PRESIDENCIA DE LA NACION

*Ministerio de Asuntos Técnicos*

PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA CIUDAD [redacted]

*Director*: Capitán de Fragata (R) GUILLERMO O. WALLBRECHER

*SERIE GEOFISICA VIII*$_2$

# CONTRIBUCION A LA TEORIA DE LOS SISMOGRAFOS MECANICOS

Por el Ing. Simón Gershánik

EVA PERON

1952

# Declaración del Consejo Nacional de Investigaciones Técnicas y Científicas sobre la misión de la ciencia y la técnica en la Argentina Justicialista

## RESOLUCION ADOPTADA EN LA SESION DEL 8 DE ABRIL DE 1952

La ciencia y la técnica argentinas pertenecen al pueblo que las nutre y a la realidad nacional que integran.

Con respecto al pueblo, la ciencia y la técnica tienen el deber ineludible de ser los elementos propulsores de su mejoramiento y de su bienestar. En este sentido, es guía luminosa la consigna de Perón: "El progreso científico podrá darnos máquinas más eficaces y seguras; alimentos más sanos, nutritivos y económicos, casas más higiénicas, cómodas y asequibles. Podrá encontrar los medios de conservar la salud. de preservarnos de las enfermedades y curarnos mejor; podrá ponerse a nuestro alcance, generalizándolos, medios más eficaces para distracción del alma y reparación de nuestras energías físicas y morales." (19-2-48)

Con respecto a la Nación, la ciencia y la técnica deben constituirse en la fuerza motriz que asegure, ensanche y consolide la triple aspiración argentina de una patria Justa, Libre y Soberana. Porque "previo a cualquier esfuerzo del hombre, en nuestra tierra es necesario la independencia económica. Sin independencia económica no hay posibilidad de justicia social; por eso hemos trabajado tanto para obtenerla. Hemos luchado contra todo lo interno y todo lo externo y hemos vencido. Estamos ahora en la tarea de consolidar." (9-6-47)

El decreto de creación del Consejo Nacional de Investigaciones Técnicas y Científicas ha venido a llenar una sensible brecha en el frente organizado del esfuerzo argentino.

Aunque integrado por organismos de valiosa experiencia y honrosa tradición. el Consejo no olvida que es la más joven expresión de la nueva realidad argentina nacida de circunstancias y condiciones sociales y políticas absolutamente nuevas y originales.

El Consejo debe, en consecuencia, aportar nuevos elementos doctrinarios de organización a la actividad científica y debe ubicarse en la primera fila de la actualidad revolucionaria que vive el país.

El decreto de creación del Consejo establece sus objetivos que no son otros, en esencia, que los de coordinar, fomentar y promover el desarrollo de la ciencia y de la técnica en todos los aspectos, adecuándolos a la realidad del momento justicialista.

Es evidente que. en la etapa actual de su desarrollo, el objetivo orgánico del justicialismo argentino está cifrado en la victoriosa concreción de su segundo plan quinquenal.

Como consecuencia lógica de esos objetivos el Consejo asume la responsabilidad de planear la actividad científica y técnica que se desarrolla en el país con el apoyo y cooperación del Estado.

Como organismo revolucionario y popular, el Consejo aspira al florecimiento de toda actividad científica y técnica, pues comprende la gravitación nacional que implica su desarrollo.

Como organismo surgido de la entraña misma del pueblo, el Consejo entiende que el principio orientador de la actividad científica y técnica debe ser la suprema aspiración de una ciencia y de una técnica permanentemente actualizadas y permanentemente puestas al servicio del pueblo y de los intereses nacionales.

La ciencia y la técnica deben ser planeadas por el Consejo, pues éste es la máxima expresión de los organismos que tienen en el país la responsabilidad de esa actividad y que, dado el carácter específico de la creación científica y de la aplicación técnica, exige que su programación y control estén en manos de los propios investigadores científicos y de los ejecutantes técnicos que conocen y estiman las necesidades y condiciones de esa actividad.

La actividad científica y técnica no pueden hallarse desvinculadas de la realidad política y social del país ya que eso sería desconocer la voluntad popular que se ha autodeterminado su propio destino. Por el contrario, a través de esa misma realidad política, la ciencia y la técnica hallarán los elementos para librarse de los factores que retardan su propio desarrollo y que se encubren en ellas para dilapidar los aportes públicos y burlar su participación en el trabajo común.

Esta correlación entre la ciencia y la técnica y la nueva realidad político-social es la mejor característica del Consejo, asumida con plena y espontánea responsabilidad.

El Consejo Nacional de Investigaciones Técnicas y Científicas no desconoce que este planteo motivará el interesado ataque de los enemigos del pueblo y de la Nación, en cuanto aquellos pretendan suponer en esa colaboración, un atentado contra la libertad del investigador y la autonomía de la ciencia.

El Consejo no acepta la interesada protesta de quienes habiendo estado toda su vida aprovechando el mezquino mecenazgo de los usurpadores de la voluntad popular y de los explotadores del esfuerzo argentino. pretenden hoy aparecer como mentores de un pueblo que ha recuperado su soberanía ni como intérpretes de una Nación que afirma su reciente capacitación de independencia.

Por otra parte, en un régimen de justicia social y de integración nacional, donde el auténtico y puro bien común no deja espacio alguno para el juego de intereses de sectores parciales y de minoría antinaciona-

les, la autonomía de las ciencias, no puede ni debe traspasar el límite exacto que reclama la seguridad de su propia eficacia.

La relación justicialista entre la ciencia y el pueblo aparece muy clara y precisa:

El pueblo y estado argentinos deben el apoyo amplio a la investigación científica y técnica dotándola de los recursos y medios que la investigación y la actividad científica y técnica reclaman.

La ciencia y la técnica deben retribuir al pueblo incrementando la bondad de sus condiciones de vida y asegurando la total independencia, libertad y soberanía argentinas.

La mejor manera de asegurar esa relación es mediante el trabajo organizado y coordinado, traducido en los planes de investigación y ejecución.

Anticipándose a las críticas de que la creación científica no puede planificarse, el Consejo advierte que el adelanto de la ciencia supone, entre otros elementos un extenso trabajo de información que el estado puede y debe metodizar y proporcionar, y que la disciplina del trabajo es siempre el antecedente reconocido de todo acto de creación científica, que no ha sido nunca —aunque supongan lo contrario los diletantes convertidos en críticos científicos— una resultante gratuita.

La información metodizada amplía, junto con la disciplina del trabajo, impuesto por el criterioso manejo de los recursos estatales destinados a la ciencia y a la técnica, han de ser los únicos elementos de planeación utilizados por el Consejo.

La identificación de la ciencia y de la técnica, con el pueblo argentino y con el destino nacional han de ser la piedra fudamental del futuro de la cultura, de la economía y de la industria de nuestra Patria.

Si es cierto que el aire de la libertad es el elemento más preciado para el hombre de ciencia, no es menos cierto que ese aire no podía ser de la libertad mientras se hallara contaminado por la explotación del hombre argentino y por la frustración del destino nacional.

La revolución justicialista que ha terminado con la explotación del hombre nativo y ha devuelto a la Patria el elemental juego de sus grandes destinos, es el acontecimiento histórico que permite, por primera vez, la auténtica realización de una ciencia y de una técnica argentinas libres y progresistas.

La revolución justicialista, al arrebatar el monopolio del patrimonio científico de las manos rapaces de un reducido grupo social, inyecta nueva vida y sangre a la actividad científica aspirando —mediante el acceso de los hijos de obreros a la enseñanza superior— a la renovación constante y fecunda de los cuadros de investigadores y técnicos.

La creciente vinculación de los organismos de investigación superior con la preparación de los planes de gobierno conducen a una mayor significación de la ciencia y de la técnica con la realidad nacional, terminando con una anacrónica diversidad que resultaba perjudicial para el país y para los propios hombres de ciencia.

Sólo falta acelerar la naciente relación de los hombres de ciencia con los trabajadores y a este respecto el Consejo Nacional asume la responsabilidad de transformarse en el instrumento principal de esa vinculación.

El Consejo Nacional de Investigaciones Técnicas y Científicas, al iniciar sus tareas en este decisivo año 1952, invita a todos los hombres del frente científico y técnico a no defraudar la esperanza que en ellos tienen puestos los hombres de la Nueva Argentina.

La consigna y característica para la inteligencia justicialista ha de ser que ella —a diferencia de la inteligencia capitalista— debe colocarse al servicio del trabajo nacional llegando a merecer el respeto y el cariño de su pueblo.

Como tarea concreta y urgente en este año, debe existir un evidente crecimiento de los cuadros de la conducción técnica y científica pues el país los reclama premiosamente para el manejo de su política, de su economía y de su industria.

# Contribución a la Teoría de los Sismógrafos Mecánicos

POR

Ingeniero SIMON GERSHANIK

## ABSTRACT

The theory of mechanical seismographs, as given by several authors, shows some important imperfections: a) It lacks generality; b) the term representing the effect on the instruments of the ground acceleration is introduced in the seismographs equations in a rather unsatisfactory way; c) the theory does not explain clearly what is obtainable from a seismogram concerning the ground movement; d) as little attention is paid on it to the case of transient motion, an erroneous feeling is created that even at this motion the seismograph displacements build up to infinite values when resonance is reached.

Taking all these imperfections into account a new treatment of the question is presented here with the aim to remove them in some measure.

---

§ 1. Cuando se examina la teoría de los sismógrafos en los diversos tratados (1), (2), (3), (4), (5), que se ocupan de la cuestión, se puede advertir en ella algunas deficiencias importantes, a saber: 1º, no suele ser presentada en forma general, de modo que de la misma pueda derivarse la ecuación de funcionamiento de cualquier sismógrafo, sea de tres, de dos, o de una componente y cualquiera sea la dirección según la cual se toma esa componente; 2º, suele ser presentada primero para el caso de un sismógrafo en movimiento, pero enclavado sobre el suelo en reposo, y una vez obtenida la respectiva ecuación de funcionamiento, sin una justificación adecuada, se le incorpora un término representativo de la excitación que en el sismógrafo produce una aceleración translatoria del suelo; 3º, no aparece suficientemente clara la interpretación que suele darse a lo que registran los sismógrafos; y 4º, en el estudio de la influencia de excitaciones sinusoidales se deja de contemplar el caso más común en que éstas son transitorias y en que el sismógrafo se halla en reposo en el instante inicial, creándose por ello la impresión errónea de que las elongaciones del sismógrafo, habiendo "resonancia", se hacen infinitas siempre, lo cual en el caso citado no es cierto.

Teniendo en cuenta estas deficiencias nos ha parecido de interés revisar la teoría de referencia con la intención de salvarlas en alguna medida.

§ 2. Cuando la tierra experimenta en algún lugar sacudidas causadas por un fenómeno sísmico, la sacudida no queda confinada en ese lugar, sino que, como lo enseña la teoría de la elasticidad y lo confirma la experiencia, ella se propaga a todos los puntos del globo poniendo sucesivamente en movimiento todos sus puntos. El problema de registrar un terremoto no es otro por lo tanto, que el de registrar el movimiento que puede experimentar el suelo.

Como moviéndose la tierra se mueve todo lo que le está adherido, se tiene en general la impresión de que debe ser muy difícil, si no imposible, obtener un mecanismo capaz de denunciar el movimiento de la tierra. Eso empero no pasa de ser más que una ilusión, típica de una primera ojeada a la cuestión. Examinándola con más cuidado se comprende enseguida que la dificultad existiría sólo si todas las reuniones de objetos entre sí vinculados que podamos imaginar para constituir con ellos un mecanismo sismográfico resultarán en todas

sus partes unidas rígidamente a la tierra, o, lo que es igual, carentes de grados de libertad respecto de ella. Eso justamente es lo excepcional; en cambio, lo corriente es lo contrario; vale decir que cualquier grupo de objetos unidos a la tierra por lo común tiene algunos grados de libertad, y por ende algunas de sus partes pueden cumplir movimientos que son consecuencia de los de la tierra, que en general son distintos de los de ésta.

Un conjunto de objetos así puede por ello servir de sismógrafo, pero será cuestión de elegirlos, o de organizarlos de modo que conociendo su movimiento, de ese movimiento pueda obtenerse sin mayores dificultades el del suelo.

Eso se ha hecho en efecto en la práctica y por ello podemos decir que un sismógrafo es esencialmente un mecanismo enclavado en el suelo, constituído por un conjunto de cuerpos vinculados en forma tal que les quede cierto número de grados de libertad respecto de la tierra y además, que de su movimiento resulte posible y más o menos fácil obtener el de ésta última.

Mecanismo sencillos de esta clase vienen a ser los de carácter pendular, de ahí que de ellos se haya echado mano para construir los sismógrafos.

Recorriendo la lista de los diversos tipos y modelos se los puede agrupar en primer término: a) de acuerdo a sus grados de libertad, y b) de acuerdo a la forma en que se realiza el registro de su movimiento.

De acuerdo a sus grados de libertad se tienen sismógrafos de tres grados, de dos grados y de un grado de libertad. Ellos sirven, respectivamente, para registrar tres, dos o una componentes del movimiento del suelo. Los de tres grados registran generalmente una componente vertical y dos horizontales; los de dos sirven para registrar dos componentes horizontales, y los de uno, o bien una componente horizontal o bien una componente vertical.

De acuerdo a la forma en que se realiza el registro cabe distinguir los de registros mecánico, los de registro óptico y los de registro óptico electro-magnético. En los primeros la inscripción del movimiento se realiza sobre papel ahumado mediante un estilete; en los segundos mediante un haz de luz reflejado por el sismógrafo sobre papel fotográfico sensible y en los terceros se transforma la energía de movimiento del sismógrafo en energía eléctrica, y ésta se registra sobre papel fotográfico mediante un galvanómetro a espejo.

Las consideraciones que siguen se referirán a los sismógrafos de registro mecánico; las relativas a los de registro óptico y óptico electro-magnético serán hechas en un trabajo que nos proponemos publicar más adelante.

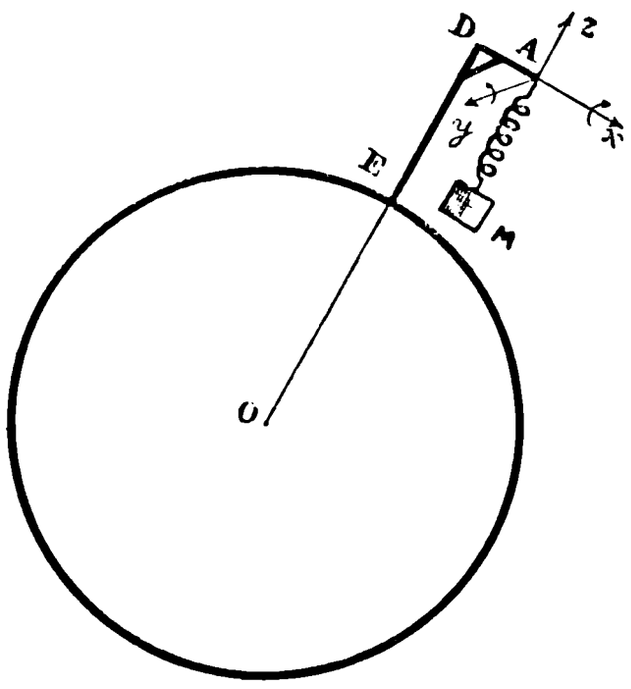


Fig. 1

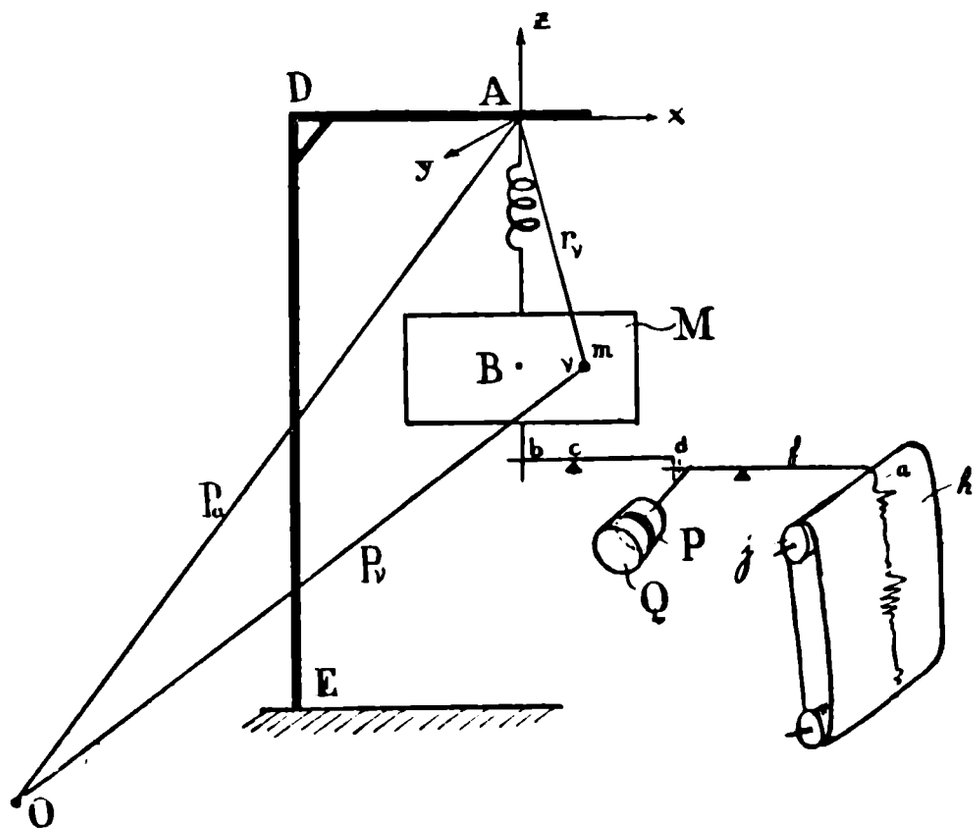


Fig. 2

§ 3. Una idea de cómo se organiza un sismógrafo la dan las figuras 1 hasta 6. En la figura 1, ADE es un soporte rígido enclavado firmemente en el punto E de la tierra, cuyo centro es O. Y de ese soporte pende por medio de un resorte la masa M, con posibilidad de agrandar o acortar su distancia desde A, vale decir de moverse según el eje z, y además con posibilidad de girar alrededor del eje de las x y de las y. Se trata, por lo tanto, de un

mecanismo de tres grados de libertad. En la figura 2, aparece el mismo mecanismo más ampliado; en ella se ha esquematizado además la forma cómo puede inscribirse el movimiento de rotación de M alrededor de x. Al efectuarse ese movimiento, la masa M puede empujar el estilete b c d en el punto b el cual se ve obligado por ello a girar alrededor del punto de apoyo c y puede obligar al estilete f a escribir sobre el papel ahumado h. Este está colocado sobre un tambor accionado por un mecanismo de relojería y por ello se halla en movimiento mientras se produce sobre él la inscripción.

De un modo parecido se puede obtener la inscripción del movimiento de rotación alrededor del eje y, o según el eje de las z. Una idea de ésto último se da en la fig. 9. El esquema expuesto representa en primera aproximación al sismógrafo universal de Quervain-Picard.

En la figura 3 se da el esquema de un sismógrafo Vicentini de dos grados de libertad. En este caso el mecanismo es simplemente un péndulo colgado de A con posibilidad de que la masa M gire alrededor del eje de las x y alrededor del eje de las y.

Para que el registro que se obtiene con los sismógrafos represente sin exagerada deformación el movimiento del suelo, es conveniente, como se verá al final, que el período propio del mecanismo pendular sea grande: más o menos del orden de los 10 segundos. Para un período así, el péndulo tendría que tener unos 25 metros de largo; resultaría por lo tanto un aparato poco manuable y exigiría demasiado espacio. Los sismólogos se ingeniaron por ello en construir sismógrafos como los que se esquematizan en las figuras 4 y 5.

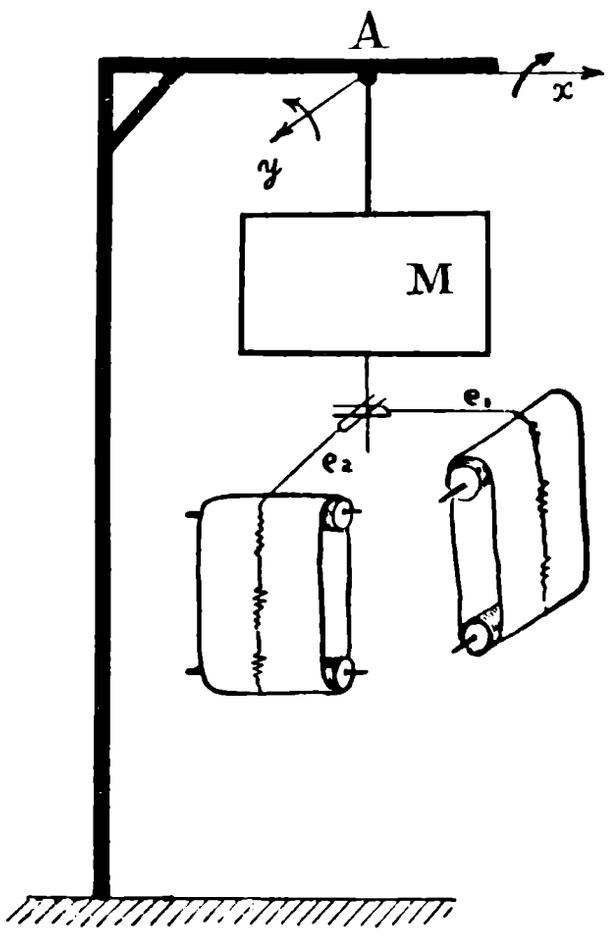


Fig. 3

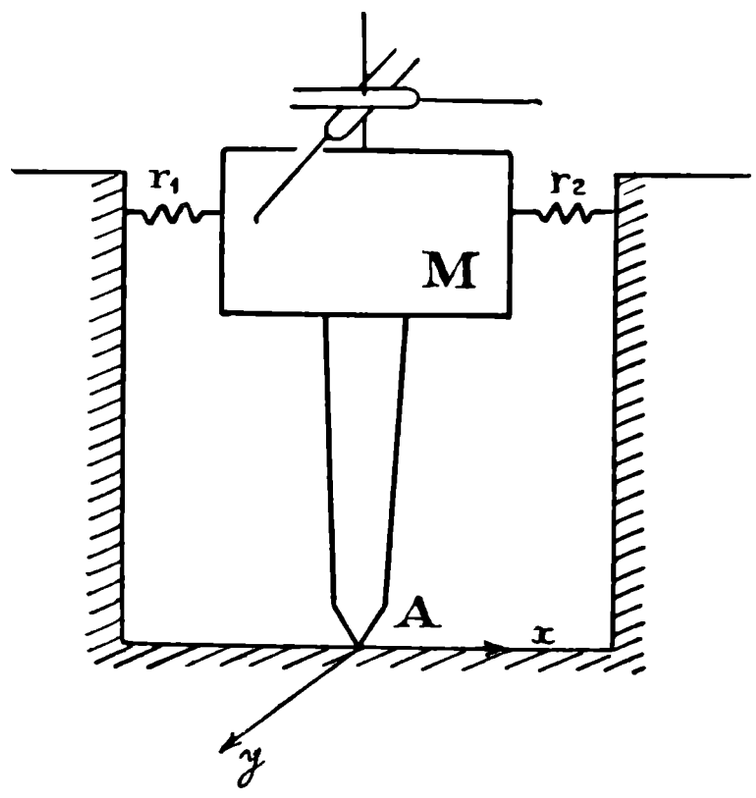


Fig. 4

En la figura 4 se representa el sismógrafo astático ideado por Wiechert, que no es otra cosa que un péndulo invertido. En él la masa M puede también girar alrededor del eje de las x y alrededor del eje de las y.

Cuando la masa M se aparta de su posición de equilibrio, los resortes $r_1$ y $r_2$ tienden a hacerla regresar a ella; la gravedad, en cambio, tiende a aumentar el apartamiento, retardando ese regreso, con lo cual se logra que aumente el período, como se desea.

En la figura 5 se muestra cómo puede ser un sismógrafo de un solo grado de libertad. La masa M está unida al eje x por los alambres EF y GH y puede por eso girar solamente alrededor del eje x que está inclinado muy poco respecto de la vertical A-D. Si el ángulo $\beta$ fuera igual a 90° el mecanismo se transformaría en un simple péndulo cuyo período dependería de la distancia del eje x a la masa M. Si en cambio $\beta$ fuera igual a 0° el mecanismo se haría análogo a una puerta de goznes verticales. En tal caso estaría en todas sus posibles configuraciones en equilibrio indiferente; sacada de una determinada posición tardaría una infinidad de tiempo en regresar a ella, o lo que es equivalente, su período se haría infinito. Para tener un período grande, sin que llegue a ser infinito, se hace por ello $0° < \beta \leqslant 90°$.

De acuerdo al esquema 5 funcionan la gran mayoría de los sismógrafos de un solo grado de libertad, tanto de registro mecánico como de registro óptico-electro-magnético y también algunos de registro óptico; todos ellos para el registro de componentes horizontales del movimiento del suelo.

Entre los de registro mecánico cabe mencionar entre otros los sismógrafos Mainka y los Bosch Omori; entre los de registro óptico, el Milne-Shaw; y entre los de registro electromagnético los sismógrafos ideados por Galitzin primero y sus diversas variantes posteriores, por ejemplo, los Wenner y los Sprengnether.

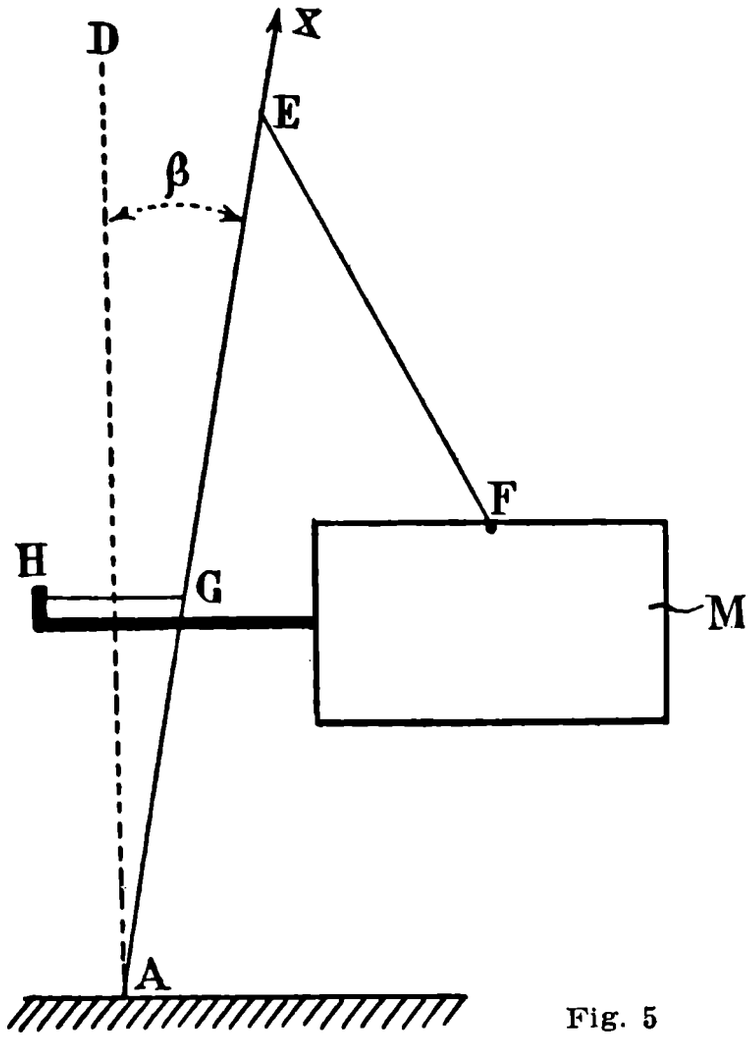


Fig. 5

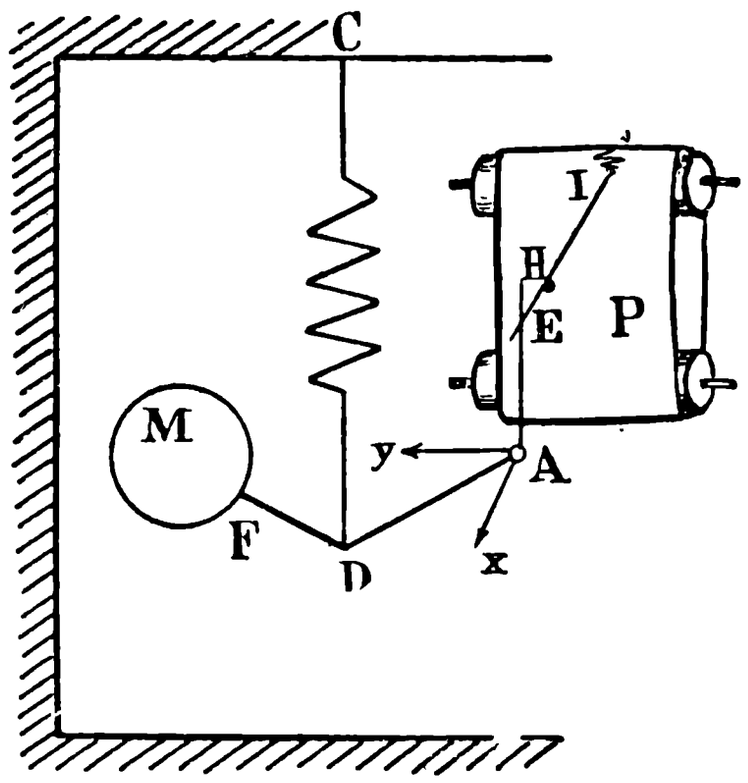


Fig. 6

En la figura 6, por último, damos el esquema de un sismógrafo de un grado de libertad, para el registro de la componente vertical del movimiento del suelo.

La masa M está sostenida por el resorte vertical CD y puede girar alrededor de un eje x que pasa por la charnela A. Girando alrededor de ese eje la palanca AE rígidamente vinculada al brazo FD que sostiene a la masa M, actúa sobre la pluma HI, la cual puede así inscribir sobre el papel ahumado P. Un sismógrafo así es el de Wiechert de poca masa, y también el de Galitzin, aunque en este último el registro es electromagnético.

Moviéndose la tierra producirá el movimiento del soporte al cual está vinculado el mecanismo pendular y por ende éste se pondrá en movimiento. A fin de que resulte fácil deducir del movimiento del sismógrafo el movimiento de la tierra, es conveniente proveerlo de algo que lo detenga a poco de cesar el movimiento del suelo que lo excita. De este modo, si el movimiento del suelo se presenta con intermitencias, pasará lo mismo con el del sismógrafo, el cual reflejara por ello con sencillez a aquél. Ese algo es un mecanismo amortiguador.

Uno de los más comunes de estos mecanismos consiste en vincular a una de las palancas del mecanismo inscriptor un pistón P que se mueve dentro de un cilindro Q, (figura 2) en el que hay un flúido, o simplemente aire; al moverse la palanca f obliga al pistón a hacer lo mismo. Este tropieza en su movimiento con el aire que se halla delante suyo, el cual ofreciéndole resistencia frena su movimiento y por ende el de todo el mecanismo pendular.

§ 4. Puesto que los sismógrafos son mecanismos de cierto número de grados de libertad, resulta recomendable valerse de las ecuaciones de Lagrange para describir su movimiento. Estas ecuaciones tienen la virtud de que de ellas se puede escribir tantas como grados de libertad tiene el mecanismo. Como este número no es sino el de los parámetros independientes, o coordenadas generalizadas que son necesarias para determinar los vectores que señalan la posición de los puntos del mecanismo, tales ecuaciones permitirán despejar esos parámetros y por consiguiente conocer los vectores mencionados en todo instante.

Para poder escribir las ecuaciones de Lagrange, así como para nuestro ulterior objetivo de describir el movimiento de los sismógrafos, sea $p_v$ el vector que desde un origen O de coordenadas absolutas en el sentido clásico señala la posición de la masa elemental m situada en el punto *v* (fig. 2); $q_h$ una de las coordenadas generalizadas $q_1$, $q_2$, etc. que definen al vector $p_v$; $p'_v$ y $q'_h$ las derivadas primeras (6) respecto del tiempo t de $p_v$ y $q_h$; $p''_v$ la derivada 2ª de $p_v$ respecto de t. Además sean: T la energía cinética del mecanismo y $F_v$ la resultante de las fuerzas que actúa en el punto *v*.

De acuerdo con estas designaciones será

$$p_v = p_v\,(q_1, q_2, \ldots, q_h \ldots) \qquad (1)$$

y una de las ecuaciones de Lagrange, la relativa al parámetro genérico $q_h$ se podrá escribir como sigue:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_v F_v \times \frac{\partial p_v}{\partial q_h} \qquad (2)$$

Es fácil ver que esta ecuación es equivalente a esta otra:

$$\sum_v m\,p''_v \times \frac{\partial p_v}{\partial q_h} = \sum_v F_v \times \frac{\partial p_v}{\partial q_h} \qquad (3)$$

En efecto; como es sabido:

$$T = \frac{1}{2}\sum_v m\,p'^2_v$$

Por lo tanto es

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_v m\,p'_v \times \frac{\partial p'_v}{\partial q_h}; \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_h} = \sum_v m\,p'_v \times \frac{\partial p'_v}{\partial q'_h} \qquad (4)$$

Por otra parte se tiene de acuerdo a (1)

$$p'_v = \sum_h \frac{\partial p_v}{\partial q_h} q'_h \qquad \frac{\partial p'_v}{\partial q'} = \frac{\partial p_v}{\partial q_h} \qquad (5)$$

Poniendo en base de esto en (4), $\frac{\partial p_v}{\partial q_h}$ en donde se tiene $\frac{\partial p'_v}{\partial q'_h}$ y haciendo $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_h}$ resultará:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_h} = \Sigma\, m\,p''_v \times \frac{\partial p_v}{\partial q_h} + \Sigma\, m\,p'_v \times \frac{d}{dt}\frac{\partial p_v}{\partial q_h} \qquad (6)$$

Pero

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial p_v}{\partial q_h} = \frac{\partial^2 p_v}{\partial q_1\,\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 p_v}{\partial q_1\,\partial q_2} q'_2 + \ldots = \frac{\partial}{\partial q_h}\sum_h \frac{\partial p_v}{\partial q_h} q'_h$$

o lo que es igual, en base de la primera igualdad de (5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial p_v}{\partial q_1} = \frac{\partial p'_v}{\partial q_h}$$

---

(6) Con una comilla al lado de las letras representaremos siempre su derivada primera respecto de t, y con dos comillas su derivada segunda.

Sustituyendo esto en el 2º término del 2º miembro de (6) sale por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_h} = \sum_v m p''_v \times \frac{\partial p_v}{\partial q_h} + \sum_v m p'_v \times \frac{\partial p'_v}{\partial q_h}$$

y restando de esta ecuación la primera de (4):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_v m p''_v \times \frac{\partial p_v}{\partial q_h}$$

lo cual sustituído en (2), demuestra nuestra afirmación (7).

§ 5. Sentado lo precedente apliquemos las ecuaciones de Lagrange en su forma (3) a los diversos sismógrafos. Para conseguir fórmulas generales comencemos por un sismógrafo de tres grados de libertad (fig. 2).

En cualesquiera de las formas mencionadas aquí, las ecuaciones de Lagrange valen con referencia a sistemas de coordenadas absolutas.

Eso no obstante, consideremos un origen O de coordenadas en el centro de masas de la tierra. Se puede demostrar que en tal caso valen también esas ecuaciones pero toda vez que se considere como fuerzas actuantes $F_v$, además de las activas debidas a la atracción Newtoniana, a la elasticidad, etc., las debidas a la aceleración centrífuga y a la aceleración de Coriolis.

Se define como aceleración de la gravedad a la suma de la aceleración Newtoniana debida a la masa de la tierra y de los cuerpos celestes, y la aceleración centrífuga. Al considerar la acción de la gravedad, esta última quedará por lo tanto tácitamente incluída, y será tan solo necesario no omitir el efecto de la aceleración de Coriolis.

En la figura 2 puede verse que vale la siguiente relación vectorial:

$$p_v = p_a + r_v \qquad (7)$$

$p_a$ siendo el vector que señala desde O al punto A de suspensión de la masa y $r_v$ un vector con origen en ese punto que señala la posición de un punto v.

De (7) sale:

$$\begin{aligned} p'_v &= p'_a + r'_v \\ dp_v &= dp_a + dr_v \end{aligned} \qquad (8)$$

En el punto A volvamos a imaginar al sistema de coordenadas x y z ya usado en el § 3.

El movimiento que a causa de un fenómeno sísmico ejecutan los cuerpos rígidamente unidos al suelo, en general considerado, es un movimiento roto-translatorio; es decir, formado por una rotación y una translación. En el epicentro una y otra posiblemente tienen parecida intervención en el movimiento total; en lugares alejados del epicentro en cambio, la rotación contribuye en una medida muy pequeña. La comparación de registros obtenidos con aparatos análogos, correspondientes a puntos distintos de tales lugares, pero relativamente vecinos entre sí, no revela en efecto, diferencias sensibles. En el presente trabajo dirigiremos nuestra atención en especial al comportamiento de instrumentos de estaciones no epicentrales; supondremos por lo tanto, en nuestras discusiones, que el movimiento de los mencionados cuerpos clavados en el suelo, o como se suele decir también brevemente, que el movimiento del suelo, es puramente translatorio. Debido a esa hipótesis el sistema x y z conservará invariada su dirección respecto de un sistema fijo en O a la tierra.

Elijamos por comodidad el sistema x y z de modo que z sea vertical y dirigido hacia el zenit.

---

(7) El razonamiento que hemos hecho viene a ser el inverso del que hace Levi Civita en "*Corso di Meccanica Razionale*", tomo 3 pág. 538 y siguientes. Este autor sale de las ecuaciones (3) y demuestra que ellas equivalen a las ecuaciones (2).

Debido a que el movimiento del suelo se supone translatorio, y dados los grados de libertad que el sismógrafo que queremos considerar tiene respecto del soporte A D E, un incremento $dr_v$ estará formado en general por la suma de una rotación infinitamente pequeña alrededor del eje de las x, de una análoga alrededor del eje de las y, y de una translación infinitamente pequeña según el eje de las z.

Si designamos con $\bar{i}\ \bar{j}\ \bar{k}$ a los versores o vectores unitarios según x y z respectivamente; con $\varphi$ al ángulo que puede describir la masa girando alrededor de x, y con $\psi$ al que puede describir girando alrededor de y, se podrá entonces poner:

$$dr_v = (\bar{i} \wedge r_v)\, d\varphi + (\bar{j} \wedge r_v)\, d\psi + \bar{k}\, dz \qquad (9)$$

y por ello:

$$dp_v = dp_a + (\bar{i} \wedge r_v)\, d\varphi + (\bar{j} \wedge r_v)\, d\psi + \bar{k}\, dz \qquad (10)$$

y además

$$r'_v = (\bar{i} \wedge r_v)\, \varphi' + (\bar{j} \wedge r_v)\, \psi' + \bar{k}\, z' \qquad (11)$$

La ecuación (10) nos muestra que $\varphi$, $\psi$, y z pueden ser considerados como parámetros q. Haciendo sucesivamente $q_h$ idéntico a $\varphi$, $\psi$, y z, se tiene:

$$\frac{\partial p_v}{\partial \varphi} = \bar{i} \wedge r_v;\ \frac{\partial p_v}{\partial \psi} = \bar{j} \wedge r_v;\ \frac{\partial p_v}{\partial z} = \bar{k} \qquad (12)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3) tendremos estas tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Sigma m_v p''_v \times (\bar{i} \wedge r_v) &= \Sigma F_v \times (\bar{i} \wedge r_v) \\ \Sigma m_v p''_v \times (\bar{j} \wedge r_v) &= \Sigma F_v \times (\bar{j} \wedge r_v) \\ \Sigma m_v p''_v \times \bar{k} &= \Sigma F_v \times \bar{k} \end{aligned} \qquad (13)$$

El producto escalar de los vectores $p''_v$ y $F_v$ por el vector $\bar{i} \wedge r$ representa el momento de aquellos vectores respecto del eje de las x. Si pasáramos el primer miembro de la primera ecuación (13) al 2º miembro, éste se convertiría por lo tanto en la suma de los momentos de las fuerzas activas y de inercia respecto del eje de las x, y la ecuación que resultaría, expresaría que esa suma de momentos es nula.

Análogamente se sacaría que la 2ª de las ecuaciones (13) viene a expresar que la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto del eje de las y es igual a cero.

En cuanto a la 3ª de las ecuaciones (13) se puede notar que el producto de $p''_v$ y de $F_v$ por $\bar{k}$ no es sino la componente de esos vectores según el eje de las z. Por ello tal ecuación viene a expresar que la suma de las componentes de las fuerzas según el eje de las z es igual a cero.

Este resultado hace pensar que para el objeto que perseguimos, hubiera correspondido acudir directamente a las condiciones de D'Alembert del equilibrio dinámico: a) Suma de fuerzas es igual a cero y b) Suma de momentos es igual a cero, sin necesidad de hacer el rodeo de pasar por las ecuaciones de Lagrange. Tal reflexión es correcta posiblemente; es empero de señalar que el echar mano de las ecuaciones de Lagrange, tiene la virtud de que permite enseguida ver qué ecuaciones de equilibrio son las que conviene escribir. Añadamos que además de tener este último hecho en cuenta, hemos creído conveniente usarlas para poner en evidencia que da lo mismo, como es de esperar, partir de ellas o de las ecuaciones de D'Alembert.

§ 6. Pasemos ahora a escribir la primera de las ecuaciones (13), en forma más detallada.

Derivando la 1ª de (8) respecto de t se tiene:

$$\mathbf{p''_v = p''_a + r''_v} \tag{14}$$

En base de (11) es:

$$\mathbf{r''_v = \varphi''\,(i \wedge r) + \varphi' \frac{d}{dt}(i \wedge r) + \psi''\,(j \wedge r) + \psi' \frac{d}{dt}(j \wedge r) + kz'' + z' \frac{d\,\overline{k}}{dt}} \tag{15}$$

Como $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ son vectores constantes respecto de la tierra, serán nulos $\frac{d\,\overline{i}}{dt}$, $\frac{d\,\overline{j}}{dt}$, $\frac{d\,\overline{k}}{dt}$; por ello teniendo en cuenta la (11) se saca facilmente después de hacer las derivadas indicadas en (15):

$$\mathbf{r'' = \varphi''\,(\overline{i} \wedge r) + \psi''\,(\overline{j} \wedge r) + z''\,\overline{k} + \varphi'^2\,\overline{i} \wedge (\overline{i} \wedge r) + \psi'^2\,\overline{j} \wedge (\overline{j} \wedge r) +}$$
$$\mathbf{\varphi'\psi'\,\overline{i} \wedge (\overline{j} \wedge r) + \varphi' z'\,(\overline{i} \wedge \overline{k}) + \varphi'\psi'\,\overline{j} \wedge (\overline{i} \wedge r) + \psi' z'\,(\overline{j} \wedge \overline{k})} \tag{16}$$

Sustituyendo esto en (14), y el resultado en la primera ecuación (13), se saca, una vez extraídos de cada sumatoria los factores comunes:

$$\mathbf{p''_a \times (\overline{i} \wedge \Sigma mr) + \varphi''\,\Sigma m\,(\overline{i} \wedge r) \times (\overline{i} \wedge r) + \psi''\,\Sigma m\,(\overline{j} \wedge r) \times (\overline{i} \wedge r) + z''\,\overline{k} \times (\overline{i} \wedge \Sigma mr) +}$$
$$\mathbf{+ \varphi'^2\,\Sigma\,[\overline{i} \wedge (\overline{i} \wedge r)] \times (\overline{i} \wedge r)\,m + \psi'^2\,\Sigma m[\overline{j} \wedge (\overline{j} \wedge r)] \times (\overline{i} \wedge r) + \varphi'\psi'\,\Sigma m\,[(\overline{i} \wedge (\overline{j} \wedge r)] \times}$$
$$\mathbf{\times (\overline{i} \wedge r) + [\overline{j} \wedge (\overline{i} \wedge r)] \times (\overline{i} \wedge r) + \varphi' z'\,(\overline{i} \wedge \overline{k}) \times (\overline{i} \wedge \Sigma mr) + \psi' z'\,(\overline{j} \wedge \overline{k}) \times}$$
$$\mathbf{\times (\overline{i} \wedge \Sigma mr) = \Sigma F_v \times (\overline{i} \wedge r)} \tag{17}$$

Una expresión análoga se sacaría operando con la segunda ecuación (13).

Por su parte la tercera daría:

$$\mathbf{p''_a \times \overline{k}\,\Sigma m + \varphi''\,\overline{k} \times (\overline{i} \wedge \Sigma mr) + \psi''\,\overline{k} \times (\overline{j} \wedge \Sigma mr) + z''\,\Sigma m + \varphi'^2\,\overline{k} \times [\overline{i} \times (\overline{i} \times \Sigma mr)] +}$$
$$\mathbf{+ \psi'^2\,\overline{k} \times [\overline{j} \wedge (\overline{j} \wedge \Sigma mr)] + \varphi'\psi'\,\overline{k} \times [\overline{i} \wedge (\overline{j} \times \Sigma mr)] + \varphi' z'\,\overline{k} \times (\overline{i} \wedge \overline{k})\,\Sigma m + \psi' z'\,\overline{k} \times}$$
$$\mathbf{\times (\overline{j} \wedge \overline{k})\,\Sigma m + \varphi'\,\psi'\,\overline{k} \times [\overline{j} \wedge (\overline{i} \wedge \Sigma mr)] = \Sigma F_v \times \overline{k}} \tag{18}$$

Para presentar las expresiones en términos familiares en la mecánica racional, pongamos $\Sigma\, m = M$ y designemos $r^*$ al vector que señala al baricentro B de la masa oscilante. Con ello se podrá escribir:

$$\mathbf{\Sigma\, mr = Mr^*} \qquad \mathbf{y} \qquad \mathbf{\overline{i} \wedge \Sigma\, mr = M\,\overline{i} \wedge r^*} \tag{19}$$

Recordemos además que si se tienen dos vectores a y b, tales que $\mathbf{a = \overline{i}a_1 + \overline{j}a_2 + \overline{k}a_3}$ y $\mathbf{b = \overline{i}b_1 + \overline{j}b_2 + \overline{k}b_3}$ es:

$$\mathbf{a \times b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{a \wedge b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{20}$$

En base de esto se saca enseguida:

$$\bar{i} \wedge r = -\bar{j}\, z + \bar{k}\, y$$

$$(\bar{i} \wedge r) \times (\bar{i} \wedge r) = z^2 + y^2$$

$$(\bar{j} \wedge r) \times (\bar{i} \wedge r) = -xy$$

$$[\bar{i} \wedge (\bar{i} \wedge r)] \times (\bar{i} \wedge r) = 0$$

$$[\bar{j} \wedge (\bar{j} \wedge r)] \times (\bar{i} \wedge r) = -z\, y = (\bar{k} \wedge r) \times (\bar{j} \wedge r)$$

$$[\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge r)] \times (\bar{i} \wedge r) = -z\, x = (\bar{k} \wedge r) \times (\bar{i} \wedge r)$$

$$[\bar{j} \wedge (\bar{i} \wedge r)] \times (\bar{i} \wedge r) = 0$$

$$(\bar{i} \wedge \bar{k}) \times (\bar{i} \wedge r) = -\bar{j} \times (\bar{i} \wedge r) = z$$

$$(\bar{j} \wedge \bar{k}) \times (\bar{i} \wedge r) = 0$$

$$[\bar{i} \wedge (\bar{i} \wedge r)] \times \bar{k} = -z$$

$$[\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge r)] \times \bar{k} = 0$$

$$\bar{j} \wedge r = \bar{i}\, z - \bar{k}\, x$$

$$(\bar{j} \wedge r) \times (\bar{j} \wedge r) = z^2 + x^2$$

$$[\bar{i} \wedge (\bar{i} \wedge r)] \times (\bar{j} \wedge r) = xz$$

$$[\bar{j} \wedge (\bar{j} \wedge r)] \times (\bar{j} \wedge r) = 0$$

$$[\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge r)] \times (\bar{j} \wedge r) = 0 \qquad (21)$$

$$[\bar{j} \wedge (\bar{i} \wedge r)] \times (\bar{j} \wedge r) = z\, y$$

$$(\bar{i} \wedge \bar{k}) \times (\bar{j} \wedge r) = 0$$

$$(\bar{j} \wedge \bar{k}) \times (\bar{j} \wedge r) = \bar{i} \times (\bar{j} \wedge r) = z$$

$$[\bar{j} \wedge (\bar{j} \wedge r)] \times \bar{k} = -z$$

$$[\bar{j} \wedge (\bar{i} \wedge r)] \times \bar{k} = 0$$

Designando un momento de segundo orden respecto de los ejes de coordenadas con la letra J provista de un subíndice formado por las letras x,y ó z, según sea el par de ejes de que se trate, se podrá escribir por ello, en vez de (17) y su análoga, y en vez de (18):

$$Mp_a'' \times (\bar{i} \wedge r^*) + \varphi'' J_{xx} - \psi'' J_{xy} + z'' M \bar{k} \times (\bar{i} \wedge r^*) - \psi'^2 J_{yz} - \varphi' \psi' J_{xz} - M \varphi' z' \bar{j} \times (\bar{i} \wedge r^*) = \Sigma F_v \times (\bar{i} \wedge$$

$$Mp_a'' \times (\bar{j} \wedge r^*) + \psi'' J_{yy} - \varphi'' J_{xy} + z'' M \bar{k} \times (\bar{j} \wedge r^*) + \varphi'^2 J_{xz} + \varphi' \psi' J_{yz} + M \psi' z' \bar{i} \times (\bar{j} \wedge r^*) = \Sigma F_v \times (\bar{j} \wedge$$

$$p''_a \times \bar{k} + z'' + \varphi'' (\bar{i} \wedge r^*) \times \bar{k} + \psi'' (\bar{j} \wedge r^*) \times \bar{k} - (\varphi'^2 + \psi'^2)\, z = \frac{1}{M} \Sigma F_v \times \bar{k} \qquad (2$$

sistema de ecuaciones que nos expresa cuál es la información que acerca del movimiento del suelo, es capaz de suministrar en definitiva, un sismógrafo como el que hemos considerado.

$\varphi$, $\psi$, y z pueden sacarse de los registros. Dichos grandores y sus derivadas se pueden considerar por ello como los elementos producidos por los sismógrafos. Los $F_v$ son fuerzas cuyas características se conocen o se pueden determinar. Y por último los coeficientes de todos los términos, mediante adecuados cómputos, y en ocasiones también por vía experimental, igualmente se pueden determinar.

Ahora bien; siendo conocidos $\varphi$, $\psi$ y z, así como los $F_v$ y los coeficientes recién citados, las ecuaciones (22) nos muestran que es posible conocer las componentes de $p''_a$ según los vectores $\bar{i} \wedge r^*$, $\bar{j} \wedge r^*$. y $\bar{k}$. Sólo es necesario para ello, sustituir sus valores en esas ecuaciones, para conseguir dichas componentes. Las ecuaciones (22) pueden designarse por tal motivo con el nombre de *ecuaciones del funcionamiento de los sismógrafos.*

Los grandores M, $F_v$, sus coeficientes, y los coeficientes de las derivadas de $p''_a$, $\varphi$, $\psi$, y z, tienen expresiones independientes de $p''_a$. Solo dependen de las características de los sismógrafos, de las piezas de que están formados, de la manera cómo éstas están dispuestas, y de sus dimensiones. Cabe por ello designar a tales elementos con el nombre de *expresiones características del sismógrafo.*

Aunque para la sismología lo importante es saber cómo se puede determinar el movimiento del suelo, o los elementos de tal movimiento cuando se conoce z, $\psi$ y $\varphi$, o lo que es equivalente: cómo puede determinarse las causa excitadora cuando se conoce el movimiento del sismógrafo, no deja de serlo igualmente, resolver el problema que podemos llamar *inverso*: determinar cómo son z, $\psi$ y $\varphi$ cuando se conoce la causa excitadora. En especial resulta útil conocer la solución de tal problema, cuando se proyecta un sismógrafo a fin de poder estimar su eficiencia. Ello resulta útil asimismo para lograr recursos experimentales, que permitan determinar elementos de lo que llamamos recién las expresiones características. También a ese objeto pueden servir las ecuaciones (22). Consideradas para dicha finalidad, ellas constituyen un sis-

tema simultáneo de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales y a coeficientes no constantes, con las funciones perturbadoras $Mp''_a \times (\bar{i} \wedge \mathbf{r}^*)$, $Mp''_a \times (\bar{j} \wedge \mathbf{r}^*)$ y $p''_a \times \bar{k}$.

La solución de tal sistema es generalmente muy difícil, y tanto más si se desea tenerla en una expresión cerrada. Se la suele dar por ello, por medio de expresiones aproximadas que se logran usando alguno de los diversos recursos elaborados por el Análisis Matemático a dicho objeto; por ejemplo, el de iteración, partiendo de una solución aproximada, o el desarrollo en serie.

§ 7. Los términos que entran en (22) y los elementos que entran en los diversos coeficientes de los términos, no tienen todos la misma importancia. Como en la práctica interesan más bien los grandes rasgos del movimiento del suelo, y para ello puede prescindirse de los refinamientos, conviene aligerar las expresiones desembarazándolas de los grandores menores que complican su apariencia. Ello es aconsejable también para atacar el problema que denomináramos inverso, de cómo reacciona un sismógrafo bajo la influencia de causas que se fijan de antemano; sea para formarse una idea de la primera solución, sea para lograr una expresión inicial a perfeccionarse en sucesivas iteraciones.

Para ver cómo pueden simplificarse las mencionadas ecuaciones, empecemos por considerar la primera de ellas.

En primer término notemos en esa ecuación que por ser $J_{xx}$ una función de r, y r a su vez una función de $\varphi$, $\psi$, y z, podemos escribir: $J_{xx} = J_{xx}(\varphi, \psi, z)$.

Teniendo eso presente, desarrollemos dicha expresión en serie de Taylor, a partir de su valor, estando la masa oscilante del sismógrafo en reposo.

Como la masa tendrá desplazamientos muy pequeños limitemos el desarrollo a los términos lineales. Designando J al momento de inercia para el reposo, tendremos:

$$J_{xx} = J + \frac{\partial J}{\partial \varphi} \Delta\varphi + \frac{\partial J}{\partial \psi} \Delta\psi + \frac{\partial J}{\partial z} \Delta z$$

Como

$$J_{xx} = \Sigma m (\bar{i} \wedge r)^2$$

será

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = \Sigma m (\bar{i} \wedge r) \times \bar{i} \wedge \frac{\partial r}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial J}{\partial \psi} = \Sigma m (\bar{i} \wedge r) \times \bar{i} \wedge \frac{\partial r}{\partial \psi}; \quad \frac{\partial J}{\partial z} = \Sigma m (\bar{i} \wedge r) \times \bar{i} \wedge \frac{\partial r}{\partial z}$$

Por lo tanto y recordando la (9):

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = \Sigma m (\bar{i} \wedge r) \times [\bar{i} \wedge (\bar{i} \wedge r)]; \quad \frac{\partial J}{\partial \psi} = \Sigma m (\bar{i} \wedge r) \times [\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge r)]; \quad \frac{\partial J}{\partial z} = \Sigma m (\bar{i} \wedge r) \times (\bar{i} \wedge \bar{k})$$

Teniendo presente las fórmulas (19 y (21) se puede escribir en consecuencia:

$$J_{xx} = J - J^o_{zx} \Delta\psi + M (\bar{i} \wedge \bar{k}) \times (\bar{i} \wedge r_o^*) \Delta z \qquad (23)$$

El índice cero sirviendo para indicar que $r^*$ señala a B en la posición de reposo, y que $J_{zx}$ corresponde a igual posición.

Los sismógrafos se construyen de modo que la masa sea simétrica respecto de los ejes x e y, al estar en reposo. Por ello será nulo $J^o_{zx}$, y por ende el segundo término. Por igual razón será vertical $r_o^*$. Como debido a la elección que hicimos de los ejes x, y, z, también $\bar{k}$ es vertical, será $r^*_o = \bar{k} |r_o^*|$.

Si hacemos $|r_o^*| = d$, podremos poner $Md\Delta z$, en vez del tercer término de (23).

En el estudio del movimiento de un péndulo, y lo mismo en el de los aparatos que tenemos en consideración, se define con el nombre de largo reducido al grandor l dado por:

$$l = \frac{J}{Md} \qquad (24)$$

En vez de Md podemos por ello poner $\frac{J}{l}$, con lo que el último término de la (23) se convertirá en $\frac{J}{l}\triangle z$.

$\triangle z$ generalmente no pasa de 1 mm. Si l es del orden de medio metro, $J\frac{\triangle z}{l}$ será del orden de $2 \times 10^{-3}$ de J. Si lo despreciamos frente de J podremos por lo tanto considerar constante a $J_{xx}$ y poner

$$J_{xx} = J \qquad (25)$$

Analizando los demás elementos que aparecen en (22) de un modo parecido al usado para analizar $J_{xx}$, se encontraría:

$$\begin{gathered} J_{xy} = J^{\circ}_{xy} - \triangle\varphi\ J^{0}_{xz} + \triangle\psi J^{0}_{zy} \\ J_{zy} = J^{\circ}_{zy} - \triangle\varphi \Sigma m\ (z^2 - y^2)_o - \triangle\psi\ J^{\circ}_{xy} + \triangle z\, y_o M \\ J_{xz} = J^{\circ}_{zx} + \triangle\varphi\ J^{\circ}_{xy} - \triangle\psi \Sigma m\ (z^2 + x^2)_o + \triangle z\, x_o M \qquad (26) \end{gathered}$$

$$M\bar{k} \times (\bar{i} \wedge r^*) = M[\bar{k} \times (\bar{i} \wedge r^*_o) + \bar{k} \times [\bar{i} \wedge (\bar{i} \wedge r^*_o)]\triangle\varphi + \bar{k} \times [\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge r^*)]\triangle\psi + \bar{k} \times (\bar{i} \wedge \bar{k})\triangle z]$$

$$M\bar{j} \times (\bar{i} \wedge r^*) = M[\bar{j} \times (\bar{i} \wedge r^*_o) + \bar{j} \times [\bar{i} \wedge (\bar{i} \wedge r^*_o)]\triangle\varphi + \bar{j} \times [\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge r^*_o)]\triangle\psi + \bar{j} \times (\bar{i} \wedge \bar{k})\triangle z]$$

sirviendo el índice cero, como antes, para indicar que los grandores corresponden al momento en que la masa está en la posición de reposo.

Por la simetría de la masa respecto de los ejes x e y en el reposo será

$$J^{0}_{zy} = J^{0}_{xy} = J^{0}_{xz} = y_o = x_o = O$$

Tendremos por ello, dentro de la aproximación hecha en los desarrollos de Taylor:

$$J_{xy} = o;\ J_{zy} = -\triangle\varphi \Sigma m\ (z^2 - y^2)_o;\ J_{zx} = -\triangle\psi \Sigma m\ (z^2 + x^2)_o \qquad (27)$$

Pasando ahora a las dos igualdades últimas de (26), recordemos que $r_o^* = \bar{k}d$. En base de esto, es fácil transformar esas igualdades en las siguientes:

$$M\bar{k} \times (\bar{i} \wedge r^*) = -Md\triangle\varphi;\ M\bar{j} \times (\bar{i} \wedge r^*) = -M\ (d + \triangle z) \qquad (28)$$

Con las fórmulas (26), (27), y (28), la 1ª de (22) se transforma en la siguiente:

$$\begin{gathered} Mp''_a \times (\bar{i} \wedge r^*) + \varphi''\, J + \psi'^2\, \triangle\varphi \Sigma m\ (z^2 - y^2)_o + \varphi'\psi'\triangle\psi\ \Sigma m\ (x^2 + z^2) - z''\, Md\ \triangle\varphi + \\ + \varphi' z'\, M\ (d + \triangle z) = \Sigma F_v \times (\bar{i} \wedge r_v) \qquad (29) \end{gathered}$$

Para apreciar el grandor de los términos podemos suponer sinusoidal el movimiento de la masa en las tres componentes generalizadas y admitir que la amplitud y el período de $\psi$ y $\frac{z}{l}$ sean del mismo orden que en $\varphi$. De acuerdo con esta hipótesis si ponemos $\varphi = \varphi_o$ sen$\omega t$ tendremos:

$$|\varphi''| \approx |\omega^2 \varphi_o|;\ \psi'^2 \sim |\omega^2 \varphi^2_o| \approx |\varphi'\psi'|;\ |z''| \approx |l\omega^2 \varphi_o|;\ |\varphi' z'| \approx |\omega^2 l \varphi^2_o|$$

Por lo tanto podemos poner:

$$\left| \frac{\psi'^2 \triangle \varphi \Sigma m (z^2 - y^2)}{\varphi'' J} \right| < \left| \frac{\triangle \varphi . \psi'^2}{\varphi''} \right| \approx | \varphi . \triangle \varphi | ; \quad \left| \frac{\varphi' \psi' \triangle \psi \Sigma m \ (z^2 + x^2)}{\varphi'' J} \right| \approx | \triangle \psi \varphi_o |$$

Y además teniendo presente la (24)

$$\left| \frac{z'' Md \triangle \varphi}{\varphi'' J} \right| \approx \triangle \varphi; \quad \left| \frac{\varphi' z' M \ (d + \triangle z)}{\varphi'' J} \right| \approx | \ \varphi_o |$$

En la hipótesis supuesta, los términos que en (29) siguen después de $\varphi'' J$ son entonces del orden de $\varphi$ veces este último o menores aún. El mayor valor de $\varphi$ es generalmente del orden de $2x10^{-3}$; la influencia de esos términos en los resultados es por lo tanto pequeña. Omitiéndolos por consiguiente, resulta en vez de (29) la ecuación aproximada siguiente:

$$\varphi'' J - \Sigma F_v \times (\bar{i} \wedge r_v) + M p''_a \times (\bar{i} \wedge r^*) = 0 \qquad (30)$$

Consideraciones análogas permiten reducir las otras dos ecuaciones del sistema (22) a las siguientes:

$$\begin{aligned} J \psi'' - \Sigma F_v \times (\bar{j} \wedge r_v) + M p''_a \times (\bar{j} \wedge r^*) = 0 \\ M z'' - \Sigma F_v \times \bar{k} + M p''_a \times \bar{k} = 0 \end{aligned} \qquad (31)$$

El sistema formado por (30) y (31), como se ve es bastante más sencillo que el (22). Para determinar las componente de $p''_a$, en base de z, $\varphi$ y $\psi$ se lo puede usar sin más salvedad que la de tener presente que el resultado a que se llegue puede estar afectado por un error a lo sumo del orden de ½ por ciento. Si en cambio se desea usarlo en el sentido inverso, es decir, para apreciar cómo resultarán ser z, $\varphi$ y $\psi$ al excitarse el sismógrafo mediante una causa preestablecida, deberá procederse con cierta precaución. A dicho fin convendría reparar en que el sistema (22) consta de ecuaciones simultáneas, y que su simultaneidad representa el acoplamiento que existe entre los diversos grados de libertad del sismógrafo. Las ecuaciones (30) y (31) en cambio no se presentan como simultáneas, sino como independientes. El acoplamiento no está representado en ellas, por lo tanto, y no quedará acusado en la solución de las mismas. Para lograrlo no queda otro recurso que volver a las ecuaciones (22) y aproximar su solución por iteraciones o por algún otro procedimiento a partir de los que arrojen las ecuaciones (30) y (31). Pero también en estas operaciones, habrá que proceder con cuidado, a fin de evitar que aparentes efectos de "resonancia" conduzcan a sucesiones de soluciones no convergentes.

Interesante es notar que el sismógrafo puede estar en movimiento siendo nulo $p''_a$. Siendo como es transitorio el movimiento del suelo debido a un terremoto, ello sucederá una vez que el efecto del terremoto haya pasado. También puede lograrse esa situación, excitando artificialmente al sismógrafo mediante un impulso instantáneo. De una y otra forma, puede suceder que sean nulas las variaciones de dos de las funciones z, $\varphi$ ó $\psi$ y distinto de cero la restante, cosa que mediante perturbaciones artificiales no es difícil conseguir. En ese caso, las ecuaciones (30) y (31), desprovistas del término $p''_a$ serían rigurosas.

§ 8. Hemos podido prescindir hasta ahora de los términos $\Sigma F_v \wedge (\bar{i} \times r)$, $\Sigma F_v \times (\bar{j} \wedge r)$, $\Sigma F_v \times \bar{k}$. Para tener una descripción analítica del funcionamiento de los sismógrafos, es preciso todavía, poner en evidencia qué representan esos términos. Empecemos por el primero de ellos; es decir por $\Sigma F_v \times (\bar{i} \wedge r)$.

Como ya lo hicimos notar, en el § 5, ese término representa la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la masa respecto del eje de las x. Veamos cuáles son tales fuerzas.

En primer lugar podemos mencionar las debidas a la gravedad y a la aceleración de Coriolis. A ellas podemos añadir: a) las debidas al roce en las articulaciones de todas las palancas que forman el mecanismo inscriptor y del estilete sobre el papel ahumado; b) las debidas al amortiguador y c) las debidas a la resistencia elástica que oponen los resortes de las diversas articulaciones de todo el mecanismo. Para distinguir los momentos debidos a estas tres clases de fuerzas, los designaremos respectivamente: $M_r$, $M_a$, $M_e$.

Las fuerzas de amortiguamiento se pueden considerar como fuerzas pasivas que siempre se oponen al movimiento. Se puede representar su momento por ello por la expresión:

$$M_a = -C_a \varphi'$$

Deduciendo la expresión del movimiento del sismógrafo en la hipótesis de que $C_a$ sea constante, se encuentra que ella representa con mucha aproximación el movimiento real. Puede aceptarse por ello que $C_a$ tenga ese carácter.

Las fuerzas de roce tienen una acción parecida a las de amortiguamiento, porque como éstas se oponen al movimiento; pero se diferencian de ellas por el hecho de que su dependencia de la velocidad no se ajusta siempre a la misma ley. Debido a esta circunstancia, se acostumbra a tomarlas en cuenta en forma estimativa, admitiendo en tal sentido que su módulo es constante. Como se oponen al movimiento, su signo debe en todo momento ser contrario al de la velocidad $\varphi'$. Se puede por tal motivo representar su momento en primera aproximación por:

$$M_r = -C_r \frac{\varphi'}{|\varphi'|}$$

siendo $C_r$ una constante.

Las fuerzas de la elasticidad engendran un momento que se opone al crecer del ángulo $\varphi$, y que de acuerdo a la experiencia se puede considerar proporcional a dicho ángulo. Ese momento se representará por ello por:

$$M_e = -C_c \varphi$$

Pasemos ahora a las fuerzas de la gravedad y de Coriolis. Estas últimas están dadas para cada masa m por $(2\,\Omega \times p'_v)\,m$, siendo $\Omega$ la velocidad de rotación de la tierra. Teniendo en cuenta que $|\Omega| = \frac{2\pi}{86164}$, y suponiendo para la velocidad $p'_v$ de m un módulo de 1 cm seg$^{-1}$, sale para $2\,\Omega \times p'_v$, un módulo inferior a $0.7 \times 10^{-4}$ cm seg$^{-2}$, valor como se ve muy inferior al módulo de la gravedad que es del orden de 1000 cm seg$^{-2}$. Cabe por ello despreciar el efecto de la aceleración de Coriolis, y considerar tan solo el debido a la gravedad, sin incurrir por dicho motivo en error sensible, tanto si se trata de determinar $p'_a$ a base de los datos de los registros, como si se trata de resolver en primera aproximación el problema que caracterizamos como inverso.

Designando G a la gravedad, su efecto estará dado por:

$$\Sigma m G \times (i \wedge r_v) = MG \times (i \wedge r^*)$$

Para poner en evidencia lo que expresa el segundo miembro consideramos el plano $(\bar{i}, r^*)$. Este es el plano baricentral que pasa por el eje de las x. Para medir los ángulos $\varphi$ podemos usar dicho plano, y tomar como origen de esos ángulos la posición II (fig. 7) que tiene cuando la masa está en reposo. En dicha posición coincidirá evidentemente con el plano vertical que pasa por x.

Siendo $N_1$ un vector unitario normal al plano $(\bar{i}, r^*)$ y $d_1 = |r^*|$ sen $(\bar{i}, r^*)$, se tiene

$$\bar{i} \wedge r^* = d_1 N_1 \qquad (32)$$

Por lo tanto será

$$M\,G \times (\bar{i} \wedge r^*) = |G|\,M\,d_1 \cos(G,\ N_1)$$

A fin de ver cuánto es el ángulo $(G, N_1)$ imaginemos un vector $N_2$ unitario normal al plano II que pase por el punto B. Dicho vector será perpendicular tanto a G como a x. Por ser perpendicular a x, será coplanar con $N_1$ y G que también lo son: $N_1$ por resultar del producto vectorial $\bar{i} \wedge r^*$, y G por la forma en que se eligió el sistema x y z.

Se podrá por ello poner

$$\measuredangle (N_1, G) = \measuredangle (N_2, G) + \measuredangle (N_2, N_1)$$

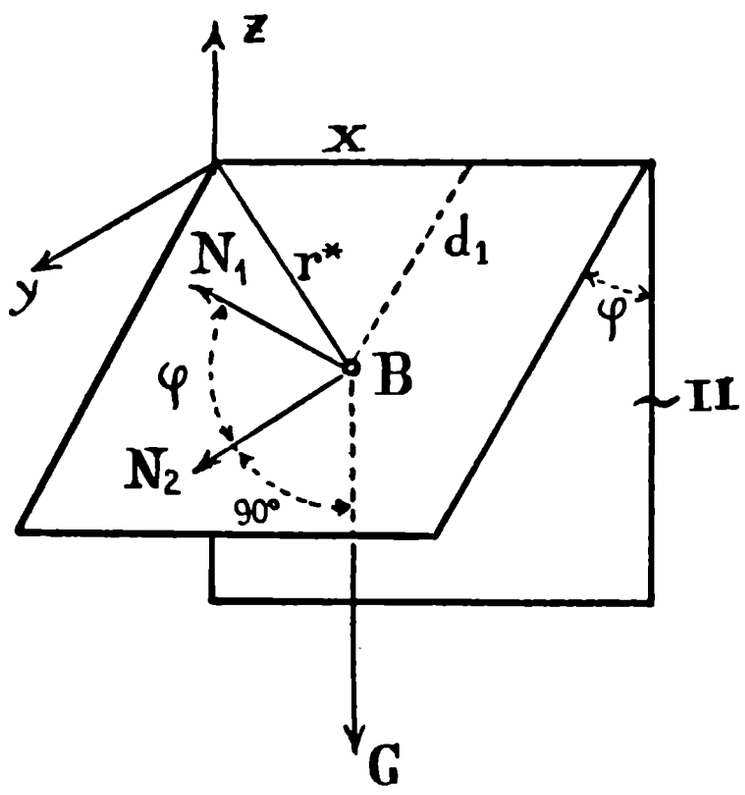


Fig. 7

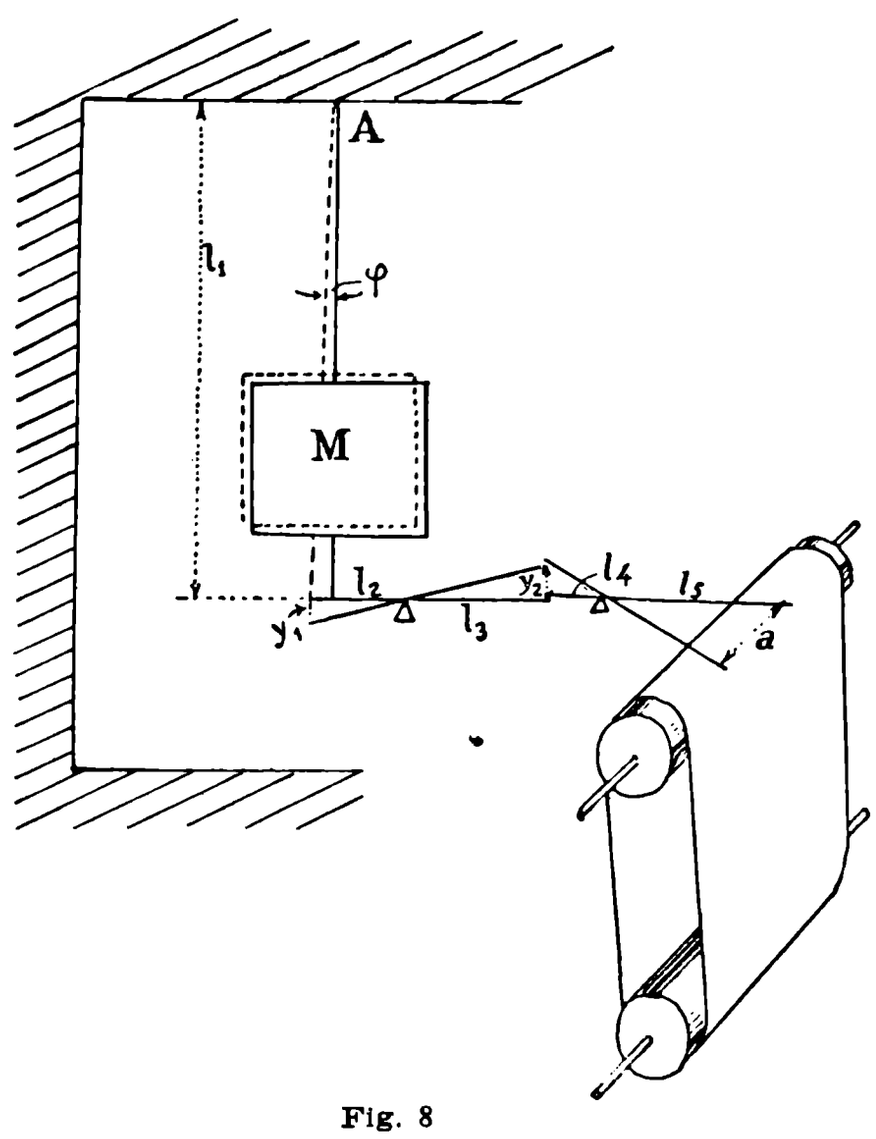


Fig. 8

Como $N_2$ es perpendicular al plano II y $N_1$ es perpendicular al plano $(\bar{i}, r^*)$ el ángulo $(N_2\,N_1)$ no será sino el ángulo φ de que está apartado el plano baricentral del reposo. $(N_2 G)$ es igual a 90°; será por consiguiente:

$$(N_1\,G) = 90° + \varphi$$

y por ende:

$$M\,G \times (\bar{i} \wedge r^*) = M\,d_1\,|G| \cos(90° + \varphi)\ ;$$

o si ponemos $|G| = g$, y tenemos presente que $\cos(90° + \varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$,

$$M\,G \times (\bar{i} \wedge r^*) = -\,M\,d_1\,g \operatorname{sen}\varphi$$

La variación de $d_1$ generalmente no es superior a $2 \times 10^{-3}$. Podemos por lo tanto considerar a este grandor constante e igual a d.

Examinemos por último el término $Mp''_a \times (\bar{i} \wedge r^*)$ que figura en (30). De acuerdo con (32) podemos poner

$$Mp_a'' \times (\bar{i} \wedge r^*) = M\,d_1\,p''_a \times N_1$$

$p''_a \times N_1$ no es sino la componente de $p''_a$ según $N_1$. El término $Mp''_a \times (\bar{i} \wedge r^*)$ nos da por lo tanto *la componente de la aceleración de* A *según la normal al plano baricentral que pasa por el eje* x *multiplicada por* $M\,d_1$.

Debido a la pequeñez del ángulo $\varphi$, esa componente viene a ser prácticamente igual a la componente según $N_2$, es decir, según el eje de las y. Designando a esta última con $\eta''$, y otra vez considerando a $d_1$ igual a d, podemos poner finalmente:

$$Mp''_a \times (i \wedge r^*) = M\,d\,\eta'' \tag{33}$$

Introduciendo en (30) los resultados obtenidos, sacaremos en vez de ella:

$$J\,\varphi'' + C_a\,\varphi' + Mgd\,\mathrm{sen}\,\varphi + C_e\,\varphi + C_r \frac{\varphi'}{|\varphi'|} = -\,Md\,\eta'' \tag{33}$$

Como los ángulos $\varphi$ suelen ser pequeños se puede aceptar que sea $\mathrm{sen}\,\varphi = \varphi$. Admitiendo eso, dividiendo por J toda la ecuación, y poniendo:

$$\frac{C_a}{J} = 2\varepsilon;\quad \frac{Mdg + C_e}{J} = n^2;\quad \frac{C_r}{J} = k \tag{34}$$

se podrá escribir

$$\varphi'' + 2\varepsilon\,\varphi' + n^2\,\varphi + k\frac{\varphi'}{|\varphi'|} = -\frac{\eta''}{J/Md} = -\frac{\eta''}{l} \tag{35}$$

Entre el ángulo $\varphi$ y lo que se inscribe, que podemos designar a, media la relación siguiente:

$$a = L\,\varphi \tag{36}$$

donde L es una constante.

En efecto: con las designaciones de la figura 8, se tiene:

$$l_1\,\varphi = y_1 \qquad \frac{y_1}{l_2} = \frac{y_2}{l_3} \qquad \frac{y_2}{l_4} = \frac{a}{l_5}$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades se saca, tras de fáciles operaciones:

$$\frac{l_1\ l_3\ l_5}{l_2\ l_4}\,\varphi = a$$

Si en vez de dos palancas tuviéramos n, se sacaría de igual modo:

$$\frac{l_1\ l_3\ l_5 \ldots l_{(2n+1)}}{l_2\ l_4 \ldots l_{2n}}\,\varphi = a$$

y designando L al factor de $\varphi$, podríamos escribir la (36).

A L se le conoce con el nombre de *largo de la punta inscriptora,* porque su valor es el que tendría que tener la distancia al eje x, de la punta de una varilla colocada en la masa, a fin de que produzca con el ángulo $\varphi$, la inscripción a.

Multiplicando (35) por L se sacaría:

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a + Lk \frac{a'}{|a'|} = -\frac{L}{l}\eta''$$

Para simplificar podemos poner:

$$\frac{L}{l} = V \qquad Lk = K$$

Con esto se podrá por último escribir:

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a + K \frac{a'}{|a'|} = -V\eta'' \qquad (37)$$

§ 9. La (37) nos da como se ve la relación entre la inscripción a sobre la banda del sismógrafo y $\eta''$ la componente según el eje de las $y$ de la aceleración $p''_a$ del punto A. Desde luego una ecuación análoga se puede obtener operando con relación al eje de las $x$ en vez de haberlo hecho con relación al eje de las $y$.

Para tener la componente según el eje de las $z$, tenemos la 2ª ecuación (31), que al ser desarrollada nos conducirá a una ecuación semejante a la (37).

En tal sentido es de notar que esa componente, que podemos designar $\zeta''$ está dada en (31) por $p''_a \times \overline{k}$.

Por su parte $\Sigma F_v \times \overline{k}$ representa la suma de las componentes según z de las diversas fuerzas actuantes. Como tales tenemos que considerar las mismas que en el parágrafo precedente.

La gravedad nos da:

$$\Sigma m\, G \times k = -g\, M$$

Llamando $\lambda_o$ al largo del resorte estando sin distender, es decir libre de cargas y $\lambda$ a su largo al funcionar el sismógrafo, las fuerzas de elasticidad estarán dadas de acuerdo a la ley de Hooke por: $+ C_e\ (\lambda - \lambda_o)$.

Las de amortiguamiento se pueden representar por $-C_a z'$, y las de roce por $-C_r \frac{z'}{|z'|}$

En todas estas fuerzas el signo negativo se debe a que el signo de ellas es contrario al de la variable de que dependen.

Detallando la (31) en base de lo precedente se la podrá escribir como sigue:

$$z''M + gM - C_e\ (\lambda - \lambda_o) + C_a z' + C_r \frac{z'}{|z'|} = -\zeta'' M \qquad (38)$$

Si el sismógrafo estuviera en reposo y fueran nulos también $\zeta''$ y $z''$ se tendría de acuerdo con (38) designando con $\lambda_1$ el largo del resorte en este caso:

$$gM - C_e\ (\lambda_1 - \lambda_o) = O$$

o lo que es igual

$$gM + C_e \lambda_o = -C_e \lambda_1$$

lo cual sustituído en (38) nos da:

$$z''M - C_e\ (\lambda - \lambda_1) + C_a z' + C_r \frac{z'}{|z'|} = -\zeta'' M$$

$z'$ y $z''$ son iguales para todos los puntos de la masa. Como la unión del resorte con ésta es también un punto de ellas, y los incrementos de z y de $\lambda$ son opuestos, se podrá poner:

$$z' = -\lambda' \; ; \qquad z'' = -\lambda''$$

y por ello:

$$-\lambda'' M - C_a \lambda' - C_e (\lambda - \lambda_1) - C_r \frac{\lambda'}{|\lambda'|} = -\zeta'' M \tag{39}$$

En la fig. 9 destinada a mostrar esquemáticamente cómo se puede hacer la inscripción del movimiento de la masa se tiene:

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{l_1} = \frac{\alpha}{l_2} \qquad \frac{\alpha}{l_3} = \frac{-a}{l_4} \qquad (\lambda - \lambda_1) \frac{l_2 . l_4}{l_1 . l_3} = -a$$

y si en vez de dos, se tuvieran n palancas se tendría:

$$(\lambda - \lambda_1) \frac{l_2 \; l_4 \ldots l_{2n}}{l_1 \; l_3 \ldots l_{2n-1}} = -a$$

y llamando V al factor de $(\lambda - \lambda_1)$:

$$-V (\lambda - \lambda_1) = a$$

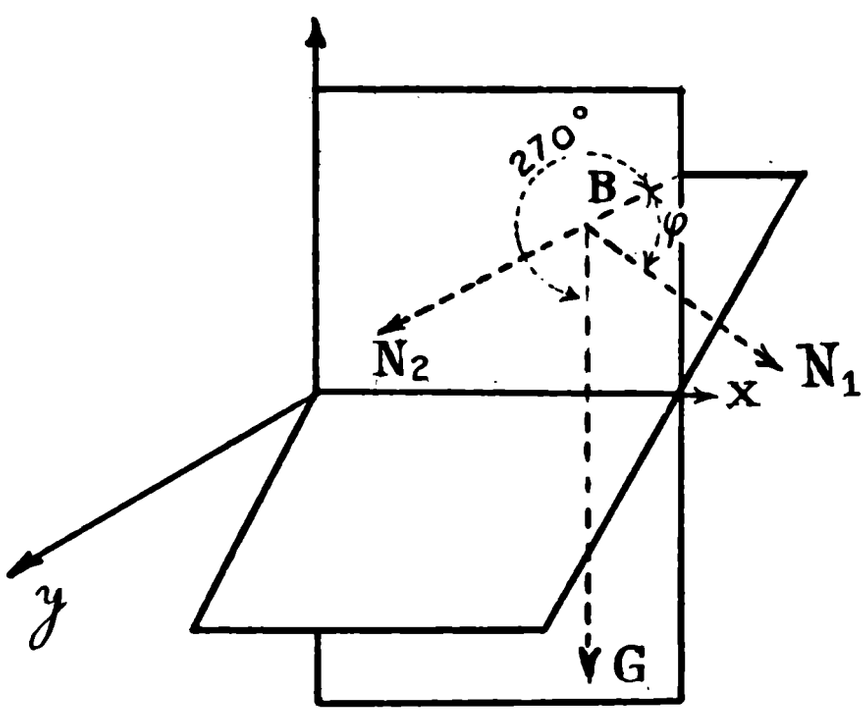


Fig. 10

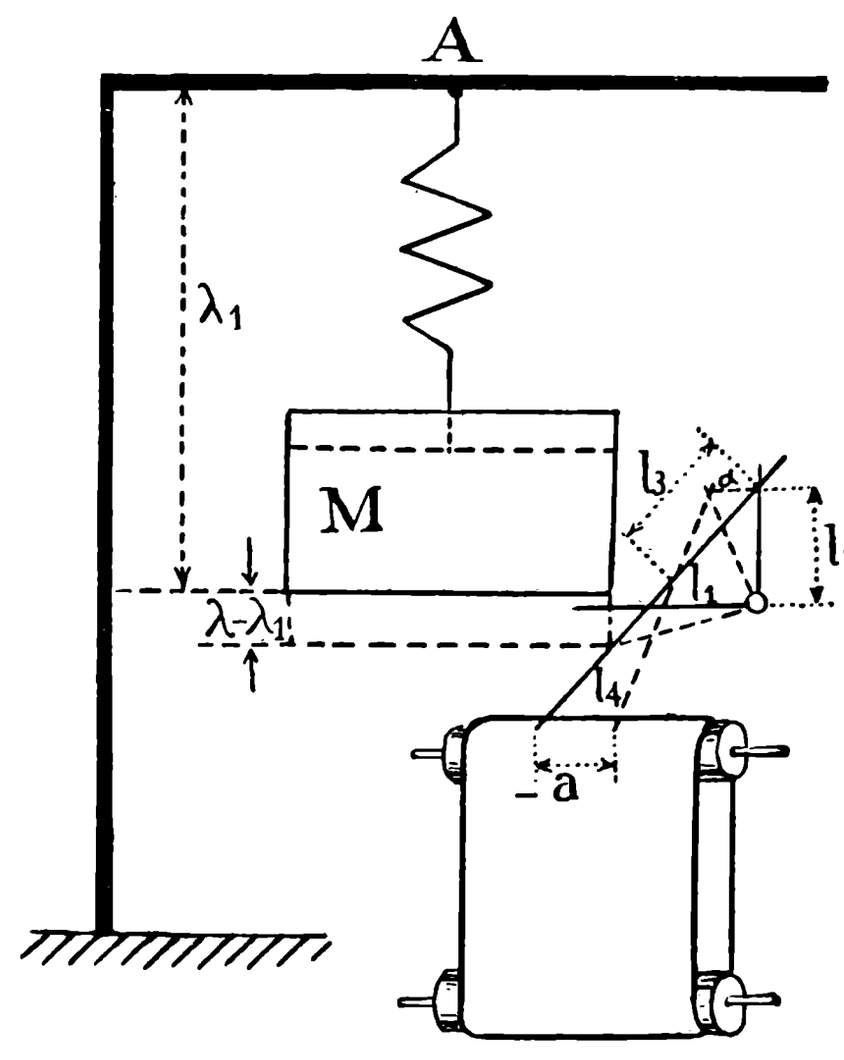


Fig. 9

Derivando ambos miembros de esta igualdad respecto del tiempo, se sacará debido a que V y $\lambda_1$ son constantes

$$-V\lambda' = a' \; ; \qquad -V\lambda'' = a''$$

Multiplicando la (39) por V, teniendo en cuenta las igualdades precedentes y poniendo:

$$\frac{C_a}{M} = 2\varepsilon ; \qquad \frac{C_e}{M} = n^2 ; \qquad \frac{C_r}{M} = K$$

se podrá escribir:

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a + K \frac{a'}{|a'|} = -V\zeta''$$

ecuación que como se ve es análoga a la (37).

§ 10. Hemos tratado hasta aquí el caso de un sismógrafo con tres grados de libertad. Análogo camino al seguido con este sismógrafo puede seguirse para obtener las fórmulas correspondientes a sismógrafos de dos y de un solo grado de libertad. En todos los casos habrá que referir los movimientos de la masa oscilante a un sistema de coordenadas x, y, z, algunos de cuyos ejes sean los ejes de rotación de la masa. Si los sismógrafos son de dos grados de libertad el punto A está determinado por el cruce de esos dos ejes. Tratándose del Wiechert ese punto es el de apoyo de la masa y está próximo al suelo; tratándose del Vicentini él viene a ser como en el de Quervain-Piccard el de suspensión de la masa, y está un tanto alejado del suelo. Y tratándose por último de los sismógrafos de un grado de libertad, el punto A debe ser uno cualquiera del eje.

Las fórmulas que se obtendrán, serán las mismas que se obtienen con el sismógrafo a tres grados, merced a sus coordenadas generalizadas $\varphi$ y $\psi$; pero serán más sencillas que en ese caso; y al simplificarse las ecuaciones del movimiento, despreciando términos pequeños, los errores que se cometerán serán menores. Tratándose de los sismógrafos de dos grados de libertad las ecuaciones se presentarán como si en el caso del sismógrafo de tres grados de libertad fueran nulos los términos en z y en las derivadas de z; y tratándose de los simógrafos de un grado, el $\varphi$ p. ej., se presentarán como si fueran nulos además, los términos en $\psi$, y en las derivadas de $\psi$, y la aceleración de Coriolis actuará solo con el efecto $2\ \Omega \times p'_a$.

En todos los casos la aceleración $p''_a$ aparecerá representada por términos del tipo $p''_a \times (\bar{i} \wedge r^*)$; vale decir, por términos en su componente según la normal al plano baricentral que contiene al eje o ejes alrededor de los cuales puede girar la masa. En el caso del Wiechert vertical, el plano baricentral es horizontal o poco distinto del horizontal, y en el caso del Wiechert de dos grados, del Vicentini y del Mainka, es vertical o casi vertical. En el primer caso el término $p''_a \times \bar{i} \wedge r^*$ representará por ello la componente vertical de la aceleración y en el 2º, los términos análogos, representarán las componentes horizontales.

En todos los casos, excepto en el Vicentini, se presentarán pequeñas variantes en lo relativo al término $MG \times \bar{i} \wedge r^*$. En el sismógrafo Wiechert vertical hay también una variante relativa al momento de las fuerzas elásticas.

En el Wiechert de dos grados, por estar el baricentro de la masa encima del plano (x, y) (fig. 10), el ángulo $(N_1G)$ resultará ser $270° + \varphi$ en vez de $90° + \varphi$.

Por ello será $MG \times (\bar{i} \wedge r^*) = Mdsen\,\varphi$, y en vez de la expresión de $n^2$ que figura en (34) se tendrá en este caso:

$$n^2 = \frac{C_e - Mdg}{J}$$

Para mostrar cómo se presentan los hechos en el caso del Mainka representamos en la figura 11 con II el plano baricentral que contiene al eje de las x en la posición de reposo de la masa, y con I en cualquier otra posición.

Podemos descomponer G en dos vectores $G_1$ y $G_2$, tales que el primero sea paralelo y el segundo perpendicular a x; por lo tanto se podrá poner, siendo $g_1$ el módulo de $G_1$:

$$G = -\,i\,g_1 + G_2$$

y por ello:

$$MG \times (\bar{i} \wedge r^*) = MG_2 \times (\bar{i} \wedge r^*) - g_1\,\bar{i} \times (\bar{i} \wedge r^*)$$

Pero el último término es nulo. Luego será:

$$MG \times (\bar{i} \wedge r^*) = MG_2 \times (\bar{i} \wedge r^*) \qquad (40)$$

Fijémosnos ahora en que el plano II contiene a x, y es paralelo a G; será paralelo por lo tanto al plano formado por G con una paralela al eje x, y cualquier recta de este último será paralela al plano II. Pero $G_2$ es una recta de este plano, luego será paralela al plano II. Debido

a esto, a que es perpendicular a x, y a la fórmula (40), la $G_2$ hace en este caso las veces de G en el caso del sismógrafo de tres grados.

Será por ello:

$$MG \times (\bar{i} \wedge r^*) = M\,|G_2|\,d\cos(N_1, G_2) = -\,M\,|G_2|\,d\,\text{sen}\,\varphi$$

y puesto que

$$|G_2| = |G|\,\text{sen}\,\beta \quad y \quad d_2 \approx d$$

se tendrá en el caso del Mainka:

$$MG \times (\bar{i} \wedge r^*) = -\,M\,d\,g\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\varphi \approx -\,M\,g\,d_1\,\beta\,\varphi$$

y por ello en tal caso

$$n^2 = \frac{M\,g\,d_1\,\beta + C_e}{J}$$

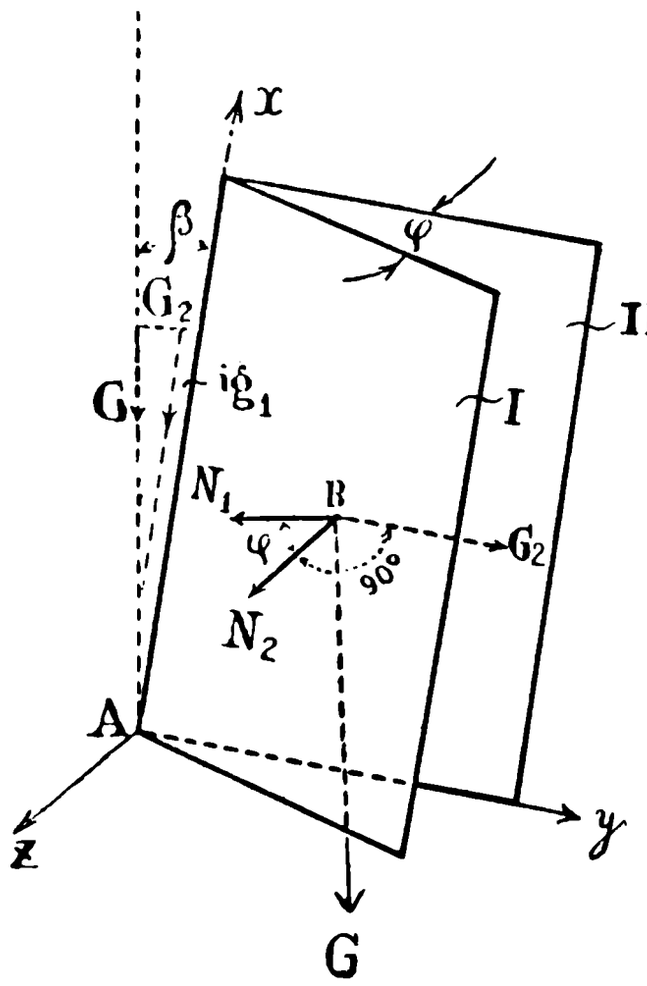


Fig. 11

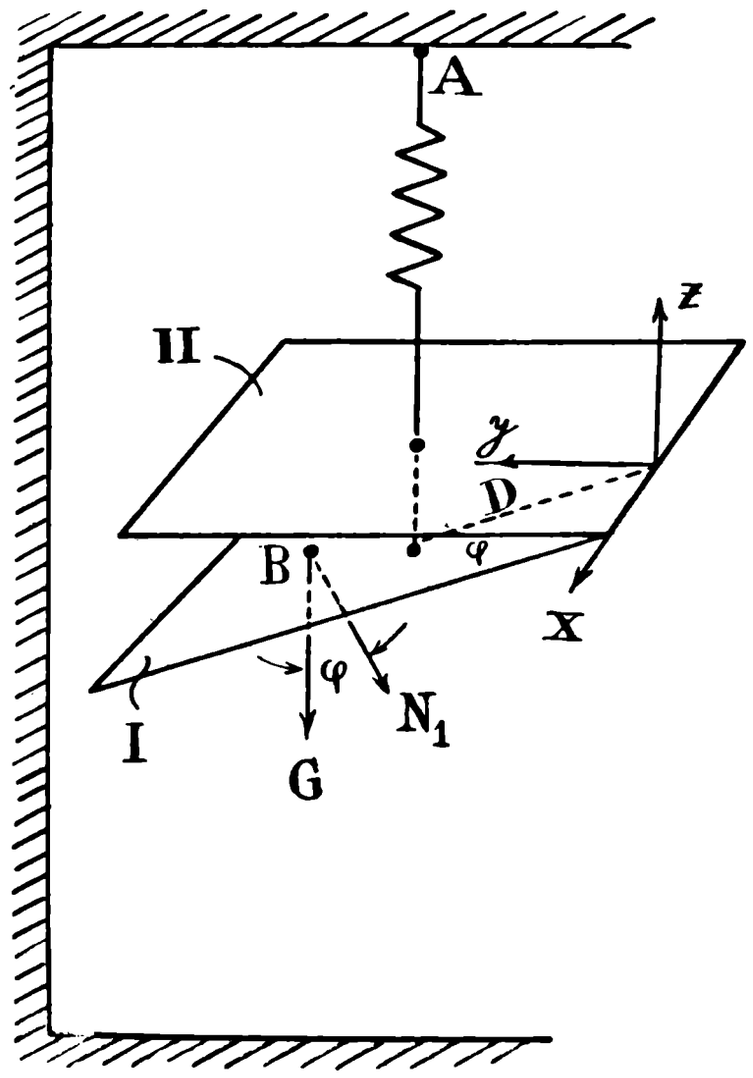


Fig. 12

En el caso del sismógrafo Wiechert vertical se disponen las cosas de modo que en el reposo el plano baricentral que pasa por x (fig. 12), sea horizontal. G es por lo tanto, perpendicular a dicho plano; de ahí que el ángulo $(G, N_1)$ resulta igual a $\varphi$. Por ello será

$MG \times (i \wedge r^*) = M\,g\,d_1 \cos\varphi$ ; y siendo pequeño $\varphi$ y admitiendo que $d_1 \approx d$:

$$MG \times (\bar{i} \wedge r^*) \approx M\,g\,d \qquad (41)$$

En cuanto al momento de las fuerzas elásticas se tiene en este caso:

$$M_e = -\,C_e\,(\lambda - \lambda_o)\,D \qquad (42)$$

teniendo $\lambda$ y $\lambda_o$ el significado que les dimos anteriormente, y siendo D la distancia del resorte al eje.

En base de (41) y (42) resulta

$$M\,G \times (\bar{i} \wedge r^*) + M_e = M\,g\,d - C_e\,(\lambda - \lambda_o)\,D$$

Si $\lambda = \lambda_1$ y $D = D_1$ para cuando el plano baricentral está en la posición de reposo se tendrá:

$$M\,g\,d - C_e\,(\lambda_1 - \lambda_o)\,D_1 = O$$

Por lo tanto se podrá poner:

$$M\,G \times (\bar{i} \wedge r^*) + M_e = -\,C_e\,[(\lambda - \lambda_o)\,D - (\lambda_1 - \lambda_o)\,D_1] \qquad (43)$$

$(\lambda - \lambda_o)\,D$ es una función del ángulo $\varphi$. Si la desarrollamos en serie de Taylor y limitamos el desarrollo a los términos lineales se podrá poner, entendiendo por A una constante:

$$(\lambda - \lambda_o)\,D = (\lambda_1 - \lambda_o)\,D_1 + A\,\varphi$$

Y sustituyendo esto en (43)

$$M\,G \times (\bar{i} \wedge r^*) + M_e = -\,C_e\,A\,\varphi$$

Para $n^2$ en el caso de Wiechert vertical resulta por ello:

$$n^2 = \frac{C_e\,A}{J}$$

§ 11. Podemos notar que en todos los sismógrafos, unas veces con más, otras veces con menos sacrificio del rigor, las ecuaciones que se obtienen para el respectivo grado de libertad, resultan ser de la forma dada por (37).

Supongamos para simplificar nuestras consideraciones que sea K=o. Con esa hipótesis tenemos como ecuación del movimiento del sismógrafo, la siguiente:

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a = -\,V\eta'' \qquad (44)$$

Para interpretar lo que expresa un sismograma se siguen habitualmente dos caminos. Uno de ellos, el más común, consiste en suponer que la componente $\eta$ del desplazamiento del punto A sigue una ley sinusoidal, y en buscar en base del sismograma la amplitud y el período de la sinusoide respectiva. Generalizando, podemos decir que ese camino entraña atribuir a $\eta$ cierta ley, y en buscar en base de a, los parámetros que la determinan cuantitativamente. La aplicación de ese método se lleva a cabo como sigue:

Suponiendo que sea

$$\eta = P\,\mathrm{sen}\omega t$$

será

$$\eta'' = -\,\omega^2\,P\,\mathrm{sen}\omega t$$

y en vez de (44), por ello:

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a = P\,V\omega_2\,\mathrm{sen}\omega t$$

ecuación diferencial de segundo orden con función perturbadora cuya solución es muy conocida y puede ser escrita así:

$$a = e^{-\varepsilon t}\,[A\,\mathrm{sen}\,mt + B\,\cos mt] + V\,H\,P\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \delta) \qquad (45)$$

con

$$H = \frac{\omega^2}{\sqrt{(n^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}} \; ; \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\,\varepsilon\,\omega}{n^2 - \omega^2}; \quad m = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \qquad (46)$$

siendo A y B constantes a determinar.

Como $\varepsilon$ es positivo, el coeficiente $e^{-\varepsilon t}$ decrecerá con el tiempo y llegará a hacer despreciable al primer término de (45). En base de esta consideración se ha generalizado la costumbre de admitir que se puede poner simplemente

$$a = V\,H\,P \operatorname{sen}(\omega t - \delta) \qquad (47)$$

Como de acuerdo con esto, a tiene una amplitud V H veces más grande que $\eta$, este factor viene a representar la amplificación con la cual se produce la inscripción. V es constante cualquiera sea $\eta$, y depende como vimos, de las palancas del mecanismo inscriptor así como de la manera cómo está construído el sismógrafo. Por eso se le conoce con el nombre de *amplificación geométrica;* en cambio H, como se reconoce en (46), para un sismógrafo ajustado con un determinado amortiguamiento, es decir con un determinado $\varepsilon$, depende de la relación $\frac{\omega}{n}$. Se le denomina por ello con el nombre de *amplificación dinámica.*

Aceptando como válida la (47), sin tener en cuenta que en ella se ha omitido un término, se suele admitir, siendo $\varepsilon = O$ que en el caso de $\omega = n$, a se hace infinito. En ese caso el período de $\eta$ será igual al del sismógrafo. Cuando eso sucede se dice que el sismógrafo está en "resonancia" con el suelo.

En primer término es de señalar que el camino de presuponer la ley de $\eta$, no parece plausible, ya que implica renunciar a la búsqueda de tal ley, cosa que justamente debe intentarse en base del sismograma. Y en segundo lugar, que aún aceptándola por comodidad, no es correcta del todo la conclusión a que nos referimos recién.

Para ver cómo se presentarán los hechos en la realidad, conviene detenerse un poco en los pasos que deben seguirse para resolver la (44).

Lo primero que cabe destacar es que la acción del suelo sobre el sismógrafo no es de duración infinita, sino al contrario transitoria, de ahí que un estudio general de la (44) debe hacerse suponiendo que $-V\eta''$ es una función nula hasta un instante que se puede considerar inicial, distinta de cero durante cierto tiempo, y luego nuevamente nula. Vale decir que habría que poner:

$$-V\eta'' \begin{cases} = o \text{ para } -\infty < t < o \\ \neq o \quad \text{„} \quad o \leq t \leq \Theta_1 \\ = o \quad \text{„} \quad \Theta_1 < t < \infty \end{cases}$$

En base de ello la (44) tendrá que resolverse para tres distintos intervalos: a) para $-\infty < t < o$; b) para $o \leq t \leq \Theta_1$; c) para $\Theta_1 < t < \infty$. Como en los intervalos a) y c) es $-V\eta'' = O$, ella se convierte en la ecuación diferencial homogénea

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a = O \qquad (48)$$

En el intervalo b) en cambio, poniendo $-V\eta'' = F(t)$ ella será:

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a = F(t)$$

En segundo lugar es preciso notar en qué estado de movimiento se encuentra el sismógrafo en un determinado instante de cada intervalo, y asignar al mismo una solución que no sólo responda a la ecuación diferencial respectiva, sino también a ese estado. Responder a ese estado equivale a exigir a la solución que satisfaga a las condiciones de que sea para él:

$$a = a_1 \text{ y } a' = a'_1$$

siendo $a_1$ y $a'_1$ ,respectivamente, los valores de a y de su derivada en el respectivo instante.

Como el instante que se elige para dar a y a′ suele ser aquél en que se comienza a contar el tiempo, se suele llamar a esas condiciones, *condiciones iniciales.*

Para ver cómo debe ser la solución de (44) que nos interesa, supongamos que el sismógrafo está en reposo en el instante $t = O$, es decir que en él es $a = a' = O$.

Puesto que en el intervalo a) vale la (48) su a, estará dada por:

$$a = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} \qquad (49)$$

y $C_1$ y $C_2$ de acuerdo a las condiciones para $t = O$, deberán ser tales que:

$$C_1 + C_2 = O \qquad m_1 C_1 + m_2 C_2 = O$$

por lo tanto será:

$$C_1 = C_2 = O$$

y por ende en el intervalo a) será $a = O$, lo que está de acuerdo con la hipótesis.

Para hallar la solución en el intervalo b) siendo $F(t)$ cualquiera se puede usar el método de variación de las constantes. De acuerdo al mismo si $y_1$ e $y_2$ son soluciones de la ecuación diferencial siendo $F(t) = O$ la solución será:

$$a = D_1 y_1 + D_2 y_2 \qquad (50)$$

$$\text{Siendo } D_1 = -\int \frac{y_2 F(t)\, dt}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} + E_1 \qquad D_2 = -\int \frac{y_1 F(t)\, dt}{y_2 y'_1 - y_1 y'_2} + E_2$$

y $E_1$ y $E_2$, constantes arbitrarias a determinar de acuerdo a las condiciones del problema.

Suponiendo resueltas las integrales y sustituídas en (50), tendríamos

$$a = E_1 y_1 + E_2 y_2 + \Phi_1 (t) + \Phi_2 (t) \qquad (51)$$

y para determinar $E_1$ y $E_2$ otra vez las condiciones de que para $t = O$ debe ser $a = a' = O$, es decir las siguientes dos ecuaciones:

$$E_1 y_1 (O) + E_2 y_2 (O) + \Phi_1 (O) + \Phi_2 (O) = O \equiv a_1$$
$$E_1 y'_1 (O) + E_2 y'_2 (O) + \Phi'_1 (O) + \Phi'_2 (O) = O \equiv a'_1$$

En el intervalo c) la solución será análoga a la de (49), ya que debe responder a la misma ecuación diferencial que ésta. Será por lo tanto

$$a = Q_1 e^{m_1 t} + Q_2 e^{m_2 t}$$

y $Q_1$ y $Q_2$ se determinarán de modo que para $t = \Theta_1$, sean a y a′ iguales a los valores que resultan para esos grandores calculándolos con la fórmula (51).

§ 12. Supongamos ahora que $\eta'' = -\omega^2 P \operatorname{sen}\omega t$ en el intervalo b) del § anterior. En este caso particular no es preciso seguir todo el procedimiento que acabamos de indicar, porque ya sabemos que la solución de (44) está dada por (45); pero desde luego, se podría usarlo si no se la conociera.

Para representar cabalmente los hechos, lo primero que debe hacerse es determinar A y B, de modo que correspondan a las condiciones iniciales. Haciéndolo se obtendrá:

$$B = V H P \operatorname{sen}\delta; \qquad A = \frac{V H P}{m} (\varepsilon \operatorname{sen}\delta - \omega \cos\delta)$$

en el caso particular de $\varepsilon = O$ será $\delta = O$, y por ello

$$B = O \text{ y } A = -\frac{V H P}{m}$$

Además será

$$m = n \qquad H = \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2}$$

Con estos grandores la solución será:

$$a = V\,P\,\frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2}\left[\operatorname{sen}\omega t - \frac{\omega}{n}\operatorname{sen} nt\right]$$

expresión en la que se ve que si bien para la resonancia, es decir para $\omega = n$ es $\infty$ el factor $\frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2}$, es en cambio nulo el corchete $[\operatorname{sen}\omega t - \frac{\omega}{n}\operatorname{sen} nt]$. La expresión de a se hace por lo tanto indeterminada.

Para evitar la indeterminación podemos estudiar la expresión de a para $\omega$ distinto de n, pero próximo a este valor y buscar el límite de tal expresión para $\omega = n$.

Para conseguir ese límite, basta aplicar la regla de L'Hôpital a la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}\omega t - \frac{\omega}{n}\operatorname{sen} nt}{n^2 - \omega^2}$$

que, para $\omega = n$, tomaría aparentemente la forma $\frac{0}{0}$.

Mediante la regla mencionada es fácil sacar que

$$\lim_{\omega = n} \frac{\operatorname{sen}\omega t - \frac{\omega}{n}\operatorname{sen} nt}{n^2 - \omega^2} = -\frac{nt\cos nt - \operatorname{sen} nt}{2n^2}$$

Para a resultará por lo tanto:

$$a = \frac{V\,P}{2}(\operatorname{sen} nt - nt\cos nt) \equiv \frac{V\,P}{2}(\operatorname{sen}\omega t - \omega t\cos\omega t) \qquad (52)$$

Y esta expresión pone en evidencia que siendo finito P, a sólo se haría infinito si $t = \infty$ vale decir, si durara indefinidamente la acción del suelo sobre el sismógrafo.

Con fines ilustrativos representamos en la figura 13 la curva $\operatorname{sen}\omega t - \omega t\cos\omega t$, y junto a ella la curva $-\operatorname{sen}\omega t$.

Es interesante destacar que a se anulará toda vez que sea

$$\cos\omega t = \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t}$$

En base de esta fórmula se saca que las raíces segunda y tercera de (52) son respectivamente: 4.493... y 7.725... Para tener una idea de las subsiguientes empecemos por notar que el mayor valor esperable de $|\operatorname{sen}\omega t|$ es 1. El mayor valor esperable de $\cos\omega t$ será por ello $\frac{1}{\omega t}$. Pero siendo grande $\omega t$, será $|\cos\omega t| \approx 0$ y por ende $\operatorname{sen}\omega t \approx 1$. Luego con mucha aproximación las raíces superiores $\omega t$ estarán dadas por

$$|\cos\omega t| = \frac{1}{\omega t}$$

Derivando $\text{sen}\omega t - \omega t \cos\omega t$ respecto de $\omega t$ se encuentra qne los valores extremos se tendrán para $\omega t = n\pi$, con $n = 1, 2, 3$, y su valor absoluto estará dado por $\omega t$.

§ 13. Suponer que $\eta'' = -P\omega^2 \text{sen}\omega t$ equivale a admitir que

$$\eta' = \omega P \cos\omega t + S_1 \text{ y } \eta = P \text{sen}\omega t + S_1 t + S_2$$

entendiendo por $S_1$ y $S_2$ valores constantes.

Como el movimiento del suelo es nulo en el instante $t = O$ y es difícil imaginar que comience con una velocidad distinta de cero, $S_1$ y $S_2$ tendrán que ser tales que para $t = O$ sea $\eta' = \eta = o$. Será por lo tanto:

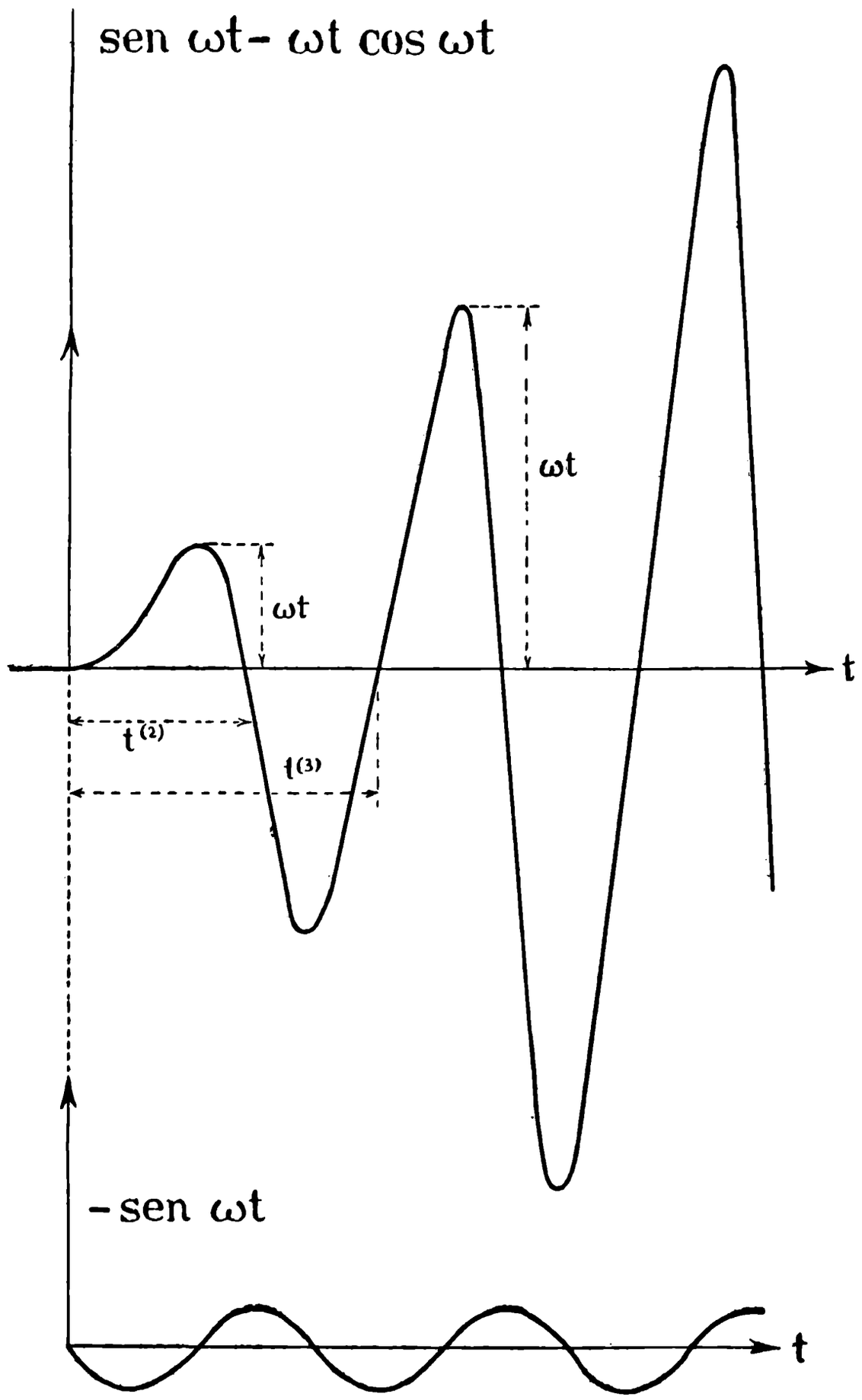


Fig. 13

$$S_1 = -\omega P \qquad S_2 = O$$

El término $S_1 t$ al comenzar el movimiento del suelo es pequeño, pero al crecer t puede adquirir tanta preponderancia que $\eta$ resulte tener sólo un signo, lo que parece poco aceptable.

Este hecho sugiere la conveniencia de considerar la expresión $P \operatorname{sen} \omega t - \omega P t$ como representativa de $\eta$ sólo durante corto tiempo, hasta un instante $t_1$, tras del cual podrá darse ese grandor por:

$$\eta = P_1 \operatorname{sen} (\omega_1 t + \varrho)$$

debiendo ser $P_1$ y $\varrho$ tales que para $\eta$ y $\eta'$ resulten los valores que alcanzaran a tener en el instante $t_1$ con la expresión precedente.

Procediendo de ese modo, la expresión de a desde $t_1$ en adelante podrá representarse por una solución análoga a la (45), sólo que en vez de sen $(\omega t - \delta)$ habrá que poner sen $(\omega t - \delta + \varrho)$ y las constantes A y B deberán determinarse de modo que para $t = t_1$ tengan los valores que llegaron a adquirir en ese instante bajo la influencia del movimiento del suelo.

Resulta útil notar que si y es la solución de (44) ajustada a ciertas condiciones, la solución que satisfaga a las condiciones de que para $t = t_1$ sea

$$a = a_1 \qquad a' = a'_1 \tag{53}$$

se puede obtener también poniendo

$$a = y + z$$

siendo z una solución de (48) con dos constantes arbitrarias a determinarse de modo que a satisfaga las condiciones (53).

Las operaciones se facilitan si para hallar la solución después de $t = t_1$ se considera como origen del tiempo justamente el instante $t_1$. En ese caso desde luego en donde figura $\varrho$ habrá que poner $\varrho_1 + \varrho$.

De acuerdo con lo que precede, veamos qué expresión resulta para a siendo $\varepsilon = 0$. Para ello pongamos:

$$a = A \operatorname{sen} nt + B \cos nt + VP \frac{\omega^2_1}{n^2 - \omega^2_1} \left[\operatorname{sen} (\omega_1 t + \varrho_1) - \frac{\omega_1}{n} \operatorname{sen} (nt + \varrho_1)\right]$$

Para $t = 0$ tendremos

$$a_1 = B + \frac{VP}{(n + \omega_1)} \frac{\omega^2_1}{n} \operatorname{sen} \varrho_1 \; ; a' = nA$$

Por lo tanto será:

$$a = \frac{a'_1}{n} \operatorname{sen} nt + \left[a_1 - \frac{VP}{n + \omega_1} \frac{\omega_1{}^2}{n} \operatorname{sen} \varrho_1\right] \cos nt + VP \frac{\omega_1{}^2}{n^2 - \omega_1{}^2} \left[\operatorname{sen} (\omega_1 t + \varrho_1) - \frac{\omega}{n} \operatorname{sen} (nt + \varrho_1)\right]$$

Esta expresión permite a su vez obtener para el caso de la resonancia:

$$a = \frac{a'_1}{n} \operatorname{sen} nt + \left[a_1 - \frac{V\,P}{2} \operatorname{sen} \varrho_1\right] \cos nt - \frac{V\,P}{2} \left[nt \cos (nt + \varrho_1) - \operatorname{sent} (nt + \varrho_1)\right]$$

resultado en el que se ve que tampoco en este caso se tienen elongaciones infinitas en el sismógrafo al producirse la resonancia a menos que sea infinito P.

§ 14. El otro camino a que aludimos en el § 11 para interpretar lo que expresa un sismograma se basa en que integrando dos veces la (44) se saca:

$$a + 2\varepsilon \int a\,dt + \int dt \left(\int a dt\right) = -V\eta + U_1 t + U_2$$

Las dos integrales se pueden hacer por medio de cuadraturas gráficas o numéricas; de modo que $\eta$ se podrían conocer, toda vez que se conozca $U_1$ y $U_2$, que no son sino constantes de integración.

El método es seguramente plausible, pero presenta el inconveniente de que pequeños errores en U, pueden falsear enormemente los valores.

Frente a este hecho queremos hacer notar que generalmente se procura conocer $\eta$ como función del tiempo, o bien para establecer qué aceleraciones $\eta''$ experimenta el suelo, o bien para saber en qué momento llega una determinada fase a fin de construir curvas de tiempo recorrido. Ahora bien; mientras el suelo está en reposo, son nulos $\eta$, $\eta'$ y $\eta''$; y los dos primeros podrán dejar de serlo sólo desde el momento en que ocurra lo mismo con $\eta''$. En vez de buscar el comienzo de $\eta$ o de $\eta'$ bastará por lo tanto buscar el de $\eta''$.

Teniendo en cuenta esos hechos resulta evidente que mucho se tendrá ganado si se llega a establecer cómo es $\eta''$ directamente.

Como destacamos al final del § 6, esa función es justamente una de las que los sismógrafos pueden proporcionar de inmediato mediante las ecuaciones (22) de su funcionamiento. La (44) que no es sino una simplificación de esas ecuaciones permite obtenerla en efecto con facilidad. Para ello no hay más que tomar en cada instante a y sus derivadas a' y a''. Multiplicando a por $n^2$, a' por $2\varepsilon$ y sumando estos dos productos con a'' se tendrá $-V\eta''$. Como el resultado que se obtendría sería V veces mayor que $\eta''$, eso permite justificar con más generalidad que la habitual del § 11, porqué ese grandor lleva el nombre de *Amplificación*.

Para hacer las derivaciones se pueden aplicar desde luego las conocidas fórmulas de Newton, Bessel, Stirling, etc.; pero como las curvas del sismograma presentan formas onduladas, resultan en ocasiones más ventajosas que estas fórmulas, las cuales se apoyan en la hipótesis de que las curvas a derivar representan funciones asimilables a polinomios de potencias de t, otras que salen de asimilar la función sismográfica a las funciones sinusoidales.

Si suponemos que sea $a = R\,\mathrm{sen}\omega t$, será

$$a' = R\omega\cos\omega t \qquad\qquad a'' = -\omega^2 R\,\mathrm{sen}\omega t$$

y por ende

$$a'' + 2\varepsilon a' + n^2 a = R\sqrt{(n^2-\omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}\ \ \mathrm{sen}\,(\omega t+\gamma) = -V\eta'' \qquad (54)$$

con

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{2\varepsilon\omega}{n^2-\omega^2} \qquad (55)$$

Comparando el factor de R con el factor H de amplificación dinámica dado por (46), se puede ver que

$$\sqrt{(n^2-\omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} = -\frac{\omega^2}{H}-$$

Como 1/H está tabulado o dado en gráficos ([8]), ([9]), no ofrecerá dificultad calcular el factor que figura en el primer miembro de esta igualdad.

La (54) muestra que $\eta''$ tiene el adelanto de fase $\gamma$ sobre a. Esto podría hacer creer que el sismógrafo *empieza* la inscripción con retardo. Para ver cómo son los hechos en la realidad, es de hacer notar que hasta el instante $t = O$ en que el sismógrafo se empieza a mover, es $a = \text{constante} = O$ y por ello también $a' = a'' = O$. Por ende será hasta ese instante también $\eta'' = O$.

Luego en el instante $t = O$, a no presenta retardo respecto de $\eta$. Sin embargo el retardo existe, pero para $t \neq O$.

El comienzo de la curva a en el sismograma a menudo se presenta semejante a la curva $\mathrm{sen}\omega t - \omega t\cos\omega t$ representada en la figura 13. Asimilando el sismograma a esta curva multiplicada por P, resultaría para $\eta''$ procediendo como lo hicimos recién al suponer $a = R\,\mathrm{sen}\omega t$:

$$-V\eta'' = \frac{P\omega^3 t}{H}\cos(\omega t+\gamma) + P\,(n^2+\omega^2)\,\mathrm{sen}\omega t \qquad (56)$$

teniendo $\gamma$ el valor que le dimos en (55).

Interesante es notar que si

$$a = P\,(\text{sen}\omega t - \omega t \cos\omega t) \qquad (57)$$

es

$$a = 0 \text{ y } a' = 0 \text{ para } t = 0$$

y que de acuerdo con (56) también sería para $t = 0$, $\eta'' = 0$.

Como el comienzo de a no se reconocería bien si su curva se presenta semejante a la que corresponde a (57), se lo puede determinar en base de la segunda raíz de esa expresión. Como dijimos en el § 12 se tiene para ella, designando con $t^{(2)}$ al valor de t que le corresponde:

$$\omega\, t^{(2)} \approx 4.493$$
$$t^{(2)} \approx \frac{4.493}{\omega}$$

Por su parte para $\omega$ se tiene llamando $t^{(3)}$ al instante de la tercera raíz:

$$\omega\, t^{(3)} - \omega\, t^{(2)} = \omega\,(t^{(3)} - t^{(2)}) \approx 7.725 - 4.493 \approx \pi + 0{,}09$$

La diferencia $t^{(3)} - t^{(2)}$ no es sino lo que podríamos llamar el *"semiperíodo"* de la curva después del primer máximo y se la puede medir directamente en el sismograma.

## BIBLIOGRAFIA


1. H. Berlage, Handbuch der Geophysik, tomo IV, 1.
2. Sohon, Introduction to Theoretical Seismology, II.
3. Galitzin, Vorlesungen über Seismometrie.
4. H. Bouasse, Seismes et Seismographes.
5. P. Byerly, Seismology.
8. K. Zöppritz, Kgl. Gessellschaft der Wissenschaften, Göttingen, año 1908; pág. 138 y sig.
9. L. Geiger, idem. año 1909, pág. 154.

*Terminóse de imprimir el día 31 de Diciembre de 1952 en los Talleres Gráficos* OLIVIERI Y DOMÍNGUEZ *Calle 4 Número 525 de la ciudad Eva Perón.*