

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE STATIQUE

destinées

AUX JEUNES GENS QUI SE PRÉPARENT POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
OU QUI SUIVENT LES COURS DE L'ÉCOLE MILITAIRE DE ST.-CYR.

PAR J.-B. BIOT,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, Professeur de Physique mathématique au Collège de France, et d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Paris; Inspecteur des Écoles militaires; Membre des Sociétés royales de Londres et d'Édimbourg; de l'Académie impériale de Saint-Petersbourg; des Académies royales de Stockholm, Turin, Munich, Lucques, Berlin, Naples, Catane et Palerme; Membre honoraire de l'Université de Wilna, de l'Institution royale de Londres, de la Société philosophique de Cambridge, d'Astronomie de Londres, des Antiquaires d'Écosse, de la Société pour l'avancement des Sciences naturelles de Marbourg, de la Société Helvétique des Sciences naturelles, de la Société de Médecine d'Aberdeen, Météorologique de Londres; de la Société Italienne résidente à Modène, et de l'Académie américaine des Sciences et Arts de Boston.

Parva sed apta.

PARIS,
BACHELIER, SUCCESSEUR DE M^{ME} V^B COURCIER,
LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,
QUAI DES AUGUSTINS, N^o 55.
ET A BRUXELLES,
A LA LIBRAIRIE PARISIENNE, RUE DE LA MADELEINE, N^o 438.

~~~~~  
1829.

# TABLE

## DES MATIÈRES.

---

### CHAPITRE PREMIER.

*Notions préliminaires sur la constitution physique des corps matériels..... page 1*

### CHAPITRE II.

*Notions du repos, du mouvement. Idée abstraite des forces, manière de les définir et d'exprimer leurs rapports..... 9*

### CHAPITRE III.

*De l'équilibre produit par la composition de plusieurs forces appliquées à un même point matériel.... 16*

### CHAPITRE IV.

*Composition de deux forces parallèles appliquées aux extrémités d'une droite rigide et agissant dans le même sens..... 25*

### CHAPITRE V.

*Composition de deux forces parallèles appliquées aux extrémités d'une droite rigide et agissant dans des sens opposés..... 38*

## CHAPITRE VI.

*Composition de deux forces concourantes, appliquées simultanément à un même point matériel, page 47*

## CHAPITRE VII.

*Conséquences générales des théorèmes précédens.*

|                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles appliquées à un corps solide; application à la pesanteur. ....         | 63  |
| Détermination théorique du centre de gravité des surfaces et des solides. ....                                                 | 75  |
| Centres de gravité des parallélogrammes, trapèzes, triangles, parallélépipèdes, prismes et pyramides de densité uniforme. .... | 77  |
| Application de la théorie précédente à diverses questions physiques. ....                                                      | 102 |

## CHAPITRE VIII.

*Composition d'un nombre quelconque de forces concourantes appliquées à un même point matériel. 110*

## CHAPITRE IX.

*Composition d'un nombre quelconque de couples agissant simultanément sur un corps solide. .... 116*

## CHAPITRE X.

*Applications des principes précédens à la recherche des conditions d'équilibre des corps solides. .... 128*

# TABLE DES MATIÈRES.

vij

## CHAPITRE XI.

|                                 |              |
|---------------------------------|--------------|
| <i>Les Machines</i> .....       | page 139     |
| Le Levier.....                  | 141          |
| Le Treuil.....                  | 156          |
| Le Cabestan.....                | 161          |
| Le Plan incliné.....            | <i>ibid.</i> |
| La Vis.....                     | 173          |
| Les Cordes.....                 | 185          |
| Les Poulies et les Moufles..... | 212          |

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

### *Errata.*

Page 42, ligne 7, M. Poincot, qui en a le premier fait remarquer l'usage, *lisez* qui en a le premier découvert le principe et l'usage.

|      |                                               |
|------|-----------------------------------------------|
| 99,  | 12, B <sub>1</sub> , <i>lisez</i> B           |
| 102, | 11, SB <i>lisez</i> SC                        |
| 166, | 15, fig. 91 et 93, <i>lisez</i> fig. 92 et 93 |

# AVANT-PROPOS.

---

LORSQUE l'on considère les nombreux perfectionnemens et l'extension considérable que l'enseignement des mathématiques élémentaires a reçus en France, depuis environ trente années, on doit être surpris de voir que les premières notions de l'équilibre et du mouvement, qui sont cependant si universellement utiles, y soient aussi négligées. Cela est d'autant plus surprenant, qu'il existe sur cet objet de très bons Traités élémentaires, et que rien ne convient mieux pour former le passage des mathématiques abstraites aux applications. Un Cours de Statique élémentaire bien fait ramène sans cesse et nécessite les théorèmes provenant de la Géométrie et de la Trigonométrie abstraite, conjointement avec les principes de la Physique. En effet, comment exposer la détermination des centres de gravité, sans donner les caractères de la pesanteur? et comment déterminer ces caractères, sans rappeler les expériences qui les constatent? Comment les appliquer et montrer leur accord avec ceux des forces parallèles, sans remonter à la constitution physique des corps pesans, telle que l'expérience nous la démontre? La première notion des forces est elle-même une abstraction à laquelle on ne peut s'élever d'une ma-

nière logique, sans décomposer, par la pensée, les corps dans leurs élémens matériels, et rappeler les caractères sensibles de la matérialité. Passez-vous aux appareils de transmission des forces, c'est-à-dire aux machines ? Vous ne pouvez parler de leviers, de poulies, de cordes, de plans inclinés, de vis, sans rappeler en même temps les phénomènes de flexibilité, de résistance, d'extensibilité, de frottement, qui, dans les applications, modifient et limitent les conséquences purement mathématiques de la combinaison des forces. Que sera-ce si vous devez entrer dans la recherche des règles de l'Hydrostatique et des lois du mouvement ? Vous y passerez toute la Physique en revue, de la manière la plus fructueuse comme la plus intéressante, puisque tous les résultats que les expériences fournissent étant ainsi analysés, se revêtiront de la rigueur des idées abstraites, et se fixeront par des nombres.

En me représentant ces avantages, et regrettant de voir qu'ils fussent si peu introduits dans l'enseignement élémentaire, j'ai été conduit à penser que cela pourrait bien être résultat de leur nature mixte, qui, pour les faire ressortir dans un Cours, exige du professeur beaucoup plus de connaissances en Physique expérimentale, de connaissances très précises et même très profondes, que n'ont ordinairement occasion d'en acquérir les personnes auxquelles l'en-

seignement de la Statique est communément confié dans les établissemens d'instruction. Alors le professeur expliquant aux élèves la Statique abstraite, sous la forme mathématique que les géomètres lui ont donnée dans les traités spéciaux de cette science, ce n'est, pour ainsi dire, qu'une continuation des Cours de Mathématiques pures, dans laquelle l'application des résultats abstraits aux réalités physiques échappe ou ne peut offrir aucune netteté. Cette liaison même devient alors une difficulté de plus pour les élèves, et une difficulté en pure perte, puisqu'elle ne pourrait leur devenir utile qu'à l'aide d'une précision de connaissances physiques qu'ils n'ont pas pu acquérir antérieurement, eussent-ils même suivi déjà un Cours de Physique expérimentale ; car, sans notions précises de Statique, un tel Cours ne peut parler qu'aux yeux. La conséquence est donc qu'il faut que ces deux enseignemens soient unis et menés de front, au moins dans ce qu'ils ont de commun. C'est ce que j'ai tâché de faire dans le petit ouvrage qu'on va lire.

Je l'ai composé par l'extrême désir que j'avais de voir l'enseignement élémentaire de la Statique s'établir solidement dans l'École de Saint-Cyr, avec tous les avantages et toute l'utilité que je lui conçois. J'ai dû, en conséquence, me borner à ce que les études admises dans cet établissement exigeaient. C'est aussi autant, ou

même beaucoup plus, que ce que l'on demande de Statique pour l'admission à l'École Polytechnique. S'il arrivait que les idées qui m'ont guidé fussent approuvées par les professeurs, je pourrais, dans une édition subséquente, étendre cet Essai aux premières notions de l'Hydrostatique et des lois du mouvement, en suivant toujours la même méthode d'union entre les abstractions et les réalités.

En cherchant à établir cette liaison pour la Statique élémentaire, j'ai d'ailleurs emprunté, dans les traités spéciaux de cette science, les méthodes de démonstration qui m'ont paru les plus claires et les plus directes. Sous ce double rapport, j'ai cru devoir suivre complètement la théorie des couples, inventée il y a longtemps par M. Poinsot, et appliquée par lui d'une manière si lumineuse dans ses ouvrages. Le système de forces qu'il a ainsi caractérisé se reproduisant sans cesse dans les problèmes d'équilibre et du mouvement, la spécialisation de ses propriétés statiques, a, pour ces problèmes, le même avantage qu'offrent les règles algébriques pour résoudre une équation posée; et elle a, de plus, comme il l'a fait voir, le mérite de donner un sens physique réel à des résultats qui, jusqu'alors, ne présentaient qu'une expression abstraite de calcul.



# NOTIONS

## ÉLÉMENTAIRES

# DE STATIQUE.

---

### CHAPITRE PREMIER.

#### *Notions préliminaires.*

1. Les géomètres considèrent l'étendue comme indéfinie en trois dimensions, longueur, largeur et profondeur, et ils appellent *corps géométriques* des portions finies de cette étendue, limitées par des plans, lignes et surfaces. Comme cette limitation est purement idéale, rien n'empêche que l'étendue géométrique ne soit traversée en tous sens par de pareils corps, et alors on dit que les lignes ou surfaces se coupent, ou que les solides se pénètrent, dans les points de l'espace qui leur sont communs.

Les *corps physiques* réels, tels que la nature nous les présente, partagent avec les corps géométriques les propriétés de l'étendue; mais ils en diffèrent essentiellement par l'impossibilité d'exister simultanément dans les mêmes points de l'espace, propriété que l'on appelle l'*impénétrabilité*. L'étendue et l'impénétrabilité sont deux propriétés qui constituent, pour nous, les *corps naturels*, parce qu'elles suffisent pour nous annoncer

et pour nous prouver leur existence, extérieure à nous-mêmes.

2. Nous ne pouvons exercer aucune action physique, nous ne pouvons faire aucun mouvement propre dans l'espace qui nous environne, sans éprouver la réalité de ces définitions. J'avance mon bras dans l'obscurité; il rencontre un obstacle qui l'empêche de s'étendre. Ma main, proménée sur cet obstacle, trouve qu'il est limité; qu'il finit à certains endroits, commence à d'autres, et qu'autour de lui l'espace est libre; j'en conclus que cet obstacle existe ou paraît exister hors de moi, dans une certaine portion de l'espace de laquelle son existence m'exclut. D'après cela, je l'appelle *un corps*. Le premier de ces phénomènes, *la limitation*, est le caractère de *l'étendue figurée*, c'est-à-dire douée d'une forme. Le second, l'exclusion des autres corps, est le caractère que l'on désigne sous le nom d'*impénétrabilité*. La notion première de celui-ci nous est donnée, comme je viens de le dire, par la sensation du tact. L'observation nous apprend ensuite que les corps, dont l'existence actuelle nous exclut de certains points de l'espace, s'excluent aussi mutuellement. Enfin, le raisonnement, guidé par ces faits, nous découvre que la même propriété subsiste encore dans des circonstances où l'épreuve du tact serait infiniment trop grossière pour servir à la reconnaître; nous nous élevons ainsi à cette idée générale : l'*impénétrabilité* consiste en ce que deux portions distinctes de matière ne peuvent jamais s'identifier l'une dans l'autre, de manière à coexister dans les mêmes points de l'espace.

L'exemple suivant présentera tous les pas que fait notre esprit pour arriver à cette généralisation. L'obstacle que notre main rencontre, et dont l'existence se manifeste à nous par l'exclusion qu'il nous donne, est

je suppose, une masse d'eau glacée. Dans ce cas, nous reconnaissons immédiatement sa matérialité par le tact. **Maintenant**, voilà que cette glace vient à se fondre et à se résoudre en eau liquide. Alors, si nous essayons d'y plonger la main, elle nous fait place et s'ouvre devant nous sans résistance apparente. Serait-elle donc devenue pénétrable? Oui, sans doute, si nous considérons son ensemble, qui a cessé de faire un tout compacte, mais nullement si nous considérons ses parties; car, lorsque le vase qui la contient est terminé par un col étroit, on voit le niveau s'élever dans ce col, quand on pénètre la masse de l'eau, en y plongeant le doigt ou tout autre corps. Les parties de l'eau ne se laissent donc pas réellement pénétrer dans cette expérience; elles sont **seulement déplacées par le corps** qui les pousse, et sont transportées ailleurs. Cela est si vrai, qu'au lieu de céder, elles résisteront, et d'une **manière presque invincible**, si on leur ôte la possibilité **de s'échapper**, comme on peut le faire en renfermant l'eau dans un vase cylindrique et s'efforçant d'y faire pénétrer un piston qui remplisse exactement toute la section du cylindre. Maintenant, chauffez cette même eau jusqu'à la faire bouillir; elle se convertira en vapeurs, qui seront un air transparent, impalpable, dont les parties seront si petites que vous ne les verrez plus, et si légères, que le tact ne pourra vous en donner la moindre sensation, tant elles se déplaceront avec facilité devant les corps que vous tenterez de plonger parmi elles; mais elles ne seront pas, pour cela, devenues individuellement plus pénétrables; car, si vous les enfermez encore, comme tout à l'heure, dans un cylindre, elles résisteront à la compression simultanée; et, plutôt que de se laisser pénétrer par le piston qui les pousse, ou de se pénétrer elles-mêmes, elles se

rapprocheront seulement les unes des autres, jusqu'à se rassembler de nouveau en un liquide, malgré la grande force d'expansion qui leur est donnée par la chaleur.

Notre esprit reconnaît donc encore ici la même propriété que le tact nous rendait sensible lorsque les parties de l'eau formaient un corps solide par leur réunion.

Mais ce n'est pas là, à beaucoup près, le dernier terme d'abstraction où nous puissions la suivre. Nous sommes obligés d'admettre l'impénétrabilité, dans des circonstances tellement délicates, et de l'attribuer à des parcelles de matière si subtiles, que notre imagination peut à peine aller à les concevoir. L'expérience nous conduit ainsi à reconnaître que tous les corps naturels d'une étendue sensible consistent dans l'assemblage d'une multitude infinie de particules matérielles qui sont individuellement étendues et impénétrables. La seule diversité du mode d'agrégation de ces particules fait que le système entier, ou le *corps* qu'elles composent, est accidentellement *solide*, ou *liquide*, ou *gazeux*; et de là résultent également les autres propriétés physiques accidentelles, par exemple, les degrés divers de *dureté*, de *mollesse*, d'*élasticité*, etc.

3. Dans tous les phénomènes que les corps matériels ainsi constitués nous présentent, les molécules qui les composent se comportent comme autant de masses *inertes*, c'est-à-dire dépourvues de toute espèce de spontanéité; elles peuvent être mues, déplacées, arrêtées par des causes extérieures étrangères à elles-mêmes; mais jamais nous n'y découvrons aucune trace d'une volonté propre et libre. Si la bille qui roule sur le tapis d'un billard, en vertu de l'impulsion qu'on lui a donnée, ralentit peu à peu la vitesse de son mouvement,

et enfin s'arrête, c'est uniquement par la continuelle résistance que lui opposent les aspérités du drap sur lequel elle frotte, et les molécules de l'air à travers lequel elle se meut. Rendez le drap plus doux, la même impulsion fera mouvoir plus long-temps la bille; substituez-y un plan de marbre poli et des bandes formées par des fils métalliques tendus, dont l'élasticité soit plus parfaite, la durée du mouvement deviendra incomparablement plus grande, ce qui indique qu'elle serait indéfinie, si les obstacles étaient tout-à-fait ôtés. La pierre que nous lançons du haut d'une tour, et qui, sollicitée en même temps par cette impulsion et par la pesanteur, va tomber à une certaine distance, use de même progressivement sa vitesse horizontale, en la partageant avec les molécules d'air qu'elle choque, et les refoulant les unes sur les autres. Mais concevez que cet air n'existât point, et que la force de l'impulsion fût assez énergique pour éloigner la pierre de la terre, par son mouvement tangentiel, autant que la pesanteur tend à la faire descendre à chaque instant, la pierre alors décrirait un cercle autour de la terre; et, comme rien ne l'arrêterait dans son cours, elle circulerait ainsi éternellement. C'est là en effet ce qui arrive à la lune, que nous savons se mouvoir dans le vide autour de la terre; et nous voyons également se perpétuer les mouvemens des autres corps planétaires qui parcourent de même un espace dépourvu de toute matière résistante. Tout nous porte donc à croire que la matière ne peut, par elle-même, se donner ni s'ôter le mouvement ou le repos; et qu'une fois dans l'un ou l'autre de ces états, elle y persévérerait éternellement, si aucune cause étrangère ne venait agir sur elle. Cette indifférence, ce défaut de spontanéité, a reçu le nom d'*inertie*. Une seule classe de corps semble

## NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

Une seule exception, ce sont ceux des êtres que l'on appelle *animés*, qui se meuvent ou s'arrêtent par l'effet d'une volonté intérieure ; mais, dans ceux-là encore, les molécules matérielles qui composent leurs parties, et leurs parties mêmes, sont absolument inertes. C'est leur ensemble qui possède la qualité d'être animé ; séparées, elles ne vivent plus et rentrent dans les lois ordinaires de tous les autres corps.

Nous sommes dans une obscurité absolue sur la cause de cette différence, et nous ignorons complètement ce qui détermine l'état de vie ; mais, voyant dans toutes les autres circonstances la matière dépourvue de spontanéité, et reconnaissant que, même dans les êtres vivans, elle perd encore cette faculté par la mort et le sommeil, nous sommes conduits à la regarder comme étrangère à son essence, et ramenant ce cas aux lois ordinaires, nous concevons la volonté des êtres animés comme l'acte d'un principe intérieur et immatériel qui réside en eux. A la vérité, nous ne pouvons pas dire dans laquelle de leurs parties ce principe réside, ni en quoi il consiste ; encore moins comment, immatériel, il peut agir sur la matière. Mais, pour peu que nous ayons réfléchi sur nous-mêmes, et que nous ayons observé avec quelque attention les œuvres de la nature, ces obscurités, malheureusement trop ordinaires, où nous laisse l'imperfection de nos connaissances, ne doivent jamais être pour nous le fondement d'une objection contre l'essence des choses que nous sommes toujours réduits à ignorer. Ainsi nous agissons philosophiquement, dans cette circonstance comme dans toute autre, en nous rapprochant des analogies et en faisant dépendre le mouvement des corps animés d'une cause étrangère à leur matière, puisque nous trouvons la matière inerte dans tous les autres cas où

nous pouvons l'éprouver. On apporte encore, dans les écoles de Philosophie, une autre raison pour attribuer la spontanéité à un principe immatériel; c'est que la volonté, par la nature même de ses actes, ne peut émaner que d'un être simple, et par conséquent, ne peut pas appartenir à un être essentiellement composé, ou au moins divisible et décomposable, comme la matière; mais ce motif métaphysique sortant de nos considérations ordinaires, nous nous bornerons à l'énoncer. Pour toutes les recherches expérimentales, il nous suffira d'admettre l'immatérialité du principe de la volonté comme une distinction fondée sur l'analogie, et l'inertie de la matière comme une propriété générale dans l'état actuel de l'univers.

4. L'expérience fait encore découvrir dans la matière plusieurs autres propriétés également *contingentes*, c'est-à-dire qui semblent n'être pas absolument indispensables pour que les corps matériels se manifestent à nos sens, mais dont cependant la connaissance est très importante, parce qu'on les trouve toujours unies avec les conditions primitives de la matérialité; de sorte qu'elles peuvent suppléer à ces conditions, dans un grand nombre de circonstances où il devient impossible de les observer. Telle est, par exemple, la pesanteur. Parmi les corps naturels dont on peut constater la matérialité, on n'en trouve absolument aucun qui ne soit pesant, c'est-à-dire qui ne tende à tomber vers la terre, quand on l'abandonne à lui-même. Puis donc que ces deux propriétés, la matérialité et la pesanteur, paraissent s'accompagner toujours, la présence de l'une nous suffit pour juger, par induction, que l'autre existe. Ainsi, quoique nous ne puissions ni voir ni toucher l'air, comme nous voyons et touchons les autres corps, cependant nous pouvons juger que c'est

une substance matérielle, parce qu'il est pesant, coër-cible dans des vases, et qu'il produit beaucoup d'autres phénomènes, tous pareils à ceux qu'un fluide pesant doit produire. L'examen approfondi de ces propriétés nous apprend ensuite qu'il existe des espèces d'air très diverses, qui sont tous autant de substances essentiellement distinctes les unes des autres, par les actions qu'ils font éprouver aux autres corps, et par celles que ceux-ci exercent sur eux.