

## RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

C. Sacco<sup>a</sup>, E. Gonzalez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Mecánica - Instituto Universitario Aeronáutico

Av Fuerza Aérea 6500- Córdoba.

Email: csacco@iua.edu.ar

### RESUMEN

*En este trabajo se presenta el desarrollo de un código computacional para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes incompresible. El código está basado en un algoritmo de pasos fraccionados (de tres pasos) lo que da como resultado un esquema semi-implícito. La discretización se realiza mediante elementos tetraedros lineales de cuatro nodos, mientras que la estabilización de los términos convectivos y de la incompresibilidad se utiliza una técnica de Orthogonal Subscale Stabilization. La discretización en el tiempo se puede realizar mediante un esquema de Runge Kutta de cuarto orden o un esquema de Euler hacia atrás. El código resultante está paralelizado utilizando OPENMP. El programa permite simular flujo turbulento, fenómenos de convección natural, transferencia de calor, transporte de contaminantes, múltiples marcos rotativos. Finalmente se presentan una serie de aplicaciones y comparaciones para verificar el funcionamiento del mismo.*

**Palabras claves:** CFD, elementos finitos, Navier Stokes

### INTRODUCCIÓN

Si bien la mecánica computacional no es una disciplina nueva, gracias a las grandes mejoras experimentadas en el desarrollo de las computadoras, han hecho de la simulación numérica una herramienta de suma utilidad en la ingeniería. Uno de los campos donde la mecánica computacional ha revolucionado por completo la forma de trabajar es en la mecánica de fluidos.

Si nos remontamos a mediados de la década del 90 la única forma de realizar simulaciones, con resultados confiables, era mediante el uso de las llamadas super computadoras, que estaban al alcance de muy poca gente. Las nuevas tecnologías y la continua mejora de los algoritmos de cálculo han hecho posible que estos mismos programas de simulación puedan correr en Computadoras Personales de bajo costo.

En la actualidad existe un gran número de programas para realizar simulaciones de problemas de mecánica de fluidos, entre ellos podemos nombrar a FLUENT, STAR-CD, CFX, OpenFOAM, FEATFLOW, entre otros. Si bien la mayoría de estos códigos dan resultados aceptables para la muchas aplicaciones, existen una gran cantidad de problemas que requieren de formulaciones específicas para lo cual debe modificarse el Software, lo cual no es posible con los programas de tipo comercial.

Por otro lado el hecho de desarrollar software específico para problemas determinados permite una mejor optimización de los recursos disponibles.

En el presente trabajo se presenta un código en el cual se resuelven las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles utilizando elementos finitos para la discretización en el espacio y Runge Kutta en el tiempo. Además de resolver las ecuaciones de la dinámica de fluidos también puede tratar problemas de transporte de contaminantes, problemas de convección natural, marcos de referencia rotantes, tratamiento de la turbulencia, superficie libre, transferencia de calor con radiación

y problemas con mallas móviles mediante una formulación tipo ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*).

## METODOLOGÍA

En este apartado se hará una descripción del tratamiento de las ecuaciones de la mecánica de los fluidos y de su forma discreta, obtenidas mediante la aplicación del método de los Elementos Finitos.

### Ecuaciones de Navier Stokes

La modelización del medio continuo se realiza mediante la utilización de las ecuaciones de Navier Stokes para flujo incompresible. Asumiendo que la densidad es constante, la ecuación de la energía queda desacoplada y no se tiene en cuenta para el planteo del problema. Por lo tanto, dado un dominio  $\Omega$  cuyo contorno es  $\Gamma$  las ecuaciones se expresan de la siguiente forma;

Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (1)$$

Ecuación de momento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (2)$$

En las ecuaciones anteriores  $\mathbf{u}$  es el vector velocidad,  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad,  $\nu$  es viscosidad cinemática y  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas volumétricas.

Para resolver estas ecuaciones se imponen las siguientes condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, T) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, t) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0; \quad \mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = t_1 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= t_2 \quad \text{en } \Gamma_M \times (0, t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\Gamma_D$  es el contorno con condiciones de Dirichlet,  $\Gamma_N$  contorno con condiciones de Neumann y  $\Gamma_M$  es el contorno con condiciones mixtas. En las condiciones se cumple que  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M$  y se aplican a todo el intervalo del tiempo  $(0, t)$ .

En las condiciones de contorno  $\bar{\mathbf{u}}$  es la velocidad prescrita,  $\bar{\mathbf{t}}$  es la tracción prescrita,  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie,  $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$  son los vectores tangentes al contorno,  $t_1 = t_t \cdot \mathbf{g}_1$  y  $t_2 = t_t \cdot \mathbf{g}_2$  donde  $t_t$  es el vector de tracción y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones, cuya expresión es:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Finalmente se de deben definir las condiciones iniciales del problema que en este caso será:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{en } t_0 \quad \forall \Omega \\ p &= p_0 \quad \text{en } t_0 \quad \forall \Omega \end{aligned} \quad (4)$$

### Algoritmo de Pasos Fraccionados

Para la resolución de las ecuaciones propuestas se han desarrollado numerosos métodos. Entre ellos encontramos los métodos de pasos fraccionados que fueron propuestos inicialmente en los trabajos de Chorin [5] y Temam [8]. Estos métodos se caracterizan por la descomposición de los diferentes operadores (convección, difusión e incompresibilidad) en cada paso de tiempo. Este tipo de esquema permite satisfacer la condición *inf-sup* o de Ladyzenskaya - Babushka - Brezzi (LBB) utilizando la misma interpolación para la presión y la velocidad.

En este trabajo se presenta un esquema de pasos fraccionados de tres etapas. La ecuación de momento se divide de la siguiente forma.

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta t \left[ \mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\theta} + \gamma \frac{1}{\rho} \nabla p^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\theta} + \mathbf{f}^{n+\theta} \right] \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho} \left( \nabla p^{n+1} - \gamma \nabla p^n \right) \quad (6)$$

donde la derivada respecto del tiempo depende de  $\theta$  ( $\theta = 1$  Euler hacia adelante,  $\theta = 0$  Euler hacia atrás y  $\theta = 1/2$  Cranck Nicholson); el parámetro  $\gamma$  puede valer 1 o 0 dependiendo si se quiere dejar la presión en la ecuación (5). El término  $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$  que aparece en las ecuaciones (5) y (6) se la denomina momento fraccionario y representa una aproximación a la velocidad que no satisface la condición de incompresibilidad.

Tomando la divergencia en la ecuación (6) tendremos:

$$\nabla^2 (p^{n+1} - \gamma p^n) = \frac{\rho}{\delta t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \quad (7)$$

y como por continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \forall t \in (0, T) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ , por lo tanto la ecuación anterior queda,

$$\nabla^2 (p^{n+1} - \gamma p^n) = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (8)$$

## Discretización de las ecuaciones

El método que se utiliza para discretizar las ecuaciones presentadas es el Método de los Elementos Finitos. El esquema resultante es de primer orden ( $\gamma = 0$ ) y la discretización temporal se realiza con un Euler hacia atrás ( $\theta = 0$ ). El algoritmo que se obtiene es de tres pasos y es semi-implícito; el primer paso y el tercero son explícitos, mientras que el cálculo de la presión se lo hace en forma implícita.

Tomando como funciones test  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$  la forma débil de las ecuaciones propuestas quedan de la siguiente forma<sup>1</sup>:

### Momento fraccionario

$$\frac{1}{\delta t} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \nu (\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}^n, \mathbf{v}_h) \quad (9)$$

### Cálculo de la presión

$$(\nabla p_h^{n+1}, \nabla q_h) = \frac{\rho}{\delta t} [( \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla q_h ) - (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^n, q_h)] \quad (10)$$

A la ecuación (8) se le sumó y restó el término  $\nabla \cdot \mathbf{u}_h^n$  y luego se integró por partes con lo cual la condición de contorno natural es,

$$\int_{\Gamma_N} q_h \nabla p_h^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \frac{\delta t}{\rho} \left[ - \int_{\Gamma_N} q_h \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} q_h \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \quad (11)$$

Un inconveniente que se observa en esta forma de imponer la condición de contorno en la presión es que se hace de forma débil, esto hace que en algunos casos aparezca una pequeña capa límite numérica ver [2].

### Corrección de la velocidad

La velocidad intermedia se corrige con la presión obtenida en la ecuación (10) mediante,

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, q_h) \quad (12)$$

### Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno de la velocidad se aplican a las velocidades corregidas  $\mathbf{u}_h^{n+1}$ , mientras que las condiciones de contorno que involucren a la presión  $p_h^{n+1}$  se imponen en la ecuación (10).

<sup>1</sup>En las ecuaciones anteriores se utilizó la notación  $(a, b) = \int_{\Omega} a \cdot b \, d\Omega$ .

## Términos de estabilización

### Términos convectivos

La forma discreta de los términos convectivos producen una inestabilidad numérica al trabajar con números de Reynolds ( $R_e$ ) altos, por lo tanto, se debe utilizar un método de estabilización apropiado para evitar estas dificultades.

En este trabajo se utiliza el método denominado *Orthogonal Sub-scale Stabilization* (OSS), ver [1, 3]. La expresión resultante para el término de estabilización, que se añade a la ecuación (9) se escribe de la siguiente forma:

$$STB_u = - (\tau_1 (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \quad (13)$$

donde  $\pi_h^n$  es la proyección de los términos convectivos en el subespacio de las funciones de test  $(\tilde{\mathbf{v}}_h) \in \mathbf{V}$ , y se obtienen mediante:

$$(\pi_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h) = (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h) \quad (14)$$

El parámetro  $\tau_1$  es un tiempo intrínseco que depende del problema ver [3]. La ecuación (14) se calcula en forma explícita condensando la matriz de masa.

### Términos de incompresibilidad

Para lograr un correcto comportamiento del algoritmo se debe añadir un término de estabilización en la ecuación de incompresibilidad. En este trabajo se utiliza, al igual que para los términos convectivos, la estabilización OSS para la presión [3]. El término resultante se debe añadir a la ecuación (10), y su forma es:

$$STB_p = - (\tau_2 (\nabla p_h^{n+1} - \xi_h^n), \nabla q_h) \quad (15)$$

donde  $\xi_h^n$  es la proyección del gradiente de la presión en el subespacio de las funciones de test  $(\tilde{\mathbf{v}}_h) \in \mathbf{V}$  con lo cual se obtiene

$$(\xi_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h) \quad (16)$$

resultando en un nuevo sistema de ecuaciones para  $\xi_h^n$ . El parámetro  $\tau_2$  depende del problema y su cálculo se puede encontrar en [3].

## Esquema estabilizado

Una vez añadido los términos de estabilización correspondientes a las ecuaciones de momento y de incompresibilidad el esquema resultante se puede escribir de la siguiente forma:

### Paso 1

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) &= \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \nu (\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}^n, \mathbf{v}_h) - \\ &- (\tau_1 (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (17)$$

### Paso 2

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^{n+1}, \nabla q_h) &= \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla q_h) - (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^n, q_h)] + \\ &+ \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla q_h) \end{aligned} \quad (18)$$

### Paso 3

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, q_h) \quad (19)$$

### Paso 4

$$(\pi_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h) = (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h) \quad (20)$$

## Paso 5

$$(\xi_h^n, \bar{v}_h) = (\nabla p_h^n, \bar{v}_h) \quad (21)$$

En el esquema resultante los sistemas de ecuaciones (17), (19), (20) y (21) se resuelven en forma explícita condensando las matrices de masas. El sistema de ecuaciones de (18) se resuelve mediante Gradientes Conjugados con preconditionador diagonal.

### Ecuación de energía

Si bien en el caso incompresible la ecuación de energía está desacoplada de las ecuaciones de Navier Stokes, esto deja de ser válido si se tiene en cuenta el fenómeno de convección natural. Para simular este efecto se utiliza la aproximación de Boussinesq extendida, con lo cual las propiedades del fluido son función del estado termodinámico del mismo, y la densidad  $\rho$  varía con la temperatura. Esta variación es sólo tenida en cuenta en las fuerzas másicas con lo cual se añade un término al vector de fuerzas en la ecuación de momento,

$$\mathbf{f}_b = \rho \mathbf{g} \beta (T - T_0) \quad (22)$$

donde  $\mathbf{g}$  es la fuerza de gravedad,  $\beta$  es el coeficiente de dilatación térmica del fluido,  $T$  es la temperatura y  $T_0$  es la temperatura inicial.

La ecuación de energía escrita en forma débil tiene la siguiente expresión:

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) - \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) - Q - \Phi = 0 \quad (23)$$

En esta ecuación  $C_v$  es el calor específico a volumen constante,  $Q$  es cantidad de calor por unidad de volumen,  $\Phi$  es la disipación viscosa y  $\mathbf{k}$  es la conductividad del fluido.

Las condiciones de contorno que cierran esta ecuación son:

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t) \\ -(\mathbf{k} \nabla T) \cdot \mathbf{n} &= q \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, t) \end{aligned} \quad (24)$$

donde  $\bar{T}$  es la temperatura prescrita,  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie,  $\mathbf{k}$  es la conductividad térmica y  $q$  es el flujo de calor, que se puede dividir en flujo convectivo ( $q_c$ ) y flujo por radiación ( $q_r$ ) y sus expresiones son:

$$q_c = h_c (T - T_c) \quad (25)$$

y

$$q_r = e \sigma (T^2 + T_r^2) (T^2 - T_r^2) \quad (26)$$

donde  $h_c$  es el coeficiente de convección,  $e$  es la emisividad y  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

Para el cálculo de la radiación en dominios cerrados se usa la teoría de *wall-to-wall radiation theory* que consiste en calcular los flujos a partir de:

$$\sum_{j=1}^N \left( \frac{\delta_{ij}}{e_j} - F_{ij} \frac{1 - e_j}{e_j} \right) q_r^j = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - F_{ij}) \sigma T_j^4 \quad (27)$$

donde  $F_{ij}$  son los factores de vista (dependen de la geometría),  $q_r^j$  y  $T_j$  son el flujo por radiación y la temperatura de de la superficie  $j$ . El sistema de ecuaciones resultante se resuelve mediante Gauss Seidel.

### Modelos de turbulencia

En el programa se encuentran implementados tres modelos de turbulencia; dos algebraicos Smagorinsky y Baldwin Lomax, ambos métodos se pueden encontrar en [9], y un modelo de

una ecuación denominado Spalart Allmaras ver [7]. Con los tres modelos se calcula la viscosidad turbulenta  $\nu_T$  que se agrega a la viscosidad  $\nu$  molecular en los términos viscosos en la ecuación (17), quedando de la siguiente forma:

$$(\nu + \nu_T) (\nabla \mathbf{u}_h^2, \nabla \mathbf{v}_h) \quad (28)$$

Dentro de las condiciones de contorno se encuentra implementado un modelo de ley de pared acorde al modelo de turbulencia [9, 7].

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se presentan algunos resultados obtenidos.

### Aerodinámica externa

Se han realizado una gran cantidad de simulaciones de aerodinámica externa, aplicada a vehículos terrestres. En la figura 1 se muestran dos casos; el primero corresponde a un Toyota Corolla de TC2000 y el segundo es un Chevrolet de TC

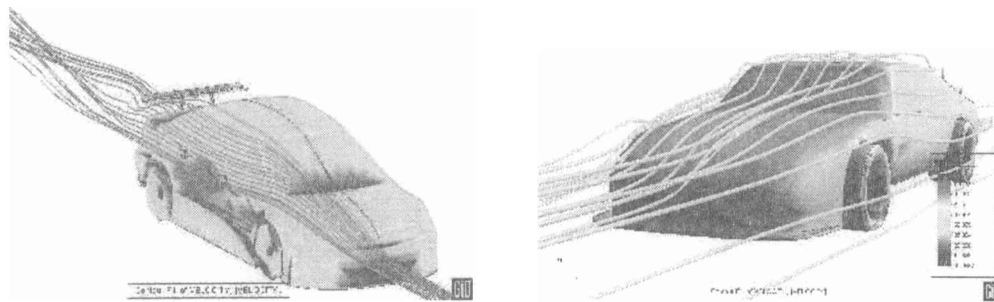


Figura 1: Aerodinámica externa de autos de competición.

La simulación de la aerodinámica externa de autos de competición presenta una dificultad adicional, que consiste en la variación de la altura con la carga aerodinámica. Debido a la importancia que tiene el efecto suelo en estos vehículos este cambio de altura se debe tener en cuenta para lograr buenos resultados .

Por este motivo el programa tiene la opción de modificar la posición del vehículo hasta alcanzar el equilibrio, para lo cual se debe conocer el comportamiento de las suspensiones del mismo.

El movimiento de la malla se realiza mediante la resolución de un problema de Laplace y para asegurar una buena calidad de la malla deformada se realiza un suavizado mediante un problema de optimización de la métrica de los elementos [6].

Las mallas utilizadas en ambos casos tienen aproximadamente 2 millones de elementos tetraedros, y en el caso del Toyota se hicieron pruebas con las ruedas girando. Para la simulación se realizaron 50.000 pasos de tiempo, lo que equivale a 0.8 segundos.

En la figura 2 se muestran dos trabajos realizados, el primero es un UAV y el segundo corresponde a un planeador acrobático.

En ambos casos se utilizó el programa para el cálculo de las derivativas, para lo cual se debieron realizar corridas a diferentes ángulos de ataque, giñada y rolado. Para simplificar esta tarea se utilizó la posibilidad de mover la malla, para lo cual se fija una ley de variación de la misma para barrer los ángulos requeridos, con lo cual todos los resultados se obtienen mediante una sola corrida. En el caso del UAV se utilizó una grilla de 1.7 millones de elementos mientras que en el planeador se utilizaron 1.1 millones de elementos.

### Flujo Interno

La implementación de diversos modelos de turbulencia ha permitido realizar una correcta simulación de flujos internos turbulentos. Este tipo de simulación resulta de vital importancia para

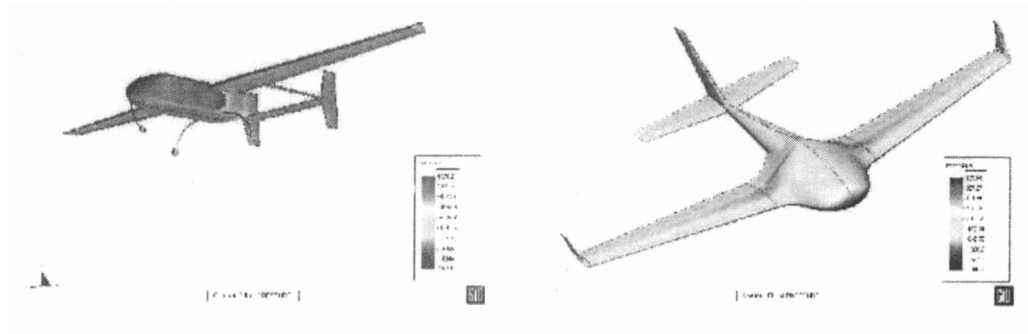


Figura 2: aerodinámica externa.

el cálculo de las pérdidas de carga en elementos complejos. En la figura (3) se observa parte del circuito de alimentación de combustible del cohete Tronador I.

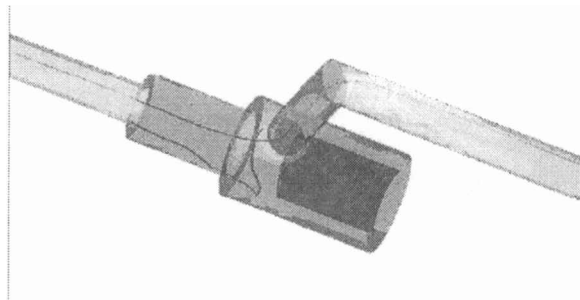


Figura 3: Cálculo de pérdidas en tuberías.

### Problema térmico acoplado

El programa cuenta con un módulo de cálculo térmico que está acoplado con el solver de Navier Stokes. En la figura 4 se muestra un ejemplo de un cilindro caliente sometido a una corriente de

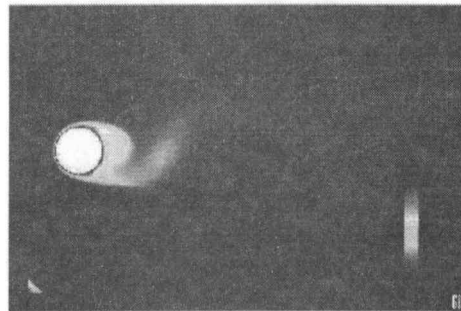


Figura 4: cilindro caliente sometido a una corriente de fluido.

fluido, en la misma se puede observar la temperatura para un instante determinado.

### Marcos de referencia rotante

Para la simulación de problemas con rotación el programa cuenta con la opción de utilizar marcos de referencia rotantes. En la figura (5) se muestra un ejemplo que pudo ser contrastado con un experimento obteniéndose una muy buena concordancia con los resultados experimentales.

### Problema de Transporte

Los problemas de transporte no siempre están ligados a fenómenos térmicos. En el programa se ha implementado un modelo de transporte mediante la teoría de Boussinesq, que permite

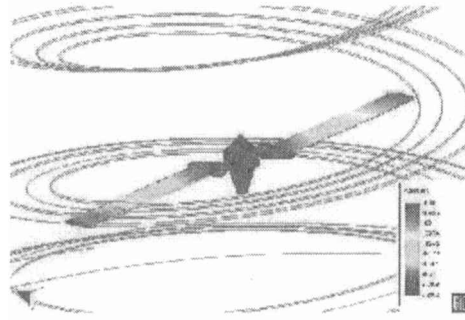


Figura 5: rotor de cola de helicóptero.

simular la evolución de la concentración de una sustancia (ej: humo, productos químicos, etc) en el tiempo, sometido a una determinada condición de flujo.

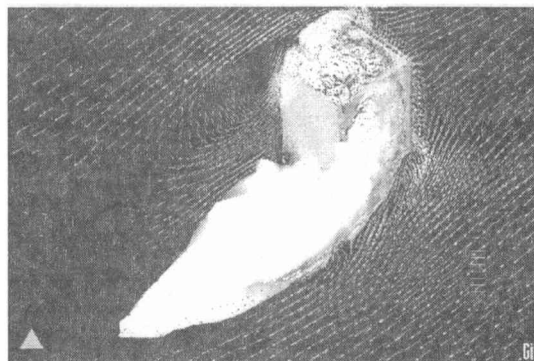


Figura 6: Transporte de contaminantes.

En la figura (6) se muestra un ejemplo que ha sido ensayado experimentalmente, el mismo consiste en un cubo de dimensiones conocidas sometido a un viento de frente con perfil parabólico. En la parte superior del mismo se ubica una fuente de humo con un determinado caudal. Las comparaciones de los perfiles de concentración mostraron una muy buena concordancia entre los resultados del ensayo y los numéricos.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un programa de elemento que permite resolver las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles mediante elementos finitos. La formulación utilizada ha demostrado ser robusta y fiable gracias a la estabilización basada en OSS tanto para la convección como para la incompresibilidad. El programa ha sido utilizado para simular una gran cantidad de fenómenos y se encuentra en continuo desarrollo para aumentar su capacidad. La integración del programa de cálculo con un programa de Pre y Post proceso comercial denominado GID, permite un fácil uso del mismo, tanto en lo que respecta a la generación de grillas como a la aplicación de condiciones de contorno.

## Referencias

- [1] J. Bell, P. Collela and II. Glaz, 'A second order projection method for the Navier-Stokes equations', J. Comput. Phys. 85, 257-283 (1989).
- [2] J. Blasco 'Error estimates for an operator-splitting method for incompressible flows', App. Num. Mathematics 51, 1-17 (2004).



- [3] R. Codina, 'Stabilization of incompressibility and convection through horthogonal sub-scales in finite element methods', *Comput. Methods Appl. Engrg.* 190, 1579-1599 (2000).
- [4] R. Codina, 'Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flow', *J. Comput. Phys.* 170, 112-140 (2001).
- [5] A. J. Chorin, 'Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations', *Mathematics of Computation* 22, 745-762 (1968).
- [6] C. Sacco y F. Giuggioloni, 'Análisis de la Aerodinámica de un Automóvil de Competición'. *Mecánica Computacional, MECOM 2006, Santa Fe, Argentina, 2006, Vol XXV, pp 83-94.*
- [7] P. R. Spalart and S. R. Allmaras 'A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows', *AIAA Paper 92-0439 (1992).*
- [8] R. Temam, 'Navier-Stokes equations. Theory and Numerical Analysis', North-Holland, Amsterdam, 3rd Edition (1984)
- [9] D. C. Wilcox, 'Turbulence Modeling for CFD', ISBN 1-928729-10-X, 2nd Ed., DCW Industries, Inc. (1998).