

PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Director: Capitán de Fragata (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

SERIE GEOFISICA VIII₁

CONTRIBUCION AL ESTUDIO
DE CARGAS SISMICAS SOBRE
EDIFICIOS

POR EL

Ing. SIMON GERSHANIK



LA PLATA
IMPRENTA MORENO
1951

**MINISTERIO DE EDUCACION DE LA NACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

Rector

Doctor LUIS IRIGOYEN

Vicerrector

Doctor PEDRO GUILLERMO PATERNOSTO

Consejeros

Ing. Agrón. René R. E. Thiery, Ing. José María Castiglioni; Ing. Carlos Pascali, Ing. Obdulio J. F. Ferrari; Prof. Silvio Mangariello, Prof. Arturo Cambours Ocampo; Dr. Carlos María Harispe, Dr. Horis del Prete; Dr. José Fortunato Molfino, Dr. Pedro Guillermo Paternosto; Dr. Pascual R. Cervini, Dr. José F. Morano Brandi; Dr. Benito Pérez, Dr. Eugenio E. Mordegliá.

Secretario General Interino

Don VICTORIANO F. LUACES

Secretario Administrativo

Don RAFAEL GUILLERMO ROSA

Contador General

Don HORACIO J. BLAKE

**INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO
Y ESCUELA SUPERIOR DE ASTRONOMÍA Y GEOFÍSICA**

Director

Capitán de Fragata (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

Secretario

Abogado ANDRES GUILLEN

Prosecretario

Señor RICARDO J. NOWINSKI

PERSONAL DOCENTE Y CIENTIFICO

Jefes de Departamento y Profesores: Agrim. Angel A. Baldini (Geodesia-Gravimetría y Mareas); Dr. Alejandro Corpaciu (Gravimetría-Geodesia Superior); Ing. Simón Gershánik (Geofísica-Sismología); Dr. Livio Gratton (Astrofísica-Astrofísica, I y II Curso); Agrim. Miguel Itzigsohn (Astrometría-Astrometría, I Curso); Dr. Pascual Seonzo (Cálculos científicos); Dr. Leónidas Slaucitajs (Magnetismo Terrestre y Electricidad Atmosférica); Dr. Sergio Slaucitajs (Astronomía Meridiana); Dr. Alexander Wilkens (Astronomía teórica y Cosmogonía-Mecánica Celeste).

Profesores: Ing. Miguel A. Agabios (Astrometría, II Curso); Agrim. Guillermo H. Borel (Astronomía General); Dr. Reynaldo P. Cesco (Análisis matemático, III Curso); Agrim. Víctor J. Meneclier (Astronomía Esférica).

PERSONAL CIENTIFICO

Jefes de División y Astrónomos de Primera: Agrim. Guillermo H. Borel (Círculo Meridiano); Dr. Germán Fernández (Astronomía teórica); Dr. Herbert Wilkens (Estadística Estelar); Sr. Jacobo Gordon (Efemérides); Sr. Ignacio A. Rivas (Efemérides); Prof. Silvio Mangariello (Círculo Meridiano).

PERSONAL DOCENTE Y AUXILIAR

Jefe de Biblioteca: Prof. Nidia Ethel Guillamón.

Jefes de Trabajos Prácticos: Dr. Sergio Slaucitajs (Astronomía Esférica); Dr. Herbert Wilkens (Astrofísica).

Ayudantes de Trabajos Prácticos: Srta. Alicia M. Di Bella (Idioma Inglés); Srta. Araceli Stichling (Idioma Alemán); Srta. Elida Olga Herrero Araldi (Asistente de Óptica).

PERSONAL TECNICO

Jefe del Departamento de Talleres: Ing. José A. Rodríguez.

ADMINISTRACION Y PUBLICACIONES

Administrador-habilitado: Sr. Juan José Saggese.

Publicaciones y Canje: Sr. Antonio Guillén.

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE CARGAS SISMICAS SOBRE EDIFICIOS

por el Ingeniero SIMON GERSHANIK *

ABSTRACT

According to usual formulae to estimate seismic charges on buildings, strains and stresses become infinite when resonance is reached. In many buildings proper periods are of the same order as those of the ground during an earthquake. It is to be expected therefore that they inevitably will break down, and there is no rule to dimension their resisting structures. As these results do not seem satisfactory, the whole question is reviewed and it is shown that assuming for the ground a transient sinus movement with finite acceleration, and that the building is at rest at the beginning of the quake, strains become infinite when resonance is reached, only if duration of earthmovement is infinite too. Strains may be infinite, buildings being or not in resonance, when earthmovement acceleration is infinite. Since none of this cases is real, strains and stresses to be expected are finite. New formulas are given to calculate them. To do this, not only a reasonable period and an amplitude of the earthmovement must be given, but a reasonable finite duration too.

Strains on damped buildings can be determined with formulae (54) and (66); on no damped ones when there is resonance with formulae (59) and (68) and with formulae (55) and (67), when resonance is not reached.

* Jefe del Departamento de Geofísica en el Instituto Superior del Observatorio Astronómico y Profesor de Sismología en la Escuela Superior de Astronomía y Geofísica.

INTRODUCCION

En general puede afirmarse que si se conocen las cargas que actúan sobre una construcción, la ingeniería cuenta con recursos que le permiten calcular los elementos estructurales capaces de soportarlas, siempre que ellas no sean infinitamente grandes. El primer problema que hay que solucionar por lo tanto, cuando se trata de hacer construcciones resistentes a los terremotos es el de determinar las cargas que tales fenómenos suscitan en las mismas.

Debido a la complejidad estructural de toda construcción —aún de las más sencillas— esta cuestión resulta sumamente difícil de resolver si se la encara con el propósito de hallarle una solución rigurosa. Se acostumbra por ello asimilar las construcciones reales a esquemas muy simplificados, y del análisis de lo que pueda ocurrir con tales esquemas se saca un criterio para estimar las cargas que llegarán a actuar en la realidad.

Tratándose de edificios de esbeltez pronunciada, la simplificación más difundida consiste en representarlos por barras de igual altura, y de densidad, sección transversal, momento de inercia y parámetros elásticos constantes e iguales a los que en media tienen los edificios de que se trata.

Las cargas que se originan en barras semejantes han sido estudiadas por varios autores ^{(1), (2), (3), (4)}, en la hipótesis de que el movimiento del suelo en el cual se hallan enclavadas, a consecuencia del fenómeno sísmico sea un movimiento translatorio puramente sinusoidal. Tal hipótesis es seguramente plausible como primera aproximación, y lo mismo puede decirse, para algunos casos, de las fórmulas a que se ha llegado. En otros, empero, estas últimas conducen a conclusiones que parecen poco razonables. En efecto: según tales fórmulas si el período del movimiento del suelo es igual a uno de los períodos propios de la barra, es decir, si se está en el caso denominado de la “resonancia” las elongaciones de los distintos puntos de la barra, y por ende las cargas que deben soportar se hacen infinitas, cualquiera sea la amplitud del movimiento del suelo. Ahora bien; examinando los sismogramas de lugares vecinos a los epicentros, cabe inferir que en el movimiento del suelo se presenta una gama de períodos muy variados desde pocos centésimos de segundo, hasta un segundo. Como los períodos propios de muchos edificios suelen quedar dentro de esa gama, eso querría decir que tales edificios estarían condenados a una destrucción inevitable, ya que podrían entrar en resonancia, y en tal caso ningún sistema resistente de que se pudiera proveerlos sería capaz de soportar las cargas infinitas que se suscitarían. Aceptándose como correcta esa conclusión, habría por consiguiente, o bien que abandonar el propósito de construir tales edificios o bien habría que estar dispuestos a que se inutilicen con el primer terremoto que deban soportar.

Y desde luego optándose por esto último, no se tendría ningún criterio para dimensionar las estructuras resistentes de los mismos (*).

Felizmente los hechos no están en favor de estos resultados teóricos, porque son muchos los casos de edificios que muy probablemente pudieron haber quedado sometidos a la resonancia y cuyas lesiones tras de ello son más bien escasas. Este hecho hace pensar que las cargas en el caso de la resonancia, en la realidad, distan de llegar a ser infinitas, y por ende, que las fórmulas obtenidas hasta ahora no son correctas.

El origen de la incorrección radica posiblemente en que al obtener esas fórmulas se ha hecho caso omiso por una parte de las condiciones iniciales reales en que se halla la barra, y por otra, de que el movimiento del suelo es *transitorio*; vale decir, que empieza en un determinado instante que se puede considerar como inicial y termina al cabo de cierto intervalo finito de tiempo.

Reparando en esta circunstancia hemos creído conveniente revisar el problema de las cargas que pueden llegar a actuar en una barra, poniéndonos en las siguientes condiciones:

a) El movimiento del suelo es nulo para todo instante $t \leq 0$; es sinusoidal para $0 < t < t_1$; y vuelve a ser nulo para $t_1 \leq t$ (Fig. 3).

b) En el instante $t = 0$ la barra está en reposo; es decir, es nula su deformación y la velocidad de sus puntos.

Para mayor generalidad de la solución que nos proponemos dar, suponemos además que si la barra está librada a sí misma y en movimiento, su movimiento se amortigua con el tiempo.

Como se verá con las referidas condiciones, el resultado a que se llega expresa que siendo finita la aceleración de las causas actuantes si hay resonancia las cargas se hacen infinitas sólo si $t_1 = \infty$, y ello siempre que el amortiguamiento sea nulo. Si se supone esto último, y se desea proyectar un edificio, correspondería entonces atribuir al movimiento sinusoidal no sólo una amplitud y un período dados como se acostumbra, sino también una determinada duración. En tal caso la solución que damos en el presente trabajo permitirá calcular las cargas finitas que soportará la construcción.

Se verá también en nuestros resultados, que en los edificios pueden suscitarse cargas considerables haya o no resonancia, toda vez que la aceleración del movimiento del suelo sea grande. El importe de esas cargas también puede ser calculado con las fórmulas a que llegamos; el mismo resulta infinito o finito según lo sea la aceleración del suelo.

Como el problema de la acción del viento sobre edificios es similar al de la acción de los terremotos, hacemos los desarrollos de modo que sirvan para resolver tanto el uno como el otro de estos problemas.

§ 1. Ecuación diferencial del movimiento de una barra vertical. — En el planteo que habitualmente se hace en la ecuación diferencial del movimiento de una barra empotrada en el suelo sometida o no a la acción de causas externas puede advertirse cierta falta de rigor, a consecuencia de lo cual algunos términos quedan omitidos sin una adecuada justificación.

(*) Interesante es la afirmación siguiente que al respecto formula Hoskins en la pág. 2010 del trabajo que se menciona en (1): "...Since any given structure has a multiplicity of natural periods, and since the harmonic analysis of seismographs records has shown a considerable range of values of T it seems impracticable to formulate any simple rule for minimizing the probability of dangerous stresses due to resonance...".

Parece por ello indicado volver a hacer dicho planteo antes de abordar la búsqueda de la solución de tal ecuación diferencial.

Sea en tal sentido $X Y Z$ un sistema de coordenadas fijo, con origen en el suelo y con el eje Z vertical (fig. 1). Además, sea $A B$ una barra empotrada en B en el suelo; vertical al estar en reposo ella y el suelo; l sea su largo, S su sección transversal constante, ρ su densidad, E su módulo de elasticidad, y J el momento de inercia de su sección respecto de la línea neutra de la misma en una flexión.

De conformidad con lo que se desprende de los estudios sismométricos admitiremos, como lo hacen otros autores, que el movimiento del suelo sea puramente translatorio.

De las dos componentes, vertical y horizontal en que puede descomponerse el movimiento del suelo, sólo ofrecé interés especial la segunda, porque la primera supone una aceleración que se suma a la gravedad, y su acción puede quedar contrarrestada con los elementos que sirven para soportar a esta última, no más que reforzando un tanto sus dimensiones. En el estudio que sigue imaginaremos por ello, que el movimiento del suelo sea únicamente horizontal.

Supongamos para mayor generalidad que por unidad de longitud de la barra actúen fuerzas cualesquiera cuyas componentes sean F_x, F_y, F_z .

Si el suelo se mueve se moverá con él el punto B de la barra, ya que también es un punto del mismo. Por una parte debido al movimiento de B , y por otra, debido a la acción de las fuerzas F , se moverán igualmente los demás puntos de la barra con un movimiento en general variable de punto a punto. La existencia de ese movimiento entraña la aparición en cada elemento infinitamente pequeño de masa dm de la barra, de fuerzas de inercia que, siendo a su aceleración, estarán dadas por $-a dm$. Estas fuerzas junto con las F producen en las secciones transversales de la barra, momentos flectores a consecuencia de los cuales la barra se verá obligada a flexionar tanto en el plano $Z X$, como en el plano $Z Y$.

Para obtener esos momentos flectores designemos con \mathcal{M}_x a la componente de los mismos que produce flexiones en el plano $X Z$, con \mathcal{M}_y a la componente que produce flexiones en el plano $Y Z$, con $X Y Z$ en general a las coordenadas de los puntos del eje neutro de la barra flexionada; es decir a lo que se acostumbra a llamar la *elástica* de la barra; con s el largo de un trozo de ese eje, y con a_x, a_y, a_z a las componentes de la aceleración a .

Con estas designaciones se tendrá para una sección 1—1 cuya intersección con el eje neutro tenga las coordenadas $X_1 Y_1 Z_1$, siendo M_1 la masa del trozo de barra que va desde su extremo libre hasta la sección 1—1 y s_1 el largo de la elástica desde el punto $X_1 Y_1 Z_1$ hasta B :

$$\mathcal{M}_x = \int_{s_1}^1 F_x (Z - Z_1) ds - \int_{s_1}^1 F_z (X - X_1) ds - \int_{M_1} a_x (Z - Z_1) dm + \int_{M_1} a_z (X - X_1) dm \quad (1)$$

$$\mathcal{M}_y = \int_{s_1}^1 F_y (Z - Z_1) ds - \int_{s_1}^1 F_z (Y - Y_1) ds - \int_{M_1} a_y (Z - Z_1) dm + \int_{M_1} a_z (Y - Y_1) dm$$

Se ve que las dos componentes del momento flector tienen expresiones análogas y que serían iguales si se pusiera X en donde dice Y e inversamente. Esta analogía permite limitar el estudio a una de ellas y aplicar las conclusiones que se obtengan sin más a la otra. Nos referiremos por ello en adelante sólo a la primera de las escritas en (1), y como no habrá posibilidad de confusión le suprimiremos el subíndice x .

Como fuerzas F_x que pueden actuar sobre los edificios podemos considerar las debidas al viento, y como fuerzas F_z las debidas a la acción de la gravedad. Para destacar estos orígenes de las F , pongamos

$$F_x = B \quad F_z = -g \rho S \quad (2)$$

Para simplificar el problema consideraremos a B sólo función del tiempo t , salvo indicación en contrario que se hará oportunamente.

Las flexiones que habrán de producirse en los edificios bajo la acción de los terremotos o del viento serán más bien pequeñas. Por ello y de acuerdo con lo que enseña la teoría de la elasticidad, la elástica estará dada por la ecuación siguiente:

$$\mathcal{M} = E J \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \quad (3)$$

Para nuestro objeto resultará ventajoso tener referida la elástica no sólo a un sistema fijo, sino también a uno móvil ($u y z$), cuyo origen esté en el punto B de empotramiento del eje neutro de la barra, cuyo eje z le sea tangente en ese punto, y cuyo eje y sea paralelo al eje Y.

Debido a que la barra está empotrada y a que el movimiento del suelo es translatorio y horizontal, el sistema así elegido tendrá su eje z continuamente vertical, y por igual razón será:

$$y = Y \quad z = Z \quad y \quad u = X - X_B \quad (4)$$

X_B siendo la coordenada X del punto B.

En base de esto será

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 Z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z^2}; \quad X - X_1 = u - u_1 \quad y \quad Z - Z_1 = z - z_1 \quad (5)$$

u_1 siendo la coordenada u correspondiente al punto ($X_1 Y_1 Z_1$).

Por ello en vez de (2) se podrá poner

$$\mathcal{M} = E J \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6)$$

Para las componentes de la aceleración se tiene:

$$a_x = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \quad a_z = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2};$$

por lo que de acuerdo con (4) se podrá escribir

$$a_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2} \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (7)$$

Admitiendo que las flexiones sean pequeñas se puede sin error apreciable considerar un trozo de elástica igual a su proyección sobre su tangente. Siendo z_1 la proyección de s_1 sobre el eje z y dz la de ds , se podrá por ello escribir

$$s_1 \equiv z_1 \quad ds \equiv dz \quad (8)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2), (5), (6), (7) y (8), y despreciando las aceleraciones a_z por ser muy pequeñas, se podrá poner en vez de (1) la ecuación siguiente:

$$E J \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} = \int_{z_1}^1 \left[B - \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2} \right) \right] (z - z_1) dz + \int_{z_1}^1 \rho g S (u - u_1) dz \quad (9)$$

En el primer miembro figura el subíndice 1 en u y en z para destacar que se trata del momento en la sección 1 — 1, y para diferenciar sus coordenadas de las u y z afectadas por las integraciones.

Para eliminar las integraciones derivemos la (9) dos veces respecto de z_1 . En base de las reglas de derivación de una integral respecto de un parametro, en este caso z_1 , se obtiene fácilmente:

$$E J \frac{\partial^4 u_1}{\partial z_1^4} = B - \rho S \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \rho S \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2} + \rho g S \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} (z_1 - 1) + \rho g S \frac{\partial u_1}{\partial z_1}$$

Suprimiendo el subíndice 1 porque ya no será más necesario, dividiendo por $E J$ ambos miembros y pasando al primero todos los términos del segundo, salvo $B - \rho S \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2}$ nos queda:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\rho S}{E J} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho g S}{E J} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\rho g S}{E J} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} (z - 1) = \frac{B}{E J} - \rho \frac{S}{E J} \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2} \quad (10)$$

La experiencia muestra que si una barra empotrada en el suelo y libre de acciones externas se halla en estado vibratorio en un instante determinado, dicho estado se extingue al cabo de cierto tiempo, y la barra pasa al estado de reposo. Como para alcanzar el reposo, la amplitud de las vibraciones se aminora progresivamente, se dice que la barra ejecuta un movimiento amortiguado.

Un hecho parecido se tiene en el movimiento de un péndulo, y el mismo, en ese caso, queda representado incorporando en la ecuación respectiva del movimiento, un término proporcional a la derivada de las elongaciones respecto del tiempo. Basándonos en la analogía, podemos añadir también en nuestro caso un término semejante, si queremos tomar el hecho en consideración. Tal término sería $2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$, ε siendo una constante. Con él tendremos en vez de (10):

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\rho S}{E J} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho S g}{E J} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\rho S g}{E J} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} (z - 1) + 2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{B}{E J} - \frac{\rho S}{E J} \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2} \quad (11)$$

ecuación diferencial que nos da u en función de z y de t . Es fácil ver que ella saldría de la (9) si se le agregara un término $- 2 \varepsilon E J \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} (z - z_1) dz$ ó lo que es equivalente si se supusiera además de B y de $-\rho S \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2}$ las cargas horizontales $- 2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} E J$.

De acuerdo a su definición, u nos da los desplazamientos del eje de la barra, o lo que es igual de su elástica, relativos a un sistema de coordenadas (u y z) con origen en B, de eje vertical z , que se traslada con un desplazamiento igual al de B. La (11) viene a constituir por lo tanto la ecuación de la elástica debida a la acción del viento y del movimiento del suelo re-

lativa al mencionado sistema. Una vez resuelta en términos finitos, la fórmula (6) nos permitirá obtener el momento flector \mathcal{M} y la primera de (7) la expresión de $a_x = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$. En base de esta última se podrá calcular las cargas horizontales $B - \rho S \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - 2 \varepsilon E J \frac{\partial u}{\partial z}$ y por ende el esfuerzo de corte mediante la fórmula

$$Q = \int_{z_1}^1 \left(B - \rho S \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - 2 \varepsilon E J \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \quad (12)$$

Si además se deseara tener los desplazamientos X relativos al sistema $(X Y Z)$ no hay más que poner $X = X_B + u$.

§ 2. **Movimientos de la barra. Condiciones iniciales y de Contorno.** — Puede verse que la ecuación (11) es una ecuación lineal en derivadas parciales provista de 2º miembro. Si tanto \bar{b} como $\frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2}$ fueran nulos, dicho 2º miembro sería nulo también. Si esto ocurre, la barra estaría libre de acciones externas; podemos por ello decir que en tal caso la barra ejecuta un *movimiento libre*. No siendo nulo el 2º miembro diremos en cambio que la barra ejecuta un *movimiento forzado*, ya que en ese caso está obligado a moverse respondiendo a las exigencias externas, sea del movimiento del suelo, sea del viento. Correspondientemente podemos designar a la ecuación sin segundo miembro, *ecuación del movimiento libre*, y a la ecuación con 2º miembro, *ecuación del movimiento forzado*.

Tanto en el caso del movimiento libre como en el del movimiento forzado, la solución de la ecuación diferencial no sólo debe ser una expresión que la satisfaga, sino que también debe responder a dos clases de condiciones, a saber: a) debe representar el movimiento no de una barra cualquiera, sino de una empotrada en B y libre en A; y b) los desplazamientos que representa deben resultar coincidentes con los de la realidad en un instante dado que se elige como inicial.

Las condiciones a) vienen a ser del tipo de las que se conoce en la teoría de las ecuaciones diferenciales con el nombre de *condiciones de contorno*, y las condiciones b) vienen a ser las que se conocen con el nombre de *condiciones iniciales*.

Para un estudio en general podemos imponer como condiciones iniciales que para $t = 0$ sea $u = U$ y $\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{U}$; es decir que en el instante inicial los puntos de la barra tengan una determinada elongación y una determinada velocidad relativa a su tangente en el empotramiento. De la solución para tales condiciones iniciales se puede pasar luego fácilmente a las que corresponde a las especiales que mencionamos en la introducción y que interesan en nuestro problema. Es tan sólo de exigir que U y \dot{U} sean funciones de z compatibles con las condiciones de contorno, porque si así no fuera no corresponderían a la barra que deseamos tomar en consideración.

Para establecer las condiciones de contorno notamos: a) que para $z > 1$, en la barra no hay cargas; los momentos flectores y los esfuerzos de corte deben por ello ser nulos para $z = 1$; y b) que estando la barra empotrada y ejecutando el suelo sólo translaciones: 1º) el desplazamiento del punto de empotramiento debe ser igual al del suelo en dicho punto; y 2º) la tangente a la elástica en dicho punto debe mantener invariado su ángulo nulo con la ver-

tical. Como en base de (4) si $X = X_B$ debe ser $u = 0$, la condición 1ª de b) se traduce en que para el empotramiento, o sea para $z = 0$, debe ser $u = 0$. Por su parte la condición 2ª de b) se traduce en que para igual valor de z debe ser $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Pasando ahora a las condiciones a) se tiene: 1º) la exigencia de que sea nulo el momento flector para $z = 1$ equivale, en virtud de (5) a exigir que sea $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ para $z = 1$; y 2ª) la exigencia de que sea nulo el esfuerzo de corte para $z = 1$, equivale a exigir que para dicho valor de z sea $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0$. Para convencerse de esto último hay que tener en cuenta que el esfuerzo de corte está dado por (12), y que derivando la (9) respecto de z_1 una vez corregida por el término $2 \varepsilon E J \int_{z_1}^1 \frac{\partial u}{\partial t} (z - z_1) \partial z$ se saca:

$$E J \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} = - \int_{z_1}^1 \left[B - \rho S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 X_B}{\partial t^2} \right) - 2 \varepsilon E J \frac{\partial u}{\partial t} \right] dz - \rho g S (1 - z_1) \quad (13)$$

Por lo tanto es:

$$E J \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} = - Q - \rho g S (1 - z_1) \quad (14)$$

Como para $z_1 = 1$ es nulo tanto Q como $\rho g S (1 - z_1)$, será nulo el primer miembro de esta igualdad.

Interesante es reparar en que las condiciones a) se pueden obtener prescindiendo de los valores que para $z = 1$ deben tener \mathcal{M} y Q . Basta en efecto notar que u debe no sólo satisfacer a la ecuación diferencial (11), sino también a las igualdades (9) corregida, y (13), de las cuales salió la (11). Y como en tales igualdades el 2º miembro es nulo para $z_1 = 1$ deberá serlo el primero.

Resumiendo, podemos decir que las condiciones de contorno vienen a ser:

$$\begin{aligned} \text{Para } z = 0 \text{ debe verificarse} \quad u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ \text{Para } z = 1 \text{ debe verificarse} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

§ 3. **Unicidad de la solución.** — Antes de ocuparnos de encontrar la solución de (11), parece útil saber cuántas soluciones de la misma puede haber, que satisfagan a las condiciones iniciales y de contorno. Demostraremos que no hay más que una sola, razón por la cual se puede hablar de la *unicidad* de la solución.

Con el propósito mencionado supongamos que u_1 y u_2 sean dos soluciones de (11) e imaginémoslas sustituidas en dicha ecuación. Para mayor generalidad de las consideraciones supongamos que el 2º miembro de (11) sea una función no sólo de t sino también de z que será representada por $F(z, t)$; y para abreviar la escritura pongamos:

$$\frac{\rho S}{E J} = c; \quad \frac{\rho S}{E J} g = c_1. \quad (16)$$

Si tras de haber sustituido u_1 en (11) la multiplicamos por u_2 e integramos respecto de z entre o y l , tendremos:

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} u_2 dz - c_1 \int_0^1 (z-1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} u_2 dz - c_1 \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial z} u_2 dz + \int_0^1 \left(c \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) u_2 dz = \int_0^1 u_2 F(z, t) dz. \quad (17)$$

Efectuando la integración en los dos primeros términos por partes, se saca:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} u_2 dz &= \left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} u_2 \right]_0^1 - \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial u_2}{\partial z} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} dz \\ - c_1 \int_0^1 (z-1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} u_2 dz &= - c_1 \left[(z-1) \frac{\partial u_1}{\partial z} u_2 \right]_0^1 + c_1 \int_0^1 (z-1) \frac{\partial u_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial z} dz + \\ &+ c_1 \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial z} u_2 dz. \end{aligned}$$

Y reparando en que para $z=l$, es $z-l=0$, y además en las condiciones de contorno, se tiene por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} u_2 dz &= \int_0^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} dz; \quad - c_1 \int_0^1 (z-1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} u_2 dz = c_1 \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial z} u_2 dz + \\ &+ c_1 \int_0^1 (z-1) \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en (17) sale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} dz + c_1 \int_0^1 (z-1) \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z} dz + \int_0^1 \left(c \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) u_2 dz = \\ \int_0^1 F(z, t) u_2 dz. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación u_2 por u_1 y operando en forma análoga se obtendría un resultado semejante al precedente con la sola diferencia de que figurarían en él u_2 en donde figura u_1 , e inversamente. Restando miembro a miembro estos dos resultados saldrá evidentemente el siguiente:

$$\int_0^1 \left[\left(c \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) u_2 - \left(c \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) u_1 - F(z, t) (u_2 - u_1) \right] dz = 0.$$

Este resultado debe valer cualquiera sea l , luego deberá ser:

$$\left(c \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} - F(z, t) \right) \frac{1}{u_1} = \left(c \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial t} - F(z, t) \right) \frac{1}{u_2}$$

Pero las expresiones de ambos miembros de esta igualdad son en general funciones de t y de z ; se puede por ello escribir:

$$\left(c \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} - F(z, t) \right) \frac{1}{u_1} = \Phi(z, t).$$

y una ecuación análoga en u_2 .

u_1 y u_2 son entonces soluciones de la misma ecuación diferencial ordinaria; y puesto que ambas satisfacen por hipótesis a las mismas condiciones iniciales, serán idénticas.

§ 4. **El movimiento libre.** — La ecuación del movimiento forzado debe considerarse como más general que la del movimiento libre, el cual viene a constituir un caso particular del anterior. No obstante esta circunstancia, es conveniente averiguar primero la solución de este caso si se quiere conocer la del caso más general.

Para hallar la solución del movimiento libre hagamos u igual al producto de una función $v(z)$ puramente de z , y de otra $q(t)$ puramente de t , es decir, pongamos:

$$u = v(z) q(t)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (11) supuesta sin 2º miembro, y dividiendo por $v \cdot q$, sacaremos:

$$\frac{1}{v} \left[\frac{d^4 v}{dz^4} - c_1 \frac{d^2 v}{dz^2} (z-1) - c_1 \frac{dv}{dz} \right] + \left[c \frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \varepsilon \frac{dq}{dt} \right] \frac{1}{q} = 0.$$

o lo que es equivalente:

$$\frac{1}{v} \left[\frac{d^4 v}{dz^4} - c_1 \frac{d^2 v}{dz^2} (z-1) - c_1 \frac{dv}{dz} \right] = - \left[c \frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \varepsilon \frac{dq}{dt} \right] \frac{1}{q} \quad (18)$$

Como el primer miembro de esta igualdad es una pura función de z y el 2º es lo de t , ella podrá valer solamente si ambos miembros son iguales a una constante λ . En vez de (18) tenemos por lo tanto las siguientes dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} c \frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \varepsilon \frac{dq}{dt} + \lambda q &= 0. \\ \frac{d^4 v}{dz^4} - c_1 \frac{d^2 v}{dz^2} (z-1) - c_1 \frac{dv}{dz} - \lambda v &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

La primera de ellas no es sino la conocida ecuación del movimiento amortiguado de un péndulo, y su solución puede representarse por:

$$q = e^{-\varepsilon_1 t} [a \operatorname{sen} nt + d \operatorname{cos} nt] \quad (20)$$

$$\text{con } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{c}; \quad n^2 = \frac{\lambda}{c} - \varepsilon_1^2 \quad (21)$$

a y d siendo constantes arbitrarias a determinar; cosa que como se verá más adelante, puede hacerse de modo que queden satisfechas las condiciones iniciales.

En cuanto a la 2ª de las ecuaciones (19), es como la primera, una ecuación lineal; pero no todos sus coeficientes son constantes, y de ello deriva una dificultad en cierto modo, por-

que debido a esa circunstancia no se aviene a ser resuelta con una expresión cerrada, siendo necesario acudir para ello a los métodos de desarrollo en series. Como esto supone algunas complicaciones no entraremos por ahora en los detalles de la tarea que en tal sentido hay que hacer, a fin de simplificar la exposición; ello se hará oportunamente; pero lo que desde ya podemos adelantar es que la solución de esa ecuación será dada por una expresión del tipo:

$$v(z) = \sum_{i=1}^{i=4} b_i f_i(z) \quad (22)$$

en la cual los b_i son constantes y los f_i son soluciones particulares de la ecuación de referencia.

Teniendo libertad de disponer sobre el valor de las constantes b_i y reparando en que por hipótesis únicamente en $v(z)$ está la parte de u que depende de z podemos elegir las de modo que queden satisfechas las condiciones de contorno (15).

Poniendo en ellas $v \cdot q$ en vez de u y dividiendo luego por q se encontrará que los $v(z)$ deben satisfacer a las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Para } z=0 \text{ debe ser } v &= 0 \quad - \frac{dv}{dz} = 0 \\ \text{,, } z=1 \quad \text{,, } \text{,, } - \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0 \quad - \frac{d^3 v}{dz^3} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Si en ellas ponemos en vez de v la expresión (22), se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=4} b_i f_i(0) &= 0 & \sum_{i=1}^{i=4} b_i \dot{f}_i(0) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{i=4} b_i \ddot{f}_i(1) &= 0 & \sum_{i=1}^{i=4} b_i \ddot{f}_i(1) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Es decir, cuatro ecuaciones lineales en las cuatro constantes b_i . En ellas significamos por brevedad de escritura con los puntos sobre las f , derivadas 1ª, 2ª y 3ª, según el caso. Como en esas ecuaciones es nulo el término independiente, será preciso para que puedan coexistir, que sea nulo el determinante de los coeficientes de b_i ; por lo tanto, que sea:

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ \dot{f}_1(0) & \dot{f}_2(0) & \dot{f}_3(0) & \dot{f}_4(0) \\ \ddot{f}_1(1) & \ddot{f}_2(1) & \ddot{f}_3(1) & \ddot{f}_4(1) \\ \ddot{\ddot{f}}_1(1) & \ddot{\ddot{f}}_2(1) & \ddot{\ddot{f}}_3(1) & \ddot{\ddot{f}}_4(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Cuando estudiemos las expresiones f , se verá que en ellas entra el grandor λ como parámetro. El determinante (25) resulta ser por ello una expresión en dicho grandor que podrá ser igual a cero si se le da valores adecuados al mismo. Tales valores no son sino las raíces del primer miembro de (25) considerado como función de λ . Podemos por ello decir que únicamente serán soluciones de nuestro problema las que se basan en funciones v obtenidas con λ igual a esas raíces. Esas raíces vienen a ser lo que en la teoría de las ecuaciones diferenciales se conoce con el nombre de *valores propios*, y las funciones que les corresponden, lo

que se conoce con el nombre de *funciones propias*. El primer miembro de (25) resulta ser una función trascendente de λ ; hay por ello infinitos valores propios λ y por consiguiente infinitas funciones propias v .

Los valores propios, como puede verse en las expresiones (21), sirven también para determinar las expresiones q , ya que en base de los λ es que se pueden calcular los n .

Siendo λ_j uno de los valores de λ y asignando el índice j a los diversos grandores que entran en la q y en la v que le corresponden, se podrá escribir como solución particular de (11) correspondiente a dicho valor de λ :

$$q_j v_j = e^{-\varepsilon_1 t} [a_j \operatorname{sen} n_j t + d_j \operatorname{cos} n_j t] \sum_{i=1}^{i=4} b_i^{(j)} f_i^{(j)}(z) \quad (26)$$

En base de tres de las relaciones (24) puede expresarse tres de los b_i en función del restante; por ejemplo en función de $b_1^{(j)}$, por medio de la fórmula siguiente:

$$b_i^{(j)} = b_1^{(j)} \eta_i^{(j)} \quad (27)$$

en la cual η_i es una constante que depende de λ_j y en general de los datos c_1 y l del problema.

En vez de (26) podemos por lo tanto poner:

$$q_j v_j = e^{-\varepsilon_1 t} [a_j \operatorname{sen} n_j t + d_j \operatorname{cos} n_j t] b_1^{(j)} \left(f_1^{(j)}(z) + \sum_{i=2}^{i=4} \eta_i^{(j)} f_i^{(j)}(z) \right)$$

o si notamos que $b_1^{(j)} a_j$ y $d_j b_1^{(j)}$ son a su vez constantes que podemos designar A_j, B_j , y si entendemos por $\eta^{(j)}$ la unidad:

$$q_j v_j = e^{-\varepsilon_1 t} [A_j \operatorname{sen} n_j t + B_j \operatorname{cos} n_j t] \sum_{i=1}^{i=4} \eta_i^{(j)} f_i^{(j)}(z)$$

El segundo miembro de esta igualdad sigue siendo como se ve un producto de una función análoga a $q(t)$, que podemos llamar $Q_j(t)$, por otra que no es sino una $v(z)$ en la cual la constante b_1 es igual a la unidad y que por tal razón podemos llamar $V_j(z)$ para diferenciarla de una $v(z)$ común.

Soluciones particulares como la precedente se podrá escribir tantas como valores haya de λ , y puesto que si un conjunto de funciones satisfacen a la ecuación diferencial (11) sin 2º miembro, ella queda satisfecha también por la suma de las mismas, podemos escribir como solución general de esa ecuación:

$$u = \sum_{j=1}^{j=\infty} [e^{-\varepsilon_1 t} (A \operatorname{sen} nt + B \operatorname{cos} nt) \sum_{i=1}^{i=4} \eta_i f_i(z)]_j \quad (28)$$

el subíndice j sirviendo para expresar que todos los parámetros del corchete corresponden a λ_j .

Siendo nulo el movimiento del suelo es $u = X$; la (28) nos da por ello en tal caso también el movimiento libre de la barra, respecto del sistema fijo.

Puesto que los A_j, B_j son constantes arbitrarias, podemos imaginar que todos esos coeficientes, menos una pareja de ellos sean nulos. El movimiento quedará en tal caso expresado por uno de los corchetes de (28); de lo que se infiere que cada uno de esos corchetes representa un posible movimiento de la barra. A tales movimientos, por corresponder cada uno a un λ_j podemos llamarlos *movimientos propios de la barra*, y según eso interpretar la (28) di-

ciendo que el movimiento libre será en general igual a la suma de todos sus posibles movimientos propios.

Examinando la expresión de un movimiento propio puede verse que viene a ser un movimiento oscilatorio cuasi-periódico sincrónico en toda la barra de amplitud variable con z , cuyo período T_j está dado por

$$T_j = \frac{2\pi}{n_j} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\lambda}{c} - \epsilon_1^2}}$$

Si $\epsilon_1 = 0$ el movimiento oscilatorio es periódico puro y el período viene a estar dado por $T_j^* = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda/c}}$. Como habrá un T_j^* por cada λ_j podemos llamar período propio a este período y decir que no habiendo amortiguamiento el movimiento de la barra es una suma de oscilaciones con los períodos propios.

§ 5. **Ortogonalidad de las funciones propias.** — Demostraremos que las funciones propias gozan de la siguiente propiedad, que se conoce con el nombre de *propiedad de ortogonalidad*.

Si v_k es la función propia correspondiente a λ_k y v_j la correspondiente a λ_j es:

$$\int_0^1 v_k v_j dz = 0 \quad \text{si } k \neq j$$

Imaginemos para ello escrita la 2ª ecuación (19) una vez para $v = v_k$ y otra para $v = v_j$. Si multiplicamos la ecuación en v_k por v_j y la integramos entre 0 y l , tendremos:

$$\int_0^1 \frac{d^4 v_k}{dz^4} v_j dz - c_1 \int_0^1 \frac{d^2 v_k}{dz^2} (z-1) v_j dz - c_1 \int_0^1 \frac{d v_k}{dz} v_j dz - \lambda \int_0^1 v_k v_j dz = 0 \quad (29)$$

Si integramos por partes la primera y segunda de las integrales del 2º miembro y reparamos en los valores que las expresiones resultantes tienen para $z = 0$ y para $z = l$, en forma análoga a como lo hicimos en el § 3 se puede obtener fácilmente tras de sustituir el resultado en (29)

$$\int_0^1 \frac{d^2 v_k}{dz^2} \frac{d^2 v_j}{dz^2} dz + c_1 \int_0^1 \frac{d v_k}{dz} \frac{d v_j}{dz} (z-1) - \lambda_k \int_0^1 v_k v_j dz = 0$$

Multiplicando la ecuación en v_j por v_k y procediendo en forma análoga sacaríamos:

$$\int_0^1 \frac{d^2 v_k}{dz^2} \frac{d^2 v_j}{dz^2} dz + c_1 \int_0^1 \frac{d v_k}{dz} \frac{d v_j}{dz} (z-1) - \lambda_j \int_0^1 v_k v_j dz = 0$$

y restando esta ecuación de la precedente:

$$(\lambda_k - \lambda_j) \int_0^1 v_k v_j dz = 0$$

Si $k \neq j$ es $\lambda_k \neq \lambda_j$. La igualdad precedente quedará satisfecha por lo tanto sólo si

$$\int_0^1 v_k v_j dz = 0$$

como deseábamos demostrar.

Esta propiedad nos permite en ciertos casos desarrollar una función $F(z)$ en una serie de funciones propias. Si tal cosa fuera posible, se podría escribir:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{j=\infty} D_j v_j(z) \quad (30)$$

$v_j(z)$ siendo una función propia cuyo $b_1^{(j)}$ tiene un valor que se puede fijar arbitrariamente y los D_j siendo coeficientes a determinar.

Para determinar un D_j se puede multiplicar ambos miembros de (30) por $v_j(z)$ e integrar entre o y l . Con ello se sacará en virtud de la ortogonalidad de los v_j .

$$\int_0^1 F(z) v_j(z) dz = D_j \int_0^1 v_j^2(z) dz$$

y por lo tanto:

$$D_j = \frac{\int_0^1 F(z) v_j(z) dz}{\int_0^1 v_j^2(z) dz} \quad (31)$$

Para simplificar la expresión formal de los D_j se puede elegir los $b_1^{(j)}$, de modo que el denominador de (31) sea igual a la unidad. Cuando ello ocurra las funciones propias vendrán a ser lo que puede llamarse funciones propias *normalizadas*, y para D_j podrá ponerse simplemente:

$$D_j = \int_0^1 F(z) v_j(z) dz$$

En nuestras consideraciones no ofrece mayor ventaja operar con funciones normalizadas. Prescindiremos por eso de su empleo y usaremos en cambio las funciones que definimos con la designación de $V(z)$.

§ 6. Solución de la ecuación del movimiento libre ajustado a condiciones iniciales. — La (28) representa una solución general correspondiente a condiciones iniciales cualesquiera. Para que ella responda a las condiciones iniciales que señalamos en el § 2, de que para $t = o$ sea $u = U$ y $\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{U}$ es necesario elegir adecuadamente las coeficientes A_j, B_j . Notamos en tal sentido que para $t = o$ la (28) nos da poniendo $V(z)$ en vez de $\sum \eta_i f_i(z)$:

$$\begin{aligned} (u)_{t=0} &= \sum_{j=1}^{j=\infty} B_j V_j(z) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= \sum_{j=1}^{j=\infty} V_j(z) [A_j n_j - \varepsilon_1 B_j] \end{aligned} \quad (32)$$

Igualando los primeros miembros de esta expresión respectivamente a U y a \dot{U} , dichas funciones resultan estar en la situación de la función $F(z)$ del § precedente en la igualdad (30); es decir, como ésta, desarrolladas en serie de valores propios; B_j y $n_j A_j - \varepsilon_1 B_j$ viniendo a hacer el mismo papel que los coeficientes D_j . Para hallar tales coeficientes no hay más,

por lo tanto que aplicar la fórmula (31) poniendo en ella U y \dot{U} , según el caso. Conociendo B_j y $n_j A_j - \varepsilon_1 B_j$ se puede sin dificultad despejar A_j .

Sustituyendo A_j y B_j hallados así, en (28), ella vendrá a ser la solución ajustada a las condiciones iniciales, ya que para $t = 0$ se hará igual al 2º miembro de la 1ª ecuación de (32), que es igual a U , y su derivada se hará igual al 2º miembro de la 2ª ecuación de (32) que es igual a \dot{U} .

Interesante es advertir que si $U = 0$ resultarán nulos los B_j , y si además es $\dot{U} = 0$ resultarán nulos también los A_j ; por consiguiente, también resultará serlo u para cualquier instante. Si en el instante $t = 0$ es nulo el desplazamiento y la velocidad de los puntos de la barra, vale decir, si la barra está en reposo, seguirá entonces estándolo ulteriormente, no actuando causas externas sobre ella; resultado que se conoce de la práctica.

§ 7. **Movimiento forzado de la barra.** — Pasemos ahora a estudiar el caso del movimiento forzado. Para mayor generalidad reunamos otra vez en una sola expresión $F(z, t)$ a la acción de las causas que obran sobre la barra y operemos por consiguiente con la ecuación:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1 \frac{\partial u}{\partial z} - c_1 (z - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = F(z, t) \quad (33)$$

Para resolver este caso podemos seguir el procedimiento que se recomienda en Courant-Hilbert (5) al tratar el movimiento forzado de la cuerda y de la membrana vibrante, aunque con una adecuada ampliación. En la obra de esos autores, en efecto, se supone que la función $F(z, t)$ satisface a las condiciones de contorno (6) y esto a menudo no sucede. Para nuestro objeto resulta conveniente considerar estas dos posibilidades: a) que $F(z, t)$ satisfaga todas las condiciones de contorno; y b) que satisfaga todas las condiciones de contorno menos que se anula para $z = 0$.

Comenzando con la primera, supongamos que tanto F como u para cada instante t consideradas como funciones de z son desarrollables en series convergentes de funciones propias. En tal caso podemos poner:

$$u = \sum_{j=1}^{j=\infty} p_j V_j(z); \quad F(z, t) = \sum_{j=1}^{j=\infty} P_j V_j(z) \quad (34)$$

p y P vienen a ser los coeficientes D_j de los respectivos desarrollos.

Como tales coeficientes son en general distintos para cada t , ellos pueden considerarse como funciones de t , lo cual será destacado poniendo $p \equiv p(t)$ y $P \equiv P(t)$.

Sustituyendo (34) en (33) se puede ver que ésta quedara satisfecha si para cada j vale la relación:

$$p \left[\frac{d^4 V}{dz^4} - c_1 (z - 1) \frac{d^2 V}{dz^2} - c_1 \frac{dV}{dz} \right] + V \left(c \frac{d^2 p}{dt^2} + 2 \varepsilon \frac{dp}{dt} \right) = P \cdot V$$

Por lo tanto si es:

$$\left(\frac{d^4 V}{dz^4} - c_1 (z - 1) \frac{d^2 V}{dz^2} - c_1 \frac{dV}{dz} \right) \frac{1}{V} = - \left(c \frac{d^2 p}{dt^2} + 2 \varepsilon \frac{dp}{dt} \right) \frac{1}{p} + \frac{P}{p}$$

El primer miembro de acuerdo a las consideraciones del § 4 no es sino λ_j . Se podrá por ello poner también el segundo igual a ese grandor, y por ende:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + 2 \varepsilon_1 \frac{dp}{dt} + \frac{\lambda}{c} p = P \quad (35)$$

Y esta ecuación no es sino la muy conocida del movimiento forzado de un péndulo amortiguado.

Mediante el método de variación de constantes se obtiene como solución de (35):

$$p = e^{m_1 t} \left[g + \frac{1}{m_1 - m_2} \int e^{-m_1 t} P dt \right] + e^{m_2 t} \left[h + \frac{1}{m_2 - m_1} \int e^{-m_2 t} P dt \right] \quad (36)$$

m_1 y m_2 , siendo dadas por:

$$m_1 = -\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - \frac{\lambda}{c}} \quad m_2 = -\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 - \frac{\lambda}{c}}$$

y g y h , siendo dos constantes arbitrarias.

Operando sobre los términos no afectados por las integraciones, se puede transformar fácilmente la (36) en la expresión siguiente:

$$p = e^{-\varepsilon_1 t} [A \operatorname{sen} nt + B \operatorname{cos} nt] + \frac{e^{m_1 t}}{m_1 - m_2} \int e^{-m_1 t} P dt + \frac{e^{m_2 t}}{m_2 - m_1} \int e^{-m_2 t} P dt \quad (37)$$

en la cual A y B son constantes arbitrarias en reemplazo de las constantes g y h .

Designando $R_j(t)$ a la suma de los último dos términos, y notando que el primero no es sino lo que llamamos $Q_j(t)$ en el § 4, podemos escribir en vez de (37) más brevemente

$$p = Q_j(t) + R_j(t)$$

Si sustituímos esto en (34), la solución que representa el movimiento forzado será:

$$u = \sum_{j=1}^{j=\infty} Q_j(t) V_j(z) + \sum_{j=1}^{j=\infty} R_j(t) V_j(z) \quad (38)$$

y reparando en el significado de la primera de esas sumaciones, podemos afirmar por lo tanto que el movimiento forzado queda dado por la suma de dos expresiones de las cuales una (en (38) la primera del 2º miembro) representa al movimiento libre de la barra.

En virtud de que los $V(z)$ satisfacen a las condiciones (23), la (38) satisfará las condiciones de contorno. Para que también satisfaga a las condiciones iniciales hay la posibilidad de disponer convenientemente sobre las constantes A_j, B_j .

Sea en tal sentido otra vez para $t = 0$, $p = U$ y $\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{U}$.

Si la (38) respondiera a dichas condiciones, podríamos poner:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{j=1}^{j=\infty} (B_j + R_j(0)) V_j(z) \\ \dot{U} &= \sum_{j=1}^{j=\infty} (A_j n_j - \varepsilon_1 B_j + \dot{R}_j(0)) V_j(z) \end{aligned} \quad (39)$$

entendiendo por $R_j(0)$ y $\dot{R}_j(0)$ respectivamente los valores de R y $\frac{dR}{dt}$ para $t = 0$.

De estas expresiones con ayuda de la propiedad de ortogonalidad de las $V(z)$, es decir, mediante la fórmula (31), se podrá despejar los coeficientes de $V(z)$ que figuran en ellas, y por consiguiente, luego, la expresión de A_j y de B_j y por ende sus valores.

Interesante es notar aquí que como $R_j(0)$ y $\dot{R}_j(0)$ quedan determinados por la función $F(z, t)$, una vez que ésta ha sido dada, lo que determinará los valores de A_j y B_j serán las funciones que se atribuya a U y \dot{U} ; es decir, las condiciones iniciales.

Veamos ahora cómo se puede resolver el problema en la posibilidad que detallamos como b). Supongamos que también en este caso u es desarrollable en funciones propias y que lo mismo valga para $F(z, t)$ mientras $z \neq 0$.

Si para obtener la solución en este caso seguimos el procedimiento que se acaba de indicar para el caso a) sacaríamos una expresión u_1 de u que satisfaría todas las exigencias del problema mientras sea $z \neq 0$; pero no así si $z = 0$. En efecto, sustituida en el primer miembro de (33) debería dar para $z = 0$ una expresión igual a $F(z, t)$ que por hipótesis es distinta de cero. Dará en cambio un resultado nulo, ya que la $F(z, t)$ que le corresponde en el caso a) se anula para $z = 0$. Para salvar este inconveniente podemos poner como solución:

$$u = u_1 + \frac{z^4}{4!} \psi(z) F(z, t) \quad (40)$$

$\psi(z)$ siendo una función de z nula para $z \neq 0$ e igual a 1 para $z = 0$.

Sustituyendo la expresión (40) en (33), se obtendrá para $z \neq 0$ el mismo resultado que si sólo estuviera formado por el primer término. Dará por lo tanto un resultado igual, como corresponde, a $F(z, t)$.

Para $z = 0$ en cambio, dará el mismo resultado que si estuviera formada por el 2º término, ya que el primero da un resultado nulo. El primer miembro de (33) resultará entonces igual a una suma de términos en las potencias sucesivas de z desde z^4 hasta z^0 . Para $z = 0$ serán nulos todos, excepto el término $\psi(z) F(z, t)$, que por ser $\psi(0) = 1$, será igual a $F(z, t)$. La (40) satisface por lo tanto a la (33).

Que también satisface a las condiciones de contorno, se puede ver observando: 1º, que ello vale para u_1 ; 2º, que $\frac{z^4}{4!} \psi(z) F(z, t)$ y su 1ª derivada se anulan para $z = 0$ en virtud de contener potencias de z distintas de cero; y 3º, que al ser $\psi(z) F(z, t) \frac{z^4}{4!}$ nulo para todos los valores de $z \neq 0$, valdrá lo mismo para sus sucesivas derivadas, y en particular serán nulas la 2ª y la 3ª para $z = 1$.

Más adelante se verá que desarrollando la unidad en funciones propias se saca para $z \neq 0$.

$$1 = \sum_{j=1}^{j=\infty} \beta_j V_j(z) \quad (41)$$

Teniendo esto en cuenta podemos formar la función

$$1 - \sum_{j=1}^{j=\infty} \beta_j V_j(z) \quad (42)$$

Examinando sus propiedades se puede comprobar que ella satisface todas las exigencias impuestas a $\psi(z)$. En efecto, debido a (41) es nula para $z \neq 0$ y para estos valores de z , por consiguiente son nulas sus sucesivas derivadas. Para $z = 0$ son nulos los $V_j(z)$, de modo que también lo será el 2º miembro de (41) y la (42) se reduce a la unidad.

§ 8. Causas transitorias actuantes sobre barras inicialmente en reposo. — Tanto los terremotos como el viento actúan sobre los edificios sólo en forma transitoria, y generalmente inician su acción mientras los edificios están en reposo. Reviste por ello particular interés la solución de (33) correspondiente a las condiciones iniciales

$$U = 0 \quad \dot{U} = 0$$

para el caso en que $F(z, t)$ sea distinto de cero sólo en un intervalo dado de tiempo. Sobre todo, que no considerando esas condiciones iniciales, ni funciones así, las conclusiones a que se llega, según se expresó en la Introducción, no parecen aceptables. Pasaremos por ello a ocuparnos en especial del problema, para esas exigencias.

Para destacar el carácter transitorio de $F(z, t)$ basta establecer que sea:

$$\begin{array}{ll} \text{para } -\infty < t \leq 0 & F(z, t) = 0 \\ \text{,, } 0 < t < t_1 & F(z, t) \neq 0 \\ \text{,, } t_1 \leq t < \infty & F(z, t) = 0 \end{array}$$

Funciones $F(z, t)$ así, se representan en las figuras 2 y 3.

Su valor es nulo hasta el instante $t = 0$; adquiere un valor distinto de cero en el intervalo entre $t = 0$ y $t = t_1$, y vuelve a ser nulo para t superior a t_1 .

En base de las características de $F(z, t)$, conviene estudiar la solución para $-\infty < t \leq 0$; para $0 < t < t_1$; y para $t_1 \leq t < \infty$.

En el primero de esos intervalos, por ser $F = 0$, serán nulos los $P(t)$ y por consiguiente las funciones $R_j(t)$ y $\dot{R}_j(t)$. Si a esto añadimos que son nulos U y \dot{U} se saca enseguida en base de (39) con ayuda de la fórmula (31) que

$$B_j = A_j = 0$$

Siendo nulos los A y B , lo mismo que los R_j , será evidentemente nulo u . Si la barra se halla en reposo, y las causas que sobre ella pueden obrar, son nulas, ella seguirá por consiguiente en reposo.

En el intervalo en que es $0 < t < t_1$ por ser $F(z, t) \neq 0$ es de esperar que valga lo mismo para las funciones $P(t)$ que se determinarán con la fórmula (31) y por consiguiente que también $R_j(t)$ y $\dot{R}_j(t)$ sean distintos de cero.

Una vez hallados $R_j(t)_j$ y $\dot{R}_1(t)$ se puede sacar, en base de (39), dándoles a esas funciones el valor para $t = 0$, los valores de A_j, B_j . Como $U = 0$ y $\dot{U} = 0$, resultará evidentemente

$$B_j + R_j(0) = 0 \quad B_j = -R_j(0) \quad (43)$$

$$n_j A_j - \varepsilon_1 B_j + \dot{R}_j(0) = 0 \quad A_j = \frac{-\dot{R}_j(0) - \varepsilon_1 R_j(0)}{n_j} \quad (44)$$

Obtenida la expresión de u en base de estas constantes podemos pasar a determinar la que tendrá en el intervalo $t_1 < t < \infty$.

En tal sentido es de notar: a) que por ser en este intervalo $F(z, t) \neq 0$ serán nulos $R_j(t)$ y $\dot{R}_j(t)$ en el mismo; y b) que los valores de u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ para el instante $t = t_1$, deben resultar iguales, sea que se los calcule con la expresión de u de este intervalo, sea que se los calcule con la expresión de u del intervalo precedente.

En base de a) la expresión de u se reduce a la siguiente:

$$u = e^{-\varepsilon_1 t} \sum [(A \operatorname{sen} n t + B \operatorname{cos} n t) V(z)]_j \quad (45)$$

és decir al del movimiento libre, como corresponde, ya que en este intervalo no actúan sobre la barra causas externas.

Escribiéndola para $t = t_1$, y llamando U_1 al valor de u para dicho instante, obtenido en base de la expresión del intervalo $0 < t < t_1$ y \dot{U}_1 a la derivada respecto del tiempo de esa expresión para el mismo instante, se tendrá:

$$U_1 = e^{-\varepsilon_1 t_1} \sum_{j=1}^{j=\infty} [(A \operatorname{sen} n t_1 + B \operatorname{cos} n t_1) V(z)]_j$$

$$\dot{U}_1 = e^{-\varepsilon_1 t_1} \sum_{j=1}^{j=\infty} \{ [- (A \operatorname{sen} n t_1 + B \operatorname{cos} n t_1) \varepsilon_1 + n (A \operatorname{cos} n t_1 - B \operatorname{sen} n t_1)] V(z) \}_j$$

De esto se podrá despejar con la fórmula de la ortogonalidad los valores de los corchetes de la 2ª ecuación y de los paréntesis de la 1ª, y con ello luego fácilmente A_j y B_j . Interesante es notar que si para $t > t_1$ representáramos al tiempo por t' , el problema de hallar los coeficientes de la expresión de u para $t > t'$, no sería otro que el resuelto en § 6; sólo que

ahora sería para $t' = 0$ $u = U_1$ y $\frac{\partial t'}{\partial u} = \dot{U}_1$.

Resumiendo, podemos decir que si la barra está sometida a una causa transitoria, ella permanecerá en reposo hasta el instante en que comienza la causa. Al producirse este hecho su movimiento estará dado por una expresión del tipo de (38) durante todo el tiempo que dura la causa actuante; y una vez que ésta se haya extinguido, la barra continuará ejecutando un movimiento libre dado por (45).

Como hemos supuesto que $\varepsilon \neq 0$, será también $\varepsilon_1 \neq 0$, y por ello ese movimiento libre se irá amortiguando con el tiempo.

§ 9. Causas transitorias sinusoidales. — Como el movimiento del suelo, y lo mismo la fuerza del viento pueden representarse por una suma de expresiones sinusoidales, estudiemos la expresión de u en la hipótesis de que $F(z, t)$ del § anterior en el intervalo en que es distinta de cero esté dada por

$$F(z, t) = \omega^2 G \operatorname{sen} \omega t \quad (46)$$

G siendo una constante.

Una idea de la función que suponemos, la da la figura 3. Hasta el instante $t = 0$ es nula; para t superior a cero y menor que t_1 , es sinusoidal, y para $t = t_1$, se hace igual a cero para seguir siéndolo indefinidamente.

En primer término notemos que la expresión supuesta de $F(z, t)$ tiene las propiedades indicadas en el § 7 bajo el caso b). Para estudiar el problema con ella en el intervalo $0 < t < t_1$, supongamos que en el mismo y para $z \neq 0$, $F(z, t)$ pueda desarrollarse en una serie de funciones $V(z)$ como se indica en (34). Es decir pongamos

$$\omega^2 G \operatorname{sen} \omega t = \sum_{j=1}^{j=\infty} P_j(t) V_j(z) \quad (47)$$

Con la propiedad de ortogonalidad se sacará

$$P_j(t) = \omega^2 G \operatorname{sen} \omega t \frac{\int_0^1 V_j(z) dz}{\int_0^1 V_j^2(z) dz}$$

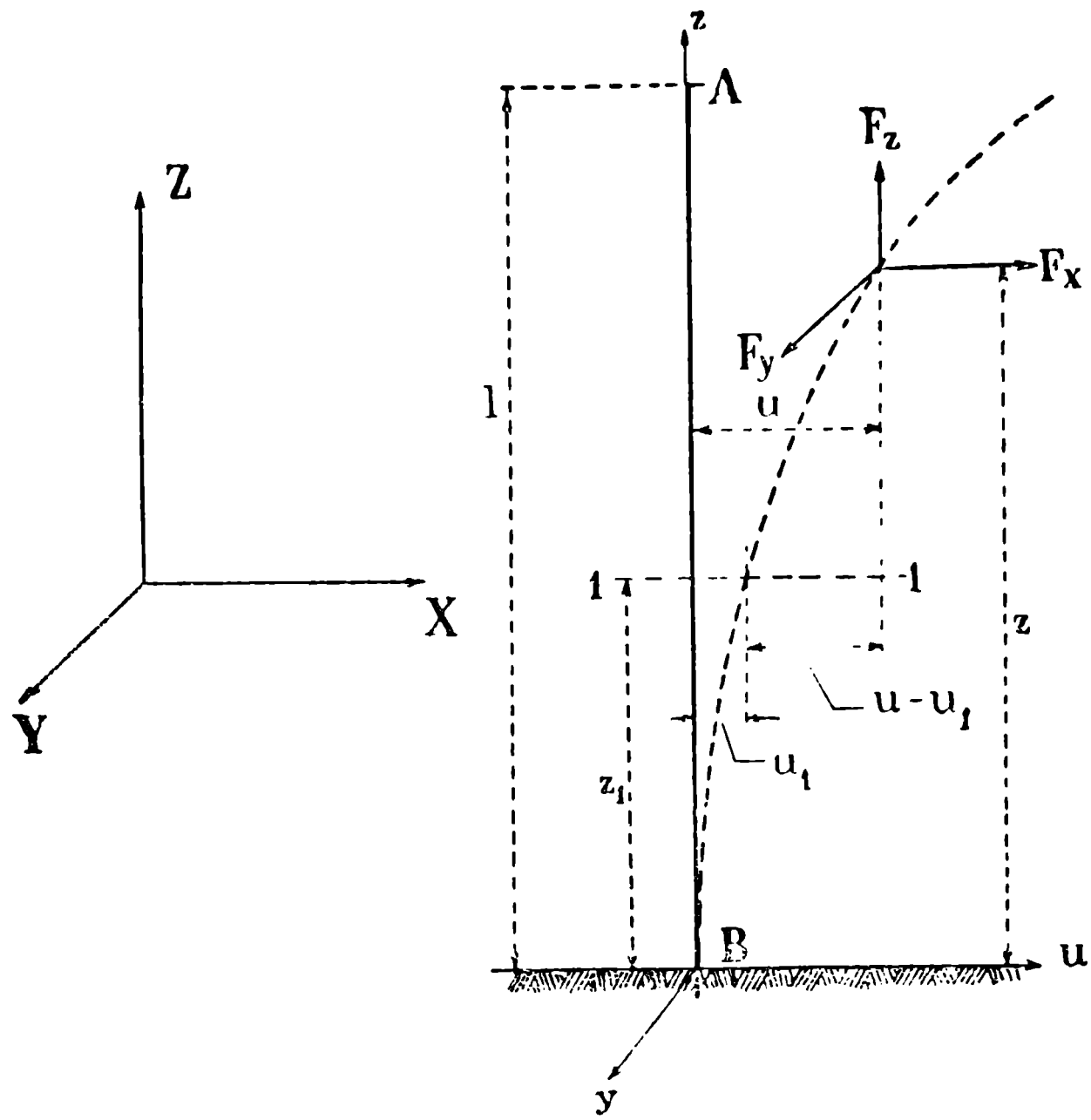


Figura 1

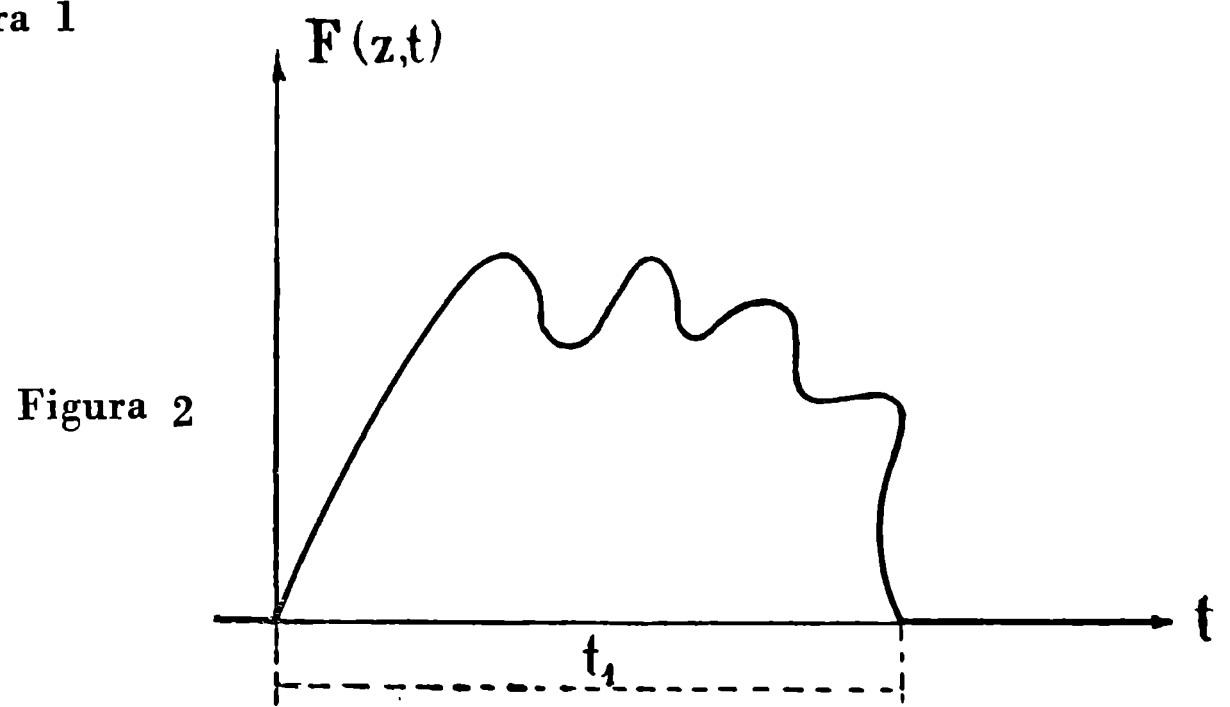


Figura 2

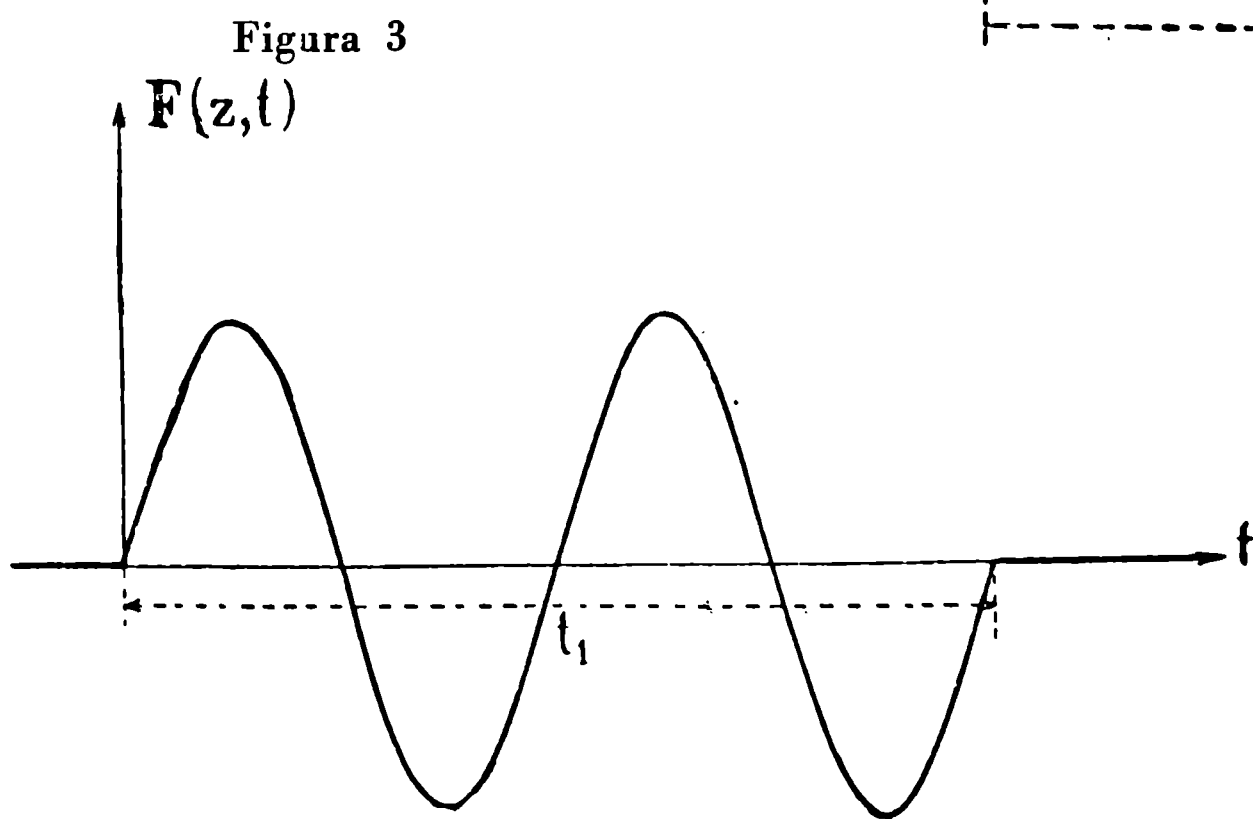


Figura 3

por ello poniendo

$$\beta_j = \frac{\int_0^1 V_j(z) dz}{\int_0^1 V_j(z) dz} \quad (48)$$

será $P_j = \beta_j \omega^2 G \text{ sen } \omega t$ (49)

Sustituyendo esto en (47) saldrá:

$$\omega^2 G \text{ sen } \omega t = \omega^2 G \text{ sen } \omega t \sum \beta_j V_j(z) \quad y \quad (50)$$

$$1 = \sum \beta_j V_j(z) \quad (51)$$

desde luego siempre que sea $z \neq 0$.

A la expresión (51) se podrá llegar evidentemente considerando a la unidad como una función $F(z, t)$, desarrollándola en funciones propias y calculando sus $P(t)$ con la fórmula (31).

Con la expresión (49) de $P_j(t)$ y la general que corresponde a $R_j(t)$ de acuerdo a (37) se saca enseguida que

$$R_j(t) = \beta_j G H_j \text{ sen } (\omega t + \varphi_j) \quad (52)$$

siendo

$$H_j = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{c} - \omega^2\right)^2 + 4 \varepsilon^2 \omega^2}} \quad (53)$$

y

$$\varphi_j = \text{arc tg} \frac{2 \varepsilon \omega}{\frac{\lambda}{c} - \omega^2}$$

De (52) sale

$$R_j(0) = G \beta_j H_j \text{ sen } \varphi_j \quad \dot{R}_j(0) = \omega G \beta_j H_j \text{ cos } \varphi_j$$

Para A_j, B_j se tendrá por lo tanto de acuerdo a (43) y (44) del § precedente:

$$B_j = -\beta_j G H_j \text{ sen } \varphi_j \quad A_j = -G \frac{(\omega \text{ cos } \varphi_j + \varepsilon_1 \text{ sen } \varphi_j) \beta_j H_j}{n}$$

Introduciendo estas expresiones, así como la (52) en (38), se saca enseguida que en el intervalo $0 < t < t_1$ las ordenadas u de la elástica en el sistema (u, z) estarán dadas por lo tanto por:

$$u = \Psi(z) \frac{z^4}{4!} \omega^2 G \text{ sen } \omega t + G \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \beta_j H_j [\text{sen } (\omega t + \varphi) - e^{-\varepsilon_1 t} \frac{\omega \text{ cos } \varphi + \varepsilon_1 \text{ sen } \varphi}{n} (\text{sen } n t + \text{sen } \varphi \text{ cos } n t)] V_j(z) \right\}_j \quad (54)$$

el subíndice j sirviendo para indicar que los grandores que figuran en la llave deben ser los correspondientes al valor propio λ_j .

§ 10. **Movimiento propio no amortiguado, Resonancia.** — La (54) se simplifica un tanto

si el amortiguamiento de la barra es nulo. En ese caso es $\varepsilon_1 = 0$ y por lo tanto también $\varphi_1 = 0$. En vez de (54) se tiene por ello como expresión de u la siguiente:

$$u = \Psi(z) \frac{z^4}{4!} G \operatorname{sen} \omega t + G \sum_{j=1}^{j=\infty} [\beta H (\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{n} \operatorname{sen} n t) V(z)]_j \quad (55)$$

ahora siendo

$$H_j = \frac{\omega^2}{\frac{\lambda_j}{c} - \omega^2} \quad \text{y} \quad n_j^2 = \frac{\lambda_j}{c} \quad (56)$$

El grandor ω puede tener cualquier valor; en particular puede suceder que sea

$$\omega^2 = \frac{\lambda_j}{c} = n_j^2 \quad (57)$$

o lo que es equivalente que el período que fuerza a la barra a moverse, sea igual a uno de sus períodos propios. En tal caso podemos decir que la barra está en “Resonancia” con la causa.

La (56) muestra que habiendo resonancia el H correspondiente al período con el cual se tiene tal fenómeno, se hace infinito. De ello puede inferirse erróneamente que también u se hace infinito, cosa que habitualmente se afirma como dijimos en la introducción, aunque en base de fórmulas distintas a las nuestras.

Para apreciar correctamente cómo será u al producirse el caso de la resonancia es preciso observar aún lo que ocurrirá con el paréntesis de (55) en el cual se cumple la igualdad (57).

Puede advertirse en tal sentido que valiendo (57) es $\omega = n$ y por ende nulo el paréntesis de referencia. El término correspondiente al período en resonancia resulta por lo tanto ser el producto de una cantidad infinita, por una nula. Es entonces una expresión indeterminada; pero la indeterminación puede salvarse estudiando ese término para valores de ω muy próximos al n de que se trate.

En el límite para $\omega = n$, resultará para el mismo, de acuerdo a las reglas para hallar el límite de expresiones indeterminadas, y debido a que es $\frac{\lambda}{c} = n^2$:

$$\lim_{\omega=n} \left(\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{n} \operatorname{sen} n t \right) \frac{\omega^2}{\frac{\lambda}{c} - \omega^2} = -\frac{1}{2} [n t \cos n t - \operatorname{sen} n t] \quad (58)$$

En lo que se puede ver que el término en cuestión es finito en general; que su amplitud es creciente con t , y que ella se hace infinita sólo en los dos casos siguientes: 1) $t = \infty$ y 2) si $n = \infty$ o lo que es igual si $\omega = \infty$.

Si λ_1 es el valor propio correspondiente al período en resonancia con ω , la expresión de u , teniendo en cuenta la (58), se puede detallar en el caso de la resonancia como sigue:

$$u = \Psi(z) \frac{z^4}{4!} \omega^2 G \operatorname{sen} \omega t + G \left[\beta \left(-\frac{n t}{2} \cos n t + \frac{\operatorname{sen} n t}{2} \right) V(z) \right]_1 + \\ + G \sum_{j=1}^{j=\infty} [\beta H (\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{n} \operatorname{sen} n t) V(z)]_j \quad (59)$$

el subíndice i sirviendo para representar el término resonante y el asterisco en el signo Σ sirviendo para destacar que la suma debe excluir al término en el cual $j = i$.

Veremos al final que $\Sigma \beta H \text{sen } \omega t V(z)$ y $\Sigma \beta H \frac{\text{sen } n t}{n} V(z)$ son series convergentes. Teniendo este hecho en cuenta, así como lo que recién se dijo a propósito del paréntesis del 2º término de (59), resulta evidente en esa expresión que u es finito si lo son al mismo tiempo G , ω y t ; que su amplitud crece con estos grandores y que se hace infinito si alguno de ellos lo es.

En los diversos trabajos relativos a efectos de terremotos en los edificios se llega en síntesis a la conclusión de que el desplazamiento X de los puntos de la barra equivalente está dado por una expresión del tipo

$$X = W(z) \text{sen } \omega t \quad (60)$$

$W(z)$ siendo una función de z que depende del parámetro ω . Si en particular $\frac{2\pi}{\omega}$ es igual a uno de los períodos propios de la barra, es decir si hay resonancia, $W(z)$, vale decir la amplitud de las elongaciones X , se hace infinita.

Nuestro resultado como se ve es bastante distinto porque si bien admite las elongaciones infinitas lo hace tan sólo para t , ω ó G iguales a infinito. Suponer $t = \infty$ equivale a admitir que la causa actuante perdure hasta el infinito; o sea que $t_1 = \infty$; y suponer que sean $\omega = \infty$ ó $G = \infty$, equivale a admitir que $\frac{d^2 X_B}{dt^2} = \infty$. Se trata pues de tres casos extremos en los que no deja de ser razonable la conclusión de que sea en ellos $u = \infty$.

Interesante todavía es notar que aceptando como correcta la (60) ello equivale a decir que para $t = 0$ es

$$\frac{dX}{dt} = \omega W(z)$$

y habiendo resonancia, por lo tanto que

$$\frac{dX}{dt} = \infty \quad \text{para } t = 0$$

Poniendo por base una condición inicial así, no debe sorprender una solución que se apoye en ella y que exprese que cualquiera sea t es $X = \infty$.

§ 11. **Caso de condiciones iniciales no nulas.** — En el caso de los terremotos, suponer la igualdad (46) $F(z, t) = \omega^2 G \text{sen } \omega t$ equivale a suponer que

$$\frac{dX_B}{dt} = \frac{\omega}{c} G \cos \omega t + e \quad ; \quad X_B = \frac{G}{c} \text{sen } \omega t + e t + k$$

e y k siendo constantes arbitrarias que podemos elegir de modo que

$$\left(\frac{dX_B}{dt} \right)_{t=0} = \left(X_B \right)_{t=0} = 0$$

ya que consideramos que el suelo está en reposo hasta el instante $t = 0$.

Eligiéndolas así, deberá ser: $k = 0$, $e = -\frac{\omega}{c} G$ y por ello

$$X_B = \frac{G}{c} \text{sen } \omega t - \frac{\omega}{c} G t \quad (61)$$

Al principio el término lineal tendrá poca importancia, pero con el crecer de t , puede adquirir tal preponderancia que la fórmula (61) pasará a representar desplazamientos únicamente de un solo signo, lo cual probablemente no ocurre en la realidad. Para acercarnos algo más a ella, podemos imaginar que la (61) vale sólo corto tiempo, hasta $t = t_2$ y que a partir de este instante, y hasta $t = t_1$, X_B está dado por

$$X_B = \frac{G_1}{c} \text{sen } (\omega t + \delta) \quad (62)$$

Como en un mismo instante el suelo no puede tener más que una sola velocidad y un solo desplazamiento, deberá ser:

$$G_1 \text{sen } (\omega t_2 + \delta) = G \text{sen } \omega t_2 - \omega G t_2; \quad G_1 \text{cos } (\omega t_2 + \delta) = G \text{cos } \omega t_2 - G$$

ecuaciones de las cuales se puede sacar G_1 y δ una vez fijado t_2 cuando se da G y ω .

Con (62), resulta $\frac{d^2 X_B}{dt^2} = -\frac{G_1}{c} \omega^2 \text{sen } (\omega t + \delta)$ y por ello en vez de (46):

$$F(z, t) = \omega^2 G_1 \text{sen } (\omega t + \delta) \quad (63)$$

En vez de una sola solución de (33) debemos considerar dos: a saber: a) para $t < t_2$ y b) para $t_2 < t < t_1$. La a) no será en general sino la (54) que ya hemos obtenido, con sus variantes (55) y (59). La b) en cambio, deberá corresponder a $F(z, t)$ dado por (63). Como tampoco la barra puede tener en un instante más que una sola velocidad y un solo desplazamiento, la solución b) deberá satisfacer la condición de que para $t = t_2$, u y \dot{u} calculados con ella sean iguales a u y \dot{u} calculados con la solución a) para el mismo instante.

Para comodidad de las consideraciones podemos tomar como origen del tiempo en la solución b) el instante $t = t_2$. Con ello, hallar u para $t > t_2$, consistirá en hallar una solución de (33) tal que $F(z, t)$ esté dado por (63) siempre que en vez de δ se tenga en ella $\delta_1 = \delta + \omega t_2$ y tal que para $t = 0$ sea

$$u = u_a \quad \text{y} \quad \dot{u} = \dot{u}_a \quad (64)$$

u_a y \dot{u}_a siendo los valores de u y de su derivada respecto de t dada por la solución a) para $t = t_2$.

Para encontrar tal solución notemos que si u_2 es una solución de (33) para condiciones iniciales nulas, y u_3 es una solución de (33) supuesta sin 2º miembro, que satisface a las condiciones (64), la expresión:

$$u = u_2 + u_3 \quad (65)$$

satisface a la (33) y a las condiciones (64).

Teniendo en cuenta las características de estas expresiones, resulta evidente que u_2 en general está dada por (54) pero con la variante de que en ella debe ponerse $\omega t + \delta_1$ en vez de ωt , G_1 en vez de G y $\varphi + \delta_1$ en vez de φ ; y que u_3 está dado por (45); debiendo contarse el tiempo en ellas desde el nuevo origen.

Si llamamos M_j al coeficiente de $V_j(z)$ para $t = t_1$, en la expresión de u de la solución a), y N_j al análogo en la expresión de \dot{u} de la misma solución para el mismo instante, los coeficientes A y B de la expresión (45) se podrán obtener de acuerdo a lo dicho en el § 6 de las igualdades siguientes:

$$B_j = M_j ; \quad n A_j - \varepsilon B_j = N_j$$

Introduciendo tales coeficientes en (45) y sustituyendo tras de ello dicha expresión en (65), saldrá:

$$u = -\frac{z^4}{4!} \Psi(z) G_1 \operatorname{sen}(\omega t + \delta_1) + G_1 \sum_{j=1}^{j=\infty} \{\beta H [\operatorname{sen}(\omega t + \delta_1 + \varphi) - e^{-\varepsilon_1 t} (\frac{\omega \cos(\varphi + \delta_1) + \varepsilon \operatorname{sen}(\varphi + \delta_1)}{n} \operatorname{sen} n t + \operatorname{sen}(\varphi + \delta_1) \cos n t)] V(z)\}_j + \quad (66)$$

$$+ e^{-\varepsilon_1 t} \sum_{j=1}^{j=\infty} \left[\left(\frac{N + \varepsilon M}{n} \operatorname{sen} n t + M \cos n t \right) V(z) \right]_j$$

De esta expresión sale para $\varepsilon = 0$, siendo $\omega \neq n$

$$u = -\frac{z^4}{4!} \Psi(z) G_1 \operatorname{sen}(\omega t + \delta_1) + G_1 \sum_{j=1}^{j=\infty} \left\{ \beta H [\operatorname{sen}(\omega t + \delta_1) - \frac{\omega}{n} \cos \delta_1 \operatorname{sen} n t - \operatorname{sen} \delta_1 \cos n t] V(z) \right\}_j + \quad (67)$$

$$+ \sum_{j=1}^{j=\infty} \left\{ \left[\frac{N}{n} \operatorname{sen} n t + M \cos n t \right] V(z) \right\}_j$$

En el caso de la resonancia el factor de βH se hace nulo, de modo que igual que en el caso de las soluciones para $t < t_2$ que tratamos en los anteriores párrafos, el producto de βH por dicho factor se hace indeterminado. Buscando su límite para $\omega = n$ y sustituyendo el resultado en (67) sale como expresión de u para este caso, la siguiente:

$$u = -\frac{z^4}{4!} \Psi(z) G_1 \operatorname{sen}(\omega t + \delta_1) + G_1 \sum_{j=1}^{j=\infty} \left\{ \beta H [\operatorname{sen}(\omega t + \delta_1) - \frac{\omega}{n} \cos \delta_1 \operatorname{sen} n t - \operatorname{sen} \delta_1 \cos n t] V(z) \right\}_j + \quad (68)$$

$$G_1 \left[\beta \left(-\frac{n t}{2} \cos(n t + \delta_1) + \frac{\cos \delta_1 \operatorname{sen} n t}{2} \right) V(z) \right]_1$$

$$+ \sum_{j=1}^{j=\infty} \left\{ \left[\frac{N}{n} \operatorname{sen} n t + M \cos n t \right] V(z) \right\}_j$$

Y ella pone de manifiesto que tampoco ahora al haber resonancia, las u serán infinitas mientras sea finito t .

Es de notar que en (66), (67) y (68) están comprendidas las expresiones (54), (55) y (59). A ellas se llega con sólo suponer nulo δ_1 , M y N y considerar un origen adecuado de t .

§ 12. **Criterio para estimar el efecto de las causas actuantes.** — Observando las expresiones (66) y (67) se puede ver que también con ellas la amplitud de u es creciente con ω y con G y que puede resultar $u = \infty$. Esto último pasaría si $\omega = \infty$ ó si $G = \infty$. Teniendo esto en cuenta, así como lo dicho en el § 10, podemos entonces afirmar en resumen que la amplitud de u es en general finita y que crece con ω y con G . Habiendo resonancia tal amplitud es finita también; crece con t y se hace infinita si $t = \infty$, lo que ocurrirá si $t_1 = \infty$.

Haya o no resonancia la amplitud de u es infinita si ω o si G son infinitas, es decir si la aceleración de la causa actuante es infinita.

Tanto en un terremoto como en el viento la aceleración y la duración de su acción es finita; las amplitudes infinitas en u se deben considerar tan sólo como resultados extremos de la teoría que pueden ser excluidos de un cálculo práctico tendiente a dimensionar las estructuras. En tal sentido, y para estimar el efecto de las causas actuantes, lo aconsejable sería empezar por atribuir a G , ω , t_2 y t_1 , valores razonables de acuerdo con los datos de que se dispone sobre terremotos y vientos. A G y ω es frecuente fijarles valores en la literatura relativa al problema que nos ocupa. Se trataría pues tan sólo de añadir a ellos los valores de t_2 y t_1 , es decir de la duración de la 1ª fase del fenómeno causante y la de su duración total.

Una vez fijados esos datos sería del caso pasar a determinar con ellos dentro del intervalo $0 < t < t_1$ los mayores valores que pueden alcanzar los diversos efectos que interesan:

desplazamientos u , aceleraciones $\frac{d^2 X}{dt^2}$, momentos flectores M , y esfuerzos de corte Q . Desde luego para representar a u se hará empleo de (66) si se supone $\varepsilon \neq 0$; de (67) si se supone $\varepsilon = 0$ y de (68) si se admite que haya resonancia. Una vez formada la expresión de u se podrá estudiar los demás efectos citados recién, respectivamente con las fórmulas (7), (6) y (12), como ya se dijo al final del § 1.

En las diversas fórmulas entre otros grandores, intervendrá el grandor H . Util es notar que el mismo no es otra cosa que lo que se conoce en sismometría con el nombre de *amplificación dinámica* de los simógrafos mecánicos. Su cálculo se puede facilitar por lo tanto echando mano de las diversas tablas o gráficos que se han dado del mismo. Si los amortiguamientos son de cierta importancia se lo puede obtener de las tablas de Zöppritz⁽⁷⁾ y de los gráficos de Geiger⁽⁸⁾.

§ 13. **Expresión de las funciones propias.** — Hemos venido prescindiendo en nuestras consideraciones de la forma que tienen las funciones propias. Si bien pudimos hacerlo hasta aquí, ello ya no nos será más posible si deseamos estudiar más en detalle la expresión de u o simplemente si queremos ver si los desarrollos en serie de que nos hemos valido son convergentes.

Para tener la expresión de las funciones propias volvamos a la 2ª ecuación diferencial que figura en (19). Como no se presta a ser resuelta por una expresión cerrada, trataremos de resolverla por una serie de potencias de z . Pondremos por ello:

$$v = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \alpha_{\mu} z^{\mu} \quad (69)$$

los α siendo coeficientes constantes.

Sustituyendo (69) en la citada ecuación de (19) y agrupando los términos de igual potencia se saca que debe ser:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} z^{\mu} [\alpha_{\mu+4} (\mu+4) (\mu+3) (\mu+2) (\mu+1) + \alpha_{\mu+2} c_1 (\mu+2) (\mu+1) - c_1 (\mu+1)^2 \alpha_{\mu+1} - \lambda \alpha_{\mu}] = 0$$

Y como esto debe valer cualquiera sea z , será preciso que sea nulo el coeficiente de z^{μ} .

Anulando ese coeficiente y despejando de la igualdad que resulta el coeficiente $\alpha_{\mu+4}$, se obtiene la siguiente relación de recurrencia entre los α_{μ} :

$$\alpha_{\mu+4} = \frac{\lambda \alpha_{\mu}}{(\mu+4)(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)} + \frac{c_1(\mu+1)(\alpha_{\mu+1})}{(\mu+4)(\mu+3)(\mu+2)} - \frac{c_1 l (\alpha_{\mu+2})}{(\mu+4)(\mu+3)} \quad (70)$$

Se ve en ella que si se conociera $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, se podría determinar α_4 , y si se conociera además α_3 se podría determinar α_5 . Una vez hallados estos dos coeficientes no habrá dificultad en obtener sucesivamente todos los coeficientes $\alpha_{\mu+4}$.

Si se hicieran los respectivos cálculos se encontraría en seguida que los coeficientes α diversos resultan ser funciones lineales de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ y α_3 . Por eso si los sustituyéramos en (69), con fáciles operaciones podríamos transformar esa expresión en la suma de cuatro series como sigue:

$$v = \alpha_0 \sum \frac{\gamma_{\mu} Z^{\mu}}{\mu! l^{\mu}} + \alpha_1 \sum \frac{\delta_{\mu} Z^{\mu}}{\mu! l^{\mu}} + \alpha_2 \sum \frac{\xi_{\mu} Z^{\mu}}{\mu! l^{\mu}} + \alpha_3 \sum \frac{\tau_{\mu} Z^{\mu}}{\mu! l^{\mu}} \quad (71)$$

en las cuales γ, δ, ξ y τ son funciones de μ, λ, c_1 y l .

Demostremos que estas series son convergentes. Como en tal sentido puede seguirse el mismo procedimiento para las cuatro, limitaremos el estudio sólo a la primera.

Para nuestro propósito llamemos γ' al mayor valor de γ desde $\mu=0$ hasta $\mu=v$. Esto supuesto escribamos la expresión de $\gamma_{v+1}, \gamma_{v+2}, \gamma_{v+3}$ y γ_{v+5} . Para facilitar tal cosa, notemos que los γ son independientes de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ y α_3 , y que en particular si fuera

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad (72)$$

sería:

$$\alpha_{\mu} = \alpha_0 \frac{\gamma^{\mu}}{\mu! l^{\mu}} \quad (73)$$

Suponiendo que valga la (72), e introduciendo (73) en (70) sacaríamos

$$\gamma_{v+1} = \lambda l^4 \gamma_{v-3} + c_1 l^3 (v-2) \gamma_{v-2} - c_1 l^3 \gamma_{v-1}; \quad \gamma_{v+2} = \lambda l^4 \gamma_{v-2} + c_1 l^3 (v-1) \gamma_{v-1} - c_1 l^3 \gamma_v \quad (74)$$

$$\gamma_{v+3} = \lambda l^4 \gamma_{v-1} + c_1 l^3 \gamma_v - c_1 l^3 \gamma_{v+1}; \quad \gamma_{v+5} = \lambda l^4 \gamma_{v+1} + c_1 l^3 (v+2) \gamma_{v+2} - c_1 l^3 \gamma_{v+3} \quad (75)$$

Si en vez de los γ que figuran en los segundos miembros de (74) ponemos γ' , y cambiamos el signo negativo que figura en ellos por uno positivo, se podrá evidentemente escribir:

$$\gamma_{v+1} < (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v-1)) \gamma'; \quad \gamma_{v+2} < (\lambda l^4 + c_1 l^3 v) \gamma' \quad (76)$$

Más adelante se verá que $\lambda l^4 > 1$. En virtud de ello será también:

$$\lambda l^4 + c_1 l^3 (v-1) > 1 \quad (77)$$

Si a esto agregamos que por hipótesis es $\gamma_{v-1} < \gamma'$ y $\gamma_v < \gamma'$ podremos escribir

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{v-1} \\ \gamma_v \end{array} \right\} < \gamma' (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v-1))$$

Teniendo presente esto y la primera de (76), la primera de (75) permite poner:

$$\gamma_{v+3} < (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v+1)) (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v-1)) \gamma' \quad (78)$$

En virtud de (77) y de (76) es fácil darse cuenta que γ_{v+1} y γ_{v+2} son menores que el 2º miembro de (78); se podrá por ello poner además, teniendo presente la 2ª igualdad de (75)

$$\gamma_{v+5} < (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v+3)) (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v+1)) (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v-1)) \gamma'$$

Con razonamiento parecido se puede encontrar que en general será

$$\gamma_{v+\varepsilon} < (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v+\varepsilon-2)) (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v+\varepsilon-4)) \dots (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v-1)) \gamma'$$

si ε es impar, y

$$\gamma_{v+\varepsilon} < (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v+\varepsilon-2)) (\lambda l^4 + c_1 l^3 (v+\varepsilon-4)) \dots (\lambda l^4 + c_1 l^3 v) \gamma'$$

si ε es par.

Llamando Ω_1 y Ω_2 respectivamente a los segundos miembros de esas desigualdades se podrá poner en base de ellos, evidentemente:

$$\sum_{\mu=v+1}^{\mu=\infty} \frac{\gamma_{\mu} Z^{\mu}}{\mu! l^{\mu}} < \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\infty} \frac{\Omega_1 Z^{\nu+\varepsilon}}{(\nu+\varepsilon)! l^{\nu+\varepsilon}} + \sum_{\varepsilon=2}^{\varepsilon=\infty} \frac{\Omega_2 Z^{\nu+\varepsilon}}{(\nu+\varepsilon)! l^{\nu+\varepsilon}}$$

ε siendo solamente impar en donde figura Ω_1 , y solamente par donde figura Ω_2 .

Las dos series del 2º miembro son convergentes para valores finitos de $\frac{Z}{l}$; valdrá por ello lo mismo para la serie que figura en el primero y por ende para la serie

$$\alpha_0 \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\gamma_{\mu} Z^{\mu}}{\mu! l^{\mu}}$$

§ 14. **Simplificaciones en la expresión de $V(z)$.** — La expresión de $v(z)$ que dimos en (69) aunque de apariencia sencilla resulta de manejo bastante incómodo; conviene por ello sustituirla por otra más sencilla que se le aproxime. Usaremos en tal sentido una que viene a coincidir con ella en el caso particular de que sea $c_1 = 0$. —

Para justificar el empleo de tal expresión examinemos el orden de grandor de $c_1 l^3$ frente del orden de grandor de λl^4 .

En primer término recordemos que es:

$$c_1 = \frac{\rho g S}{E J}$$

Su dimensión resulta ser por ello cm^{-3} y por consiguiente $c_1 l^3$ viene a ser un número puro.

Lo mismo vale para λl^4 como es de esperar; en efecto, siendo $\varepsilon = 0$ es $\frac{\lambda}{c} = \frac{4 \pi^2}{T^{\ast 2}}$; y como

$c = \frac{\rho S}{E J}$ sale en seguida que

$$\lambda l^4 = \frac{4 \pi^2}{T^{\ast 2}} \cdot \frac{\rho S}{E J} l^4$$

en lo que se puede comprobar nuestra afirmación.

Veremos en este § que en base de la expresión simplificada, resulta que el menor valor de $l^{\lambda/4}$ es del orden de 1.9. Tomando por base tal valor, λl^4 tendría por lo menos el orden de

grandor de 12; es decir, un valor bastante mayor que la unidad. Los valores que puede llegar a tener $c_1 l^3$ en los edificios habituales son en cambio bastante menores que ella. Supongamos en efecto un edificio en el cual la relación de esbeltez $l \sqrt{\frac{S}{J}}$, sea igual a 5, y cuya altura sea igual a 100 m. Asignando a ρ el valor 2,5 y a E el valor $2,5 \times 10^{11} \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$ saldría que $c_1 l^3$ es del orden de $2,5 \times 10^{-3}$.

Formando los sucesivos términos de las series (71) se puede ver en seguida que debido a su pequeñez la contribución de $c_1 l^3$ en los primeros términos es muy limitada, y que recién ella cobraría importancia en los términos de grado superior. Como estos a su vez debido a la convergencia de las series contribuyen poco en el total, se puede en primera aproximación despreñar la influencia de $c_1 l^3$ y operar con las diversas expresiones como si fuera $c_1 = 0$.

Para tener la expresión de $v(z)$ que resulta siendo $c_1 = 0$ no habrá más que seguir el proceso general que hemos indicado, y anular en él c_1 . Pero más sencillo y más claro es acudir a la ecuación diferencial en $v(z)$ que figura en (19); en ella suponer $c_1 = 0$ y buscar su solución con tal hipótesis; es decir, tomar para $v(z)$ la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} - \lambda v = 0 \quad (79)$$

Es de notar que a esta ecuación se hubiera llegado si en vez de (11) o lo que es equivalente, en vez de (33), hubiéramos puesto por base de nuestras consideraciones la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = F(z, t) \quad (80)$$

ε siendo igual o distinto de cero. De tal ecuación, en el fondo, pero con $\varepsilon = 0$, suele hacerse empleo generalmente en los trabajos relativos a cargas sísmicas aunque sin justificación suficiente; lo cual no parece aceptable sobre todo porque ella, como se puede demostrar, viene a representar el movimiento de una barra oscilante horizontal, mientras que el edificio debe ser asimilado a una barra oscilante vertical.

Como la (80) es un caso particular de la (11), es evidente que valen para ella todas las consideraciones que hicimos sobre unicidad de su solución así como sobre ortogonalidad de las funciones $v(z)$ que satisfagan a la (79).

Como la (79) es una ecuación lineal a coeficientes constantes se la puede resolver mediante funciones exponenciales. Modificando convenientemente las expresiones que en tal caso se conseguiría se puede obtener sin dificultad como solución:

$$v = b_1 (c h m z - \cos m z) + b_2 (s h m z - \sen m z) + b_3 (c h m z + \cos m z) + b_4 (s h m z + \sen m z) \quad (81)$$

$$\text{Con} \quad m^4 = \lambda \quad (82)$$

Si en esta expresión se desarrollan las expresiones trigonométricas e hiperbólicas se obtendría series que no serían sino las que figuran en (71), pero en las que fuera $c_1 = 0$.

A fin de obtener los valores propios correspondería de acuerdo a lo dicho en § 4, formar el determinante (25). Pero más sencillas resultan las cosas si reparamos en que de acuerdo a (81) para $z = 0$, sería

$$v = 2 b_3 \quad \frac{d v_1}{d z} = 2 m b_4$$

Las condiciones de contorno para $z = 0$ se cumplirán por lo tanto si

$$b_3 = b_4 = 0$$

En vez de (81) podemos escribir entonces:

$$v = b_1 (\operatorname{ch} m z - \cos m z) + b_2 (\operatorname{sh} m z - \operatorname{sen} m z)$$

y en base de esta expresión, las condiciones de contorno para $z = l$ se detallarán así:

$$\begin{aligned} b_1 (\operatorname{ch} m l + \cos m l) + b_2 (\operatorname{sh} m l + \operatorname{sen} m l) &= 0 \\ b_1 (\operatorname{sh} m l - \operatorname{sen} m l) + b_2 (\operatorname{ch} m l + \cos m l) &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

ecuaciones que para coexistir exigen que sea

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} m l + \cos m l & \operatorname{sh} m l + \operatorname{sen} m l \\ \operatorname{sh} m l - \operatorname{sen} m l & \operatorname{ch} m l + \cos m l \end{vmatrix} = 0 \quad (84)$$

Este determinante equivale al determinante (25), y desde luego se lo podría sacar del mismo, mediante adecuadas simplificaciones. El nos permitirá por lo tanto sacar los valores propios λ . Notemos para ello que (84) viene a ser una ecuación trascendente en $m l$. Hallando sus raíces bastará dividir las por l para obtener m . Teniendo m , la (82) nos permite sacar en seguida λ .

Efectuando operaciones en el determinante (84) se saca como ecuación en $m l$:

$$(\operatorname{ch} m l + \cos m l)^2 - (\operatorname{sh}^2 m l - \operatorname{sen}^2 m l) = 0$$

y de ella desarrollando el cuadrado y recordando que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$:

$$\operatorname{ch} m l \cos m l + 1 = 0 \quad (85)$$

ecuación cuyas raíces se pueden determinar por aproximaciones sucesivas. Las primeras de ellas suelen ser dadas en los libros que tratan el problema de las barras vibrantes. En el cuadro que sigue figuran en orden creciente seis de tales raíces desde la más pequeña de ellas. En el mismo cuadro damos los correspondientes valores de λl^4 .

j	m l	λl^4
1	1.8751	12.4
2	4.6941	485.5
3	7.8548	3806.6
4	10.9955	14617.1
5	14.1372	39944.2
6	17.2788	89136.2

Para ver cómo son las raíces de orden superior podemos escribir la (85) como sigue:

$$\cos ml = -\frac{1}{\operatorname{ch} ml} \quad (86)$$

Con el crecer de ml , crecerá $\operatorname{ch} ml$ y tenderá a cero el 2º miembro de (86). Por consiguiente el valor de ml tenderá a $(j - \frac{1}{2})\pi$, j , siendo el número de orden de la raíz. En base de ello, y puesto que de acuerdo a (86) $\cos ml$ es negativo siempre, podemos poner

$$(ml)_j = (j - \frac{1}{2})\pi + (-1)^{j+1} \delta_j$$

δ_j , siendo una cantidad pequeña.

Sustituyendo en (86) y desarrollando el coseno del primer miembro podemos por ello poner:

$$\operatorname{sen} \delta_j = \frac{1}{\operatorname{ch} ((j - \frac{1}{2})\pi + (-1)^{j+1} \delta_j)}$$

y con mucha aproximación simplemente:

$$\delta_j = \frac{1}{\operatorname{ch} (j - \frac{1}{2})\pi} \quad (87)$$

Esta fórmula muestra que para valores algo grandes de j , δ_j será despreciable, y sin mayor error se podrá poner:

$$(ml)_j = (j - \frac{1}{2})\pi$$

§ 15. Expresiones de η_j y de β_j . — Hemos resuelto nuestro problema aceptando la convergencia del desarrollo en funciones propias tanto de $G \omega^2 \operatorname{sen} \omega t$ como de las soluciones que figuran en (54), (55), (59), (66), (67) y (68), y corresponde demostrar que ello es correcto. Lo primero, en tal sentido, que debe hacerse, es ver qué expresión tienen los β_j que intervienen en esos desarrollos.

Para conocer β se debe hacer de acuerdo con (48) estas dos integrales:

$$\int_0^1 V(z) dz \quad \text{y} \quad \int_0^1 V^2(z) dz$$

Una forma cómoda de hallar la primera de esas integrales se tiene notando que vale la (79). En base de ella sale:

$$\int_0^1 V(z) dz = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{d^3 V}{dz^3} \right]_0^1$$

Pero de acuerdo a las condiciones de contorno es nulo $\frac{d^3 V}{dz^3}$ para $z = 1$; luego será:

$$\int_0^1 V(z) dz = -\frac{1}{\lambda} \left[\frac{d^3 V}{dz^3} \right]_{z=0} \quad (88)$$

Puesto que b_3 y b_4 son nulos, tenemos como expresión de $V(z)$ la siguiente:

$$V(z) = \operatorname{ch} mz - \cos mz + \eta (\operatorname{sh} mz - \operatorname{sen} mz) \quad (89)$$

η siendo la relación $\frac{b_2}{b_1}$.

En base de (89), resulta para $\int_0^1 V(z) dz$ de acuerdo con (88):

$$\int_0^1 V(z) dz = -\frac{2\eta m^3}{\lambda} = -\frac{2\eta}{m} \quad (90)$$

Para hallar $\int_0^1 V^2(z) dz$ no hay más que formar el cuadrado del 2º miembro de (89) y proceder a integrar los términos que resultan.

Efectuando esas operaciones, poniendo de acuerdo con (86), $-\frac{1}{\text{ch } ml}$ en vez de $\cos ml$, y reuniendo convenientemente los términos que resultan, se obtiene:

$$\int_0^1 V(z) dz = \frac{1}{m} \left[ml + \eta \text{sen}^2 ml + \left(\frac{\text{sh } 2ml}{4} - \text{ch } ml \right) (1 + \eta^2 + 2\eta \text{th } ml) + \right. \\ \left. + (1 - \eta^2) \left(\text{th } ml + \frac{\text{sen } 2ml}{4} \right) \right]$$

Tanto para poder apreciar lo que contiene este resultado como lo que contiene el que figura en (90) es menester conocer la expresión de η .

En base de la 1ª de (83) se saca

$$\frac{b_2}{b_1} = \eta = -\frac{\text{ch } ml + \cos ml}{\text{sen } ml + \text{sh } ml}$$

y nuevamente teniendo en cuenta la (86):

$$\eta = -\frac{\text{ch}^2 ml - 1}{\text{ch } ml (\text{sh } ml + \text{sen } ml)} = -\frac{\text{sh}^2 ml}{\text{ch } ml (\text{sh } ml + \text{sen } ml)}$$

Por lo tanto

$$\eta = -\text{th } ml \frac{1}{1 + \frac{\text{sen } ml}{\text{sh } ml}} \quad (91)$$

Fijémosnos ahora en que $\text{sen}^2 ml = 1 - \cos^2 ml$. Por valer la (86) será por lo tanto

$$\text{sen}^2 ml = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 ml} \quad (92)$$

El 2º miembro no es sino $\text{th}^2 ml$; luego será

$$\text{sen}^2 ml = \text{th}^2 ml \quad (93)$$

Por ser $(ml)_j = (j - \frac{1}{2})\pi - (-1)^j \delta_j$, $\text{sen } ml$ será positivo si j es impar y negativo si j es par. En base de esto y de (93) podremos entonces poner

$$\text{sen } ml = (-1)^{j+1} \text{th } ml \quad (94)$$

y si sustituimos esta expresión de $\text{sen } m l$ en (91):

$$\eta = - \text{th } m l \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{j+1}}{\text{ch } m l}} = - \frac{\text{sh } m l}{\text{ch } m l + (-1)^{j+1}} \quad (95)$$

Multiplicando ambos miembros por $\text{sh } m l$ y sumándoles $\text{ch } m l$ sale

$$\text{ch } m l + \eta \text{sh } m l = \text{ch } m l - \frac{\text{sh}^2 m l}{(-1)^{j+1} + \text{ch } m l} = \frac{1 + (-1)^{j+1} \text{ch } m l}{(-1)^{j+1} + \text{ch } m l} = (-1)^{j+1}$$

Otra expresión de η es por lo tanto

$$\eta = \frac{(-1)^{j+1} - \text{ch } m l}{\text{sh } m l} = \frac{(-1)^{j+1}}{\text{sh } m l} - \text{cot } h m l \quad (96)$$

Multiplicando miembro a miembro (95) por (96) se saca:

$$\eta^2 = - \frac{(-1)^{j+1} - \text{ch } m l}{(-1)^{j+1} + \text{ch } m l}$$

y en base de ello estas dos expresiones para $1 - \eta^2$ y para η muy cómodas para juzgar su orden de grandor y para el cálculo:

$$1 - \eta^2 = \frac{2 (-1)^{j+1}}{(-1)^{j+1} + \text{ch } m l} \quad (97)$$

$$\eta = - \left[1 - \frac{2 (-1)^{j+1}}{(-1)^{j+1} + \text{ch } m l} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (98)$$

Para apreciar el orden de grandor de β , y aún para calcular dicho coeficiente, resulta conveniente transformar un tanto la expresión de $1 + \eta^2 + 2 \eta \text{th } m l$. En tal sentido notemos que vale la siguiente relación:

$$1 = \text{th}^2 m l + \frac{1}{\text{ch}^2 m l}$$

En base de ello se tiene

$$1 + \eta^2 + 2 \eta \text{th } m l = \frac{1}{\text{ch}^2 m l} + (\eta + \text{th } m l)^2 = \frac{1}{\text{ch}^2 m l} + \text{th}^2 m l \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{j+1}}{\text{ch } m l}} \right)^2$$

Pero

$$\text{th}^2 m l \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{j+1}}{\text{ch } m l}} \right)^2 = \frac{\text{th}^2 m l}{\text{ch}^2 m l} \left(\frac{1}{1 + \frac{(-1)^{j+1}}{\text{ch } m l}} \right)^2 = \frac{\eta^2}{\text{ch}^2 m l}$$

Luego

$$1 + \eta^2 + 2 \eta \text{th } m l = \frac{1 + \eta^2}{\text{ch}^2 m l}$$

Con esto se puede sacar enseguida que

$$\frac{\text{sh } 2ml}{4} (1 + \eta^2 + 2\eta \text{th } ml) = \left(\frac{1 + \eta^2}{2} \right) \text{th } ml \quad (99)$$

y además que

$$-\text{ch } ml (1 + \eta^2 + 2\eta \text{th } ml) = -\frac{1 + \eta^2}{\text{ch } ml} \quad (100)$$

Por otra parte con la expresión (93) de $\text{sen}^2 ml$ y con la (96) de η se saca

$$\eta \text{sen}^2 ml = \eta \text{th}^2 ml = -\text{th } ml \left(1 + \frac{(-1)^j}{\text{ch } ml} \right) \quad (101)$$

Sumando miembro a miembro (99) y (101) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh } 2ml}{4} (1 + \eta^2 + 2\eta \text{th } ml) + \eta \text{sen}^2 ml &= \text{th } ml \left[\frac{1 + \eta^2}{2} - 1 - \frac{(-1)^j}{\text{ch } ml} \right] = \\ &= -(1 - \eta^2) \frac{\text{th } ml}{2} + \frac{(-1)^{j+1} \text{th } ml}{\text{ch } ml} \end{aligned}$$

Introduciendo este resultado, lo mismo que (100) en el 2º miembro de la expresión de

$\int_0^1 V^2(z) dz$, se podrá poner:

$$m \int_0^1 V^2(z) dz = ml + (1 - \eta^2) \left(\frac{\text{th } ml}{2} + \frac{\text{sen } 2ml}{4} \right) - \frac{1 + \eta^2 + (-1)^j \text{th } ml}{\text{ch } ml} \quad (102)$$

En base de este resultado y de (90) sale enseguida, teniendo en cuenta la definición de β dada por (48):

$$\beta = \frac{-2\eta}{ml + (1 - \eta^2) \left(\frac{\text{th } ml}{2} + \frac{\text{sen } 2ml}{4} \right) - \frac{1 + \eta^2 + (-1)^j \text{th } ml}{\text{ch } ml}} \quad (103)$$

fórmula aunque aparentemente aún complicada, sin embargo cómoda para el cálculo.

Para apreciar el orden de grandor de β para grandes valores de ml puede notarse que de acuerdo a (97) es $1 - \eta^2 = \pm e_1$, siendo e_1 del orden de $4e^{-ml}$; que de acuerdo a (98) es $\eta = -1 \pm e_2$, siendo e_2 del orden de grandor de $2e^{-ml}$; que $\text{th } ml = 1 - e_3$, siendo e_3 del orden de grandor de $2e^{-2ml}$; y que $\text{sen } 2ml = \pm e_4$, siendo e_4 del orden de grandor de $4e^{-ml}$. Por ello globalmente se puede decir que

$$\beta = \frac{-2\eta}{ml \pm e_5} = \frac{2}{ml} \frac{1 \mp e_2}{1 \pm \frac{e_5}{ml}} \quad (104)$$

e_5 pudiendo ser del orden de $8e^{-ml}$.

En la tabla que sigue damos los valores de η y de β para los cuatro primeros valores de j .

j	η	β
1	— 0.7341	0.7923
2	— 1.0185	0.4410
3	— 0.9992	0.2544
4	— 1.0000	0.1818

Para los siguientes valores, teniendo presente para η la fórmula (98) y para β la global (104) se puede evidentemente poner sin error apreciable

$$\eta = -1 \quad y \quad \beta = \frac{2}{m l}$$

Como para valores algo grandes de j es $m l = (j - \frac{1}{2})\pi$, se podrá también poner entonces:

$$\beta = \frac{4}{\pi (2j - 1)},$$

vale decir que los valores de β siguientes a los de la tabla serán

$$\frac{4}{9\pi}, \frac{4}{11\pi}, \frac{4}{13\pi} \text{ etc.}$$

§ 16. **Convergencia del desarrollo de la unidad en serie de funciones propias.** — Pasemos ahora a ver si los desarrollos en series de funciones propias de que nos hemos venido valiendo son convergentes. Comencemos por el correspondiente a $\omega^2 G \sin \omega t$, es decir por el desarrollo (50).

La convergencia de este desarrollo evidentemente quedará demostrada, si ello se logra para el desarrollo (51) de la unidad. Podemos por consiguiente referirnos a éste en vez de hacerlo con respecto al desarrollo (50).

Teniendo presente la expresión (89) de $V(z)$ podemos poner:

$$\Sigma (\beta V(z))_j = \Sigma (\beta \operatorname{ch} m z + \beta \eta \operatorname{sh} m z)_j + \Sigma (\beta \cos m z)_j - \Sigma (\beta \eta \operatorname{sen} m z)_j \quad (105)$$

de lo que se desprende que la serie del primer miembro será convergente si lo son las tres del segundo miembro.

En base de (95) podemos escribir

$$\eta = -1 + \left(1 - \frac{\operatorname{sh} m l}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} \right) = -1 + \frac{\operatorname{ch} m l - \operatorname{sh} m l + (-1)^{j+1}}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} \quad (106)$$

y por ello:

$$\begin{aligned} \Sigma (\beta (\operatorname{ch} m z + \eta \operatorname{sh} m z))_j &= \Sigma (\beta (\operatorname{ch} m z - \operatorname{sh} m z))_j + \Sigma \beta \frac{\operatorname{sh} m z (\operatorname{ch} m l - \operatorname{sh} m l)}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} + \\ &+ \Sigma \frac{(-1)^{j+1} \operatorname{sh} m z}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} \beta \end{aligned} \quad (107)$$

y puesto que $\operatorname{ch} m z - \operatorname{sh} m z = e^{-mz}$ también:

$$\begin{aligned} \Sigma (\beta \operatorname{ch} m z + \beta \eta \operatorname{sh} m z)_j &= \Sigma (\beta e^{-mz})_j + \Sigma \left(\beta \frac{\operatorname{sh} m z}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} e^{-m l} \right)_j + \\ &+ \Sigma (-1)^{j+1} \frac{\beta \operatorname{sh} m z}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} \end{aligned} \quad (108)$$

Notemos ahora que Σe^{-mz} y $\Sigma e^{-m l}$ son series convergentes debido a que el cociente de dos términos sucesivos en ellas es menor que la unidad⁽⁹⁾; incluso siendo $j = \infty$. Y además que $\beta < 1$ y que

$$\frac{\beta \operatorname{sh} m z}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} = \frac{\beta \operatorname{sh} m z}{\operatorname{ch} m l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{ch} m l}}$$

y por lo tanto también

$$\frac{\beta \operatorname{sh} m z}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} < 1 \quad (109)$$

ya que $\beta < 1 + \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{ch} m l}$ y $\operatorname{sh} m z < \operatorname{ch} m l$

Los términos de la 1ª y 2ª serie de (108) vienen entonces a ser productos de los términos de series convergentes de términos positivos por factores menores que la unidad; luego esas series son convergentes también (Criterio M de Weierstrass)⁽¹⁰⁾.

Para ver cómo es la tercera serie del 2º miembro de (108) notemos que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta \operatorname{sh} m z}{\operatorname{ch} m l + (-1)^{j+1}} \right) = 0$$

La serie mencionada está formada entonces por términos alternativamente positivos y negativos cuyo valor absoluto es decreciente y se anula en el límite para $j = \infty$. Es por lo tanto también una serie convergente⁽¹¹⁾. Siendo convergentes las tres series del 2º miembro de (108) lo será por ende la del primer miembro, o lo que es igual la primera del 2º miembro de (105).

Para analizar las otras dos series de (105) pongamos

$$m z = m l \frac{z}{l} = (j - \frac{1}{2}) \pi \frac{z}{l} + (-1)^{j+1} \delta \frac{z}{l}$$

Si hacemos

$$\pi \frac{z}{l} = \zeta \quad \frac{\delta z}{l} = \delta_1$$

será

$$m z = j \zeta - \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right)$$

y por ello

$$\begin{aligned}\cos m z &= \cos j \zeta \cos \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right) - \sin j \zeta \sin \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right) \\ \sin m z &= \sin j \zeta \cos \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right) + \sin \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right) \cos j \zeta\end{aligned}$$

Introduciendo esta expresión en las series de (105) que interesan, ellas resultan equivalentes a otras cuyos términos son el producto de los términos de las siguientes series de valor limitado:

$$\sum_{j=1}^{j=m} \cos j \zeta = \frac{\sin (m + \frac{1}{2}) \zeta - \sin \frac{\zeta}{2}}{2 \sin \frac{\zeta}{2}}, \quad (110)$$

$$\sum_{j=1}^{j=m} \sin j \zeta = - \frac{\cos (m + \frac{1}{2}) \zeta - \cos (m + \frac{1}{2}) \zeta}{2 \sin \frac{\zeta}{2}}$$

m siendo un número entero y positivo cualquiera, incluso infinito, por alguno de los siguientes factores:

$$\begin{aligned}\beta \cos \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right) & \quad \beta \sin \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right) \\ \beta \eta \cos \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right) & \quad \beta \eta \sin \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right)\end{aligned} \quad (111)$$

Como $\frac{\zeta}{2}$ es menor que $\frac{\pi}{2}$ y δ_1 es pequeño y tiende a cero, $\sin \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right)$ será positivo siempre. Por igual razón será positivo $\cos \left(\frac{\zeta}{2} + (-1)^j \delta_1 \right)$ a partir de cierto valor de j , cualquiera sea ζ . Si a esto agregamos que β y $\beta \eta$ son grandores cuyo signo se mantiene invariado y cuyo valor absoluto es decreciente y tiende a cero para $j = \infty$, podemos decir lo mismo de los factores (111). Luego, y de acuerdo con el criterio de Dirichlet-Hardy, las series 2ª y 3ª de (105) serán también convergentes ⁽¹²⁾ (*).

§ 17. **Convergencia de los desarrollos de u en funciones propias.** — Consideremos ahora las series que figuran en (54), (55), (59), (65), (67) y (68). Puede verse que sus términos vienen a ser el producto de factores del tipo $\Phi V(z)$ por los términos de la serie $\sum_{j=1}^{j=\infty} H_j$.

(*) Es aquí de notar que el criterio usado para demostrar la convergencia de la tercera serie del 2º miembro de (108) es también en el fondo el de Dirichlet-Hardy.

De acuerdo a la definición de los H_j vale para ϵ la siguiente relación:

$$H_j \leq \frac{\omega^2}{\sqrt{(n_j^2 - \omega^2)^2}} = + \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{n_j^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n_j^2}$$

Por lo tanto a partir de cierto valor $j = \alpha$ tal que $n_\alpha > \omega$ será:

$$H_j < K_1 \frac{1}{n_j^2} \text{ y por ende } \sum_{j=\alpha}^{\infty} H_j < K_1 \sum_{j=\alpha}^{\infty} \frac{1}{n_j^2}$$

$$\text{siendo } K_1 = + \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{n_\alpha^2}\right)^2}} = \text{constante.}$$

Puesto que de acuerdo con (21) es

$$n^2 = \frac{\lambda}{c} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) = \frac{m^4 l^4}{c l^4} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\lambda}\right), \epsilon \text{ pudiendo ser igual}$$

o distinto de cero, puede ponerse

$$\sum_{j=\alpha}^{\infty} \frac{1}{n_j^2} = l^4 c \sum_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{m^4 l^4 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\lambda}\right)}$$

y en base de la expresión de ml que dimos al final del § 14

$$\sum_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{n_j^2} = \frac{l^4 c}{\pi^4} \sum_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\left(j - \frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{(-1)^j \delta_j}{(j - \frac{1}{2}) \pi}\right)^4 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\lambda_j}\right)}$$

Para el factor de $(j - \frac{1}{2})^4$ vale la desigualdad siguiente:

$$\left(1 - \frac{\epsilon^2}{\lambda_j}\right) \left(1 - \frac{(-1)^j \delta_j}{(j - \frac{1}{2}) \pi}\right) < \left(1 - \frac{\delta_2}{\frac{3}{2} \pi}\right)^{-4} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\lambda_1}\right) = K_2 = \text{constante.}$$

Será por ello

$$\sum \frac{1}{n_j^2} < K_2 \frac{l^4 c}{\pi^4} \sum_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{(j - \frac{1}{2})^4} = K_2 \frac{l^4 c}{\pi^4} \sum_{\alpha-1}^{\infty} \frac{1}{(j + \frac{1}{2})^4}$$

Además se tiene que

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{(j + \frac{1}{2})^4} < \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{j^4}$$

Como la serie del 2º miembro es convergente ⁽¹³⁾, lo será también la del primero; y por ende la serie $\sum_1^{\infty} H_j$.

Pero los términos de esta última serie son positivos; luego, si los factores $\Phi V(z)$, son finitos, serán convergentes también las series (54), (55), (59), (66), (67) y (68).

Los factores Φ son finitos mientras lo son ω y G ; debemos ver por lo tanto si vale lo mismo para $V(z)$. Recordemos para ello, que esta función está dada por (89).

Como $\cos mz + \eta \operatorname{sen} mz$ es finito, ella lo será si lo es $\operatorname{ch} mz + \eta \operatorname{sh} mz$.

Para esta última expresión, de acuerdo con lo que se explicó precedentemente y de acuerdo con el detalle que aparece en (108) se tiene:

$$\operatorname{ch} mz + \eta \operatorname{sh} mz = e^{-mz} + \operatorname{sh} mz \left(\frac{e^{-ml} + (-1)^{j+1}}{\operatorname{ch} ml + (-1)^{j+1}} \right) = e^{-mz} + \frac{\operatorname{sh} mz}{\operatorname{ch} ml} \left(\frac{e^{-ml} + (-1)^{j+1}}{1 + \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{ch} ml}} \right)$$

Igualdad cuyo tercer miembro es evidentemente finito. Luego valdrá lo mismo para el primero y por ende para $V(z)$.

Interesante es destacar todavía que en particular es

$$V(l) = 2(-1)^{j+1} \tag{112}$$

En efecto; de acuerdo a (86), (94) y (96) es

$$\cos ml + \eta \operatorname{sen} ml = -\frac{1}{\operatorname{ch} ml} + \frac{1}{\operatorname{ch} ml} (-1)^{j+1} = (-1)^{j+1}$$

Si ahora recordamos que

$$\operatorname{ch} ml + \eta \operatorname{sh} ml = (-1)^{j+1}$$

y de esta igualdad restamos la precedente quedará demostrada nuestra afirmación. Ella también puede demostrarse como sigue:

Derivando $V(z)$ dos veces respecto de z se tiene:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = m^2 (\operatorname{ch} mz + \eta \operatorname{sh} mz + \cos mz + \eta \operatorname{sen} mz)$$

Y puesto que $\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$ para $z = l$, deberá ser:

$$\operatorname{ch} ml + \eta \operatorname{sh} ml = -\cos ml + \eta \operatorname{sen} ml = (-1)^{j+1} \quad \text{y} \quad \text{la (112).}$$

Para terminar, recordemos que en el § 10 afirmamos que

$$\sum \beta H \operatorname{sen} \omega t V(z) \quad \text{y} \quad \sum \beta H \frac{\operatorname{sen} n t}{n} V(z).$$

son series convergentes, sin demostrarlo. Para hacerlo basta notar que también ellas son el producto de factores finitos por los términos de la serie $\sum_1^\infty H_j$.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Le Conte, Joseph and Younger, Bulletin Seismological Soc. of America. Vol. 22, March 1932.
- (2) L. M. Hoskins y J. D. Galloway, Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Vol. 64, año 1938, pág. 1993 y sig.
- (3) A. Sieberg, Voröffentlichungen der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena, 1937, Heft 29.
- (4) M. Truco, Anales del Instituto de Ingenieros de Chile. Julio-Agosto de 1941.
- (5) Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Berlin 1924, Tomo I, págs. 236 y 248.
- (6) Idem, Idem, pág. 278.
- (7) K. Zöppritz, Nachrichten Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1907, págs. 138 y sig.
- (8) L. Geiger, Idem, año 1909, pág. 154.
- (9) H. and B. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics, pág. 37.
- (10) Idem, Idem, pág. 34.
- (11) Riemann-Weber, Die Partiellen differential-gleichungen der Math. Physik, 1900, tomo I, pág. 55.
- (12) H. and B. Jeffreys, loc. cit., pág. 36.
- (13) Riemann-Weber, loc. cit., pág. 47.
- (14) Idem, Idem, pág. 48.