

notas de matemática

DEMOSTRACION DEL ISOMORFISMO $H^p \cong H^p \times H^p$

Raquel Santinelli

N° 4

1968

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Introducción

Es sabido que no todo espacio de Banach es isomorfo a su cuadrado (v. (2) y (3)) y que, por el contrario, esa propiedad es válida para muchos espacios de Banach clásicos. En esta nota se consideran los espacios de Hardy, notados H^p , y se obtiene para ellos una respuesta afirmativa.

1.- Preliminares: Sea $T = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}$ la circunferencia unidad. Si F es una función sobre T y si f está definida sobre $\mathbb{R}^1$ por $f(t) = F(e^{it})$, entonces f es una función periódica de período 2π . Recíprocamente, si f es una función periódica de período 2π sobre $\mathbb{R}^1$, existe una función F sobre T que verifica $f(t) = F(e^{it})$. En consecuencia identificaremos las funciones sobre T con las funciones sobre $\mathbb{R}^1$ de período 2π , y por comodidad escribiremos $f(t)$ en lugar de $f(e^{it})$.

Con esta convención, definimos $L^p(T) = L^p(-\pi, \pi)$ para $1 \leq p < \infty$ como la clase de todas las funciones complejas, medibles Lebesgue, de período 2π sobre $\mathbb{R}^1$ para las cuales la norma

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}$$

es finita.

Supongamos ahora que f es una función analítica en el disco abierto $|z| < 1$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Sea $f_r(t) = f(re^{it})$. Para un r fijo, f_r es una función definida sobre T , es decir, si restringimos f a la circunferencia de radio r , obtenemos una función continua sobre esta circunferencia, a la que podemos interpretar también como una función sobre T .

Si $0 \leq p < \infty$, denotamos por H^p a la clase de funciones analíticas f en el disco $|z| < 1$ para las cuales las f_r son acotadas en la norma de $L^p(T)$ cuando $r \rightarrow 1$. Si $1 \leq p < \infty$, entonces H^p es un espacio de Banach bajo la norma

$$\|f\| = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_p$$

2.- Teorema: H^p es isomorfo a $H^p \times H^p$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración: Toda función f puede descomponerse en suma de una función par y una función impar, de la siguiente manera: $f = f_1 + f_2$, donde

$$f_1(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} \quad \text{y} \quad f_2(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

La descomposición es única y si $f \in H^p$, obviamente $f_i \in H^p$, $i = 1, 2$. En consecuencia, llamando A al subespacio de H^p que consiste de todas las funciones pares y B al subespacio de H^p que consiste de todas las funciones impares, se tiene $H^p = A \oplus B$.

Mostraremos que A y B son isomorfos a H^p .

1º) Sea $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una función perteneciente a A . Es decir,

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$$

Luego, $\sum_{n \geq 0} a_{2n+1} z^{2n+1} = 0$ y esto implica $a_{2n+1} = 0$ para todo

$n \geq 0$. Por lo tanto $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} z^{2n}$. Queda entonces definida la función analítica $g(s) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} s^n$ en $|s| \leq 1$ tal que $P(z) = g(z^2)$.

Por otra parte, si $s = re^{i\theta}$ y $z = re^{it}$,

$$\begin{aligned} \|g_R\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_R(\theta)|^p d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(r^2 e^{i2t})|^p dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t)|^p dt = \|P_r\|_p^p. \end{aligned}$$

Entonces, $\|g\| = \|P\|$. Se ve claramente que la aplicación lineal $P \rightarrow g$ definida por $P(z) = g(z^2)$ es una isometría sobre, y por lo tanto un isomorfismo entre A y H^p .

2°) Si $I(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ pertenece a B , se tiene

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} a_n z^n$$

Luego, $\sum_{n \geq 0} a_{2n} z^{2n} = 0$ y esto implica $a_{2n} = 0$ para todo $n \geq 0$.

En consecuencia,

$$I(z) = \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} z^{2n+1} = z \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} z^{2n}$$

donde $\sum_{n \geq 0} a_{2n+1} z^{2n} = \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} s^n = h(s)$ define una función analítica en $|s| < 1$. Entonces $I(z) = zh(z^2)$. Además,

$$\begin{aligned} \|h_R\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h_R(\theta)|^p d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |h(r^2 e^{i2t})|^p dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{|re^{it}|^p} |I_r(t)|^p dt = \frac{1}{2\pi r^p} \int_{-\pi}^{\pi} |I_r(t)|^p dt = \frac{1}{r^p} \|I_r\|_p^p \end{aligned}$$

Obviamente, $\|h\| = \|I\|$. Entonces la aplicación lineal $I \rightarrow h$ de B sobre H^p definida por $I(z) = zh(z^2)$ define un isomorfismo. Estos resultados demuestran finalmente que H^p es isomorfo a $H^p \times H^p$, $1 \leq p < \infty$.

Definimos $L^\infty(T)$ como la clase de todas las funciones complejas, medibles Lebesgue, de período 2π sobre R^1 para las cuales la norma supremo esencial es acotada, y entonces extendemos la definición de H^p al caso $p = \infty$. Con la modificación correspondiente en el tratamiento de la norma, el teorema anterior también es válido para $1 \leq p < \infty$.

Bibliografia

- (1): Hoffman, K. - " Banach Spaces of Analytic Functions ".
Prontice - Hall, Inc., Englewood cliffs, N. J. (1962).
- (2): Bessaga, J. y Pełczyński, A. - " Banach Spaces Non-isomorphic to their Cartesian Squares ", I. Bull. Acad. Polonaise de Sciences Ser. Math. Astr. et Phys., Vol. VIII (1960)
- (3): Somasoni, Z. - " Banach Spaces Non-isomorphic to their Cartesian Squares ", II. Bull. Acad. Polonaise des Sciences ser. Math. et Phys., Vol. VIII (1960).