavía :da una ley que para cada órbita ,y para cada punto que se elija en dicha órbita ,fija un parámetro = coordenada (k+1) - diferenciable sobre órbita .

La proposición 4 todavía tiene algo que decir sobre estas parametrizaciones múltiples y simultáneas :fijada una órbita ,los dos parámetros correspondientes a dos elecciones de puntos sobre la órbita ,difieren en una constante:$u_2(t) = u_1(t + \text{constante})$. Dinámicamente :la ecuación diferencial general con dato f, para cada z fijo ,"da" en U^n una distribución de "puntos moviéndose" ,cada uno en una órbita ,en estado de "eternidad" ,algo asi como un moviemiento puro,que puede presentarse mejor con el movimiento de un fluído .

Salta a la vista que quedan dos problemas sobre variación de estas construcciones . ¿Como varía la parametrización al pasar de una órbita a otra próxima ? y ¿Como varía la descomposición global en órbitas,al pasar de un z a otro próximo ? .El primero cae dentro de la categoría de las variedades foliadas ,o más generalmente de la teoría de espacios fibrados :

Se forma el espacio cuociente de U^n respecto de la relación de equivalencia en la que las clases son las órbitas ; sea B di - cho cuociente (en general no separado);problema : caracterizar abstractamente el fibrado $U^n \longrightarrow B$, y estudiar sus propieda-des (ver Reeb,Varietés feuilletés,Hermann,París) . El segundo, cae dentro de la categoría de deformaciones foliadas (estabili dad de órbitas cerradas,por ejemplo) .Ninguna de estas teorías está desarrollada satisfactoriamente ,sobre todo la última(com párese :Deformations of complex structures ,de K.Kodaira ,D.C. Spencer ,etc. artículos en el Annals of math.,1957-1960) .

U^n y W^m son variedades diferenciables .Lo dicho hasta aquí se aplica al caso de variedades cualesquiera . Esto tiene importancia en las aplicaciones . Tomemos $m = 0$. Si U^n es una variedad compacta desaparecen ciertas anomalías ,por ejem plo h_t , dado por (5) existe para todo t , y la corresponden - cia $t \longrightarrow h_t$ es un homomorfismo global de R^1 sobre un grupo de homeomorfismos biyectivos de U^n ,cuyo conjunto de puntos fijos - posiciones de equilibrio dinámico - es el conjunto singular del dato = campo f . Se deduce : un teorema que demuestre exis tencia de puntos fijos para homeomorfismos de la variedad U^n da un teorema de existencia de posiciones de equilibrio (tra - bajos de Birkhoff ,P.A.Smith ,etc.) .

Seguimos con el estudio de la solución completa .Vamos a extraer una nueva consecuencia ,y muy importante de la prop. 4 .Consideremos z fijo en todo lo que sigue .

Indiquemos con T^{n+1} al tubo (cilindro) producto cartesiano de U^n por R^1 : $T^{n+1} = U^n x R^1$ con la descomposición en órbitas deducida por el pasaje del dato f al dato en una dimensión más que indicamos con t y concebimos como tiempo, indicada al principio de esta sección . Nuestra corriente estacionaria se convierte en una nueva corriente estacionaria, cuyas órbitas son lineas helicoidales del cilindro , todas diferenciablemente equivalentes a R^1 , con proyecciones sobre U^n (en la dirección del eje nuevo) que coinciden con las viejas órbitas : las que se proyectan en puntos son rectas , las que se proyectan en órbitas cerradas son "verdaderas helicoides" de - a + ∞ , las que se proyectan sobre órbitas abiertas, lo hacen en modo biunívoco y bidiferenciable (todo C^{k+1}) , porque la corriente de partida era estacionaria . Es geométricamente evidente que esta nueva corriente conserva todas las propiedades de la vieja , y reciprocamente . Pero no es evidente la relación entre las parametrizaciones . Llamemos g al dato que define la nueva corriente en T^{n+1}(z fijo) ; $g^1(x^1, x^2, \dots, x^n, t = x^{n+1}, z) =$
$= f^1((x,z), \dots, g^n(x^1, \dots, x^n, t) = f^n(x,z)$,
$g^{n+1}(x^1, \dots, x^n, t) = 1$, $g: U^n x R^1 x W^m \longrightarrow U^n x R^1$, $U^n x R^1 = T^{n+1}$.

Es evidente que la solución completa u_g se expresa mediante la solución completa u_f mediante :

$$u_g(y,t,z,s) = (u_f(y,z,s), s+t) , \qquad (6)$$

donde $(y,t) \in T^{n+1}$, y s es el parámetro de las soluciones(nuevo parámetro "t"). Si consideramos un punto $(y,t) \in T^{n+1}$ y la órbita que lo contiene ,la ecuación $s \longrightarrow u_g(y,t,z,s)$,resulta de (6) que el parámetro s sobre la órbita difiere de la coordenada "n+1" $= s+t$, en una constante (t) . Como el parámetro canónico sobre la órbita está determinado salvo una constante también $t+s$ es un tal parámetro,luego :

<u>En T^{n+1}</u>,<u>dato</u> g , <u>para cada órbita la</u> (n+1) - <u>coordena da</u> t <u>es el parámetro canónico</u> (reemplazamos "s" por"t en este enunciado) .

De (6) resulta que las órbitas de T^{n+1}se reparten en rectas paralelas al eje del tiempo ,hélices que van de menos a más infinito del tiempo (correspondientes a las soluciones períodicas de f) ,con paso igual al período de la solución períodica correspondiente , y las otras que son de tres tipos :las que se extienden de menos a más infinito en t $(I_{yz} = R^1)$; las que se extienden desde t_o hacia más o el menos infinito (I_{yz}= semirrecta a izquierda o a derecha en R^1) ,y las órbitas acotadas (I_{yz} = intervalo acotado de R^1) . Si identificamos U^n con la sección del tubo al tiempo 0: $U^n = U^n x \{0\} \subset T^{n+1}$, las órbitas de los tres últimos tipos podemos decir que forman clases invariantes por traslación paralela al eje del tiempo.Por ejemplo :se toma una órbita acotada,y todas sus traslaciones como se ha dicho ;resultan órbitas disjuntas dos a dos,salvo que coincidan totalmente lo que ocurre cuando la traslación es la misma ;y todas estas órbitas tienen la misma proyección(paralela al tiempo) sobre U^n,que es una órbita con intervalode definición del parámetro canonico (dato f) de longitud finita igual a L ;y de la clase invariante de órbitas en T^{n+1} que estamos considerando,las que intersectan U^n son aquellas y solo aquellas comprendidas en un cilindro cortado en T^{n+1} por planos paralelos a U^n a distancia menor que L (por ambos lados).

Análogamente para las otras órbitas.Esta patología del tubo es menor de lo que podría creerse porque,como demostraremos más adelante cuando una órbita del tubo no pasa más allá de un t_o (valores creciendo) ,entonces converge hacia la frontera del tubo cuando $t \longrightarrow t_o$ $(t < t_o)$ ya sea hacia un punto o enroscándose (o sea converge hacia el punto ∞ de la compactación de Alexandroff del tubo) .Dicho geométricamente,las órbitas que no van de menos a más infinito ,parten (o llegan, según el caso) de la frontera del tubo .

Llamemos D_f^z al subconjunto del tubo formado por la reunión de las órbitas que cortan U^n . Lo dicho en el párrafo precedente implica que D_f^z contiene a U^n en su interior .

Veremos más aún : D_f^z es él mismo un conjunto abierto Es claro que D_f^z es el dominio de la solución completa u_f . Definamos $-D_f^z$ como el simétrico de D_f^z respecto de U^n:(x,z,-t), está en D_f^z si y sólo si $(x,z,t) \in - D_f^z$. Y definamos

$$(7) \qquad F(x,t) = u_f(x,z,-t) \quad , \quad (x,t) \in -D_f^z \cap D_f^z = V^{n+1}$$

De la prop.4 ,fórmula (4) resulta :si $v:I \longrightarrow R^n : t \to v(t)$ $(v(t),t) \in V^{n+1}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$Dv = f(v(t),z), \qquad t \in I \quad , \quad \text{entonces}$$

$$F(v(t),t) = u_f(u_f(v(t_o),z,t-t_o),z,-t) = u_f(v(t_o),z,-t_o) =$$

$$= F(v(t_o),t_o) \ ,$$

para todo $t \in I$,siendo t_o un punto fijado en I . Luego la a plicación $F:V^{n+1} \longrightarrow F(V^{n+1}) = V^n$ es constante sobre las órbitas .Según lo adelantado V^{n+1} es abierto;adelantamos además que F es de clase C^k ,y que su derivada respecto de x,igual a la derivada de $U_f:D_x u_f$, es de rango n en todo punto de V^{n+1}. Luego F es regualr de rango n en todo punto de sudominio. Luego ,por lo visto en Exp.1 ,las imágenes inversas de los puntos de V^n son subvariedades unidimensionales de V^{n+1}. Por la unicidad,estas subvariedades coinciden localmente con las órbitas,luego globalmente .

<u>Definición</u> . F se llama la <u>integral completa canónica</u> del problema general con dato f . Sus componentes

$$F = (F^1,.......,F^n) \quad , \quad F^i = F^i(x,t) \ ,$$

se llaman las <u>integrales primeras canónicas</u> . (Conocida una"primera"de ellas el problema queda reducido en una dimensión ;lo mismo si se conoce una segunda) .

<u>Definiciones de integrales primeras,etc</u>. Dado f, z fijado,se llama una integral completa local a una G definida y regular de rango n sobre un subabierto de V^{n+1} ,a valores en

R^n, constante sobre las intersecciones de las órbitas ;se dice global si su dominio coincide con V^{n+1} . Se llama una integral primera local a una G^1 a valores reales,definida y regular de rango 1 en un subabierto de V^{n+1} ;global si etc.

Por Exp.1 si G es integral completa global ,de clase C^k,entonces existe un homeomorfismo K- diferenciable de V^n en $G(V^{n+1})$ que "transporta" G en la integral canónica F . Resulta :una integral completa está determinada salvo un K-homeomorfismo local de V^n en R^n. Esto es importante ya,porque nos dice que hay muchas más integrales completas que las que necesitamos,lo que produce sensación de mayor libertad ,y"facilidad" para resolver la ecuación . Hay que agregar que el parámetro canónico sobre la órbita lo da la (n+1)-coordenada,por lo que la integral completa canónica ,u otra cualquiera,resuelve el problema general en forma completa :da las órbitas,con su parámetro.

Pero ¿ como se hace para buscar una integral completa,directamente,sin pasar por la ecuación ordinaria dada? . La observación importante,que enriquece en forma efectiva la teoría es : las integrales primeras están caracterizadas por ser soluciones de una ecuación diferencial en derivadas parciales , de primer orden ,lineal homogénea . Luego podemos intentar por este camino la solución :buscamos una integral primera (local, como se empieza siempre),reducimos el número de variables en una unidad.luego buscamos una segunda integral primera que sea independiente de la primera integral primera,etc. Al llegar a n integrales primeras,independientes en un entorno de nuestro punto,el problema queda resuelto . La indeterminación (homeo - morfismo local de V^n en R^n) no va a molestar porque no incide en las órbitas ni en su parámetro, como queda claro de lo dicho precedentemente . Las n funciones arbitrarias de la solución completa de la ecuación a derivadas parciales como se ve ,significan en este caso las componentes del dicho homoemorfismo. Es importante en las aplicaciones el hecho que las integrales primeras suelen tener significado físico (suma de energías cinética y potencial,derivadas respecto al tiempo de areas barridas por radios vectores (2a. de Kepler) ,etc.) . La ecuación par - cial se obtiene ,como se sabe,tomando un (x,t) en V^{n+1} ,tomando una órbita que pase por (x,t),con el parámetro canónico igual a la $(n+1)$ - coordenada del punto de la órbita . Sea v la órbita-parametrizada. Calculamos la derivada $D_sF(v(s),s)$ en el punto t;debe ser cero . Luego

$$D_tF + D_xF.f(x,z) = 0^n \quad \text{(producto de matrices)}$$

idénticamente en (x,t) . (v. es un"catalizador") . O sea

$DF.g = 0$: una ecuación por cada (integral primera)= =(componente de F) .

En síntesis ,como $m = 0$,se tiene que los problemas

$Du = fu$, $DG.g = 0$ (incógnitas : u , G)

son completamente equivalentes . A izquierda la curva se pide explícita ;a la derecha se la pide implícita .Los llamados pun tos singulares de la primera ecuación ,no son verdaderamente puntos singulares ,como lo muestra la ecuación de la derecha Estos puntos debieran ser llamados estacionarios ,para no confundir con las singularidades en funciones analíticas,algebraicas,etc.,de las cuales es ejemplo la no-regularidad de una aplicación en un punto (Exp.1) .Es claro que el campo de vectores f,en un punto donde f se anula,es "singular",pero al pasar al tubo se des-singulariza.Conviene llamarlos puntos críticos o estacionarios (ver Codd. Levinson) .

Antes de seguir adelante demostraremos las afirmaciones que preceden .

Lema 1 . (teorema fino de existencia) . Sea $f=f(y,z)$ de clase C^k en y, y de clase C^o en z . Sea (y_o,z_o,t_o) un elemento arbitrario de $U^n x W^m x R^1$. Designemos con U_b, W_b y J_a los policubos de amplitudes b, b , a , abiertos , en torno de y_o, z_o, t_o respectivamente (a,b > 0) . Existe entonces una aplicación v y nº s a,b :

$$v : U_b x W_b x J_a x J_a \longrightarrow U_{2b} \quad ,$$

de modo que :

1) $v = v(y,z,s,t)$, y $D_t v$ son continuas ;

2) $v(y,z,s,s) = y$ idénticamente ;

3) $D_t v = f(v,z)$, idénticamente en y,z,s,t .

(se observa que $v(y,z,s_o,t+s_o)$ es una solución local del problema general , en el sentido definido al principio de este número) .

<u>Demostración</u> . Tomemos b finito de modo que U_{2b} y W_{2b} estén contenidos, con adherencia, en resp. U^n , W^m . Definimos $g(x) = f(x+y,z)$. g depende de los parámetros y, z ($g = g_{yz}$) y está definida en el policubo cerrado I^n_b en torno a 0^n , de amplitud b .

Cuando el par (y,z) recorre $U_b x W_b$, $g = g_{yz}$, restringida a I^n_b, recorre una clase equicontinua de datos de D_{bk} , k = clase de f . La equicontinuidad proviene de la continuidad de $f(x+y,z)$ como función de tres variables . Además, $\| g_{yz} \|_1$ está uniformemente acotada, por ser continua, luego acotada, la aplicación f y todas sus derivadas respecto de x restringidas al compacto $\{(y,z)\} = \bar{U}_{2b} x \bar{W}_{2b} = C$; una cota es el máximo de todas las derivadas parciales, y componentes de f, en el compacto C . Sea M la cota . Si a es tal que $2a < (\min(b,1/n))/M$, por el teorema E.U.C. del nº 1 , hay en cada $S_{2a,k}$ una $u = u_{yz}(t)$, con $u(0) = 0^n$ que satisface $Du = gu$. Pongamos $v(y,z,s,t) = y + u_{yz}(t-s)$, restringida a $U_b x W_b x J_a x J_a$. La condición inicial 2) es evidente; lo mismo la 3). Si se demuestra que v es continua, también resultará $D_t v$ continua a consecuencia de la 3) . Para demostrar que v es contínua en sus $n+m+2$ variables, basta demostrar que $u(y,z,t) = u_{yz}(t)$ es continua en $U_b x W_b x J_{2a}$. Esto sigue inmediatamente de la continuidad local, fórmula (1) del teorema EUC, nº 1 : si $(y,z) \longrightarrow (y_1,z_1)$ en $U^n x W^m$, de la continuidad de f sigue que g_{yz} converge punto a punto en el conjunto compacto I_b^n; de la equi de la familia, sigue que dicha convergencia es uniforme (Ascoli) ; de la fórmula (1), siendo M fijo para toda la familia, sigue que $u_{yz} \longrightarrow u_{y_1 z_1}$ uniformemente en el segmento cerrado I_{2a} ; esto combinado con la desigualdad del triángulo para números, nos dice que si $(y,z,t) \rightarrow (y_1,z_1,t_1)$, entonces $u(y,z,t)$ converge hacia $u(y_1,z_1,t_1)$. QE D .

El siguiente lema demuestra entre otras que D_f es abierto, punto esencial que ha quedado pendiente . Sea u una solución local continua del problema general, dato f. Su dominio, por definición es de la forma UxWxI , I intervalo que contiene 0^1 , los tres conjuntos abiertos no vacíos. Manteniendo U y W fijos, podremos maximalizar I, por inducción conjuntista evidente ; al I maximal, que es evidentemente máximo absoluto para U,W dados, lo indicaremos con

$$(a_{UW}, b_{UW}) = I_{UW} \quad .$$

Sobre $UxWxI_{UW}$, la solución completa u_f está pues definida y es continua (la maximalidad es para soluciones locales continuas, no olvidarlo) . Sea ahora (y_1,z_1) un punto en UxW .

Lema 2 . En las condiciones precedentes, cuando U converge a y_1 y W a z_1 se tiene :

a) o bien $b_{UW} \longrightarrow \infty$ (y por tanto $I_{y_1 z_1} = (.,\infty)$);

b) o bien $b_{UW} \longrightarrow b_1^{<\infty}$, y entonces se tiene:

$I_{y_1 z_1} = (\ .,b_1)$, y $u_f(y_1,z_1,t)$ converge hacia la frontera de U^n cuando $t \longrightarrow b_1$;

c) dualmente para a_{UW} .

Demostración . Negando (a),por supuesto se tiene que existe y es finito el límite de b_{UW} ,sea b_1 ,cuando U,W convergen según los filtros de entornos de y_1 y z_1 (resp.). Lo que hay que ver es que el punto b_1 es el tope de la solución global del problema restringido con datos f,y_1,z_1 (Esto equivale a decir que D_f es abierto,y que u_f es continua sobre D_f ; la segunda afirmación de (b) dice algo más que enseguida demostraremos) .

Supongamos por el absurdo,que b_1 sea menor que el extremo derecho de $I_{y_1 z_1}$. La demostración se reduce a prolongar ,usando el lema 1,una solución local continua con U y W bastante pequeños. Los detalles son como sigue .Sea u una solución local continua definida en $U \times W \times I_{UW}$; su restricción a $\{y_1\} \times \{z_1\} \times R^1$ es continua en la variable t que queda libre ;como esto pasa para todo U, W por pequeño que sean, y estas restricciones coinciden en su dominio común,queda definida una aplicación que indicaremos con $u(y_1,z_1,t)$ definida por lo menos en el intervalo $(0,b_1)$ (un poco a la izquierda de 0 también ,pero no a la derecha de b_1) .

En vistas a aplicar el lema 1, pongamos $t_o = b_1$, $z_o = z_1$, $y_o = u_f(y_1, z_1, t_o)$, y sean a, b los números determinados por el lema 1, con las propiedades allí especificadas. En particular $J_a = (b_1 - a, b_1 + a)$. Sea $s \in J_a$, $s < b_1$. La función $u(y_1, z_1, t)$ completada por $u(y_1, z_1, b_1) = y_o$ es contínua por coincidir con la correspondiente restricción de u_f a

$\{y_1\} \times \{z_1\} \times R^1$, luego existe un s como indicado tal que $u(y_1, z_1, s) \in U_b$ (definido en lema 1) . Sean U, W tan pequeños (en torno de y_1, z_1 resp.) como para que I_{UW} contenga s , y sea u la solución local contínúa de dominio

$U \times W \times I_{UW}$.

Por ser u contínúa existen entornos de y_1, z_1 que llamaremos también U, W tales que $u(U, W, s) \subset U_b$. A partir de ahora no modificaremos U, W y correspondiente u ; sigue verificándose , por supuesto, que $s \in I_{UW}$ (monotonía inversa de I_{UW} con respecto a U, W) . Sea v la función dada por el lema 1 . Se tiene que si $(y, z) \in U \times W$, $t \in J_a$, entonces la función

$v(u(y, z, s), z, s, t)$ está definida y es contínúa como composición de aplicaciones contínúas . Así en $U \times W \times (I_{UW} \cup J_a)$ se tienen definidas dos aplicaciones contínúas : u con dominio $U \times W \times I_{UW}$, v con dominio $U \times W \times J_a$; si demostramos que coinciden en la intersección de sus dominios, queda definida por "reunión" una aplicación continua que es una solución local contínúa del problema general, lo que contradice la hipótesis , que b_1 sea menor que el extremo derecho de $I_{y_1 z_1}$, y demues -

tra el punto . Cuando t está en la intersección $I_{UW} \cap J_a$, e (y,z) varía libremente en UxW (intersección aludida) las dos funciones en cuestión coinciden, consideradas como funciones de t para (yz) fijo, con sendas soluciones de la ecuación diferencial con dato f ,y condiciones iniciales $v(s) = u(s)$, por tanto ambas coinciden con $u_f(v(s),z,t-s)$,luego coinciden entre sí . Y esto vale para cada (y,z) en UxW . QED .

NOTA . En materia de unicidad basta siempre recurrir a la u_f , por la propiedad (SC) .

Demostraremos la afirmación restante . $u_f(y_1,z_1,t)$, supuesto b_1 menor que ∞, converge hacia la frontera de U^n (en la compactificación de Alexandroff).

Primero supongamos que existe un $c < b_1$ tal que la imagen de (c,b_1) por la aplicación $t \longrightarrow u_f(y_1,z_1,t)$ está contenida en un conjunto que 1º es compacto , y

2º está contenido en U^n .

Como dicha aplicación satisface la ecuación diferencial

$$D_t u_f = f(u_f(y_1,z_1,t),z_1) \text{ y f es acotada sobre}$$

todo compacto contenido en su dominio, deducimos que $D_t u_f$ es acotada sobre (c,b_1) ; o sea ,con respecto a t , u_f satisface una condición de Lipschitz uniforme en (c,b_1) . Luego existe el límite de u_f cuando $t \longrightarrow b_1$, y es un punto y_0 del compacto en cuestión, por tanto ,lo que interesa, es un punto de U^n.

Podemos poner $t = b_1$ $z_o = z_1$, y repetir el razonamiento de la primera parte de la demostración, con la simplificación de que ahora nos interesa la curva solamente ("$U = y_1$", "$W = z_1$") y que en lugar del lema 1 podemos usar lo que sabíamos antes. Encontraremos dos soluciones $u(t)$, $v(t)$ la primera definida en un intervalo que contiene el 0 y llega hasta un poco más acá de b_1, la segunda definida en un intervalo que intersecta al anterior y que contiene b_1, y tales que para un punto s común a sus dominios verifican $u(s) = v(s)$. Se obtiene, en este caso, contradicción con la maximalidad de la solución completa, pues es a $u_f(y_1, z_1, t)$ a la que hemos prolongado, más alla de su extremo b_1, extremo derecho de $I_{y_1 z_1}$.

Notas 1.- Anotemos que de paso se ha demostrado que, en el caso (b), la condición de que el dato f se mantenga acotado en el extremo de la órbita equivale a que dicho dato converja (z fijo); y que en caso de que esta situación esté presente, la órbita converge no solo hacia la frontera sino hacia un punto determinado de la forntera. Esto se aplica si f es acotado en U^n; en particular si $U^n = R^n$, siendo f acotado, no se presenta el caso (b) : siempre es $I_{yz} = R^1$ (para ese z, y para todo $y \in R^n$). En cualquier caso, si una órbita se va al infinito de R^n, su parámetro podrá permanecer acota do solamente si f no sólo no está acotado, sino que se va al infinito de R^n en el espacio imagen. Esto se aplica para regularizar" el parámetro sobre las órbitas:nultiplicamos el dato por una función numérica que dependa de z, y que lo haga acotado ,obteniendo un dato g con las mismas órbitas , peró con parámetros que van de menos a más infinito en todos los casos .

2 .- Dos datos que coinciden,(para un z) en un abierto de U^n determinan en dicho abierto la misma descomposición en órbitas,con el mismo parámetro canónico . Por tanto si f (z fijo) admite una extensión C^k a la adherencia de U^n las órbitas de f con parámetro incompleto sino convergen al infinito de R^n,necesariamente tienen límite puntual en la frontera de U^n . Esto generaliza lo dicho en nota 1 .

3 .- Si el parámetro de una órbita está completo ($I_{yz} = R^1$) , la órbita puede converger hacia un punto de U^n ; pero entonces este punto está en el conjunto singular del dato (z fijo) . Véase Bieberbach ,Diferentialgleichungen , 3ra. edición,serie amarilla,pag.80-81 ;las paginas subsiguientes l.c. dan idea sobre la variedad de posibilidades para n=2 ; también Codd-Levinson,citado al final de esta exposición , y Lefshetz, Diff. Equations:Geometry - Theory .

Terminemos la demostración del punto b) del lema 2. Pongamos $u_f(y_1,z_1,t) = u(t)$. Supongamos que exista $c_i < b_1$ con $c_1 < c_2 < \ldots$, $\lim c_i = b_1$, $\lim u(c_i) = y_0$. Indiquemos con U_b un policubo abierto de amplitud b, centro y_0 y adherencia contenida en U^n, y supongamos $u(c_i) \in U_b$. Indiquemos con $I_1, I_2, \ldots$ los intervalos abiertos (que por absurdo suponemos infinitos) imágenes inversas por u de las componentes conexas de la intersección con U_b del soporte de u ; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_i \in I_i$. Si $I_i = (a_i, d_i)$ es claro que $u(a_i)$ y $u(d_i)$ están en la frontera de U_b, luego $\|u(a_i) - y_0\| = b$. Sea $t \to v(t)$ una solución de $D_t v = f(v,z_1)$ con $v(b_1) = y_0$, definida en $I = (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon)$, con $v(I) \subset U_b$; podemos suponer $I_i \subset I$ para $i = 1,2, \ldots$. Pongamos $u(t) - v(t) = w(t)$, definida sobre (a_1, b_1). Se tiene por aplicación repetida del teorema del valor medio:

$$\begin{aligned}\|w(a_i) - w(c_i)\| &= \|f(u(\theta_i),z_1) - f(v(\theta_i),z_1)\| \cdot |c_i - a_i| \\ &\leq Mn\|u(\theta_i) - v(\theta_i)\| \cdot |c_i - a_i| \ , \ (a_i < \theta_i < c_i) \\ &\leq 2Mnb|c_i - a_i| \ ; \text{ con } M = \|f\|_1 \text{ en } \overline{U}_b \ .\end{aligned}$$

Tomando límites es $\lim\limits_{i\to\infty}\|w(a_i)\| = 0$, luego de $v(a_i) \to v(b_1) = y_0$ resulta $\|u(a_i) - y_0\| \xrightarrow[i]{} 0$, contradicción.

<u>Corolario 1</u> . D_f coincide con la reunión de los

dominios de las soluciones locales continuas del problema general. Por tanto D_f es un conjunto abierto conexo (U^n, W^m son conexos por hipótesis), y las aplicaciones $u_f: D_f \longrightarrow U^n$, $D_t u_f: D_f \longrightarrow R^n$ son de clase C^0. En particular cada conjunto D_f^z es abierto conexo.

Corolario 2. z fijo. El cuociente de U^n por las órbitas sea B, y $U^n \xrightarrow{\varphi} B$ el fibrado correspondiente. La aplicación φ que es continua por definición, es también abierta. En general B no es separado. Condición necesaria y suficiente para que B sea separado es que sea "T_1", o sea todo punto cerrado, o también que toda órbita sea un subconjunto cerrado de U^n.

Problemas. ¿ La ausencia de conjunto singular equivale a la separaciónde B ? . ¿ Es en cualquier caso B una variedad, eventualmente no separada, de dimensión n-1 ? ¿Si indicamos con o a un punto variable en B (o = órbita), y L(o) la función igual a la longitud canónica de su intervalo de definición, $0 < L(o) \leqq \infty$, es L semicontinua inferiormente en B ? . ¿En que casos es el fibrado φ localmente trivial ? . Etc. Esto son sugerencias para consultar la bibliografía (p.ej. Tesis de REEB).

Para terminar la demostración del teorema de dependencia de condiciones iniciales y parámetros ,veamos que u_f y $D_t u_f$ son de clase C^k , y que $D_x u_f$ (x,z,t) es no singular.

Ante todo,observemos que se puede suponer $m=0$, o sea ausencia de parámetros. Basta reemplazar el dato f por el dato g definido así :

$g:V^{n+m} x R^o \longrightarrow R^{n+m}$, $V^{n+m} = U^n x W^m$, $g^i = f^i$ si $1 \leq i \leq n$ (identificamos $((y,z),0) = (y,z,0) = (y,z)$) , $g^i = 0$ si $n < i \leq m+n$.

Pues una solución $u: I \longrightarrow R^{n+m}$ del problema

$D_t u = gu = g(u)$,concondición $u(0) = (y,z)$,

necesariamente tiene $u^i =$ constante si $n < i \leq m+n$, y más precisamente $u^{n+1} = z^1, \ldots, u^{n+m} = z^m$. Luego la solución completa $u_g((y,z),t)$ coincide con $u_f(y,z,t)$ para cada

$(y,z,t) \in D_f$.

Es facil ver que los dominios de las soluciones completas coinciden , esto explica el oficio casi nulo desempeñado por los parámteros hasta ahora .

En la demostración que sigue supondremos, para no alterar la notación,que los parámetros están ahí, pero solamente usaremos derivadas parciales con respecto a los y_i . Si logramos demostrar que $D_y u_f$ existe y es continua en sus $n+m+1$ variables,ello implicará que $D_z u_f$ existe , etc .

Necesitamos apoyarnos en una ecuación con dato lineal. Recordemos lo que eso quiere decir en el caso general Llamemos F al dato . Se tiene dada una $F=F$ (x,parámetros,t) se fija un valor de los parámetros y se busca una $v:I\to R^n$ tal que $Dv = F(v,par.,t)$ para t en I. Decir que F es lineal significa decir que es lineal en la variable x : $x\to F(x,..,t)$ es aplicación lineal de R^n en R^n.

El dato se dice afín si dicha aplicación es afín, todo esto para cada valor de los parámetros y t. La aplicación se dice a coeficientes constantes si F no depende de t. Usualmente se usa "lineal homogénea" por lineal, y "lineal" por afín. En lo que sigue nos va a interesar el caso lineal a coeficientes no constantes, y los parámetros varían en $U^n x W^m$. Explicitemos las notaciones.

$F = (F^1,\dots,F^n)$, $F^i = F(x,y,z,t) = x^1 G^i_1(y,z,t) + \dots + x^n G^i_n(y,z,t)$ donde (y,z) indica el parámetro, que supondremos varía en un conjunto $U^n x W^m$, mientras que (y,z,t) varía en un conjunto unión de intervalos $\{y\} x \{z\} x I_{yz}$, (y,z) variando libremente en $U^n x W^m$; suponemos que cada I_{yz} es un intervalo abierto que contiene el origen 0^1, y que llamamos al conjunto unión de estos (y,z,t), conjunto D_f por conservar la notación de antes. Así, cada G^i_j es una función con dominio D_f y valores reales, que suponemos C^0 y de clase C^k en t, mientras que cada F^i es una función con dominio $R^n x D_f$ y valores reales, y finalmente F es una aplicación lineal en x : $F : R^n x D_f \longrightarrow R^n$.

Usaremos algunos resultados elementales de las soluciones con dato F ,cuyos detalles pueden verse en el libro de L. Graves sobre "Funciones reales",2da. edición,pags.161-162. En parte ellos son consecuencia de lo dicho aquí : para cada $(x_0,y,z) \in R^n x U^n x W^m$ existe una $v = v(t) = v(x_0,y,z,t)$, $v: I \longrightarrow R^n$,definida en algún intervalo I que contiene el origen R^1 , y que supondremos máximo ,tal que $F(v,y,z,t)$ tiene sentido (o sea $I \subset I_{yz}$) ,$D_t v$ existe para todo $t \in I$, se tiene $D_t v = F(v,y,z,t)$,y $v(0) = x_0$; unívocamente determinada por las condiciones precedentes, y $v = v(x_0,y,z,t)$ es continua en sus $2n+m+1$ variables (lema 1) . Agregamos,se tiene en realidad $I = I_{yz}$ para todo (y,z) ,por lo que el dominio de $v = v(x_0,y,z,t)$ coincide con el dominio de $F : R^n x D_f$, y por tanto es abierto en R^{2n+m+1}. El agregado se demuestra teniendo en cuenta que (y,z) queda fijo , y que el dominio de variación de x es todo R^n,por el procedimiento de la demostración del lema 2 (evidente). También resulta de muestras consideraciones que si F_d es un dato análogo a F ,con igual dominio (funciones $G^i_{dj}(y,z,t)$),definido para cada d con $|d| < \mathcal{E}$, y si para cada (y,z) fijo, se tiene $F_d \longrightarrow F$ $(d \rightarrow 0)$,uniformemente para cada compacto de x's en R^n y de t's en un intervalo compacto J ,y si además las normas $\| \ \|_1$ de las derivadas parciales de las F_d respecto de las x semantienen acotadas sobre cada compacto,entonces la solución con dato F_d, sea $v_d(x_0,y,z,t)$ converge punto a punto hacia $v(x_0,y,z,t)$ en $R^n x D_f$, la convergencia siendo "equicontinúa" y uniforme sobre cada compacto de t's ;la convergencia siendo compacta también sobre los x's,como es facil ver aunque no usaremos (Ejercicio!). Hasta ahora la linealidad de F no intervino. Teniéndola en cuenta resulta (!) $v(x_o,y,z,t)$ también lineal en x_o,como resulta derivando respecto a t a una suma $v(x_1,y,z,t) + v(x_2,y,z,t)$ y reemplazando en la ecuación . Luego " las soluciones forman un espacio vectorial ((y,z) fijo) de dimensión menor o igual que n , de aplicaciones de I_{yz} en R^n " . Una base se obtiene tomando las soluciones correspondientes a ,por ejemplo ,

$$x_o = (1,00.......,0),\ x_o = (0,1,0,...,0),\text{etc}$$

que indicaremos con $e_1,e_2,.......,e_n$, o sea $e_i = (\delta_{ij})$ de Kronecker .

La soluciones $v(e_i,y,z,t)$ son linealmente independientes para cada (y,z) porque siendo aplicaciones basta verificar la independencia en un punto del dominio I_{yz} ;luego tómese $t=0$. De aquí se deduce más : la independencia se verifica para todo t en I_{yz} : si una combinación lineal de las $v(e_i,y,z,t)$ se anula para un t , por tanto manda ese t en 0^n,debe coincidir por el teorema de unicidad con la aplicación idénticamente nula que también manda ese t en 0^n .

Dicho de otro modo : <u>la matriz cuyas columnas son los vectores</u> $v(e_i,y,z,t)$ <u>es invertible para todo</u> $(y,z,t)\in D_f$.

Lo que precede es aplicable cuando se tiene un da to f con las notaciones de antes, de clase C^k, siendo u_f su solución completa, tomando una F (subordinada a f) definida mediante $G^i_j(y,z,t) = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^j}(u_f(y,z,t),z)$. Por el corolario 1, u_f es C^0 en D_f, luego siendo $k \geq 1$, se tiene que G^i_j es C^0. O sea F es C^k en su variable x, C^{k-1} en su variable t, y C^0 en sus variables y,z. En particular F es C^{k-1} en su variable (x,t). Luego v(x,y,z,t) es C^0 en todas sus variables.

<u>Lema 3</u>. Existen las derivadas parciales de $u_f(y,z,t)$ en todo punto de D_f, con respecto a las variables y, y la correspondiente matriz $D_y u_f$ coincide con la matriz $(v(e_1,y,z,t),\ldots,v(e_n,y,z,t))$.

<u>Notas</u>. 1- La primera columna de $D_y u_f$ está formada por las derivadas respecto de y^1 de las diferentes componentes de u_f, la cual debe coincidir con la matriz-columna

$v(e_1,y,z,t)$. Etc.

2- Como $u_f(y,z,0) = y$, si existe $D_y u_f$ es $D_y u_f(y,z,0) = I_n$. Luego siempre supuesta dicha existencia, para demostrar el lema basta demostrar que cada columna de $D_y u_f$ es solución de la ecuación con dato F, subordinado a f, definido atrás. Por simetría basta demostrar que la primera columna de $D_y u$ es una solución.

<u>Demostración</u> . La demostración consiste en mostrar que los cuocientes incrementales formados para calcular las derivadas con respecto a y^1, de las distintas componentes de u_f, satisfacen una ecuación con dato F_d que converge hacia F cuando d tiende a cero ($d =$ incremento de y^1) siendo esta F la subordinada a f, definida atrás . Se observará que F_d está definida en un conjunto de la forma $R^n \times D_d$ donde D_d es un abierto creciente con la disminución de d, y convergente hacia D_f . Por lo demás se cumplen las especificaciones adelantadas sobre F_d . La convergencia de F_d hacia F será, uniforme sobre cada compacto, desde un d bastante pequeño para que el dominio de F_d incluya al compacto (de x's) .

Cálculo :

$$c_d^i(y,z,t) = d^{-1}(u_f^i(y+de_1,z,t) - u_f^i(y,z,t)) \ ,$$

luego derivando respecto de t y teniendo en cuenta que u_f es solución de la ecuación con dato f:

$$D_t c_d^i(y,z,t) = d^{-1}(f^i(u_f(y+de_1,z,t),z) - f^i(u_f(y,z,t),z)) =$$

= (abreviando la notación)

$$= d^{-1}(f^i(y_2,z) - f^i(y_1,z)), \text{ por valor medio}$$

$$= d^{-1}\sum_j \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(y_1+\theta^i(y_2-y_1),z)(y_2-y_1)^j$$

donde $\theta^i = \theta^i(d,y,z,t)$ está entre 0 y 1 .

Luego volviendo a las variables y,z,t ,y designando con G^1_{dj} al coeficiente de $d^{-1}(y_2-y_1)^j = c^j_d$ se tiene:

$$D_t c^1_d(y,z,t) = \sum_j c^j_d\,(y,z,t)G^1_{dj}(y,z,t)$$

Luego c_d es solución de la ecuación con dato lineal F_d(definida atrás) . Además $\lim F_d(d \rightarrow 0) = F$, odicho directamente

$$\lim_{d \rightarrow 0} G^1_{dj}\,(y,z,t) = \frac{\partial f^1}{\partial x^j}\,(u_f(y,z,t),z)$$

Como lo que interesa es lo que ocurre cuando se fija un(y,z), y entonces F_d está definida en $R^n x \{y\} x \{z\} x I_{yz}$ desde un d bastante pequeño,es aplicable el razonamiento sobre la convergencia de las soluciones :existe la primera columna de $D_y u_f$ y para cada $(y,z) \in U^n x W^m$, la aplicación $t \longrightarrow D_y u_f\,(t)$ está definida en I_{yz} y es una solución de la ecuación con dato F subordinado a f . QED .

Del lema 3 se deduce :

cada columna de la matriz $D_y u_f$ es una restricción de la solución completa u_f de un problema general con dato (lineal) $F = F(x,y,z,t)$,donde F es de clase :

$$\text{(8)} \qquad \text{Clase } F \geqq \min(\text{clase } f\text{-}1, \text{clase } u_f)$$

(usamos aquí por"clase f " el número "mayor k tal que f es de clase C^k " ,para poder calcular numéricamente) .

Análogamente se tiene con los parámetros,como ya se ha explicado , y resulta que la matriz $D_z u_f$ está compuesta por columnas que son restricciones de la solución completa de un problema general con dato (afín!) $Z = Z(x,y,z,t)$ donde Z ,como se verifica enseguida ,es por su definición, de clase :

(9) $\quad$ clase $Z \geq \min($clase $f - 1$, clase $u_f)$

Además es claro que de la ecuación diferencial resulta que la columna $D_t u_f$ tiene clase

(10) $\quad$ clase $D_t u_f \geq \min($clase f,clase $u_f)$

Decir que es restricción .....,implica en los dos casos anteriores que tenemos

(11) $\quad$ clase $D_y u_f \geq$ clase u_f,clase $D_z u_f \geq$ clase u_z

De estas cinco desigualdades resulta por inducción respecto de la clase ("estricta") k de f que u_f tiene por lo menos la clase de f . Para $k=1$,clase $f \geq 1$ implica clase $u_f \geq 1$. Supuesto que clase $f \geq k-1$ implica clase $u_f \geq k-1$ para cualquier dato f,entonces admitamos clase $f \geq k$.

De (10) resulta clase $D_t u_f \geq k-1$,además es clase $u_f \geq k-1$,luego de (8) y (9) sigue que clase $F \geq k-1$, clase $Z \geq k-1$, luego de (10) (esta es la 3ra.vez que usamos la hipótesis de inducción) es de clase $D_y u_f \geq k-1$, clase $D_z u_f \geqq k-1$. Luego reuniendo resultados (o por mejor decir reuniendo columnas) es clase $Du_f \geqq k-1$. Luego

clase $u_f \geqq k$ QED .

Sabiendo que $u_f = u_f(y,z,t)$ es de clase $\geqq k$, resulta $D_t u_f$ también de clase $\geqq k$, reemplazando en la ecuación diferencial . Además las distintas derivadas respecto de y, z,t se obtienen derivando en $D_t u_f = f(u_f, z)$. Por ejemplo:

$$D_y D_t u_f = D_t D_y u_f = D_x f(u_f, z) . D_y u_f \ , D_t D_z u_f = D_x f(u_f, z) . D_z u_f + D_z f$$

donde puntos indican producto matricial . Se obtienen así , las distintas ecuaciones diferenciales afines, eventualmente lineales, a que satisfacen las derivadas de u_f. Para que la notación no se enrede hay que identificar las derivadas sucesivas con tensores sobre R^n . No vale la pena establecer, por inducción las fórmulas generales, porque no las vamos a usar . De todas modos no hay dificultades conceptuales .

Lo dicho vale para $k = \infty$. El caso analítico lo veremos en otra parte .

Observación importante . Las resoluciones han podido ser llevadas al caso en que el dato no depende ni del tiempo ni de parámetros. Este es pues el caso que conviene profundizar aceptando cuando sea necesario ,todos los resultados análogos del caso en que hay dependencia del tiempo y parámetros. Un ejemplo es la inducción recién hecha : para saber que u_F admite derivadas respecto de y,que es parámetro para F, hubo que razonar con f y u_f en la cual y es variable independiente . Además en la teoría que precede,la proposición 4 es central como se ha visto por sus consecuencias . El centro de esta teoría está pues en el grupo monoparamétrico local h_t. Por tanto conviene aclarar lo mejor posible los conceptos vinculados . A eso vamos .

3 . Ecuaciones sobre variedades . Ante todo demos una interpretación geométrica del "dato" de las secciones precedentes .Supondremos que no hay parámetros ($m = 0$) .

Si U es un abierto de R^n llamemos espacio de vectores tangentes a U en el punto x ($x \in U$) , al producto cartesiano $\{x\} \times R^n$.
(un vector tangente es un par (x,y)). Es un espacio vectorial que consideramos canónicamente asociado al punto x de U . Si $f: U \longrightarrow R^n$ es una aplicación (ahora supondremos siempre C^∞), le asociamos el campo de vectores tangentes

$x \longrightarrow (x,f(x))$, $\quad x \in U$. $\quad v: I \longrightarrow U$

es una solución del problema con dato f si $D_t v = fv$. Esto se puede interpretar así . El diferencial dv manda el campo de vectores tangentes sobre I , $t \longrightarrow (t,1)$,en la restric - ción del campo $x \longrightarrow (x,f(x))$ al soporte de la curva v . Con estas formulaciones los resultados de las secciones prece - dentes se transportan automáticamente a variedades (supon - dremos C^{∞}), y se condensan en varias definiciones y un te orema .

En lo que sigue $M = M^n$ es una variedad (C^{∞},como todo a partir de ahora) : espacio separado cubierto por mapas diferenciablemente compatibles, no necesariamente paracompacta.

__Definición__ . $\mathcal{T}^{1,0}$ (M) . Es el haz de gérmenes de campos diferenciables de vectores tangentes sobre M (tensores de tipo (1,0)) . Lo indicaremos sencillamente con $\mathcal{T}$. En este haz cada fibra admite dos estructuras principales : álgebra de Lie sobre los reales , y (si la fibra está sobre $x \in M$) módulo sobre el anillo conmutativo de los gérmenes de funciones diferenciables a valores reales , en el punto x . El producto de Lie es el paréntesis de Poisson que es deducido del producto "aplicación sucesiva" de gérmenes de campos vectoriales en un punto x ; respecto de este producto la fibra sobre x es un álgebra asociativa sobre los reales a la cual está subordinada la estructura de álgebre de Lie antes mencionada .

__Definición__ de $\mathcal{G}_p^1$ (M) es el haz de gérmenes de grupos locales diferenciables ,monoparamétricos ,de homeomorfismos locales diferenciables de M . (p por parámetro) . Lo indicaremos con $\mathcal{G}$.

Por definición un tal grupo es una aplicación diferenciable h: UxI $\longrightarrow$ M : $(x,t) \longrightarrow h(x,t)$ donde U es un abierto en M ,I un abierto en R^1 ,que supondremos conexos, I entorno de 0^1,tal que para cada t fijo ,la aplicación $x \longrightarrow h(x,t)$ es un homeomorfismo local (que resulta tener dominio U ,y ser diferenciable) de M, sea h_t :U $\longrightarrow$M ,de modo que la aplicación $t \longrightarrow h_t$ es un homomorfismo local del grupo abstracto R^1 en el seudo-grupo abstracto de los homeomorfismos locales de M . Por lo demás este homomorfismo - a consecuencia de los axiomas- respeta las estructuras topológicas y diferenciables de ambos seudo-grupos ;en particular h_0 es la identidad sobre U,y cuando $t \longrightarrow 0$ h_t converge uniformemente sobre cada compacto a la identidad sobre U .

$\mathcal{G}$ admite estructuras algebraicas análogas a $\mathcal{E}$ .Ellas pueden definirse directamente, o mediante las estructuras de $\mathcal{E}$, transportadas por la correspondencia Φ que pasamos a definir .

<u>Definición</u> , <u>de</u> Φ . Sea $\gamma = \gamma_x(h)$ el germen del grupo h en el punto $x \in U$. Para toda función a valo-

res reales ,diferenciable y definida en un entorno de x en U sea g, definimos Xg como aquella función en un entorno de x dada por

$$Xg(y) = \lim(t \to 0)(1/t)(g(h(y,t)) - g(y)) .$$

El gérmen de Xg en x depende solamente del germen de g en x y se verifica que $\gamma_x(g) \longrightarrow \gamma_x(Xg)$ es una derivación del anillo de gérmenes de funciones diferenciables en x . Luego, dicha correspondencia es un vector tangente a M en x ,que indicamos con X . La asociación $x \longrightarrow X_x$,$x \in U$ define un campo de vectores tangentes sobre U que es diferenciable , y cuyo germen en un punto x_0 no depende de h sino $\gamma_{x_0}(h)$. Ya sea, en concepción de pre-haz o de haz se tiene así una aplicación $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{T}$.

Los resultados de las secciones 1 y 2 se resumen en el :

TEOREMA . Φ es un isomorfismo de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{T}$

<u>Demostración</u> . Consecuenia de las definiciones (reformulación de los teoremas del número 2) . Este isomorfismo admite una propagación canónica a los respectivos grupos de cohomología de la variedad respecto de cada uno de dichos haces . El haz $\mathcal{T}$ es más manejable,en el sentido que su estructura algebraica admite definiciones más sencillas . Es

claro que $H^o(M, \mathcal{G}) \cong H^o(M, \mathcal{T})$,secciones globales respectivas (supondremos ahora M paracompacta -caso clásico- y la cohomología puede tomarse la de Cech) . Para estas secciones el isomorfismo de vuelta ϕ^{-1} nos da para un campo x diferenciable global de vectores tangentes sobre M ,el campo de órbitas locales parametrizadas que resuelve la ecuación diferencial con dato X . Esto termina la formulación del teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias .

Si M es compacta,cualquiera sea el campo de vectores tangentes, sea X ,existe un grupo local h de la forma $h: M \times I \longrightarrow M$, tal que $x \longrightarrow \gamma_x(h)$ coincide con $\phi^{-1}(X)$. (pues M puede cubrirse con un número finito de dominios U_i correspondientes a $h_i: U_i \times I_i \longrightarrow M$ determinantes de $\phi^{-1}(X)$ luego,tómese I = intersección de los I_i) .

Como R^1 es simplemente conexo ,la aplicación $t \rightarrow h_t$, $t \in I$, admite prolongamiento único a $t \longrightarrow h_t$,$t \in R^1$.Luego:

COROLARIO . M compacta .

A todo campo diferenciable de vectores tangentes definido sobre M,corresponde un grupo de automorfismos diferenciables de M,parametrizado por R^1,con parametrización diferenciable,sea $t \rightarrow h_t$, $t \in R^1$,tal que las órbitas parametrizadas correspondientes resuelvan el campo dado . La correspondencia es u nónica = natural y biúnivoca .

La dependencia diferenciable del parámetro se expresa, como sabemos por la condición que $h: M \times R^1 \longrightarrow M: (x,t) \longrightarrow h_t(x)$ sea aplicación C^∞ para las estructuras de variedad C^∞ del dominio y de la imagen . Este corolario tiene aplicación para dominios otros que los U^n del nº 2, porque nunca un abierto no vacío de R^n es compacto. Por ejemplo para esferas y toros (Etc) $h(x,t)$ es la integral completa canónica; esencialmente la integral completa canónica es la aplicación h (si avanzo t minutos a partir de un punto fijo x_o, y luego considero el punto donde estaba hace t minutos, me resulta x_o ; cualquiera sea t).

En el caso compacto buscar una integral completa global es buscar una aplicación de $M \times R^1$ sobre M regular de rango = (dimensión de M) en todo punto, constante sobre las órbitas , sea G . Ello equivale a que el diferencial dG manda el campo $(x,t) \longrightarrow (X_x, 1)$ en el campo idénticamente nulo sobre M .

<u>Problema</u> . Sea (N,Y) una variedad N , más un campo diferenciable Y sobre N , de vectores tangentes nunca nulos . Determinar que condiciones debe realizar el par (N,Y) para que exista una variedad M y una aplicación G de N sobre M , tales que $dG(Y) = 0$. En caso de existir un tal $G: N \longrightarrow M$, existe ? uno con la propiedad de maximalidad

(estructuras universales) :para todo G_1 existe un F con $FG = G_1$, G = maximal . Análogamente se pide dado (N,Y) una aplicación $G:N \longrightarrow N$,maximal en el sentido de antes tal que $dG(Y) = 0$;aquí G no tiene que ser suryectiva . Por ejemplo si lás órbitas son cerradas (Corolario 2 del nº 2) ,puede ponerse $M = N/Y$, G = proyección canónica .

Del TEOREMA resultan como corolarios otros teoremas de integración de "campos de elementos de contacto" . Resultará claro que el caso en que el dato es un X -campo de vectores tangentes- es el caso más general, o mejor dicho más precisado .Dejando a X cierta libertad tadavía hay problemas de integración con sentido .

PRECAUCION : para nosotros X es una sección del haz $\mathcal{E}$;luego X_x es un germen del campo vectorial en el punto x ,y <u>no un vector tangente</u> . No hay peligro en la identificación cuando se sabe de qué se está hablando .

$\mathcal{E}_x$ es ,como sabemos,un espacio vectorial de dimensión infinita sobre los reales,y un módulo libre de rango n (= dim M) sobre el anillo conmutativo de los gérmenes de funciones diferenciables a valores reales,en el punto x .

Dado el campo de elementos de contacto X, definimos los tres campos : $L_v(X)$, $L(X)$, $M(X)$ mediante:

<u>$L_v(X)$</u> : a cada $x \in M$ asociamos la subvariedad lineal de T_x ,espacio tangente a M en x ,formada por los múltiplos reales del vector tangente "X_x" ,sea $L_{vx}(X)$. Geométricamente el campo $x \longrightarrow L_{vx}(X)$ asocia a cada punto x de M o bien el punto x o bien una recta tangente a M en el punto x ;en definitiva una variedad lineal tangente de dimensión ≤ 1 .

<u>$M(X)$</u> : es el campo $x \longrightarrow M(X_x)$,que asocia el punto $x \in M$,el submódulo de $\mathcal{E}_x$ engendrado por el gérmen X_x , sea $M(X_x)$. Es claro que $M(X_x)$ es un módulo libre de rango 1,en el cual es generador cualquier germen de campo vectorial que en el entorno del punto x pueda representarse como el producto de X por una función a valores reales diferente de 0 en el punto x . En particular,si al campo X sobre M se lo multiplica por una función a valores reales (diferenciable) f con $f(x) \neq 0$ para todo $x \in M$, sea $fX = Y$, el campo Y determina en cada $x \in M$ un germen que engendra también $M(X_x)$: esto da una interpretación sencilla a $M(X)$.

$M(X)$ está determinado no por X sino por la clase de los Y que son de la forma fX , $f \neq 0$ en todo punto de M . Más precisamente $M(X) = M(Y)$ equivale a "existe $f \neq 0$ tal que $X = fY$" . Geométricamente el campo $M(X)$ asocia a cada x , ó bien el germen de M en el punto x (cuando X es idénticamente nulo en un entorno de x) ,o bien una "recta" tangente al germen de M en el punto x,de gérmenes de campos vectoriales en el punto x . "Recta" entendida para el anillo de coeficientes formado por los gérmenes de funciones en x . - Más sencillo : el campo M(X) es el concepto constituído por un campo de vectores sobre M más las posibles deformaciones de dicho campo que solamente alteran,diferenciablemente ,el módulo o sentido del vector,pero sin anular a un vector que no es nulo, ni sin desanular a uno que es nulo.

Si M es conexa es claro que la deformación o bien altera todos los sentidos, o bien no altera ninguno .Al hablar de módulo estamos introduciendo subrepticiamente una métrica ,la cual no tiene nada que hacer aquí. Al hablar de deformación no se debe entender "continua"en el sentido homotópico. Huelgan comentarios .

<u>L(X)</u> : $x \longrightarrow L_x(X)$,donde $L_x(X)$ es el subespacio sobre los reales,engendrado en $\mathcal{T}_x$ por el germen X_x. Tiene dimensión 0 si X se anula en un entorno de x idénticamente . De lo contrario $X_x \neq 0$,luego,la dimensión de $L_x(X)$ es 1 sobre los reales . Estas son rectas decentes .

$L(X) = L(Y)$ si y solo si X e Y difieren en un entorno de cada x,multiplicativamente en una constante. Luego si M es conexa ,si y solo si existe un número real $a \neq 0$ con $aX = Y$, Análoga interpretación geométrica . En los tres casos el dato de la ecuación diferencial sobre M es un campo de variedades lineales de dimensión menor o igual que 1 ,situadas , en módulos tangentes en los distintos puntos de M ;estos campos son diferenciables en el sentido que están construídos sobre la base de un campo diferenciable, en el sentido conocido,de vectores tangentes (o de gérmenes de c.v.t.) . La diferenciabilidad puede definirse directamente definiendo , haces o fibrados convenientes, y el campo como sección(resp) continua o diferenciable . Ejercicio para el lector .

Veamos la solución para cada ecuación diferencial . Tomemos el caso M compacto conexo ; el caso general se trata en forma análoga .

Dato L(X) . La solución es el grupo h_t desparametrizado. Existe pues correspondencia biunívoca entre los datos L(X) y los grupos de Lie de dimensión menor o igual que 1 ,conexos (un elemento,reales módulo 1,reales) de automorfismos de M. Todo C^∞ .

O también :la solución es una descomposición en órbitas cuyo parámetro está determinado salvo dos constantes la aditiva de antes y la multiplicativa de ahora.

Lo dicho resulta de que dos parametrizaciones distintas con R^1 ,de un grupo dado,difieren en un automorfismo de R^1, o sea una multiplicación por una constante no nula (positiva o negativa), y los correspondientes campos vectoriales difieren en una constante multiplicativa, lo que era la condición necesaria y suficiente para que el dato $L(.)$ coincidiera para los campos en cuestión.

Dato $M(X) = L_v(X)$. De $L_v(X) = L_v(Y)$ resulta que para todo x el vector tangente X_x engendra el mismo espacio que Y_x. Poniendo $f(x) = 0$ si este espacio es el origen, y $Y_x = F(x)X_x$ en caso contrario tenemos $Y = fX$. Por hipótesis, X e Y son diferenciables. f es diferenciable en todo punto en cuyo entorno X se anule, porque entonces es $f=0$ idénticamente. Si $X \neq 0$ en todo punto de un entorno de x existe g definida en un entorno de x, diferenciable, tal que X_g es diferente de cero en todo punto de un entorno de x.- Pero se tiene $Yg(y) = f(y).Xg(y)$ en un entorno de x. De aquí se deduce que f es diferenciable en la subvariedad de M formada por los puntos donde $X \neq 0$ o X es localmente nula, el resto es ralo en M. Esto permite comparar los casos $L_v(X)$ y $M(X)$. (Podemos suponer que el campo no es idénticamente nulo en ningún abierto). En un abierto donde el campo nunca es nulo los campos subordinados $L_v(M)$ y $M(X)$ coinciden esencialmente. Integrar el dato $L_v(X)$ significa encontrar un germen de subvariedad en un punto x, de dimensión 1, cuyo germen de campo de tangentes rectas coincida con la restricción de $L_v(X)$ a la subvariedad . Luego la solución del campo $L_v(X)$ es la descomposición en órbitas,desparametrizadas . Luego lo mismo para M(X) . En verdad, si el campo X se anu la en algún punto de M se debe rechazar la definición de $L_v(X)$ que no es adecuada más que para comparar geométricamente con M(X) ,cuando el campo no se anula en un abierto.

Notas . 1- Falta,para completar la descripción una definición directa de "descomposición en órbitas". Para el caso de dimensión cualquiera esto es uno de los objetivos principales de la teoria de las variedades folia - das (ver tesis de Reeb,y bibliografía allí citada) .

2- De M(X) = M(Y) se deduce la f afirmada para un entorno del soporte de X,el cual entonces coincide con el soporte de Y,de modo que X = fY ,f ≠ 0 en todo punto de su dominio . Si el campo se anula idénticamente en un abierto , f no resulta definida allí. Hay que terminar la definición a pulso. Esto se hace usando un lema de extensión conocido usando una partición diferenciable de la unidad. Por lo demás,para el problema que teníamos entre manos esa extensión es inesencial . Lo que queríamos era inter - pretar geométricamente el significado del concepto de solución para el dato M(X) : queríamos llegar a que "también" la descomposición en órbitas sin mención alguna de parámetros u orientación,podía concebirse como "la" solución de un problema diferencial .

3- Si queremos que la solución sea la descomposición en órbitas orientadas, basta definir X equivalente a Y cuando existe una f estrictamente mayor que 0 tal que $X = fY$. Esto para el dato M(X) . Análogamente para los demás . En particular, tomando $X \neq 0$, tenemos que sabemos integrar un "campo diferenciable de semirrectas tangentes" y que la solución es una descomposición en órbitas orientadas o si se prefiere, la solución es una clase de grupos de Lie, etc.

4- Véase Coddington-Levinson , Theory of Ordinary Diff. Equa., Mc Graw-Hill Book Company. Caso de M = toro - 2 , y otros casos con n = 2 ; últimos capítulos del libro .

Impreso en los Talleres Gráficos del
Centro Estudiantes de Ingeniería de
La Plata, calle 47 Nº 279, La Plata
República Argentina