

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

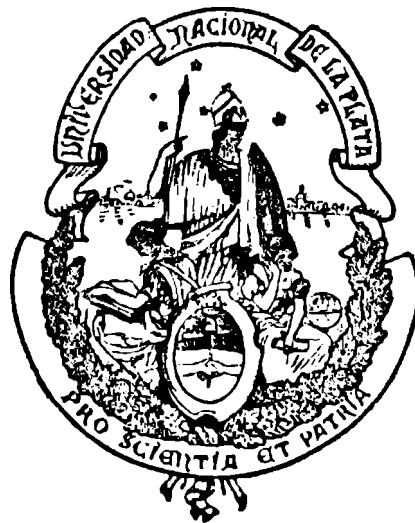
DELEGADO INTERVENTOR DR. REYNALDO P. CESCO

SERIE GEOFÍSICA – Tomo VIII, Nº 3

MEJORAS EN LA APRECIACIÓN
DE
CARGAS SÍSMICAS

POR

SIMON GERSHANIK



LA PLATA
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

—
1957

MEJORAS EN LA APRECIACION DE CARGAS SISMICAS

POR

SIMON GERSHANIK (*)

ABSTRACT

Deformations u of buildings due to the acceleration of earthquakes are investigated. Two suppositions are made: a) the deformations are principally due to shear; and b) they are principally due to bending.

In both cases it is found that u may be expressed by an uniformly convergent series of eigenfunctions.

Except for a variable factor, the Fourier coefficients of these series are the same as the values X obtained recently by Alford, Housner and Martel, by means of the electrical analog computer of the California Institute of Technology.

Using mean values of what they call the spectrum of earthquakes, it is found that the seismic charge is constant on buildings less than about 30 m height. On buildings heigher than 30 m and lower than about 85 m it becomes decreasing with height if they are not far from 30 m. When height is far from 30 m q is first decreasing till zero and is afterwards increasing.

Numerical investigations on the greatest period T_1 , on the elasticity modulus E , and on the rigidity modulus μ of buildings, lead up to the conclusion that E is a growing function of the ratio Γ of hight to width; μ changes with Γ but little; and T_1 changes lineary with height. This allows to think that assumption a) fits up better to the facts than assumption b).

§ 1. — *Introducción y resultados principales.* El examen de las consecuencias de los terremotos en las construcciones condujo a recomendar que se las provea en regiones sísmicas de elementos estructurales capaces de resistir cargas horizontales uniformemente distribuídas, del orden de 1/10 a 1/6 del peso de toda la construcción, y los reglamentos de construcción de muchos países ya tienen hoy en día incorporada esa medida con carácter de exigencia.

Aunque la experiencia revela que se trata de una medida muy eficaz, se han hecho algunos esfuerzos tendientes a perfeccionar el conocimiento del carácter de las cargas con que actúan en realidad los terremotos sobre edificios. En un estudio efectuado en 1932 con ese propósito, Joseph, Younger y Le Conte ⁽¹⁾, asimilaron los edificios a barras verticales deformables por el momento flector, y la aceleración del suelo a una senoide, llegando a la conclusión de que habiendo resonancia entre uno de los infinitos períodos de la barra y la senoide, las tensiones en ella serían infinitas. A igual conclusión llegó Hoskins ⁽²⁾ en 1938 y basándose en que los períodos de los edificios están incluídos en la gama de los que se presentan en un terremoto, expresó incluso que parece imposible suministrar una norma para disminuir el peligro de las tensiones de resonancia. En un trabajo anterior ⁽³⁾, que para las citas, designaremos Memoria I, pusimos en evidencia que esa afirmación era exagerada, porque correspondía implícitamente a una acción ininterrumpida sobre el edificio; y estudiamos para ello el efecto sobre los edificios, de una aceleración sinusoidal transitoria de traslación. Un terremoto, empero, tiene aceleraciones mucho más complicadas. Las fórmulas que obtuvimos entonces representan, por lo tanto, sólo una primera aproximación a la realidad.

Hacia el año 1933 se organizó en Norteamérica un gran Comité auspiciado por el U. S. Coast and Geodetic Survey con dos objetivos principales, a saber: a) determinar los períodos propios de edificios de zonas sísmicas; y b) determinar la aceleración del suelo en el epicentro durante un terremoto. Para lograr el objetivo a) se instalaron vibrómetros apropiados en unos doscientos edificios, que permitieron conocer de los mismos el período máximo y en casi todos los casos un período secundario por lo menos. Para lograr el objetivo b) se instalaron en muchos lugares sísmicos, acelerógrafos, capaces de acusar aceleraciones traslatorias horizontales, obteniéndose un buen número de registros muy valiosos.

Los datos sobre edificios ⁽⁴⁾ fueron publicados en 1936 sin una valorización sistemática. Para valorar los

(*) Jefe de Departamento de Geofísica en el Observatorio Astronómico y profesor de Sismología en la Escuela de Ciencias Astronómicas y Geofísicas.

relativos a la aceleración del suelo, emprendieron recientemente Alford, Housner y Martel (6) con ayuda de un computador de analogías eléctricas del "California Institute of Technology" un estudio tendiente a determinar la respuesta de monosciladores de períodos variables excitados por causas proporcionales a las ordenadas de los registros proporcionados por los acelerógrafos. Los resultados de estos investigadores —que ellos designan "los espectros de los acelerogramas"—, y sobre todo el recurso que utilizaron para obtenerlos, nos han inducido a realizar una nueva investigación en el problema de las cargas sísmicas, procurando conseguir una aproximación más en su apreciación, basándola —para aprovechar ese recurso—, ya no en aceleraciones simplificadas, como son las sinusoidales, supuestas hasta ahora, sino en las acusadas por los acelerógrafos. En la presente Memoria, nos proponemos mostrar el camino que hemos seguido en tal sentido y los resultados que obtuvimos.

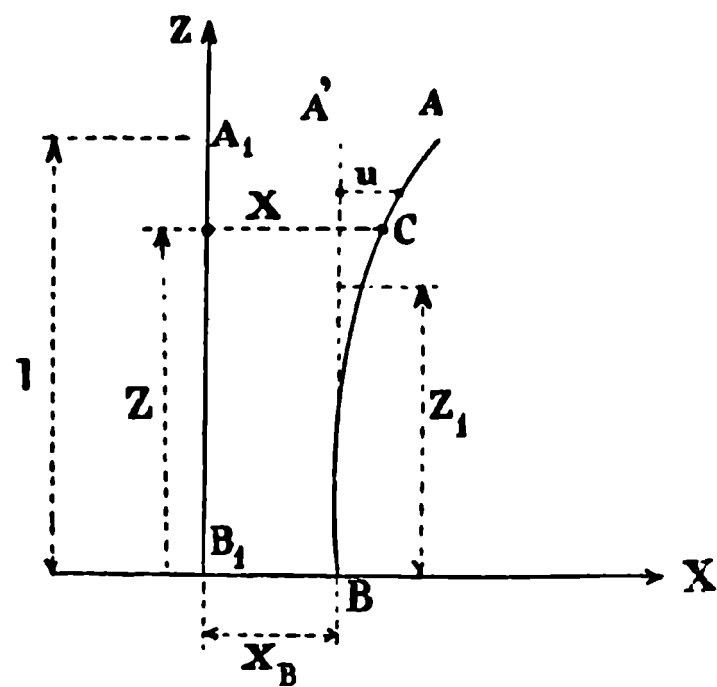


Fig. 1

Para nuestro estudio consideramos dos clases de edificios: a) edificios deformables principalmente por el momento flector; y b) edificios deformables principalmente por el esfuerzo de corte. A lo largo del trabajo llegamos a diversas conclusiones entre las que cabe destacar:

- 1º) En las dos clases de edificios considerados, la deformación u de ellos puede desarrollarse en una serie uniformemente convergente de funciones propias, cuyos coeficientes de Fourier, a menos de un factor variable, son idénticos a los grandores X de Alford, Housner y Martel.
- 2º) Si por vía de aproximación se forma esos coeficientes mediante las ordenadas X_m de los espectros de los acelerogramas en vez de hacerlo mediante los grandores X , la carga q tendría por expresión la dada por la fórmula (67).
- 3º) En media puede aceptarse que las ordenadas X_m varían en función de los períodos T de los monosciladores de acuerdo al gráfico 2. En edificios de período máximo $T_1 < T^*$ la carga sísmica q resulta ser constante cualquiera sea su altura, en coincidencia con lo que se presupone actualmente en forma empírica, para calcular estructuras sismo-resistentes. Este resultado vale tanto para los edificios a) como para los edificios b).
- 4º) Como la ley de variación de q depende de T^* resulta importante conocer su valor en cada zona sísmica. Dicho período puede considerarse como característico de ella. La idea de un período característico de los terremotos para el cálculo de estructuras antisísmicas continúa por lo tanto teniendo cierto sentido.
- 5º) Los valores de T_1 publicados por el comité norteamericano se acomodan mejor a la ley lineal de dependencia con la altura de los edificios que les correspondería siendo éstos deformables por el esfuerzo de corte que la que les correspondería si fueran deformables por el momento flector. Ello reforzaría la plausibilidad de la impresión que expresara años atrás Jacobsen (6) de que los edificios investigados por la mencionada comisión se comportan como si fueran más bien de la clase a).
- 6º) El módulo de elasticidad E de los edificios crece con la esbeltez Γ de ellos. Cuando el esqueleto que poseen es de hormigón armado varía desde más o menos $1/1000$ hasta más o menos $1/15$ del valor que corresponde a la mampostería, y cuando es de acero desde más o menos $1/500$ hasta más o menos $1/3$ de ese valor.

El módulo de corte μ también varía con la esbeltez pero mucho menos, resultando ser del orden de $1/30$ del que corresponde a la mampostería.

La variabilidad pronunciada de E y la escasa de μ apoyaría la conclusión precedente. También lo harían para edificios de esbeltez menor que 7 los valores que se encontró para E . Para $\Gamma > 7$ los valores de E sugieren la posibilidad de que los edificios se comportan más bien como siendo de la clase b); pero ello no queda confirmado por la forma en que varía T_1 con la altura de los edificios.

- 7º) Si se acepta la ley lineal de variación de T_1 con la altura, ese grandor estaría dado por la fórmula (77). Asignando a T^* el valor razonable de 0,6 segundos, resultaría de acuerdo a esa fórmula que la carga q puede considerarse constante en edificios de hasta unos 30 m. En edificios entre unos 30 y 85 m de al-

tura ella sería decreciente con la altura cuando ésta no difiere mucho de 30 m. En los más altos sería decreciente hasta anularse en una determinada altura para empezar a crecer a partir de ella.

§ 2. — *Ecuaciones diferenciales de la deformación de los edificios.* Para mayor claridad de la exposición, repetiremos algunos planteos ya efectuados en la Memoria I, necesarios para las consideraciones que nos proponemos hacer.

Sea a dicho objeto:

AB la barra equivalente al edificio que suponemos empotrada en B y vertical en el reposo (Fig. 1).

A_1B_1 su posición inicial.

z, x respectivamente la ordenada y la abscisa de un punto genérico C de AB en un instante cualquiera, referidas a un sistema con origen en B_1 y eje z coincidente con A_1B_1 .

u la flecha de C respecto de la recta $A'B$, paralela en B a la recta A_1B_1 .

ρ la densidad de la barra.

E su módulo de elasticidad.

μ su módulo de elasticidad transversal.

S su sección transversal.

J el momento de inercia de S respecto del eje neutro.

q la carga sísmica por unidad de longitud.

Q el esfuerzo de corte que se suscita en una sección de ordenada z_1 .

M el momento flector de la barra en la misma sección.

l el largo de la barra.

t el tiempo.

La carga sísmica, como es sabido, está constituida por dos clases de fuerzas que se suscitan en las estructuras cuando sus partes se ponen en movimiento, a saber: a) las fuerzas de inercia; y b) las fuerzas que tienden a amortiguar el movimiento. Para una masa elemental $\rho S dz$ las primeras están dadas evidentemente por $\rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$. En cuanto a las segundas, se las puede representar por $2\epsilon' \frac{\partial u}{\partial t} dz$ siendo ϵ' una constante.

Como de acuerdo a la figura 1 es:

$$x = u + x_B \quad (1)$$

se podrá poner, para la carga sísmica por unidad de longitud:

$$q = \rho S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \right) + 2\epsilon' \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

Por ser B un punto del suelo, $\frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2}$ no es sino la aceleración del suelo. Su valor en función del tiempo es un dato que suministran los acelerogramas. Contando con él se conocerá por lo tanto q en función de z y t si se conoce u en función de las mismas variables.

Las deformaciones u están vinculadas con el esfuerzo de corte que las produce, por la expresión:

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{Q}{\mu S} \quad (3)$$

y con el momento flector que las produce por la expresión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} = \frac{M}{E J} \quad (4)$$

Q está dado por:

$$Q = \int_l^{z_1} q dz$$

y M , despreciando grandores de efecto menor por:

$$M = \int_l^{z_1} q(z - z_1) dz$$

Sustituyendo estas expresiones en (3) y (4) se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{1}{\mu S} \int_l^{z_1} q dz \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{EJ} \int_l^{z_1} q(z - z_1) dz \quad (5)$$

y derivándolas respecto de z_1 , una vez la primera y sucesivamente dos veces la segunda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu S} q(z_1) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = -\frac{1}{EJ} \int_l^{z_1} q(z) dz \quad ; \quad \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\frac{1}{EJ} q(z_1) \quad (7)$$

En base de esto y de (2) podemos escribir las siguientes dos ecuaciones diferenciales en la variable u , no homogéneas a coeficientes constantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\text{con } k = \frac{\rho}{\mu} \quad ; \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon'}{\mu S}$$

$$\text{y } \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$\text{con } c = \frac{\rho S}{EJ} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon'}{EJ}$$

De ellas la (8) corresponde a edificios deformables por el esfuerzo de corte y la (9) a edificios deformables por el momento flector.

§ 3. — *Condiciones iniciales y de borde.* Las u que satisfagan a (8) ó (9) deberán además satisfacer condiciones iniciales y de borde en concordancia con las exigencias del problema que nos interesa.

Por la forma en que medimos las u , es evidente que su valor será nulo en el punto B , tanto en los edificios deformables al corte como en los deformables al momento flector.

Si a estos últimos los imaginamos empotrados en B , la recta $A'B$ será tangente en B a la línea AB que representa al edificio deformado. Debido a ello será nula $\frac{\partial u}{\partial z}$ para dicho punto.

La primera de (5) nos enseña para edificios deformables al corte que para $z_1 = l$ debe ser $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, ya que en tal caso la integral del 2º miembro tendría iguales sus límites superior e inferior. Análogamente se saca en base de la segunda de (5) y de la primera de (7) que en edificios deformables al momento flector deben ser nulos $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ y $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$ para $z = l$.

Resumiendo, tenemos entonces las siguientes condiciones de borde:

a) en la ecuación (8):

$$\begin{array}{ll} \text{Para } z = 0 & u = 0 \\ \text{Para } z = l & \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{array} \quad (10)$$

b) en la ecuación (9):

$$\begin{aligned} \text{Para } z = 0 \quad u = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \text{Para } z = l \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

El movimiento que experimenta todo edificio por acción de un viento normal u otras causas habituales es generalmente muy pequeño comparado con el que llega a tener una vez que queda sometido a la acción de un fenómeno sísmico. Podemos por lo tanto admitir que sea nulo hasta el instante en que esto último se produce.

Vale decir que sean nulos x y $\frac{\partial x}{\partial t}$ hasta dicho instante. Contando el tiempo a partir de ese instante, dicha suposición se expresaría así:

$$\text{Para } t = 0 \quad x = 0 \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

de lo cual, teniendo en cuenta la (1) se desprenden las siguientes condiciones iniciales para u tanto en la (8) como en la (9):

$$\text{Para } t = 0 \quad u = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

§ 4. — *Solución de las ecuaciones diferenciales.* De la teoría de las funciones de Green (7) (8) se deduce que la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^n u}{\partial z^n} = -r(z) \quad (13)$$

(en la cual $r(z)$ es una función continua —aunque sea por fragmentos— en el intervalo $(0, l)$ de variación de z) tiene por solución la expresión siguiente:

$$u = \int_0^l K(z, \zeta) r(\zeta) d\zeta \quad (14)$$

en la cual $K(z, \zeta)$ es la función de Green de la ecuación

$$\frac{\partial^n u}{\partial z^n} = 0 \quad (15)$$

es decir, que $K(z, \zeta)$ posee las siguientes propiedades:

1) En el intervalo $0 < z < l$ es continua lo mismo que sus $(n - 2)$ derivadas; 2) su derivada $(n - 1)$ también lo es, salvo en el punto $z = \zeta$ en que experimenta un salto tal que

$$\left(\frac{\partial^{n-1} K}{\partial z^{n-1}} \right)_{\zeta+0} - \left(\frac{\partial^{n-1} K}{\partial z^{n-1}} \right)_{\zeta-0} = -1 \quad (16)$$

3) satisface a las condiciones de borde exigidas a la solución u ; y 4) satisface a la ecuación (15) en todo el intervalo $0 < z < l$ salvo para $z = \zeta$.

Equiparando en (8) y (9) respectivamente las sumas

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\epsilon_1 \frac{\partial u}{\partial t} ; \\ - \left(c \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\epsilon_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

al 2º miembro de (13) y admitiendo que satisfaga las necesarias exigencias, podemos representar la solución de (8) y de (9) por la expresión (14), sobrentendiendo que en la ecuación (15) correspondiente, es según el caso $n = 2$ o $n = 4$.

Como n es par, y las condiciones de borde tanto (10) como (11) son homogéneas, el problema de hallar K , resulta ser lo que Collatz (9) denomina un problema autoadjunto. La función K de Green en (14) es por ello tanto con (10) como con (11) una función simétrica en z y ζ .

La función K puede considerarse como núcleo de la ecuación integral de segunda especie.

$$v(z) = \lambda \int_0^l K(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta \quad (17)$$

Por ende, la (14) puede interpretarse diciendo que la solución u es según la expresión de Kneser una función representada según la fuente $r(\zeta)$ por intermedio del núcleo simétrico $K(z, \zeta)$.

§ 5. — *Desarrollo de la solución en funciones propias.* Comparando la ecuación (17) con la (14) se ve que en ella $v(z)$ juega el mismo papel que u ; y que $\lambda v(\zeta)$ juega el mismo papel que $r(\zeta)$. La $v(z)$ dada por (17) satisfará por lo tanto a la ecuación

$$\frac{d^n v}{dz^n} = -\lambda v \quad (18)$$

y a las condiciones de borde exigidas a $K(z, \zeta)$.

La (18) es una ecuación diferencial ordinaria a coeficientes constantes con condiciones de borde en número igual a su orden. Su solución queda determinada toda vez que se determine λ . Dicha solución puede representarse por

$$v = \sum_{i=1}^{i=n} b_i f_i(\lambda z) \quad (19)$$

entendiendo por $f_i(\lambda z)$ funciones de z y del parámetro λ que satisfacen a (18); y por b_i , coeficientes constantes a determinar.

Imponiendo a (19) las condiciones (10) u (11), según el caso, se obtiene ecuaciones homogéneas en los coeficientes b_i del tipo:

$$\sum b_i f_i^{(h)}(\lambda z) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

$f^{(h)}$ siendo la derivada de orden h , y $z = l$, ó $z = 0$ según sea el caso.

Para que esas ecuaciones sean compatibles es preciso que el determinante de los coeficientes de b_i sea nulo.

Escribiendo dicho determinante e igualándolo a cero resulta una ecuación en λ generalmente trascendente y por ello con infinitas raíces λ_j .

Dichas raíces serán los *valores propios* de la ecuación (18); y las funciones v_j que les corresponden, las *funciones propias* de la misma ecuación.

Como dichos v resuelven la ecuación integral (17), los valores propios a que corresponden son los valores de λ para los cuales existe solución de (17). En base de las virtudes de los λ_j y de los v_j en relación con la ecuación (17), estos grandores serán también respectivamente los *valores propios* y las *funciones propias del núcleo* de dicha ecuación.

De acuerdo al teorema de Hilbert (10) conocido con el nombre de teorema del desarrollo, toda función representada según una fuente por intermedio de un núcleo simétrico de una ecuación integral del tipo de la (17), es desarrollable en una serie uniformemente convergente de funciones propias de ese núcleo. Teniendo en cuenta lo dicho acerca de u en el final del § precedente, resulta evidente que para u puede escribirse

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} p_j v_j(z) \quad (20)$$

entendiéndose por p_j coeficientes independientes de z .

La u debe ser una función no sólo de z sino también de t . Como las $v_j(z)$ sólo dependen de z , se comprende que los p_j deben ser funciones de t .

En la teoría de las ecuaciones integrales ⁽¹⁾ se demuestra que siendo K simétrico es:

$$\int_0^l v_j(z)v_i(z)dz = 0 \quad \text{si } j \neq i$$

Se dice por ello que las funciones propias son ortogonales.

Esa propiedad puede probarse fácilmente mediante la ecuación (18) siguiendo el camino que mostramos en la Memoria I ⁽³⁾.

Multiplicando la (20) por $v_j(z_j)$ e integrando, se obtiene, gracias a dicha propiedad

$$p_j(t) = \frac{\int_0^l uv_j(z)dz}{\int_0^l v_j^2(z)dz}$$

Los coeficientes p se pueden obtener por lo tanto, de un modo análogo a los coeficientes de una serie de Fourier. Debido a ello, se conoce a los coeficientes de los desarrollos en series de funciones propias, con el nombre de coeficientes de Fourier.

§ 6. — *Expresión de los valores y de las funciones propias.* El procedimiento esbozado en el § anterior para obtener los valores y las funciones propias es un procedimiento general. En los casos que nos interesan se puede llegar a sus expresiones en forma más expeditiva. En la memoria I mostramos el camino en tal sentido para cuando $n = 4$. En dicho caso los valores propios resultan dados por la ecuación:

$$ch ml \cos ml = -1 \quad m^4 = \lambda \quad (21)$$

y las funciones propias por la expresión:

$$v(z) = chmz - \cos mz + \eta (shmz - \text{sen } mz) \quad (22)$$

siendo

$$\eta = -1 + \frac{e^{-ml} + (-1)^{j+1}}{chml + (-1)^{j+1}}$$

Para $n = 2$ y las condiciones (10) se obtiene para las funciones propias:

$$v(z) = \text{sen } z \sqrt{\lambda} \quad (23)$$

y para los valores propios, por consiguiente:

$$\sqrt{\lambda} \cos l \sqrt{\lambda} = 0 \quad (24)$$

y por ende

$$l \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} (2j - 1) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

Interesante es notar que en el caso de $n = 4$ las raíces ml de (21) pueden expresarse por ⁽³⁾:

$$ml = (2j - 1) \frac{\pi}{2} + \epsilon_j$$

con $\epsilon_j \rightarrow 0$ para $j \rightarrow \infty$. Para valores grandes de j se confunden entonces las raíces de (21) y (24).

§ 7. — *Ecuación diferencial de los p_j .* En base de (14) se saca por derivación respecto de t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^l K(z, \xi) r'(\xi) d\xi$$

expresión de la que se desprende, de acuerdo al teorema del desarrollo de Hilbert, que también $\frac{\partial u}{\partial t}$ es desarrollable en una serie uniformemente convergente de funciones $v(z)$. Es decir que puede escribirse:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) v_j(z) \quad (25)$$

Análogamente se puede obtener que es lícito poner:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t) v_j(z) \quad (26)$$

la serie del 2º miembro siendo uniformemente convergente. Debido a esto último, integrando respecto de t ambos miembros de (26) se obtiene una serie en $v(z)$ también uniformemente convergente. Como dicha serie debe representar a $\frac{\partial u}{\partial t}$, sus coeficientes de Fourier, deberán ser coincidentes con los A que figuran en (25). Análogamente razonando se puede ver que los coeficientes de la serie que resulta de integrar respecto de t la (25) deben ser coincidentes con los que figuran en (20).

De ello sigue en seguida que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j'(t) v_j(z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j''(t) v_j(z) \quad (27)$$

Sustituyendo esto en (8) y en (9) resulta respectivamente

$$\frac{1}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_j \left[\left(p''(t) + \frac{2\varepsilon_1}{k} p'(t) \right) v_j(z) \right] + \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \quad (28)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \sum_j \left[\left(p''(t) + \frac{2\varepsilon_2}{c} p'(t) \right) v_j(z) \right] + \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \quad (29)$$

Multiplicando por $v_j(z)$ ambos miembros e integrando, se saca en base de la ortogonalidad de las $v(z)$, llamando $S(t)$ al coeficiente de $v(z)$ en (28) y en (29) y N al coeficiente de las derivadas de u en esas ecuaciones:

$$S_j(t) \int_0^l v_j^2(z) dz + \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \int_0^l v_j(z) dz = N \int_0^l \frac{\partial^n u}{\partial z^n} v_j(z) dz \quad (30)$$

($n = 2$, ó $n = 4$, según el caso).

Integrando por partes n veces al 2º miembro de (30), y teniendo presente las condiciones de borde que deben satisfacer tanto u como v se saca que:

$$\int_0^l \frac{\partial^n u}{\partial z^n} v_j(z) dz = \int_0^l u \frac{\partial^n v_j(z)}{\partial z^n} dz \quad (31)$$

Poniendo en el 2º miembro de (31): $-\lambda v$ en vez de $\frac{\partial^n v}{\partial z^n}$, de acuerdo con (18) y $\sum p_j v_j(z)$ en vez de u , de acuerdo con (20), y teniendo presente las propiedades de ortogonalidad, resulta evidente por lo tanto que es:

$$\left(\int_0^l \frac{\partial^n u}{\partial z^n} v_j(z) dz \right)_j = \left(-\lambda p \int_0^l v^2(z) dz \right)_j$$

lo cual sustituido en (30) nos da, tras de sencillas operaciones:

$$S(t) + N\lambda p = -\beta \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \quad (32)$$

β estando dado por:

$$\beta = \frac{\int_0^l v(z) dz}{\int_0^l v^2(z) dz} \quad (33)$$

Atribuyendo a $S(t)$ y N las expresiones que les corresponde por definición, tenemos por consiguiente que para p vale la siguiente ecuación diferencial:

$$p'' + 2\varepsilon p' + \omega^2 p = -\beta \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \quad (34)$$

en la cual es, en edificios deformables al corte:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{k} ; \quad \omega^2 = \frac{\lambda}{k} \quad (35)$$

y en edificios deformables a la flexión:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{c} ; \quad \omega^2 = \frac{m^4}{c} = -\frac{\lambda}{c} \quad (36)$$

Dándole a $v(z)$ la expresión (24), es decir, la correspondiente a edificios deformables al corte, la (33) permite sacar que

$$\beta = \frac{4}{\pi(2j-1)} \quad (j = 1, 2, \dots, \infty) \quad (37)$$

Para edificios deformables al momento flector, β tiene la expresión siguiente que obtuvimos en la Memoria I:

$$\beta_j = \left(\frac{-2\eta}{ml + (1 - \eta^2) \left(\frac{thml}{2} + \frac{\text{sen } 2ml}{4} \right) - \frac{1 + \eta^2 + (-1)^j thml}{chml}} \right)_j$$

En la tablilla que sigue figuran sus valores y los de ml hasta $j = 4$.

j	1	2	3	4
β	0.7923	0.4410	0.2544	0.1818
ml	1.8751	4.6941	7.8548	10.9955

β para valores más grandes de j resulta ser casi igual al dado por la expresión (37).

§ 8. — *Periodos propios.* La (34) es la bien conocida ecuación diferencial de un oscilador simple excitado por la causa representada por el 2º miembro.

Si dicha causa no existiera, es decir, si fuera nulo $\frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2}$ ella se convertiría en la ecuación del movimiento libre de los osciladores simples. En ese caso su solución sería:

$$p = A e^{-\varepsilon t} \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{T'} t + \varphi \right) \quad (38)$$

$$\text{con } T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}}$$

y siendo $\epsilon = 0$:

$$p = A \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right) \quad (39)$$

$$\text{con } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La (38) representa un movimiento oscilatorio amortiguado; y la (39) uno periódico puro, de período igual a T . Como con él oscilaría el edificio estando libre de excitaciones extrañas, dicho período viene a ser un período *propio del mismo*.

Valores de T hay tantos como ω ó lo que es igual de acuerdo con (35) y (36) tantos como λ ; su cantidad es entonces infinita.

De acuerdo con (39) será evidentemente:

$$T_1 : T_2 : T_3 \text{ etc.} = \frac{1}{\omega_1} : \frac{1}{\omega_2} : \frac{1}{\omega_3} \text{ etc.}$$

En edificios *deformables al corte* será por ello, en base de (35) y la expresión de $l\sqrt{\lambda}$ dada por (24):

$$T_1 : T_2 : T_3 \text{ etc.} = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} \text{ etc.} \quad (40)$$

Y en edificios *deformables a la flexión*, de acuerdo con (36) y los valores de la tablilla:

$$T_1 : T_2 : T_3 \text{ etc.} = \left(\frac{1}{1.875} \right)^2 : \left(\frac{1}{4.694} \right)^2 : \left(\frac{1}{7.855} \right)^2 \text{ etc.} = 1 : \frac{1}{6.3} : \frac{1}{17.5} \text{ etc.} \quad (41)$$

Estas relaciones, como ya lo hiciera notar Jacobsen (6), pueden servir para discernir acerca de la clase esfuerzo: corte o flexión que más deforma a los edificios.

Para el mismo propósito pueden servir las propias expresiones de T . Sustituyendo en (39) las expresiones (35) y (36) de ω se saca respectivamente:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{k}}{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad T = \frac{2\pi\sqrt{c}}{m^2}$$

Por lo tanto, multiplicando por l numerador y denominador de la primera de estas relaciones y por l^2 la segunda, resulta, para edificios deformables al corte:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{k}}{l\sqrt{\lambda}} l \quad (42)$$

y para edificios deformables a la flexión:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{c} l^2}{m^2 l^2} \quad (43)$$

El denominador de (42) no es sino la raíz de (24), y el de (43) es el cuadrado de las raíces de (21). Dán- doles a dichos denominadores el valor que corresponde a la primera de esas raíces, poniendo en vez de k y c las expresiones que para esos grandores valen de acuerdo a (8) y (9), y teniendo presente que $l\sqrt{\frac{S}{J}}$ no es sino la relación de esbeltez de los edificios, relación que podemos llamar Γ , obtenemos en vez de (42):

$$T = 4 \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} l \quad (44)$$

y en vez de (43):

$$T = 1.787 \sqrt{\frac{\rho}{E}} l \Gamma \quad (45)$$

§ 9. — *Expresión general de los coeficientes p_j .* Para tener las funciones p que corresponden al caso en que $\frac{d^2 x_B}{dt^2} \neq 0$ y por consiguiente poder formar las expresiones de u ó de q estando excitado el edificio, resulta cómodo usar la solución de la ecuación (34) siguiente que figura en los famosos tratados "Theory of Sound", de Lord Rayleigh y "Methoden der Mathematischen Physik", de Courant-Hilbert:

$$p = Ce^{-\epsilon t} \sin\left(\frac{2\pi}{T'} + \psi\right) + \frac{T'}{2\pi} \int_0^t F(\tau) e^{-\epsilon(t-\tau)} \sin \frac{2\pi}{T'} (t - \tau) d\tau \quad (46)$$

En ella representamos al 2º miembro de (34) con $F(t)$.

En los tratados mencionados se justifica dicha expresión mediante consideraciones heurísticas. De análogas consideraciones se vale Housner (12) en un artículo especialmente destinado a deducir dicha expresión siendo nulo ϵ . Como dichas consideraciones son un tanto insatisfactorias, parece útil destacar que a esa fórmula se puede llegar rigurosamente, aplicando el elegante método de Cauchy (13), o bien el método general de variación de constantes.

Dada una ecuación diferencial, lineal del tipo

$$\sum_{m=0}^{m=n} \frac{d^m Y}{dx^m} R_m(x) = F(x) \quad (47)$$

las R_m siendo funciones diversas de x , el método de Cauchy consiste en encontrar una solución Y de ella para el caso $F(x) = 0$, tal que para un determinado valor de x , digamos para $x = \alpha$ sea:

$$\begin{aligned} \frac{d^m Y}{dx^m} &= 0 & (m = 0, 1, \dots, n-2) \\ \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} &= F(\alpha) \end{aligned} \quad (48)$$

La función Y , merced a esas imposiciones, resulta ser no sólo función de x , sino también del parámetro α .

Satisfaciendo Y las condiciones (48), la solución de (47) estará dada por:

$$y = y_1 + y_2$$

y_1 siendo una solución de (47) para el caso de $F(x) = 0$ que contiene n constantes arbitrarias a determinar en base de las n condiciones iniciales del problema; e y_2 estando dado por

$$y_2 = \int_0^x Y(x, \alpha) d\alpha \quad (49)$$

En efecto: En base de las reglas de derivación de una integral se tiene:

$$\frac{dy_2}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx} d\alpha + Y(x, x) \quad (50)$$

Pero

$$Y(x,x) = Y(x,\alpha)_{\alpha=x} \equiv Y(\alpha,\alpha) = Y(x,\alpha)_{x=\alpha}$$

De acuerdo con (48) es nulo el último miembro de esta igualdad; será nulo también entonces el primero, y en vez de (50) será simplemente:

$$\frac{dy_2}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx} d\alpha$$

Análogamente se sacará

$$\frac{d^m y_2}{dx^m} = \int_0^x \frac{d^m Y}{dx^m} d\alpha \quad (m = 0, 1 \dots n - 1) \quad (51)$$

En cambio para la derivada enésima resulta:

$$\frac{d^n y_2}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^n Y}{dx^n} d\alpha + \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}$$

y por ende

$$\frac{d^n y_2}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^n Y}{dx^n} d\alpha + F(x) \quad (52)$$

Sustituyendo en (47) las expresiones (52) y (51) sale:

$$\Sigma \frac{d^m y_2}{dx^m} R_m(x) = F(x) + \int \Sigma \frac{d^m Y}{dx^m} R_m(x) d\alpha$$

Por definición, es nula la expresión bajo el integral; luego y_2 satisfará a la (47).

Como función Y correspondiente a esas consideraciones, podemos poner en nuestro caso el 2° miembro de la (38).

Imponiéndole a Y de acuerdo al método de Cauchy la exigencia de que para $t = \tau$ sea

$$Y = 0 \quad ; \quad \frac{dY}{dt} = F(\tau)$$

resulta:

$$\varphi = -\frac{2\pi}{T} \tau \quad ; \quad A = \frac{T'}{2\pi} F(\tau) e^{s\tau}$$

Por lo tanto, como solución y_2 de la ecuación (34), de acuerdo con (49)

$$y_2 = \frac{T'}{2\pi} \int_0^t F(\tau) e^{-s(t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T'} (t-\tau) d\tau \quad (53)$$

Poniendo como solución y_1 :

$$y_1 = C e^{-st} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T'} t + \psi \right)$$

(expresión que como corresponde, posee dos constantes arbitrarias, C y ψ y satisface a la (34) sin 2° miembro), resulta la (46).

Usando el método de variación de constantes, tendríamos como solución de (34)

$$p = e^{m_1 t} \left[g + \frac{1}{m_1 - m_2} \int e^{-m_1 t} F(t) dt \right] + e^{m_2 t} \left[h + \frac{1}{m_2 - m_1} \int e^{-m_2 t} F(t) dt \right] \quad (54)$$

con

$$m_1 = -\epsilon + i \frac{2\pi}{T'} \quad ; \quad m_2 = -\epsilon - i \frac{2\pi}{T'}$$

g y h siendo dos constantes arbitrarias.

Teniendo libertad de disponer de g y h , se puede, evidentemente, sustituir las integrales indefinidas, por integrales definidas entre 0 y t .

Haciendo esa sustitución y poniendo τ en vez de t bajo el signo integral, resulta en vez de (54)

$$p = e^{m_1 t} \left[g + \frac{1}{m_1 - m_2} \int_0^t e^{-m_1 \tau} F(\tau) d\tau \right] + e^{m_2 t} \left[h + \frac{1}{m_2 - m_1} \int_0^t e^{-m_2 \tau} F(\tau) d\tau \right] \quad (55)$$

Poniendo $e^{m_1 t}$ y $e^{m_2 t}$ bajo el signo integral—lo cual no afecta para nada el resultado— y reparando en que

$$e^{m_1(t-\tau)} = e^{-\epsilon(t-\tau) + i \frac{2\pi}{T'}(t-\tau)} \quad ; \quad e^{m_2(t-\tau)} = e^{-\epsilon(t-\tau) - i \frac{2\pi}{T'}(t-\tau)}$$

$$m_1 - m_2 = \frac{4\pi i}{T'}$$

resulta evidente que

$$p = g e^{m_1 t} + h e^{m_2 t} + \frac{T'}{2\pi} \int_0^t F(\tau) e^{-\epsilon(t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T'}(t-\tau) d\tau$$

expresión idéntica a la (46) si hacemos en ella

$$g + h = C \operatorname{sen} \psi \quad i(g - h) = C \operatorname{cos} \psi$$

§ 10. — *Estructuras inicialmente en reposo.* Imponiendo a la expresión de u dada por (20), las condiciones iniciales (12) se tiene:

$$\sum_{j=1}^{\infty} [p(o) \nu(z)]_j = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{\infty} [p'(o) \nu(z)]_j = 0$$

Multiplicando estas igualdades por $\nu_j(\tau)$ e integrando entre 0 y 1 , sale de acuerdo a las propiedades de ortogonalidad:

$$p_j(o) = 0 \quad p_j'(o) = 0$$

ecuaciones que quedan satisfechas si g y h en (55), o si C y ψ en (46) son nulos. La expresión de p queda limitada por eso, sólo a la de y_2 dada por (53). Sustituyendo esa expresión en (20), llamando $a(t)$ a la aceleración $-\frac{d^2 x_B}{dt^2}$ del suelo, y teniendo en cuenta que por definición es:

$$F(t) = \beta a(t)$$

resulta por lo tanto:

$$p = \beta \frac{T'}{2\pi} \int_0^t a(\tau) e^{-\epsilon(t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T'}(t-\tau) d\tau \quad (56)$$

y por ende para u :

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(z) \beta_j \frac{T_j'}{2\pi} \int_0^t a(\tau) e^{-\epsilon(t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_j'} (t-\tau) d\tau \quad (57)$$

Alford, Housner y Martel (*), en su trabajo citado en el § 1, expresan que, en base de las teorías que figuran en el tratado "Theory of Sound", de Lord Rayleigh, puede aceptarse en líneas generales para los desplazamientos de un edificio, la siguiente fórmula:

$$y = \sum_i \frac{W_i}{p_i} \Phi_i \int_0^t a(\tau) e^{-n_i p_i (t-\tau)} \operatorname{sen} p_i (t-\tau) d\tau \quad (58)$$

Y definen los grandores que en ella intervienen así:

Φ_i es un factor característico del modo i de vibración de la estructura que depende de las coordenadas espaciales;

p_i es 2π veces la frecuencia del modo i de vibración;

$\frac{W_i}{p_i}$ una función sólo de las características físicas de la estructura;

n_i una fracción del amortiguamiento crítico del modo i ;

a la aceleración del suelo.

Comparando nuestra fórmula (57) con la (58) de esos autores, se ve que serían coincidentes, si identificamos:

$$j \text{ con } i; \beta_j \text{ con } W_i; \Phi_i \text{ con } v_j(z); p_i \text{ con } \frac{2\pi}{T_j'} \text{ y } n_i p_i \text{ con } \epsilon.$$

§ 11. — *La expresión de q .* En base de la expresión (2) de q y (27) de las correspondientes a $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ cabe escribir:

$$q = \rho S \left\{ \sum_j \left[(p'' + 2\epsilon p') v(z) \right]_j + \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \right\}$$

y teniendo en cuenta que de acuerdo a (34) es

$$p'' + 2\epsilon p' = - \left(\omega^2 p + \beta \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \right)$$

también:

$$q = - \rho S \left\{ \sum (\omega^2 p v(z))_j + \frac{\partial^2 x_B}{\partial t^2} \left[\sum \beta_j v_j(z) - 1 \right] \right\} \quad (59)$$

En la Memoria I probamos que la serie $\sum \beta_j v_j$ (7) en el caso de edificios deformables por el momento flector es uniformemente convergente para $0 \leq z \leq l$. Poniendo para esa serie

$$\sum \beta_j v_j(z) = f(z) \quad (60)$$

y multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $v_j(z)$ se obtiene debido a las propiedades de ortogonalidad de esas funciones:

$$\beta \int_0^l v_j^2(z) dz = \int_0^l f(z) v_j(z) dz$$

y en virtud de la expresión (33) de β :

$$\int_0^l v_j(z) dz = \int_0^l f(z) v_j(z) dz \quad (61)$$

o también:

$$\int_0^l (f(z) - 1)v(z)dz = 0$$

En vez de $v_j(z)$ podemos poner su expresión (17). Con ello, la (61) se transforma en

$$\lambda \int_0^l (f(z) - 1)dz \int_0^l K(z, \xi)v(\xi)d\xi = 0$$

lo que debido a la continuidad de las funciones a integrar puede escribirse

$$\lambda \int_0^l v(\xi)d\xi \int_0^l [f(z) - 1] K(z, \xi)dz = 0$$

o poniendo

$$\int_0^l [f(z) - 1]K(z, \xi)dz = W(\xi) \quad (62)$$

también:

$$\lambda \int_0^l W(\xi)v(\xi)d\xi = 0 \quad (63)$$

La función W , en base de su definición (62) viene a ser una función dada por una fuente de acuerdo al núcleo $K(z, \xi)$. Es por lo tanto desarrollable en una serie uniformemente convergente de funciones $v(z)$. Pero de acuerdo a (63) los coeficientes de Fourier de ese desarrollo son nulos. Luego será también

$$W = 0 \quad (64)$$

Por otra parte cabe notar que la W por valer (62) debe satisfacer —de acuerdo a la teoría de las funciones de Green— a la ecuación diferencial siguiente:

$$1 - f(z) = \frac{d^4 W}{dz^4}$$

de lo cual y en virtud de (64) sigue en seguida que

$$1 - f(z) = 0$$

y por ende de acuerdo a (60)

$$\sum \beta_j v_j(z) - 1 = 0 \quad (65)$$

Una fórmula igual vale en el caso de edificios deformables por el esfuerzo de corte. En este caso se tiene, en efecto, que

$$\beta_j v_j(z) = \frac{4}{\pi(2j-1)} \operatorname{sen} z \sqrt{\lambda_j} = \frac{4}{\pi(2j-1)} \operatorname{sen} \left(\frac{z(2j-1)}{l} \frac{\pi}{2} \right)$$

y por ende

$$\sum \beta v(z) = \frac{4}{\pi} \sum \frac{\operatorname{sen} (2j-1)\alpha}{2j-1}, \text{ con } \alpha = \frac{\pi}{2} \frac{z}{l}$$

igualdad cuyo segundo miembro, como es sabido, no es sino el desarrollo de la unidad en serie de Fourier en el intervalo $0 < \alpha < \pi$.

Sustituyendo esto en (59) la expresión de q se reduce simplemente a la siguiente:

$$q = -\rho S \sum [\omega^2 p v(z)]_j \quad (66)$$

Los grandores ρ y S son datos de cada estructura; ω se puede calcular con las fórmulas (35) y (36) y $v(z)$ está dado por (22) y (23); sólo nos queda entonces por indicar cómo pueden hallarse los p que figuran en (66).

Para ese fin resulta cómodo valerse de la fórmula (56).

Como $a(\tau)$, la aceleración del suelo, es una función empírica, cabe determinar la integral de esa fórmula o bien por métodos numéricos o bien por métodos mecánicos. El primer camino fué seguido por Archie Blake (¹⁴), en una investigación que emprendiera varios lustros atrás con propósitos algo distintos de los nuestros, asignando a la función $a(t)$ valores sacados de un acelerograma. Aunque se trata de un camino realizable, resulta poco atractivo, porque impone un gasto demasiado grande de fuerzas y tiempo para hacerlo. Más plausible resulta por ello valerse de recursos mecánicos. De ellos han echado mano recientemente Alford, Housner y Martel, quienes como lo expresamos en la *Introducción* se ingeniaron para determinar integrales como la de (56) valiéndose del computador de analogías eléctricas del California Institute of Technology, mecanismo que permitió hacerlo con gran rapidez.

Como la integral citada es igual a $\frac{2\pi}{T'}$ veces la respuesta de un oscilador simple de período T , con el grado n_i de amortiguamiento, excitado por la causa representada por la función $a(t)$ el procedimiento que siguieron consistió en aplicar reiteradamente tensiones proporcionales a esta función, a circuitos eléctricos diversos del computador, inicialmente libres de corriente, y en observar en la pantalla fluorescente de un osciloscopio las curvas estacionarias representativas de las corrientes que se originaban en los circuitos. Como es fácil comprender, tales curvas a menos de errores sin mayor importancia resultaban ser proporcionales a la integral buscada.

Para su investigación utilizaron los acelerogramas obtenidos en catorce fenómenos sísmicos importantes por el Comité norteamericano en 1933, y estudiaron sus efectos en circuitos de período propio variable de 0,1 a 3,0 segundos ajustados a un amortiguamiento cuyo índice n variaba entre 0 y 0,4.

En especial dirigieron su atención a los valores máximos X_m de las respuestas que observaban en el osciloscopio, y coordinándolos con los T y los n a que correspondían obtuvieron una serie de curvas que dieron en designar con el nombre de *espectros de los acelerogramas*.

Contando con esos espectros, resulta interesante examinar qué valores llegaría a tener q si para calcularlos usáramos sus ordenadas, desde luego multiplicadas previamente por $\frac{T'}{2\pi}$ como corresponde. Haciéndolo, y admitiendo por simplicidad que $T = T'$ resultaría para q con esas ordenadas en vez de (66):

$$q = -\rho S \sum_j \left(\frac{2\pi}{T} \beta X_m v(z) \right)_j \quad (67)$$

Examinando los espectros de los acelerogramas, puede reconocerse en ellos las siguientes características: a) presentan un valor máximo X^* para un determinado valor T^* del período de los monosciladores; b) para valores de $T < T^*$ los X_m son crecientes con T y parecen tender a cero cuando T tiende a cero; c) para valores de $T > T^*$ los X_m se hacen decrecientes con T ; al principio con rapidez y luego más lentamente, dando la impresión de que tienden a un valor límite; d) las características citadas pertenecen a todos los espectros cualquiera sea el grado de amortiguamiento del monoscilador.

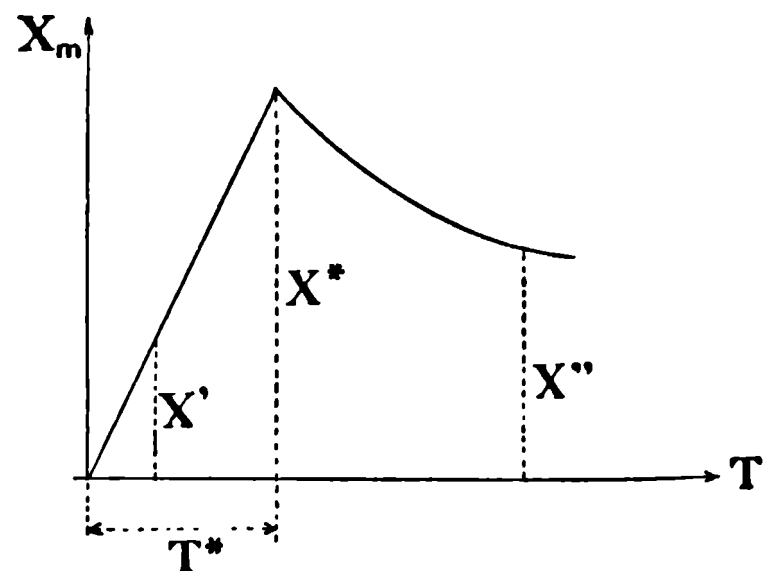


Fig. 2

Estas características resultan lógicas si se tiene en cuenta que la amplitud máxima de la respuesta de un monoscilador excitado por una acción sinusoidal estacionaria de período igual $\frac{2\pi}{\gamma}$ es proporcional al factor

$$H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} - 1\right)^2 + \frac{4\epsilon^2}{\gamma^2}}} \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (68)$$

y si en primera aproximación se asimila la aceleración del suelo a una acción de esta índole.

El factor H , como es sabido —y es fácil verlo en la expresión (68)— se anula en efecto para $T = 0$, se aproxima asintóticamente a $\left(1 + \frac{4\varepsilon^2}{\gamma^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ para $T = \infty$ y adquiere un máximo para un valor de T intermedio entre los citados.

Tomando por base esas características de los espectros, el andamio con que ellas se presentan, así como el de las curvas representativas de los H , a los cuales es esperable que se parezcan, cabe representarlos en primera aproximación por un gráfico como el de la figura 2 formado por una recta que pasa por el origen y llega hasta un punto en el que $T = T^*$ y $X_m = X^*$ en el que X_m adquiere un valor máximo y por una curva que arranca en $(T^* X^*)$ y decrece hasta $T = \infty$ tendiendo a un valor X_∞ de X_m .

Aceptando para los X_m esa ley de variación podemos distinguir dos casos, a saber: a) que todos los períodos T_j de los edificios sean menores que T^* pudiendo ser el mayor $T_1 = T^*$ y b) que algunos T_j , desde $j = 1$ hasta $j = k$ sean superiores a T^* .

En el caso a) podemos poner, evidentemente:

$$X_m = \frac{X^*}{T^*} T \quad (69)$$

lo que sustituido en (67) nos da

$$q = -2\pi\rho S \frac{X^*}{T^*} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\beta_{\nu}(z) \right)_j$$

Pero de acuerdo a (65) la sumatoria del 2º miembro es igual a la unidad. Luego en el caso que consideramos será simplemente

$$q = -2\pi\rho \frac{SX^*}{T^*} \quad (70)$$

es decir que la carga para edificios cuyos períodos son menores que T^* resulta ser constante, como se suele admitir por razones de sencillez en la ingeniería antisísmica, aunque sin demostración.

En el caso b) la expresión de q puede detallarse así:

$$q = - \left\{ \sum_{k+1}^{\infty} \left(\frac{X'}{T} \beta_{\nu}(z) \right)_j + \sum_1^k \left(\frac{X''}{T} \beta_{\nu}(z) \right)_j \right\} 2\pi\rho S \quad (71)$$

representando por X' los valores de X_m dados por la recta y por X'' los dados por la curva que sigue tras de $(X^* T^*)$ (Fig. 2).

Sumando y restando al 2º miembro $2\pi\rho S \sum_1^k \left(\frac{X'}{T} \beta_{\nu}(z) \right)_j$ resulta:

$$q = -2\pi\rho S \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{X'}{T} \beta_{\nu}(z) - \sum_1^k \frac{X' - X''}{T} \beta_{\nu}(z) \right\}$$

y, finalmente, puesto que el primer sumando no es sino la expresión de q para el caso a), y para X' vale la expresión (69):

$$q = -2\pi\rho S \frac{X^*}{T^*} + 2\pi\rho S \frac{X^*}{T^*} \sum_1^k \left[\left(1 - \frac{X''}{X^*} \frac{T^*}{T}\right) \beta_{\nu}(z) \right]_j \quad (72)$$

Para saber si habrá que aplicar la fórmula (70), o la fórmula (72) se precisa conocer T^* . Ese período adquiere, por lo tanto, una jerarquía importante en los cálculos antisísmicos, y si bien, como sostienen Alford, Hous-

ner y Martel (³), no está justificado hablar de un período dominante en los terremotos de una región, posiblemente lo sea en cambio, hacerlo de un *período característico* T^* de ella. En los espectros que suministran esos autores ese período varía entre 0.3 y 1.7, siendo frecuentemente próximo a 0.6 segundos.

§ 12. — *Características de los edificios.* De las consideraciones que hemos hecho en el § precedente, se desprende que además del período característico T^* es importante saber si los períodos de los edificios superan o no a T^* y en caso afirmativo cuánto es el valor de k .

Para podernos formar una idea al respecto hemos sometido a examen los datos que obtuviera la Comisión norteamericana y que figuran en la Publicación N° 201 del U. S. Coast and Geodetic Survey, procurando establecer la ley a que responden los mayores períodos T_1 en función de la altura l de los edificios y de la esbeltez Γ

La expresión de T de acuerdo a nuestras consideraciones podría ser o bien la (44) o bien la (45); y cualquiera de esas fórmulas podría escribirse sencillamente así:

$$T_1 = b l \quad (73)$$

pero con la salvedad de que valiendo la (44), b sería constante; y valiendo la (45), sería variable con la esbeltez Γ . Teniendo esto en cuenta empezamos por agrupar los datos disponibles por valores de Γ diversos (*) y admitiendo que para cada grupo de valores se verificara la (73), pasamos a determinar el coeficiente b buscado por el método de mínimos cuadrados.

Operamos con unos 300 datos y obtuvimos los resultados que figuran en la Tabla I.

T A B L A I

Γ	b <i>seg/m</i>	δ_1 \pm (<i>seg/m</i>)	δ_2 \pm (<i>seg/m</i>)
0.01 a 1.00	0.0338	0,0040	0.35
1.01 a 2.00	0.0187	0,0008	0.16
2.01 a 3.00	0.0191	0,0012	0.25
3.01 a 4.00	0.0199	0,0010	0.20
4.01 a 5.00	0.0198	0,0012	0.21
5.01 a 6.00	0.0246	0,0012	0.24
> 7.00	0.0205	0,0020	0.38

δ_1 en este cuadro representa el error medio cuadrático de b y δ_2 la desviación media cuadrática de la unidad de peso.

En los números de esta Tabla no es visible que el coeficiente b decididamente dependa de Γ . De las dos fórmulas: (44) y (45), parecería por lo tanto que sería más ajustada a los hechos la primera, y por ende que los edificios investigados serían más deformables por el esfuerzo de corte que por el momento flector, impresión que años atrás llegara a tener también Jacobsen (⁶) basándose principalmente en la relación entre el primero y el segundo de los períodos que los mismos acusaron.

Para aumentar la información acerca de la plausibilidad de esa conclusión, y en general acerca de cómo son los hechos, resolvimos averiguar qué valores resultarían para los módulos de rigidez μ y de Young E mediante los datos utilizados en la investigación anterior, al aplicarles las fórmulas (44) y (45).

Para efectuar los cálculos le dimos a ρ el valor 2, y procurando poner en evidencia una eventual sistematicidad en los resultados, agrupamos los datos, esta vez no sólo por esbelteces, sino también de acuerdo a la estructura resistente de que estaban dotados los edificios.

(*) Por razones de simplicidad asignamos a Γ el valor del cociente entre alto y semiancho de los edificios.

En la Tabla II que sigue figuran los resultados que encontramos (*).

T A B L A II

Edificios con								
Esqueletos de acero					Esqueletos de hormigón armado			
Γ	$\mu 10^{-8}$	$\delta_2 10^{-8}$	$E 10^{-8}$	$\delta_2 10^{-8}$	$\mu 10^{-8}$	$\delta_2 10^{-8}$	$E 10^{-8}$	$\delta_2 10^{-8}$
0.01-1.00	6.7	8.7	1.2	1,67	5.8	2.2	0.6	2.3
1.01-2.00	10.7	7.6	5.4	3,49	12.1	7.9	6.5	44.0
2.01-3.00	12.4	8.2	14.0	8,35	10.9	6.6	12.5	57.3
3.01-4.00	10.5	8.6	27.2	24,68	8.3	5.4	18.7	110.8
4.01-5.00	9.9	6.0	38.7	21,68	10.8	6.6	40.0	306.0
5.01-6.00	6.5	3.0	46.0	21,58	4.3	1.3	24.9	85.8
7 y > 7.0	9.6	6.4	203.4	313,7				

Los δ_2 significan como antes, desviación media de la unidad de peso. Estos, y los demás grandores de la tabla están dados en unidades c.g.s.

Examinando los valores hallados de μ y E puede verse que presentan prácticamente los mismos caracteres en las dos clases de edificios. Los de μ son poco variados, pero se puede reconocer en ellos un andamio de acuerdo a una curva que crece hasta adquirir un máximo en las vecindades de $\Gamma = 3$, y decrece luego con el crecer de Γ . En media puede decirse que su valor es más o menos 1/30 del que se suele atribuir a la mampostería.

Los valores de E , en cambio, muestran una variabilidad pronunciada con Γ , creciendo en edificios con estructura de hormigón armado desde más o menos 1/1000 hasta más o menos 1/15 del valor atribuible a la mampostería; y en edificios con estructura de acero, desde más o menos 1/500 hasta más o menos 1/3 de ese valor.

Si los T estuvieran dados por la ley (73) sería de esperar para μ y E los valores que acusarían las siguientes fórmulas que salen de sustituir en (44) y (45) T por $b l$:

$$\mu = \frac{16 \rho}{b^2} \quad ; \quad E = \frac{1.787^2 \rho \Gamma^2}{b^2} \quad (74)$$

Es decir que los valores de μ debieran ser independientes de Γ y los de E debieran variar con el cuadrado de ese grandor. Los resultados precedentes estarían por lo tanto en cierta medida en favor de la fórmula (73) y por ende en favor de la conclusión de que los edificios sean más deformables por el esfuerzo de corte que por el momento flector. Teniendo esto en cuenta, y la pequeña variación de b con Γ acusada por la Tabla I nos pareció conveniente calcular el valor de ese coeficiente usando todos los datos, a fin de contar con una fórmula como la (73), válida para todos los edificios, y obtuvimos:

$$b = 0,0209 \text{ seg}/m \quad \delta_1 = \pm 0,000538 \text{ seg}/m \quad \delta_2 = \pm 0,269 \text{ seg}/m \quad (75)$$

Introduciendo este valor de b en las expresiones (74) resulta

$$\mu = 7.3 \times 10^8 \quad \text{y} \quad E = 1.5 \Gamma^2 \times 10^8$$

y por lo tanto en especial para E la Tabla que sigue:

T A B L A III

Γ	1	2	3	4	5	6	7
E	1.5	6	13.5	24	37.5	54	74 } $\times 10^8$

El orden de grandor de estos valores de E es igual al de los E de la Tabla II, salvo para $\Gamma = 7$. Ello confirmaría, por lo tanto, la plausibilidad de la fórmula (73) hasta ese valor de Γ ; para valores de Γ mayores,

(*) Los cálculos necesarios para obtener esa Tabla, así como los necesarios para obtener los de la Tabla I, fueron hechos por el Sr. Enrique Jaschek, a quien nos complacemos en expresar aquí nuestro agradecimiento por ello.

la hace dudosa el desacuerdo de los valores de E de las Tablas III y II, y también el hecho de que para tales valores de Γ los de E acusados por la Tabla II se aproximan visiblemente a los que tiene la mampostería. Como esto último abre la posibilidad de validez de la fórmula (45) para valores grandes de Γ , procedimos a ensayar la fórmula

$$T_1 = b_1 l \Gamma \quad (76)$$

que sería consecuencia de ella, usando sólo valores de T correspondientes a $\Gamma > 7.0$ y obtuvimos

$$b_1 = 0.00145 \text{ seg/m} \quad \delta_1 = 2,04 \times 10^{-4} \text{ seg/m} \quad \delta_2 = \pm 0,74 \text{ seg/m}$$

La fórmula (73) con el valor de b que figura en (75), es decir la fórmula

$$T_1 = 0,0209 l \quad (77)$$

da en cambio para los edificios usados en el cálculo de b_1 :

$$\delta_2 = \pm 0,38 \text{ seg/m}$$

Aun para $\Gamma > 7$ ella se acomoda entonces mejor a los datos que la fórmula (76).

Si en (77) asignamos al mayor período T_1 de los edificios el valor 0,6 segundos en el que frecuentemente suele adquirir X_m su máximo (Fig. 2), resultaría para l el valor 29 m. Aceptando que los edificios sean principalmente deformables por el esfuerzo de corte —como parece razonable de acuerdo a los resultados precedentes— el segundo período sería igual $T_1/3$; y si a ese período le asignamos el valor de 0,6 segundos resultaría $T_1 = 1,8$ segundos, y por ende para l de acuerdo a (77) el valor 86 m. Para edificios de menos de unos 30 m de altura, sería por consiguiente aplicable la fórmula (70) para calcular la carga q ; vale decir que cabría considerarla como constante. Y para edificios entre unos 30 y 85 m sería aplicable la fórmula siguiente que se obtiene haciendo $k = 1$ en (72):

$$q = -2\pi\rho S \frac{X^*}{T^*} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{X''}{X^*} \frac{T^*}{T_1} \beta_1 v_1(z) \right] \right\}$$

o dándole a $v_1(z)$ y β_1 las expresiones que les corresponde en el caso de edificios deformables por el esfuerzo de corte de acuerdo a las fórmulas (23) y (37) respectivamente:

$$q = -2\pi\rho S \frac{X^*}{T^*} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{X''}{X^*} \frac{T^*}{T_1} \right] \frac{4}{\pi} \text{sen} \frac{\pi z}{2l} \right\}$$

Como $X_1'' < X^*$ y $T^* < T_1$, el corchete resulta ser positivo y menor que 1 y, por ende, el factor

$$\left[1 - \frac{X''}{X^*} \frac{T^*}{T_1} \right] \frac{4}{\pi}$$

estará comprendido entre 0 y $4/\pi$.

Mientras su valor sea menor que la unidad —lo que ocurrirá para valores de T_1 próximos a T^* , es decir, para edificios de altura próximos a 30 m— el producto

$$\left[1 - \frac{X''}{X^*} \frac{T^*}{T_1} \right] \frac{4}{\pi} \text{sen} \frac{\pi z}{2l}$$

será también menor que la unidad y la carga q resultará decreciente con la altura. Cuando eso no ocurra, la carga será decreciente hasta cierta altura en que llegará a anularse para hacerse después creciente a partir de ella.

BIBLIOGRAFIA

- (¹) JOSEPH YOUNGER y LE CONTE, *Bulletin Seismological Society of America*, Vol. 22, March 1932.
- (²) L. M. HOSKINS, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 64, año 1938, págs. 1993 y sigts.
- (³) S. GERSHANIK, *Contribución al estudio de cargas sísmicas sobre edificios*, Publicaciones del Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de la Plata, Serie Geofísica, VIII, 1, 1951.
- (⁴) *U. S. Coast and Geodetic Survey Earthquake investigations in California*, Special Publication, N° 201.
- (⁵) J. L. ALFORD, G. M. HOUSNER y R. R. MARTEL, *Spectrum Analyses of strong Motion Earthquakes*, California Institute of Technology 151, y *Bull. Seismological Society of America*, Vol. 43, number 2.
- (⁶) Véase el trabajo de JACOBSEN en la página 51 de la publicación especial N° 201, citada en (⁴).
- (⁷) COURANT e HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I, Cap. V, § 10.
- (⁸) L. COLLATZ, *Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen*, Cap. II, § 52.
- (⁹) Idem, Cap. II, § 5. 1.
- (¹⁰) COURANT-HILBERT, *Loc. cit.*, III, § 5.
- (¹¹) G. HAMMEL, *Integralgleichungen*, Cap. I, § 6.
- (¹²) G. HOUSNER, *Bull. Amer. Seismological Society*, Vol. 31, N° 2.
- (¹³) J. A. SERRET, *Cours de Calcul differential et integral II*, Cap. IX, Gauthiers-Villars.
- (¹⁴) A. BLAKE, *The results of strong motion measurements. Proceedings of 1935 Meeting Eastern Sec. Seismological Society of America.*