Publicaciones de la Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de la Universidad Nacional de [redacted] La Plata

LOS FUNDAMENTOS DE LA PROBABILIDAD

DE LAPLACE A NUESTROS DIAS

EXPOSICION CRITICA

Por **EDUARDO H. DEL BUSTO**

2a. EDICION

EVA PERON, Prov. de Bs. As.
República Argentina
Mayo, 1955

Eduardo H. del Busto

LOS FUNDAMENTOS DE LA PROBABILIDAD

(De Laplace a nuestros días)

Exposición Crítica

Tesis Doctoral

(1953)

A la memoria de mi padre

A mi madre

A los Doctores Durañona y Sagastume

Al recuerdo de Hilario Magliano.

A mis profesores.

A F.E.Maffei.

A mis condiscípulos y hermanos.

ADVERTENCIA DE LA SEGUNDA EDICION

Aunque la primera edición (mimeográfica y de muy reducido tiraje) de este trabajo, se realizó en agosto de 1953, aún no habíamos tenido oportunidad de estudiar el folleto de R. CARNAP, The Continuum of the Inductive Methods (Chicago, 1952) tan importante y de tanto valor en la fundamentación de la probabilidad.

Nos hemos ocupado, en otra parte y con algún detalle, de la tesis sostenida por ese autor, y nos parece innecesario insistir en la conveniencia de estudiarlo e interpretarlo, al lado de otros tan significativos como él.

Además de la presente advertencia nos limitamos a añadir que esta segunda edición contiene, con respecto a la primera, algunos agregados y numerosas correcciones formales.-

EL AUTOR

P R E F A C I O (*)

1.- El modesto trabajo que presentamos, es fruto, todavía inmaduro, de cerca de diez años de lecturas sobre la materia.

Debemos a nuestro querido profesor, el Dr. HILARIO MAGLIANO ya desaparecido, la inquietud y el apasionamiento por el tema, que nos trasmitió desde sus clases, anteriormente.

Como acto de estricta honradez, tenemos que confesar que cuando empezamos nuestra tarea, nos habíamos propuesto alcanzar un resultado bastante más importante de los aquí logrados, si hay algunos que merezcan ser considerados tales. En efecto, pretendíamos formular, por nuestra cuenta, una fundamentación de la probabilidad acorde con las opiniones nuestras, que estimábamos acertadas.

Para cerciorarnos del valor de esas opiniones, procedimos a la investigación bibliográfica; asombrándonos, al principio, de que lo que suponíamos original y propio ya estaba dicho, y mucho mejor, por autores de fama reconocida. Pero, varias veces, los autores con los que coincidíamos pertenecían a escuelas distintas, opuestas entre sí.

Se nos ocurrió, entonces, como primera medida, buscar el entronque de las ideas sobre fundamentación de la probabili—

(*) De la primera edición.-

dad, hallado el cual - nos prometimos - reiniciaríamos el intento de conseguir la formulación personal.-

Sin embargo, ésta no llegó. La crítica y la comparación nos fué volviendo exigentes con nosotros mismos, y nos fué cercenando la capacidad de subir tan alto como ansiábamos.

Nos ocurrió lo que a Ícaro: derretida la cera por los ardientes rayos del sol, se sepultó en el mar. Pero las plumas continuaron balanceándose en el aire del espacio, como protesta muda contra su destino.

Esto que traemos en las páginas siguientes, constituye algo así como las plumas de nuestra primera intención.

2.- Sobre la base de la información bibliográfica a nuestra disposición y que, según entendemos, abarca los más conspícuos representantes de las distintas escuelas, hemos conseguido trazar un panorama general, cuyo valor, principalmente, reside en permitir una visión de conjunto, objetiva y sintética, de dichas escuelas.

Una pequeña parte del presente trabajo - en especial las discusiones habidas en la década anterior - fué adelantada ante el Primer Coloquio Argentino de Estadística (') (Mendoza, julio de 1952), y mereció ser debatida públicamente en esa oportunidad.

Hoy procedemos a completar esa parte con otras monografías que nos fué posible conocer y con una crítica de las apreciaciones sostenidas; y la integramos con la referencia a las demás doctrinas fundamentales expuestas antes de 1945. De esta manera, podemos ahora ofrecer la visión de conjunto desde LAPLACE hasta nuestros días (1953).-

Una advertencia para concluir. La división en capítulos no significa siempre una clasificación de las escuelas. Se jus

---

(') Cfr. Estocástica, año 1, Nº 1, órgano de la Sociedad Argentina de Estadística.-

tifica sólo por el deseo de alcanzar claridad en la exposición, en homenaje a la cual hemos sacrificado, a veces, el orden cronológico o de estricta afinidad de fondo (¹).-

Eduardo Hernán del Busto

Agosto de 1953

(¹) Así, por ejemplo, el capítulo consagrado a REICHENBACH podría ir siguiendo al que trata de las teorías frecuentistas; y el dedicado a KOOPMAN, a continuación del referente a las de la creencia racional.-

C A P I T U L O   I

LA TEORIA CLASICA

La posición de Laplace en la historia del cálculo de probabilidades. La definición "clásica" y sus limitaciones. Las teorías abstractas.

3.- Debe concederse a LAPLACE el mérito de haber sintetizado y organizado en una sola gran teoría todo el cúmulo de estudios, opiniones y problemas que, en torno al azar y a la probabilidad, se había formado a través de largos períodos históricos. No podremos sino referirnos a su obra al comenzar nuestro estudio; porque esa obra, se nos ocurre, es tronco robusto del cual parten casi todas las concepciones de nuestros días como ramas primarias o secundarias, y al cual convergen, en maraña nutricia, las ideas de muchos seres anónimos, de grandes filósofos, de poetas, de hombres de ciencia, de comerciantes, de biólogos, de jugadores: Los nombres de KEPLER, GALILEO, PASCAL, FERMAT, el caballero de MÉRÉ (gran jugador), HUYGENS, LEIBNIZ (en Arte Combinatória, la primera de sus obras matemáticas), SANTIAGO BERNOULLI (Ars Conjectandi), MONTMORT, DE MOIVRE, NICOLAS BERNOULLI, BUFFON, JUAN BERNOULLI, DANIEL BERNOULLI, EULER, D'ALEMBERT, BAYES, LAGRANGE, CONDORCET, GAUSS y TREMBLEY; esos nombres, con toda su herencia cultural (que se remonta a ARISTOTELES pasando de alguna manera por DANTE, exponente de una época) se juntan en LAPLACE, concluyen su aislado peregrinaje por los siglos, y se concretan en una gran teoría de la probabilidad, partiendo de la cual pronto llegaremos a una po lifurcación sorprendente (').-

Muchas cosas ha dicho LAPLACE sobre la probabilidad. Estaría mal si no recordáramos algunas, aunque parezcan todavía desconectadas de una sola idea directriz; pero es que son, en verdad, gérmenes de concepciones modernas que no siempre han dado a conocer su origen. Anotemos las más importantes:

a) La mayoría de los más importantes problemas de la vida no son más que problemas de probabilidades;

b) Los principales medios para alcanzar la verdad -la inducción y la analogía - se fundan en las probabilidades; y, por ende, todo el sistema de los conocimientos humanos;

c) El azar no es más que la expresión de nuestra ignorancia respecto a las causas verdaderas (Este pensamiento se impone a la mente determinista de LAPLACE como explicación de aquello tras lo cual no aparecen nítidamente las causas finales, según lo requiere el principio de razón suficiente);

d) La probabilidad se relaciona en parte con esa ignorancia y en parte con nuestros conocimientos;

e) La teoría del azar consiste en reducir todos los eventos de la misma naturaleza a un determinado número de casos igualmente posibles; es decir, a casos tales que estemos igualmente inseguros de su existencia;

f) La probabilidad es un número fraccionario cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de casos igualmente posibles;

g) La certeza y la probabilidad son comparables; aunque haya diferencia esencial entre los respectivos estados de espíritu;

h) La teoría de la probabilidad se relaciona con cuestio

(') Aparte de la obra histórica de TODHUNTER, es de interés consultar el libro de crítica y exégesis de DU PASQUIER (Cfr. Bibliografía).-

nes tan sutiles que no sorprende que, con los mismos datos, dos personas encuentren resultados diferentes;

i) La teoría de la probabilidad se aplica a la ciencia natural cuando se trata de observaciones numerosas; también se aplica a las ciencias sociales;

j) La teoría de la probabilidad no es, en el fondo, más que el buen sentido reducido al cálculo;

k) La teoría de la probabilidad hace apreciar con exactitud lo que los espíritus justos sienten por una especie de instinto.

Estas ideas de LAPLACE - que nosotros hemos extraído, a veces casi textualmente, de la famosa introducción a su Théorie analytique des Probabilités (1812), después publicada en forma separada como Essai philosophique sur les Probabilités, (hay traducción al español) - constituyen la fundamentación tácita o explícita de toda su teoría. Hoy, es cierto, notamos incompatibilidades entre algunas de sus afirmaciones; pero eso es justamente lo más valioso para nuestro estudio; porque, según pongamos el acento en ciertas partes de ellas, iremos descubriendo el origen de casi todas las concepciones modernas.

Invitamos a quienes nos hagan el honor de leernos, a que vuelvan a este capítulo después de haber recorrido el resto de nuestro modesto trabajo, a fin de certificar el aserto anterior. Tornará a nosotros entonces el símil del árbol, cuyo tronco es LAPLACE; y pensaremos además en BACH, quien ha sido comparado, no a un arroyo - como indica su nombre - sino a un mar donde desembocan corrientes fluviales de muy diversas procedencias.

4.- No obstante el conjunto de ideas que ocupaban la mente de LAPLACE al tratar la teoría de la probabilidad, se acepta frecuentemente una de ellas - que él enunció en modo explícito (*) - como la definición de probabilidad que adoptaron los

(*) Fué enunciada también por autores anteriores a LAPLACE.-

tratadistas clásicos hasta POINCARE; a saber:

"La probabilidad de un evento es la relación entre el número de casos favorables y el número total de casos igualmente probables".-

4.1.- LAPLACE dice "igualmente posibles"; pero ello no modifica el concepto que quiso expresar.

Comentando la definición (clásica), afirma CASTELNUOVO que el concepto de "igualmente probables" es convencional. Así, para el constructor de dados ha de significar, en último extremo, que el cubo goza de las propiedades de la simetría, y su baricentro coincide con el centro geométrico de la figura; en otras cuestiones - como en la teoría de los errores de observación, en los problemas de estadística, etc. - la experimentación nos dirá cuál de las hipótesis que formulamos previamente es más o menos probable, supuesto que admitamos como postulado la igual probabilidad de los eventos individuales.

Si admitiéramos el criterio convencional - por demás impreciso, adelantemos - la definición clásica no tendría el carácter de un círculo vicioso. Sin embargo, POINCARE había reconocido la presencia de tal círculo vicioso y había reputado indefinible la probabilidad sin formular una petición de principio.-

4.2.- Dos objeciones fundamentales se pueden sostener contra la definición clásica. MISES ha expuesto y desarrollado algunas con elocuencia suma, y han de considerarse, en cierta medida, como definitivas.

En primer lugar, queda por aclarar qué se entiende por "igualmente posible" o "igualmente probable"; es decir, la cuestión pasa a ser trasladada a otra de manera alguna clara. No cabe distinguir tampoco, con sutilezas lingüísticas, lo probable de lo posible; porque el único matiz diferencial entre ambas significaciones radica en que, cuando sumamos todas las probabilidades de cada una de las alternativas, llegamos a la unidad; de modo que lo probable encierra una especie de norma lización de lo posible, pero nada más. [Claro está que esta discusión se halla encuadrada en un orden de ideas estrictamente clásico, que no admite ninguna interpretación ajena al mismo].

En segundo lugar, la definición clásica podrá aplicarse cómodamente al estudio de los juegos de azar o a cuestiones que admiten un modelo isomorfo a dichos juegos; es decir, podrá aplicarse a sólo aquellos problemas en que se presentan casos igualmente posibles. Pero no al estudio, por ejemplo, de las probabilidades geométricas, donde interviene el continuo; ni a otros muchos, quizás los más (¿Cómo hablar de casos igualmente probables en problemas de probabilidades de muerte ?).

4.3.- Puede intentarse salvar la segunda objeción, limitando la noción de probabilidad a lo que ha dado en llamarse probabilidad "matemática" y que nosotros, en cambio, denominaríamos "aritmética". Nos ceñiríamos a la teoría combinatoria y excluiríamos <u>a priori</u> toda posibilidad de penetrar en el mundo físico, contentándonos con perder el rasgo de fecundidad característico del método probabilístico.

Diríamos con PEANO:

"Si existe un grupo de <u>N</u> letras (con $\underline{N} = n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots + n_r$) constituído por n_1 letras a_1, n_2 letras $a_2, \ldots\ldots$ y n_r letras a_r, la probabilidad de que una letra perteneciente a la clase de las a_1, $a_2, \ldots, a_r$ sea una letra a_s es n_s/N".

Esta definición nos servirá para los (pocos) problemas en que sea posible construir un modelo isomorfo a la clase de letras y, evidentemente, está libre de todo círculo vicioso; pero es estrecha frente a la aplicabilidad del cálculo de probabilidades.

4.4.- Otro intento de fundamentación abstracta, sobre la base del concepto primitivo de evento, es el de BOHLMANN (1908), enunciado con estos postulados:

1) La probabilidad de un evento E es un número positivo p, a él relativo;

2) $p = 1$ si es cierto E;

3) Dos eventos E_1 y E_2 se excluyen, y, respectivamente, tienen las probabilidades p_1 y p_2; la probabilidad de que se produzcan E_1 ó E_2 es $p_1 + p_2$;

4) Si p_1 es la probabilidad de E_1 y p_{12} la probabilidad de E_1 y E_2 juntos, la fracción p_{12}/p_1 es la probabilidad de E_2 cuando ya apareció E_1.

4.5.- CANTELLI afirma que, para que una teoría sea verdaderamente abstracta, no debe apelar a ningún concepto de basamento empírico como el de evento, que usa BOHLMANN. Sin embargo, el camino de éste ha sido proseguido y depurado a extremos insospechables, como veremos después.

Pero, por el momento, seguimos dando la razón a POINCARE.

5.- Sin modificar sustancialmente la línea de pensamiento que conforma la teoría clásica, tratadistas modernos como BOREL y KOLMOGOROV han adoptado un camino abstracto, colocándose en un punto de vista general desde el cual no es necesario referirse a la naturaleza de los elementos considerados, sino sólo en el instante de la aplicación de la teoría. Este camino constituye, al decir de NEYMAN, la "teoría clásica modernizada". Dudamos que la denominación resulte un hallazgo feliz.

Por razón de espacio no nos referiremos en este capítulo al detalle de algunas teorías de esta corriente fundamental; sino que lo haremos más adelante. Pero, de una manera general, podemos advertir que sus primeros adherentes admitían el postulado empírico del azar: "en una serie de pruebas repetidas un gran número de veces en las mismas condiciones, cada evento se manifiesta con una frecuencia relativa que es casi igual a su probabilidad; la aproximación crece con el número de pruebas".

FRECHET y HALWACHS enunciaban la ley experimental del azar: "prácticamente, si un evento se produce cierto número de veces, la frecuencia de ese evento en grupos muy numerosos, varía poco".

FRECHET vió luego que, admitiendo que esa "frecuencia que varía poco" es una especie de constante física, puede derivarse una definición empírica de la probabilidad (objetiva).

Es decir que, si los clásicos modernizados aceptaban en cierto momento el postulado empírico, estaban ya tendiendo un puente para comunicarse con la fundamentación empírica de la probabilidad.

5.1.- Tal puente no existe en otros representantes más conspícuos de esta dirección. Y es porque, según dijo CANTELLI, el desarrollo del cálculo clásico de la probabilidad importa tres instantes:

1°) Búsqueda de la significación experimental de la noción de probabilidad y de la noción de igual probabilidad; y justificación experimental de los principios de probabilidades totales y compuestas;

2°) Elaboración de una teoría abstracta independiente de las nociones físicas de probabilidad;

3°) Verificación de la teoría abstracta en los hechos experimentales; es decir, verificación de que la teoría abstracta es una elaboración aplicable al mundo físico.

Para nosotros es rasgo elocuente la circunstancia de que a las ideas de FRECHET habremos de volver al iniciar el estudio de von MISES, representante supremo de la concepción frecuentista de la probabilidad.-

C A P I T U L O   II

LAS TEORIAS CLASICAS MODERNIZADAS

La teoría clásica "modernizada". Axiomas de Kolmogorov. Lo empírico en Kolmogorov. Los eventos fortuitos y la teoría de los conjuntos. La continuidad. La axiomática de Cramer. Generalizaciones. Objeciones a Kolmogorov. Los reticulados de Kawada.

6.- Los grandes probabilistas clásicos, desde LAPLACE a POINCARE, sabían que la *parte deductiva* del cálculo de probabilidades podía inferirse de ciertas propiedades de la probabilidad; a saber: ésta se halla comprendida entre 0 y 1 (extremos incluídos), verifica el teorema de las probabilidades totales, y verifica el de probabilidades compuestas.-

Dichas propiedades pueden ser objeto de un tratamiento axiomático, sin referencias a ninguna noción "física" de probabilidad.

Partimos de la teoría de los conjuntos. La probabilidad consiste en el evento de que un punto M de un segmento S se encuentre sobre el *conjunto* E de puntos de ese segmento. Se supone la existencia de p (E) y se la define *descriptivamente* dando las propiedades que ha de cumplir: por ejemplo, se puede requerir que p (E) sea una función aditiva del conjunto E, en sentido restringido. Pero también se puede utilizar, según innovación fundamental de BOREL (1909), su concepto de medida e introducir la función p (E) en la categoría de las funciones completamente aditivas.

La ventaja de la aditividad completa radica en la simplificación de lenguaje, sobre todo con relación a la medida, y deja abierto el camino de la axiomática, que constituye hoy la teoría clásica modernizada de la probabilidad.

El afán de sus sostenedores es elaborar una disciplina formal (abstracta) de la misma especie que la geometría o el álgebra axiomáticas; vale decir, una disciplina hipotético-deductiva.

7.- Así KOLMOGOROV parte de ciertos elementos, de cuya naturaleza no se ocupa, llamados eventos elementales ξ, η, ζ, ... que constituyen una colección E. La colección E consta de subconjuntos, que denominaremos eventos fortuitos. Formamos un conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de E y establecemos los siguientes axiomas:

1.- $\mathcal{F}$ es un "cuerpo" de conjuntos; o sea, la suma, producto y diferencia de dos subconjuntos de $\mathcal{F}$, también pertenece a $\mathcal{F}$.-

2.- $\mathcal{F}$ contiene a E.

3.- A cada subconjunto A de $\mathcal{F}$ se le asigna un número real no negativo P(A), que se llama probabilidad del evento (fortuito) A.

4.- P (E) = 1.

5.- Si A y B no poseen elementos comunes:

$$P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B)$$

Estos cinco axiomas describen el concepto de cuerpo de probabilidad.

Si E consiste en un solo elemento ξ y $\mathfrak{F}$ consiste de E y del conjunto nulo 0, P(E) = 1 y P(0) = 0 por axiomas 4 y 5.

Podemos, enseguida, construir cuerpos de probabilidad. Sea E un conjunto finito arbitrario:

$$E = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$$

y sea $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ un conjunto arbitrario de números no negativos cuya suma $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. Entonces $\mathfrak{F}$ se toma como el conjunto de todos los subconjuntos de E y se pone:

$$P\{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_\lambda}\} = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\lambda}$$

A las $p_1, p_2, \dots, p_k$ se les llama probabilidades elementales, por corresponder a los eventos elementales ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k.-

7.1.- Partiendo de estas premisas, el desarrollo puramente matemático no ofrece dificultades importantes. Pero KOLMOGOROV, interesado en mostrar desde ahora la aplicabilidad de su teoría, hace un breve paréntesis para indicar cómo debe procederse al respecto y utiliza "en gran medida, la obra de R.v. MISES" (Cfr. KOLMOGOROV, A.N., Foundations of the Theory of Probability, Chelsea, N.York, 1950, pág. 3, nota 4, refiriéndose al Wahrscheinlichkeitsrechnung, pág. 21-27).

Por ejemplo: El complejo de condiciones que intervienen en el hecho de arrojar dos veces una moneda sea $\mathfrak{S}$. En cada lanzamiento puede aparecer cara o ceca; así que los eventos elementales, al arrojar dos veces una moneda, resultan ser cuatro: Cara-Cara, Cara-Ceca, Ceca-Cara, Ceca-Ceca. Si el evento A significa la aparición de una repetición, entonces consisti rá del primero y cuarto de aquellos eventos elementales. De esta manera, todo evento puede considerarse como un conjunto de eventos elementales.

Pero deberemos admitir que a cierto evento A, que puede o no presentarse en las condiciones $\mathfrak{S}$, se le asigna un número P (A) tal que:

a) Cumple la ley experimental del azar;

b) Cumple la ley "única" del azar; si P(A) es muy pequeña nosotros podremos actuar como si A no haya de producirse jamás.

¿Cuándo P(A) es "muy pequeña"?. No hay respuesta absoluta; depéndese de la escala en que uno se coloca, dice FORTET. Así, para las consecuencias de la vida diaria, $P(A) < 10^{-6}$ es la probabilidad de un evento casi imposible (ser embestido por automotores en las calles de París); en escalas cósmicas, decir que P(A) es pequeña valdrá tanto como pensar que $P(A) < 10^{-100}$ ó $P(A) < 10^{-200}$.-

Tanto la ley experimental como la llamada ley única(de BOREL) son de naturaleza extramatemática. KOLMOGOROV sólo se refiere a ellas; pero en seguida prosigue su dirección axiomática prescindiendo de toda otra digresión, tan significativa como la presente.

7.2.- Para continuar el pensamiento axiomático de KOLMOGOROV, dáse un <u>modelo</u> sobre la base del siguiente diccionario bilingüe.

TEORIA DE CONJUNTOS	EVENTOS FORTUITOS
1.- A y B no tienen elementos comunes; es decir AB = O.	1.- A y B son incompatibles
2.- A B...N = O.	2.- A,B,...,N son incompatibles.
3.- A B... N = X.	3.- X es el evento de la ecu

rrencia simultánea de los eventos A, B,...., N.

4.- $A + B + \dots + N = X$, donde + indica suma en general, aún cuando los conjuntos tengan elementos comunes.

4.- El evento X significa la aparición de por lo menos uno de los eventos A,B,...,N.

5.- $\bar{A}$, conjunto complementario.

5.- $\bar{A}$, evento opuesto que consiste en que no se presente A.

6.- $A = 0$.

6.- A es un evento imposible.

7.- $A = E$.

7.- El evento A debe ocurrir.

8.- $A_1 + A_2 + \dots + A_n = E$. $\mathfrak{A}$ es el sistema de los conjuntos A_i.

8.- A_1, A_2,...,A_n son los posibles resultados de un experimento $\mathfrak{A}$.

9.- $B \subset A$.

9.- Si aparece el evento B, aparece inevitablemente el A.

7.3.- Sin dificultad, se demuestran las siguientes proposiciones (*):

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

ya que $\bar{E} = 0$, $P(0) = 0$;

si A, B,..., N son incompatibles $P(A + B + \dots + N) = P(A) + P(B) + \dots + P(N)$;

si $P(A) > 0$, $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ es, por definición, la probabili

(*) Un resumen comentado, con referencias y notas de interés acerca de la axiomática de KOLMOGOROV se puede leer en S. RIOS "Introducción a la axiomática del cálculo de probabilidades", Las Ciencias, 12, Nº 3, Madrid.-

dad condicional de B (bajo la condición de A); es decir:

$P(AB) = P(A)\ P_A(B)$; y, por inducción, el teorema del producto:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1 A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Demuéstranse después los teoremas, de la probabilidad total:

$$P(X) = P(A_1)\ P_{A_1}(X) + P(A_2)\ P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_n)\ P_{A_n}(X)$$ donde

X es arbitrario y donde $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$;

y el teorema de BAYES:

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)\ P_{A_i}(X)}{P(A_1)\ P_{A_1}(X) + P(A_2)\ P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_n) P_{A_n}(X)}$$

$(i = 1,2,3,\ldots,n)$, donde A_i son las "hipótesis" o "causas" y $P(A_i)$ las probabilidades a priori de A_i.

7.4.- Los cuerpos de probabilidad considerados hasta ahora son los cuerpos generalizados. KOLMOGOROV introduce un sexto axioma para poder referirse a los cuerpos infinitos. Este axioma no puede ser referido a conceptos empíricos y deberá considerarse originado por un proceso de idealización.-

Axioma 6 (de continuidad): Sea una sucesión decreciente de eventos $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ de $\mathcal{F}$, tal que $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots = 0$, entonces:

$$\lim P(A_n) = 0 \text{ para } n \longrightarrow \infty$$

Pruébase que el axioma 6 es independiente de los cinco anteriores.

Con el axioma de continuidad se procede a demostrar, teniendo en cuenta el teorema de adición, que la probabilidad P(A) es una función de conjunto completamente aditiva sobre $\mathfrak{F}$ y, por fin, que un cuerpo de probabilidad es un cuerpo borelia no de probabilidad si el correspondiente cuerpo $\mathfrak{F}$ es un cuerpo de BOREL.

No nos detenemos más en la posición de KOLMOGOROV (*).Pasamos directamente a su discípulo CRAMER, donde hallaremos la oportunidad de aclarar la noción de cuerpo de BOREL, a través de los conjuntos borelianos.

8.- La clase de los conjuntos de BOREL (B-conjuntos) está formada por todos los conjuntos que pueden ser construídos partiendo de intervalos J, mediante la aplicación de un número finito o infinito de veces de las tres operaciones elementales: reunión o suma lógica, intersección o producto lógico, suma directa.

Si S_1, S_2,... son B-conjuntos de un espacio euclídeo k-dimensional R_k, se cumplen:

$$\overline{\lim} S_n = \lim (S_n + S_{n+1} + \dots);$$

$$\underline{\lim} S_n = \lim (S_n S_{n+1} \dots);$$

(*) MISES ha observado que el sistema de KOLMOGOROV es incompleto, pues existen problemas en que deben utilizarse simultáneamente varios cuerpos de probabilidad. En consecuencia, no bastará el concepto de medida referido a un solo espacio y tendrá que hallarse el producto cartesiano de dos o más espacios. En este producto tendrán sentido los pares (X,Y) o triples (X,Y,Z), etc. de variables aleatorias.(Cfr. Sur les fondements du calcul des probabilités, Coloquio de Géneve, Actualités Scientifiques, N° 735, 1938).-

si $\overline{\text{lím}}\, S_n = \underline{\text{lím}}\, S_n$ hablaremos de lím S_n, que resulta ser un B-conjunto.

Los conjuntos de que trata CRAMER son B-conjuntos puntuales; admite también que la función de probabilidad es completamente aditiva; y agrega dos cuestiones más:

a) Todas las funciones $g(X)$, definidas por los puntos $X = (\xi_1, \ldots \xi_k)$ de un espacio R_k, se suponen BOREL-medibles (o B-medibles). Es decir, si a y b son dos números reales, el conjunto puntual X para el cual $a < g(X) \leq b$, es un B-conjunto;

b) Para la introducción de los valores medios y los de expectación, CRAMER utiliza la integral de LEBESGUE - STIELTJES; en cambio KOLMOGOROV echaba mano a la integral de FRECHET (*).-

La axiomática de CRAMER se realiza, entonces, sobre la base de un espacio euclídeo k-dimensional, R_k, cuyos puntos variables son $X = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, teniendo en consideración la clase de todos los B-conjuntos S en R_k. A X se denomina punto fortuito, vector fortuito o variable fortuita.

Los axiomas de CRAMER son:

1) A todo B-conjunto S corresponde un número no negativo $P(S)$, que se llama probabilidad del evento $X \subset S$.

$P(S)$ es una función de conjunto, se llama <u>función de probabilidad</u> de X y define la <u>distribución</u> de probabilidad en R_k.

2) $P(R_k) = 1$.

3) $P(S)$ es una función completamente aditiva, y los conjuntos S son B-conjuntos sin puntos comunes.

8.1.- En esencia, el sistema elaborado por CRAMER parte de esta idea fundamental: la probabilidad de un evento es un número asociado a ese evento, y los axiomas expresan sola-

---

(*) Por eso suele llamarse a la teoría de los párrafos 7 a 7.4, axiomática de KOLMOGOROV-FRECHET.-

mente las operaciones a que puede someterse ese número (Cfr. lo que dijimos de BOHLMANN, Cap. anterior).

En primer lugar, advierte que la probabilidad puede considerarse como una función aditiva de conjunto, y después postula la existencia de esa función.

De otra manera: CRAMER (tanto como KOLMOGOROV) admite un concepto de probabilidad objetiva, análogo en esencia al de FRECHET. Y afirma que la verificación empírica de su teoría se supedita a la comprobación de que la probabilidad y la frecuencia empírica se confunden prácticamente al aumentar el número de observaciones. Pero, al igual que KOLMOGOROV, no dedica su obra fundamental sino al desarrollo matemático de su axiomática, con exclusión de toda aplicación; vale decir, también él se limita a construir un modelo matemático para cuerpos de hechos empíricos. Por ende, las conclusiones de tal axiomática son verdaderas en el único sentido en que lo pueden ser: esto es, cuando son implicaciones del conjunto de axiomas.

Las diferencias entre CRAMER y KOLMOGOROV residen sólo en el aparato matemático empleado por ellos; diferencias no muy grandes, por cierto.

8.2.- No existe, empero, necesidad de ceñirse a espacios euclídeos, como lo hace CRAMER: es fácil elaborar una teoría matemática de la probabilidad basada en espacios abstractos y utilizar nociones de medida más generales; como construirla, no para uno, sino para varios espacios abstractos - con lo cual se amplía grandemente el concepto matemático de probabilidad. Tampoco es indispensable, por otra parte, en la generalidad de los problemas de índole práctica, recurrir a las nociones de integral y medida antes mencionadas: muchas veces basta considerar la integral de RIEMANN.

Quienes se interesen por estas conclusiones pueden revisar diversas obras, cuyo comentario no hacemos por corresponder a un trabajo de otra naturaleza (Cfr. CANSADO, MARTINEZ SALAS, REY PASTOR y SANTALO SORS, op. cit. en la Bibliografía).

9.- El punto de partida de la mayor parte de las teorías clásicas modernizadas es KOLMOGOROV. Este autor ha sido blanco de objeciones de diversa naturaleza: por un lado, los prácticos lo han rechazado sin estudiarlo, debido a la dificultad de su lectura; por otro lado, ha sido criticado severamente por aquellos matemáticos que equiparan la probabilidad y la frecuencia. Entre éstos, MISES lo hace con singular énfasis; pero con poca fortuna, porque razona alrededor de una premisa injustamente atribuída a KOLMOGOROV: suponer que la teoría de la probabilidad es una parte de la teoría de los conjuntos.

TORNIER le rebate el principio de la aditividad completa; pero FELLER demuestra que el propio TORNIER utiliza dicho principio en el mismo sentido que KOLMOGOROV.

Se pretende también decir en cómo y cuánto la teoría de la probabilidad difiere de las matemáticas aplicadas. Sin embargo, las diferencias no son esenciales, porque KOLMOGOROV se limita a construir - como dijimos antes - un sistema axiomático que sólo tiene con el campo de las aplicaciones la remota conexión de las leyes del azar, a las cuales se refiere de paso, como a un apéndice inesencial.

Dos ideas (') de su doctrina son en verdad flojas: el axioma de continuidad, por arbitrario en cuanto a la estructuración axiomática, pues es absolutamente independiente de los demás; pero que se introduce por exigencias de la aplicabilidad; y el concepto de <u>evento</u> (concebido como una relación conjuntual del tipo $X \subset S$), por su falta de contenido intuitivo unívoco, y por ende, por falta de suficiente caracterización.

Por lo demás, la idea madre de esta fundamentación es concebir, <u>objetivamente</u>, la probabilidad de un evento como un

---

(') FORTET ha señalado insuficiencias en los conceptos manejados por KOLMOGOROV (Cfr. párrafo 34.2 b).-

número vinculado al mismo.

10.- El matemático japonés YUKIYOSI KAWADA advierte que la noción de evento elemental de KOLMOGOROV admite más de una interpretación. Esta circunstancia, unida al carácter de modelo axiomático de la fundamentación de KOLMOGOROV, conduce a una teoría polimorfa doblemente: por sí y por la multivocidad del concepto de evento.

Atendiendo a los nuevos desarrollos de la topología, ensaya KAWADA una fundamentación de la probabilidad sin echar mano a la noción de evento; es decir, colocándose en un punto de vista muy general y dando como primitivo el concepto de variable estocástica x.

La variable estocástica es una magnitud matemática, porque podemos postular la existencia de su esperanza matemática $E(x)$. Desde el punto de vista abstracto, nos basta enunciar los siguientes axiomas:

1) Si $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son variables estocásticas, existe una variable estocástica $\underline{z}$ llamada suma de $\underline{x}$ e $\underline{y}$ y que indicamos con $z = x + y$.

2) Si $\underline{x}$ es una variable estocástica y α es un numero real, existe una variable estocástica $\underline{y} = \alpha x$.

3) Las operaciones + y α . tienen las siguientes propiedades:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$$

$$(\alpha \beta) x = \alpha (\beta x)$$

$$1 x = x$$

$$0\,x = 0$$

A la variable estocástica $\alpha .1$ la llamaremos constante; siendo $0.1 = 0$ la constante nula.

4) A cada variable estocástica $\underline{x}$ corresponde un número real $E(x)$ tal que:

$$E\,(\alpha x + \beta y) = \alpha\,E(x) + \beta\,E(y)$$

5) Siendo $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dos variables estocásticas, una de las siguientes relaciones (indefinidas) se cumple:

$$x \geq y \qquad ó \qquad x \ngeq y$$

6) Valen $x \geqq x$; de $x \geqq y$ e $y \geqq x$ se sigue que $x = y$; de $x \geqq y$ e $y \geqq z$ se sigue $x \geqq z$.

7) De $x \geqq y$ se sigue $x + z \geqq y + z$; de $\underline{x} \geqq \underline{y}$ $y \geqq 0$, se sigue $\alpha x \geqq \alpha y$.

8) Para $x \geqq y$ vale $E(x) \geqq E(y)$.

10.1.- Para construir la teoría de las probabilidades debemos ahora construir un dominio de variables estocásticas, que corresponde al cuerpo de KOLMOGOROV. Lo hacemos así:

Def. 1.- Un conjunto $\mathcal{L}$ de variables estocásticas es un dominio de probabilidad si tiene las propiedades siguientes:

(i) $\mathcal{L}$ es un espacio lineal; es decir si $\mathcal{L} \ni x_1$ y se sigue que $\mathcal{L} \ni \alpha x + \beta y$ y que $\mathcal{L} \ni 1$.

(ii) $\mathcal{L}$ es un reticulado vectorial completo con respecto al orden $\geqq$.

(iii) De $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots,\ x_n \in \mathcal{L}$ y $\bigwedge_n x_n = 0$ en $\mathcal{L}$; se sigue que:

$$\lim E(x_n) = 0$$

(La condición (iii) corresponde a la completa aditividad del cuerpo de KOLMOGOROV; pero las exigencias de la Def. 1 son menores que la de este concepto. Si nos limitamos a conjuntos $\mathcal{L}^b$ de funciones medibles o a conjuntos $\mathcal{L}^e$ de funciones integrables, nos reducimos a la teoría de KOLMOGOROV).-

Def. 2.- Una función de realización f en un dominio de probabilidad $\mathcal{L}$, es una función real en $\mathcal{L}$ tal que:

$$\text{(i)} \quad f(1) = 1$$

$$\text{(ii)} \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) \geqq f(y) \text{ para } x \geqq y.$$

10.2.- Con los precedentes axiomas y definiciones KAWADA construye una doctrina abstracta más general que la de KOLMOGOROV y que, desde el punto de vista axiomático es inobjetable. Pero, además, puede dar cuenta de la interpretación frecuentista (tipo MISES) siempre que se modifique el sistema de axiomas y definiciones de esta manera:

Ax. 1.- Dejar en pie los axiomas 1, 2, 3;

Ax. 2.- Para dos variables estocásticas x, y, se dan las variables estocásticas z_1 y z_2 definidas como $z_1 = x \cup y$ y $z_2 = x \cap y$, respectivamente, donde $\cap$ y $\cup$ tienen las siguientes propiedades:

$x \cup x = x$	$x \cap x = x$
$x \cup y = y \cup x$	$x \cap y = y \cap x.$
$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$	$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$
$(x \cup y) \cap x = x$	$(x \cap y) \cup x = x$

$(x \cup y) + z = (x + z) \cup (y + z)$ $\quad$ $(x \cap y)+z = (x \cap z) + (y \cap z)$

$\alpha(x \cup y) = \alpha x \cup \alpha y, \ \underline{\alpha > o}$ $\quad$ $\alpha(x \cap y) = \alpha x \cap \alpha y, \ \underline{\alpha > o}.$

$\alpha(x \cup y) = \alpha x \cap \alpha y, \ \underline{\alpha < o}$ $\quad$ $\alpha(x \cap y) = \alpha x \cup \alpha y, \underline{\alpha < o}.$

$E(x \cup y) \geq E(x) \geq E(x \cap y).$

<u>Def. 3</u>.- También debe modificarse la definición de dominio de probabilidad, dejando en pie las propiedades (i) y (iii) de Def. 1, pero reemplazando la (ii) por (ii)':

(ii)'. $\mathcal{L}$ es un reticulado vectorial completo para las operaciones $x \cup y$ y $x \cap y$.

11.- Los detalles de la obra de KAWADA no podemos darlos nosotros. Pero advertimos que importan novedades desde el punto de vista de la fundamentación. Sus axiomas son más generales que los de KOLMOGOROV; no hacen uso de espacios puntuales; no necesitan del concepto de evento, y permiten introducir la probabilidad en el dominio de los <u>sistemas parcialmente ordenados</u>.

También esbozan, sin desarrollar, la posibilidad de dar cuenta de las doctrinas frecuentistas como la de MISES, claro que mediante la modificación de ciertos axiomas y definiciones, según dijimos arriba.

Su gran mérito, para nosotros ('), reside en ese empleo que hace de los sistemas parcialmente ordenados; en virtud de lo cual - no obstante sustentar tácitamente el punto de vista objetivo - hallaremos más adelante el puente de conexión formal con las "probabilidades intuitivas".

<u>NOTA</u>. Un conjunto ordenado R en el cual cada par de elementos tiene extremo inferior (superior) se llama conjunto re

(') Sin desconocer el antecedente de BIRKHOFF G.,"Lattices and their applications", Bull. Am. Math. Soc., 1939.-

ticulado inferiormente (superiormente). En ese conjunto a cada par de elementos a, b, dados en cierto orden, le corresponde, pues, un elemento de R, unívocamente determinado: su extremo. Indicamos esta circunstancia así: $c = a \wedge b$. Por tanto, $\wedge$ es una operación binaria. Demuéstrase que son propiedades de esa operación: (a) consistencia: $a = a \wedge b$ es equivalente a $a \leq b$; (b) idempotencia: $a = a \wedge a$; (c) conmutativa: $a \wedge b = b \wedge a$; (d) asociativa: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Un reticulado R puede caracterizarse por la operación binaria "ínfimo (.)", cuyas propiedades son: (a) $a \leq b$ si y sólo si $a.b = a$; (b) $a.a = a$; (c) $a.b = b.a$; (d) $a.(b.c) = (a.b).c$.-

Un conjunto R^* que sea reticulado inferiormente y que, al mismo tiempo, lo sea superiormente (es decir, que cumpla las condiciones de R y sus duales), se llamará conjunto reticulado.

Un conjunto reticulado R^* es completo cuando toda parte suya no vacía tiene extremo inferior y superior.

Existen reticulados no distributivos y otros que son distributivos. En particular, los anillos de conjuntos son distributivos.

[Def.] Se dice que x es el complemento del elemento a de un reticulado $R^* = R_{01}$ si: (1) $a \wedge x = 0$ y (2) $a \vee x = 1$.

[Def.] Se dice que un reticulado distributivo R_{01} es un álgebra de Boole si todos sus elementos tienen complemento.

Confróntese las precedentes nociones - útiles en el sistema de KAWADA - con las desarrolladas por KOOPMAN, según decimos en el párrafo 29 y siguientes.

C A P I T U L O   III

LAS TEORIAS DE LA FRECUENCIA

Venn y Coolidge. El empirismo de Mises. El colectivo. Operaciones en un colectivo. Dörge, Copeland y Wald. Çernuschi. Crítica al empirismo frecuentista.

"Probable es aquello que por lo común ocurre".-

ARISTOTELES.

12.- Parece ser J.VENN el primero en expresar claramente el concepto de probabilidad desde el punto de vista empírico. Sus ideas fueron expuestas en The Logic of Chance (1866) y en algunas monografías sobre el azar y sobre la naturaleza de los promedios. En síntesis, sostiene que la probabilidad surge de una proporción fija entre cierto evento y el número total de casos. Esa proporción fija existe como un "límite" al crecer el número de casos, y se presenta principalmente en las cosas naturales: por lo tanto, es la experiencia su clave cognoscitiva. Aparte de ello, cuando no tiene origen empírico, la probabilidad se reduce a la aplicación del cálculo combinatorio.

La posición de VENN, que reconoce precursores muy remotos, fué adoptada y retocada por muchos autores; entre ellos, COOLIDGE.

COOLIDGE, adepto a la doctrina frecuentista, parte de tres presupuestos que él llama "empíricos"; a saber:

1a.) Si un evento, que puede ocurrir en dos formas diferentes, se repite gran número de veces en las mismas condiciones esenciales, la razón entre el número de veces en que aparece en una de esas formas y el número total de pruebas, se aproximará a un límite cuando el último número crezca indefinidamente.

2a.) Si un evento puede ocurrir en cierto número de formas, todas igualmente verosímiles, y si cierto número de éstas es favorable, entonces la razón entre el número de formas favorables y el número total es igual a la probabilidad de que el evento sea favorable.

3a) Si un evento depende de n variables independientes $x_1, x_2, \dots, x_n$, continuas en un continuo n-dimensional, entonces existe una función analítica $f(x_1, \dots, x_n)$ tal, que la probabilidad de que un resultado esté representado por valores de las x_i pertenecientes a los intervalos $x_i \pm \frac{1}{2} d\, x_i$, difiere, en un infinitésimo de orden superior, del valor $f(x_1, \dots, x_n)$ $d\, x_1 \dots d\, x_n$.

No vale la pena discutir el "carácter empírico" de estos presupuestos, sencillamente inadmisibles como tales y no exentos de círculos viciosos.

13.- En cambio, tenemos varios motivos para ocuparnos con algún detalle de la posición de RICHARD VON MISES: el original acento de su teoría; la vasta difusión que ha merecido, por obra de discípulos, exégetas y opositores; la cantidad de críticas que ha provocado; el tono polémico de sus escritos.

Para MISES el único fin de las probabilidades y de la estadística es describir ciertos fenómenos observables (los fenómenos-masa) y ciertos eventos reiterativos. Ese fin va a inspirar toda su doctrina.

Es una doctrina de basamento empírico, pero alcanza una formulación matemática; como la teoría matemática de la electricidad, cuyo origen es empírico.

Pretende descartar el punto de vista, por él llamado escolástico, según el cual la probabilidad proviene de la intuición y es anterior a la experiencia objetiva: todo lo contrario. Descarta la posibilidad de su aplicación a casos aislados, pues sostiene que carece de sentido dentro de sus presupuestos fundamentales. Y echa mano a un aparato matemático sencillo: la teoría de funciones reales y la teoría elemental de los conjuntos.

Vamos a seguir el curso de sus ideas, especialmente a través de sus trabajos Probabilidad, Estadística y Verdad y Sobre los Fundamentos de la Probabilidad y la Estadística (cfr. Bibliografía).

13.1.- Sea una sucesión indefinida de experiencias u observaciones, cada una de las cuales presenta un resultado en forma de un número o de un grupo de números. X sea esa sucesión x_1, x_2, x_3,.....- Llamaremos colectivo al modelo teórico de las secuencias empíricas (o poblaciones). Entonces:

a) En el colectivo, cada frecuencia posee un valor límite si el número de elementos crece sin término. Este valor límite - cuya existencia se admite - es "la probabilidad del atribuyo en cuestión dentro del colectivo correspondiente". El conjunto de todas las frecuencias límites se llama distribución.

b) Para que un problema pertenezca a la teoría de la probabilidad, ha de darse: o la distribución o las frecuencias límites para ciertas sucesiones. Para resolver el problema, sólo podrán ser deducidas - mediante ciertas operaciones - nuevas sucesiones de las cuales habrán de computarse sus distribuciones.

Las sucesiones tienen que cumplir condiciones bien determinadas. Adoptando la nomenclatura de COPELAND, se llama a estas sucesiones, números admisibles. Así, puede afirmar que:

"La teoría de la probabilidad es el estudio de las trans formaciones de los números admisibles; particularmente el estudio del cambio de distribuciones que tales transformaciones implican". O sea, si X es una sucesión (número admisible) y X' es la sucesión deducida (según operaciones que luego diremos), la teoría de la probabilidad trata de los números admisibles X' = T(X), donde T representa la transformación.

MISES define cuatro operaciones irreducibles, que son: selección, mezcla, partición y combinación.

13.2.- Selección. Dado un colectivo, obtenemos otro escogiendo elementos de aquel mediante una operación denominada selección localizada (en inglés, "place selection"). Pues bien, de acuerdo con la azarosidad de los colectivos, las probabilidades no varían en el nuevo colectivo seleccionado.

La selección "localizada" consiste en una transformación de números admisibles. Sea S_n esa transformación. S_n admite los valores 0 ó 1: $S_n = 1$ significa que el dígito n-ésimo de la sucesión original debe ser retenido; $S_n = 0$ significa, en cambio, que el dígito n-ésimo debe ser descartado. La retención o el descarte del elemento n-ésimo depende de los valores precedentes $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, pero no de x_n y siguientes (*).

Por ejemplo, en el juego de cara (K) o ceca (C):

$$\begin{cases} S_n = 1 & \begin{cases} \text{si } n = 1 \\ \text{si } x_{n-1} = C, \text{ cuando } \underline{n} \text{ es primo} \\ \text{si } x_{n-1} = K, \text{ cuando } \underline{n} \text{ no es primo} \end{cases} \\ S_n = 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

La experiencia muestra que X' = S(X) da frecuencias casi iguales que X. Entonces nos vemos obligados a admitir que

(*) Véase párrafo 16 B.

si S es una selección localizada:

$$\text{distr.}\left[S(X)\right] = \text{distr.}\left[X\right]$$

Este resultado empírico abona el principio de que los colectivos son agrupamientos azarosos, en los cuales es imposible formular cábalas o martingalas: descártanse pues los "sistemas" de juego.

En resumen, la primera operación - selección - tiene dos notas significativas: 1a.) permite reducir el número de elementos mediante la selección localizada; 2a.) no hace variar la distribución.

Mezcla. La segunda operación de MISES, mediante la cual, dado un colectivo, obtenemos otro colectivo, es la mezcla.

En ésta, los elementos del nuevo colectivo son los mismos, pero sus atributos son mezcla de aquellos. Por ejemplo: los elementos de un colectivo sean los sucesivos arrojamientos de un dado, y sus atributos sean los seis posibles resultados de cada jugada. Se pide un colectivo nuevo cuyos elementos sean también los arrojamientos sucesivos de un dado, y sus atributos sean "sale par" y "sale impar" (dos atributos).

"Salir par" significa en este caso, que sale 2 ó 4 ó 6; "salir impar", que sale 1 ó 3 ó 5. Es decir, el atributo del colectivo nuevo, involucra o "cubre" a tres atributos del colectivo original. Por lo común, en la operación de mezcla de atributos aparece cubrimiento tal.

[A veces pensamos que, en nuestro idioma, mejor que hablar de "mezclar" podríamos usar la palabra castellana "traslapar", cuyo significado incluye el concepto de cubrimiento.]

Es claro que el problema de calcular el valor de la probabilidad en colectivos derivados por mezcla, se resuelve mediante la regla de la adición. En el caso continuo, mediante la integración.

Partición. Consiste en lo que sigue:

Del conjunto de atributos originales, determinamos un subconjunto; después, retiramos del colectivo inicial, todos los elementos que corresponden a los atributos del subconjunto: estos elementos y atributos conforman el nuevo colectivo.

El número de elementos de éste es necesariamente inferior al del inicial.

La regla operativa consta de dos pasos: 1°) Sumar las probabilidades de los atributos que deben retenerse; 2°) Dividir la probabilidad del atributo que nos interesa, por el valor obtenido en el primer paso.

El procedimiento consiste, pues, en una división de probabilidades: el dividendo es la probabilidad a priori, y el divisor es la probabilidad a posteriori.

MISES abomina de estas denominaciones; prefiere hablar de probabilidad inicial y final, respectivamente, para evitar - dice - toda interpretación de tipo filosófico. Para él, ambas probabilidades son también hijas de la interpretación frecuentista y, por fin, permiten sostener el verdadero significado (empírico) de la famosa regla de BAYES.

Combinación. La cuarta operación de derivar colectivos es la combinación. Se produce así:

1°) Sean los colectivos K y K' independientes. Es decir, la distribución de K' no varía si hemos realizado: una selección localizada S(K) en K, un muestreo en K' por medio de S(K), y otra selección localizada S_1 en la parte pertinente de K'.

2°) El colectivo combinado de K y K' (independientes), tiene elementos y atributos que son combinaciones de los de K y K'.

Aclaremos. Sean K y K' dos colectivos: queremos establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos. En K hay un atributo α cuya frecuencia relativa es n_α /n. En K' hay un atributo β cuya frecuencia relativa es n_β /n.

Cada vez que α aparece en K, anotamos el atributo que aparece en K'. En n_α casos aparece α, y en n_β casos aparece β al lado de α . La frecuencia relativa de la aparición de β en caso de la aparición de α es n_{β}/n_{α} .-

En eso consiste el muestreo.

Se comprenderá que todo colectivo es susceptible de algún muestreo, estableciendo una correspondencia y eligiendo atributos.

Ahora bien, se dice que el colectivo K es independiente del K' si un muestreo sobre K' efectuado a través de K no cambia la distribución de K'.-

MISES fundamenta la independencia en la experiencia, en la mayoría de los casos; en otros, empero, puede obtenerse de la misma definición de colectivo.

En general, la regla operativa que permite combinar colectivos es la regla del producto: la distribución del colectivo resultante es el producto de las probabilidades que tienen los atributos antes de que se combinen los colectivos.-

13.3.- El esquema miseano es como sigue: 1°) Determinar los colectivos iniciales y hallar sus distribuciones; 2°) Caracterizar el (o los) colectivos finales, cuyas probabilidades se pretende conocer; 3°) Aplicar las transformaciones que nos dan las cuatro operaciones fundamentales, a fin de derivar los colectivos finales partiendo de los originales.

La nota característica de MISES es el "colectivo".- La probabilidad tiene sentido si, y sólo si, se refiere a colectivos. A su vez, el concepto de "colectivo" implica dos nociones fundamentales: la existencia de los valores límites de las frecuencias relativas, y el principio de la imposibilidad de inventar "sistemas" de juego; o sea, la existencia del azar.

14.- La teoría de VON MISES ha sido reformulada y modificada por distintos autores, con el objeto de librarla de objeciones más o menos importantes.

K.DORGE limita el concepto de colectivo. Empieza considerando un número finito de secuencias distintas $K_1, K_2, \ldots K_n$, que denomina "colectivos fundamentales". También toma en cuenta un número finito de selecciones localizadas A_1, A_2,..., A_n.

Los colectivos y las selecciones son representables por fórmulas y tanto los K_i como las A_i son elementos de cuerpos numéricos.

DORGE define las siguientes operaciones: Selección A_x sobre el colectivo K_y; selección A_x sobre la selección A_y(selección producto); partición de un K_y; muestreo de K_x mediante K_y. Con respecto a estas operaciones construye el cuerpo de colectivos fundamentales y el cuerpo de selecciones.

Definido el cuerpo, podemos operar, pues, solamente con sucesiones formulizables; con lo cual se eliminan dos críticas al sistema de MISES; a saber: a) Para conocer el valor límite de una secuencia hay que conocer su ley [aquí, ahora, se conoce la ley] ; b) Para saber que un colectivo es derivado hay que asegurar la existencia del colectivo original [aquí, ahora,esa existencia está asegurada, porque los colectivos pertenecen al sistema cerrado de los cuerpos.].

15.- Considerando colectivos con un número finito n de atributos, las n fracciones que definen las probabilidades de cada uno de esos atributos, y cuya suma es 1, definen la "distribución" del colectivo.

COPELAND, para n = 2, y WALD para el caso general (n finito), demostraron que:

Dada una distribución arbitraria y un conjunto numerable arbitario de selecciones localizadas:

a) Es posible definir un colectivo en el cual las frecuencias relativas de los atributos particulares tengan los límites prescriptos por la distribución dada;

b) La distribución no es afectada por ninguna de las selecciones localizadas (*).-

Von MISES creyó que los resultados anteriores probaban

(*) Véase lo que se dice a este respecto en el párrafo 17 c y d.

la consistencia o compatibilidad de su teoría, porque demostraban la "existencia" de colectivos que satisfarían a los axiomas del valor límite y de la invariancia del límite frente a selecciones localizadas.-

Sin embargo, nótese que los casos de COPELAND y WALD se ciñen a n finito y que, para cubrir las hipótesis de MISES, hay que considerar un conjunto infinito de atributos.

MISES introduce restricciones en las proposiciones antes enunciadas que, a estar a los resultados, no cambian el carácter de las selecciones localizadas admisibles. Pero esas restricciones son restricciones a la condición de azar, por esencia ajena a toda legalidad.

16.- FELIX CERNUSCHI se declara partidario de von MISES y afirma que la manera satisfactoria de definir operacionalmente un proceso aleatorio, es mediante el concepto de colectivo.

Pero un colectivo, entiende, es un conjunto teóricamente ilimitado de objetos similares, o una sucesión ilimitada de observaciones, con las propiedades:

a) Las frecuencias relativas de los atributos particulares tienden a un límite fijo;

b) Ese límite no varía si se hacen actuar diversas selecciones, siempre que estas selecciones sean independientes del resultado que corresponde al elemento considerado.

La condición a) es aceptable, según CERNUSCHI, como es aceptable definir otros conceptos físicos - aceleración, densidad, etc. - como pasos al límite.

Sin embargo, la condición b) no puede admitirse.

En efecto, en el juego de "cara o cruz", tomemos la sucesión de ceros y de unos, donde 0 significa "cara" y 1 significa "cruz".

Toda sucesión de ceros y unos puede representarse por un punto del segmento $[0, 1]$.-

Ahora determinamos una regla de selección, fijando una correspondencia biunívoca entre elementos del colectivo que va a derivarse y los elementos obtenidos por la regla de selección. A la selección obtenida, por ser una sucesión de ceros y unos le corresponde un punto en $[0, 1]$.-

No es lógicamente imposible la existencia de un proceso aleatorio de ceros y unos que esté representado por el mismo punto. Es decir, es posible que la selección no sea independiente de los elementos considerados, lo cual puede conducir a resultados contradictorios.-

Para evitar contradicciones (1) como la expuesta, CERNUSCHI propone reemplazar la condición b) por la

b') Si a es un atributo del colectivo, p_a su probabilidad, n_a/n su frecuencia relativa; entonces la probabilidad de hallar una regla de selección para la cual:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_a}{n} \neq p_a, \text{ es cero.}$$

Pero b') introduce la noción de probabilidad en su propia definición. Es decir, hay una petición de principio. Para evitarla, CERNUSCHI establece las siguientes condiciones:

1a.) Sea una regla de selección. Sea $\frac{n_a}{n}$ la frecuencia relativa del atributo a ($a = 1, 2...$) en la sucesión j-ésima. Se forman m sucesiones de n elementos cada una; es decir, se toman m procesos aleatorios equivalentes y, en cada uno, se seleccionan n elementos con una misma regla de selección. Entonces existen los límites:

$$p_a = \lim \frac{\left[\frac{n_a}{n}\right]_1 + \left[\frac{n_a}{n}\right]_2 + \dots + \left[\frac{n_a}{a}\right]_m}{m}$$

(1) Cfr. la regla de selección en el párrafo 13.2.-

(para $n \longrightarrow \infty$, $m \longrightarrow \infty$)

2a.) Dichos límites son independientes de toda regla de selección que se fije arbitrariamente para determinarlos.

Por ejemplo, si llamamos m_k el número de sucesiones para las cuales:

$$\lim \frac{n_1}{n} \neq p_1,$$

la condición 1a.) impone que:

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{m_k}{m} = 0$$

En síntesis, un proceso aleatorio no tiene por imagen <u>una</u> sucesión indefinida determinada, sino, por el contrario, <u>un número infinito</u> de sucesiones indefinidas en las cuales vale la restricción anterior.

Para CERNUSCHI, aquí reside la esencia del azar.

17.- Para finalizar este capítulo, nos basta hacer una apreciación de conjunto de la posición empirista, y dar los elementos indispensables para su crítica.

En primer lugar debemos hacer una aclaración. La posición empirista no está absolutamente divorciada de la clásica ni de la clásica modernizada. Destacados autores que defienden el punto de vista del "modelo matemático" - según hemos caracterizado el capítulo anterior - tienen una posición coincidente con las expuestas en el presente capítulo en lo que se refiere a la naturaleza de la probabilidad. KOLMOGOROV y KAWADA, por ejemplo, creen, como von MISES, que la probabilidad tiene origen en la frecuencia empírica. Sin embargo, aquellos no hacen tema de sus estudios el problema de la naturaleza de la probabilidad, y se limitan, tan sólo a describir la estructura del cálculo probabilístico, utilizando diversos medios matemáticos.

También los empiristas netos echan mano de procedimientos formales, a veces bastante abstractos, para presentar ese cálculo. Y, salvo su adhesión demasiado explícita a la opinión de que la naturaleza de la probabilidad se confunde con la de la frecuencia empírica, el andamiaje de sus teorías, en las etapas más evolucionadas, poco difiere de las teorías matemáticas puras; a punto de que puede dudarse, por serios motivos metodológicos, al ubicar a KAWADA como representante de alguna de las dos tendencias hasta ahora expuestas por nosotros.-

Aparte de esto, los empiristas señalan la preeminencia de la estadística sobre la probabilidad, pues afirman que ésta nace de la frecuencia, y su estudio deviene, por ende, el de una ciencia natural como la física o alguna otra.

Se han advertido deficiencias serias en las fundamentaciones de este tipo. Centrándonos en von MISES, indiquemos varias de esas deficiencias.

a) La existencia del límite de la frecuencia, carece de significación; porque carece de significación matemática (y de eso se trata) la definición de límite en sucesiones cuya ilegalidad es necesario admitir.

Tampoco vale la alternativa de suponer que las sucesiones de frecuencia no obedecen a ninguna ley <u>excepto</u> la de concurrir al límite probabilístico; ni la de ceñirnos a determinadas sucesiones en que ese límite exista, porque de cualquier modo estaremos contradiciendo la irregularidad propia de los colectivos, o sea el azar.

b) Si la condición de azar se restringe, como lo hacen secuaces de MISES, se renuncia a la solución de problemas que no se adapten a su concepto restringido del azar, y, por ello, reducen el ámbito del cálculo de probabilidades, sin salvar la dificultad inicial de su fundamentación.-

Si, por el contrario, nos aferramos a las condiciones del colectivo miseano, llegamos a contradicciones del tipo señalado anteriormente al hablar de CERNUSCHI.

c) MISES aseguró que las investigaciones de COPELAND y WALD (quienes pudieron demostrar la existencia de colectivos que cumplen la condición de azar) habían probado la consistencia total de su propia teoría.

No es así. Tanto COPELAND (para n = 2) como WALD (para n finito) demostraron la existencia de tales colectivos con n atributos, pero partiendo de una restricción del concepto de selección localizada; restricción por la cual las selecciones admisibles forman parte de un conjunto numerable de selecciones. Es decir, que la consistencia de las teorías de WALD y COPELAND, por ser casos particulares de la teoría de MISES, no puede probar la consistencia de la de éste.

d) Pero la misma teoría de WALD, aparentemente libre de contradicciones, ofrece, según advierte FRECHET, una objeción fundamental. En efecto, la definición de probabilidad que WALD debe admitir para evitar toda contradicción lógica, es dependiente de las nuevas leyes de selección que él permite utilizar para derivar colectivos. Llegamos así a una infinidad de probabilidades, relativas a cada selección admisible: es decir, a un resultado que, aparte de diferir con los propósitos miseanos, hace impracticable la teoría.-

CAPITULO IV

LAS TEORIAS DE LA CREENCIA RACIONAL

El grado de creencia racional de Keynes. Definiciones y axiomas. Antecedentes. La probabilidad numérica. El problema de la inducción. Justificación. Críticas a Keynes.- El sistema de Jeffreys. Las suertes. Crítica a Jeffreys.-

18.- En radical oposición a las teorías frecuentistas, JOHN MAYNARD KEYNES sostiene que el estudio de la probabilidad tiene conexión con la lógica y con la filosofía.

En nuestras creencias (vale decir, en esas adhesiones que brindamos a ciertas ideas presumiblemente verdaderas), en nuestras creencias, digo, se distinguer dos elementos: lo racional y lo no racional. "Conocemos" una cosa cuando poseemos de ella cierta creencia racional. Pero la creencia racional(como la otra) tiene distintos tipos; esto es, hay conocimientos ciertos y conocimientos probables.

Teniendo en cuenta no su constitución sino su <u>origen</u>, hay conocimientos directos (o por intuición) y conocimientos indirectos (o por argumento). El conocimiento argumental funciona sobre ciertas premisas que le suministra la intuición.- Partiendo de dichas premisas, el argumento extrae conclusiones de diverso grado de creencia racional. Esas conclusiones se obtienen, dice KEYNES, porque percibimos la relación lógica que hay entre ellas y las premisas.

Según MAGLIANO, esa aptitud de la razón de "percibir" la relación probabilística, es análoga al concepto de comprobación lógica (cfr. GOBLOT) expresivo de la vinculación que se advierte entre los juicios, y que hace posible el pensamiento.-

Resulta necesario, pues, elaborar una lógica probabilística que sistematice los procesos de inferencia y que permita comparar las probabilidades o grados de creencia racional, cuando ello sea posible.

Para fundar la comparabilidad, tenemos el principio intuitivo de indiferencia. Por él estamos capacitados para desechar aquello que vemos no tener ninguna conexión lógica con las premisas y conclusiones de un argumento, a saber, lo impertinente ("irrelevant"); por él llegamos al concepto de equiprobabilidad, pues si la evidencia de cualquiera de dos conclusiones sentimos ser la misma, decimos que sus probabilidades son iguales; y por él también advertimos que si hay algo que agregar a una de las evidencias (y ese algo, que es una evidencia adicional, es pertinente) entonces decimos que una de esas conclusiones - y señalamos cuál - es más probable que la otra.

El principio de indiferencia es necesario pero no es suficiente, al decir de KEYNES.

Pero es más.- No todas las probabilidades son comparables. Intentando una clasificación, reconoce KEYNES las siguientes posibilidades:

a) Casos en que no existe probabiidad. (Por supuesto, en el conocimiento directo).

b) Casos en que las probabilidades no pertenecen a un único conjunto de magnitudes, medibles con una unidad común.- Como en las probabilidades individuales.

c) Casos en que no nos es dable en la práctica hallar la unidad de medida o la manera de efectuar ésta.-

d) Casos en que no es posible en absoluto asociar la probabilidad y el número.

e) Casos en que tenemos probabilidades numéricas.

Trae KEYNES el ejemplo de la similitud. Con respecto a la similitud, podemos decir que aumenta o disminuye, pero no cuánto. Así hay órdenes de probabilidad (y probabilidades de distintos órdenes) entre las cuales no es posible establecer comparación.

De manera que la probabilidad no siempre es medible ni numérica. Esta última conclusión, que comparte con EDGEWORTH y GOLDSCHMIDT, separa radicalmente a KEYNES de LAPLACE, de sus sucesores, de la escuela clásica modernizada y de los empiristas.

También lo separa de lógicos como STANLEY JEVONS que, en lo demás, concuerdan con su corriente epistemológica.

En suma, para KEYNES la probabilidad es un concepto muy amplio y puede contener, como casos límites o particularizaciones, a otros conceptos de probabilidad que, con relación al suyo, son restringidos.

18.1.- El formulismo que KEYNES introduce tiene una pretensión muy encumbrada; pues no sólo servirá para echar los fundamentos de la probabilidad, sino los de toda la inferencia: tanto la probable como la necesaria. Aspira, en suma, a exponer las Leyes del Pensamiento, vale decir, las normas que gobiernan el tránsito de una proposición a otra en los procesos de razonamiento directo e indirecto.

La nomenclatura y la definición de muchas constantes lógicas que emplea KEYNES en su tarea, están tomadas de BERTRAND RUSSELL, por lo que nos remitimos a Los Principios de la Matemática de este último autor, para dilucidar alguna dificultad de terminología.

Con cuatro grupos de definiciones, dos de axiomas, y una serie de teoremas, expone el problema de la inferencia necesaria y de la inferencia probable. Luego, agregando un quinto gru po de definiciones y un tercero de axiomas, puede presentar y desarrollar la probabilidad numérica. Pero la tarea es demasiado profusa, y el camino seguido, carece de elegancia, es fatigoso y está lleno de minucias que entorpecen la lectura. El saldo, empero, es notable en cuanto a la magnitud de la obra emprendida.

Conviene tener a la vista el índice de las principales proposiciones de su formulismo.

Primer conjunto de definiciones. La *probabilidad* es una relación de proposiciones y, cuando existe, se simboliza con $p = a/h$, donde *a* es una proposición y *h* otra, premisa hipotética. Si la relación es de certeza $a/h = 1$; si es de imposibilidad, $a/h = 0$. Si la relación es de probabilidad pero no de certeza o de imposibilidad, $a/h < 1$ ó $a/h > 0$. Si $a/h = 0$, la conjunción *ah* es incompatible. La clase de proposiciones *a* tales que $a/h = 1$ es *h* (def. de grupo). Si $b/a\,h = 1$ y $a/b\,h = 1$ entonces $(a \equiv b)/h = 1$; que es la relación de equivalencia (relativa a la premisa *h*).

Primer conjunto de axiomas. (1) *Existe* una y sólo una relación de probabilidad *p* entre *a* como conclusión y *h* como premisa. (2) Si $(a \equiv b)/h = 1$ y *x* es una proposición, x/ah x/bh (equivalencia).

$$(3) \qquad (\overline{a + b} \equiv \bar{a}\,\bar{b})/h = 1$$

$$(a\,a \equiv a)/h = 1$$

$$(a\,b + \bar{a}\,b \equiv b)/h = 1$$

$$\text{Si } a/h = 1,\ a\,h = h$$

Segundo conjunto de definiciones. La suma y el producto:

$$ab/h + a\bar{b}/h = a/h$$

$$ab/h = a/bh.b/h = b/ah.a/h$$

La resta y la división:

$$\text{si } p\,q = r, \quad p = \frac{r}{q},$$

$$\text{si } p + q = r, \quad p = r - q.$$

<u>Segundo conjunto de axiomas</u>. Axiomas operativos.

(4) Si dadas p, q, r, existen pq, pr, p + q, p + r, entonces:

(4a) Si existe pq, existe qp y es pq = qp; si existe p + q, existe q + p y es p + q = q + p.

(4b) $pq < p$, a menos que q = 1 ó p = 0; $p + q > p$ a menos que q = 0; pq = p si q = 1 ó p = 0; p + q = p si q = 0.

(4c) Si $pq \lesseqgtr pr$ es $q \lesseqgtr r$ a menos que p = 0. Si $p + q \lesseqgtr p + r$ es $q \lesseqgtr r$ y recíprocamente.

(5) $[\pm p \pm q] + [\pm r \pm s] = [\pm p \pm r] - [\mp q \mp s] =$

$= [\pm p \pm r] + [\pm q \pm s] = [\pm p \pm q] - [\mp r \mp s]$, siempre que existan $[\pm p \pm q]$ y $[\pm r \pm s]$.

(6) Si existen $r \pm s$, pr, ps entonces:

$$p(r \pm s) = p\,r \pm p\,s$$

<u>Tercer conjunto de definiciones</u>. (Independencia) Si $a_1/a_2h = a_1/h$ y $a_2/a_1h = a_2/h$ entonces las probabilidades a_1/h y a_2/h son independientes.

(Impertinencia). Si $a_1/a_2h = a_1/h$ decimos que a_2 es impertinente con respecto a a_1/h.

18.2.- Con este bagaje de definiciones y axiomas, se demuestran las proposiciones de la inferencia necesaria o cierta, incluyendo, como teoremas, las llamadas leyes del pensamiento en la lógica tradicional, como el principio de contradicción y la ley del tercero excluído.

Con respecto a la inferencia probable, se demuestran los siguientes teoremas de la probabilidad (amplia):

adición de probabilidades;

pertinencia, impertinencia e independencia;

multiplicación de probabilidades;

inversión de probabilidades.

Como los teoremas sobre multiplicación de probabilidades tratan siempre de combinaciones de conclusiones, se desarrolla, en seguida, el tema de la combinación de las premisas que KEYNES expone siguiendo el método de JOHNSON, más valioso que el que podría seguir él echando mano de los axiomas y definiciones hasta aquí expuestos.

Para dar, pues, los teoremas sobre combinaciones de premisas, introduce el siguiente:

Cuarto conjunto de definiciones (JOHNSON)

$$\text{(a)} \quad a/bh = \left\{a^{h}b\right\} \; a/h \qquad \text{donde}$$

$\left\{a^{h}b\right\}$ es el coeficiente de influencia de b sobre a en la hipótesis h; que también podría denominarse coeficiente de dependencia:

(b) El coeficiente tiene las propiedades:

$$\left\{a^{h}\,b\right\} . \left\{a\;b^{h}\,c\right\} = \left\{a^{h}\,b^{h}\,c\right\},$$

$$\left\{a^{h}\,b\right\} \left\{a\;b^{h}\,c\;d^{h}\,e\right\} = \left\{a^{h}\,b^{h}c\;d^{h}\,e\right\}$$

Es decir, que estos coeficientes se comportan como operadores separativos.

18.3.- El tratamiento simbólico de la lógica de las inferencias cierta y probable que KEYNES realiza en su tratado, considerando el problema de la probabilidad desde un punto de vista esencialmente distinto al que, a su tiempo, toman los probabilistas matemáticos o empíricos, no carece de precedentes.- KEYNES mismo nos da la genealogía de sus ideas, pasando ligera revista a trabajos de: LEIBNIZ (que es el introductor de los símbolos 1 y 0 de la certeza y de la imposibilidad, utilizando el signo $\frac{1}{2}$ -eminentemente variable para él pese a su grafía - para representar lo probable); BOOLE (cuyo simbolismo sirve a KEYNES para introducir la probabilidad numérica); MC COLL (que da a la probabilidad el sentido de relación entre proposiciones y que provee de un simbolismo análogo al a/h de KEYNES.

Hay que recordar que KEYNES (como también JEFFREYS) fué discípulo de W.E.JOHNSON. En A Treatise on Probability el nombre de JOHNSON aparece citado diez veces, dos de las cuales con expreso reconocimiento de deuda intelectual.

18.4.- Es evidente que KEYNES poco se interesó por desarrollar la teoría de la probabilidad numérica. De su extenso libro, dedica seis páginas a esta cuestión.

En realidad su preocupación máxima fué, como dijimos, fundamentar la probabilidad amplia, que, como caso particular, encierra a la numérica.

Para la probabilidad numérica es preciso dar más definiciones y axiomas. A saber:

Quinto conjunto de definiciones.

(a) $a/h + \{a/h + [a/h + (a/h + \ldots r \text{ términos})]\} = r.a/h$;

(b) Si $r.a/h = b/f$ entonces $a/h = \frac{1}{r}\, b/f$;

(c) Si $b/f = q.c/g$ entonces $\frac{1}{r}\, b/f = \frac{q}{r}\, c/g$

Tercer conjunto de axiomas.

(7) Si $\underline{q}$ y $\underline{r}$ son enteros finitos y $q < r$, existe una relación de probabilidad que puede expresarse como $\frac{q}{r}$.-

Como condición necesaria, se ve en seguida que para que a/h sea medible numéricamente e igual a $\frac{q}{r}$, deberán existir las a_s/h_s y ser:

$$a/h = \sum_{s=1}^{q} a_s/h_s \quad (q < r) \qquad y$$

$$\sum_{s=1}^{r} a_s/h_s = 1$$

Si $a/h = \frac{q_1}{r_1}$ y $b/h = \frac{q_2}{r_2}$, la aplicación de teoremas de pertinencia permite afirmar que sólo será:

$$a\ b/h = \frac{q_1\ q_2}{r_1\ r_2}$$

en caso de que a/h y b/h sean argumentos independientes. De manera que, a menos de tratar ese grupo de argumentos, no podremos aplicar el método aritmético aunque nos hallemos en el dominio de las probabilidades medibles. Por ello la mayor parte de la probabilidad matemática se la vincula con casos en que simultáneamente se dan las condiciones de independencia y de medibilidad numérica, limitándose por tanto el dominio de la lógica probabilística de KEYNES.

No obstante, existen casos de probabilidades no numéricas que admiten una ubicación "entre" límites numéricos, esto es, un <u>ordenamiento</u> relativo a alguna probabilidad tipo. Entonces, por comparación, puede apreciarse la probabilidad.

El <u>método de comparación</u> consiste de cuatro teoremas que dicen:

(1) $x\ y/h$ yace entre $\underline{x/h}$ y $\underline{x/h + y/h = 1}$ y entre $\underline{y/h}$ y $\underline{x/h + y/h = 1}$ (extremos incluídos);

$$(2)\quad x_1\, x_2 \ldots x_{n+1}/h > \sum_{1}^{n+1} x_r/h$$

$$(3)\quad x\ y/h + \bar{x}\ \bar{y}/h \begin{cases} < x/h - y/h + 1 \\ > y/h - x/h + 1 \end{cases} ;$$

$$(4)\quad x\ y/h - \bar{x}\ \bar{y}/h = x/h + y/h - 1$$

18.5.- Un detalle de las conclusiones de KEYNES, que dió motivo a polémicas y que nosotros no vamos a analizar, concierne a la aplicación de la teoría general de la probabilidad a cuestiones relativas a la conducta humana. Es empero natural que éstas no escapasen al ámbito del pensamiento de KEYNES, por cuanto su propósito esencial fué el de fundamentar toda la inferencia y, en particular (tercera parte del Tratado) el problema de la inducción y de la analogía, tan anexo a aquellas cuestiones.

BERTRAND RUSSELL (Cfr. <u>An Outline of Philosophy</u>, Cap.25) dice que el mejor examen del problema de la inducción es el de KEYNES. Es interesante, pues, que lo bosquejemos, siguiendo sus líneas generales.

¿Por qué aprendemos de la experiencia?. ¿Es el número de casos - sólo el número - lo que proporciona fuerza y base al aprendizaje por inducción?. ¿Hay algún otro fundamento de ésta, aparte del número de casos?.-

KEYNES sostiene que la inducción va <u>adquiriendo probabi</u>

lidad al ir incrementándose el número de casos en que se presentan las características pertinentes; pero no solamente a causa del número, sino a causa de la probabilidad de que no tengan en común, unos con otros, nada más que las características antedichas. Si ese número de casos se agranda, admite que, aún cuando no sepamos si tienen otra cualidad en común, la probabilidad de que así sea, disminuye.

Supongamos que queremos establecer inductivamente la generalización g "todo lo que posee F también posee f". Hemos de actuar así: observamos varios casos en que las propiedades F y f se presentan juntas, y ningún caso en que no se presenten juntas; observamos que, aparte de F y f aparecen otras propiedades como comunes; y observamos que aparecen propiedades no comunes. La suma de las propiedades comunes se llama analogía positiva; la suma de las propiedades no comunes se llama analogía negativa.

Para afianzar una inducción debemos disminuir todo lo posible la analogía positiva; por eso hay que agrandar el número de observaciones o buscar un camino que signifique, en último análisis, agrandarlo.

Ahora bien, la inducción tiene valor práctico apreciable cuando la relación probabilística se acerca a 1 ó a 0,(*).- Veamos que, para acercarse a 1 (certeza), debe cumplir la inducción dos condiciones:

(1) Si la generalización g es falsa, la probabilidad de que sea verdadera en un nuevo caso (después de haberla hallado tal en cierto número de casos) disminuye en una cantidad "finita".

(2) Existe a priori una probabilidad en favor de la generalización g.

La dificultad de hallar esa probabilidad a priori es soslayada por el Principio de la Limitación de la Variedad, que KEYNES erige en postulado, por el cual se asume que la exten-

---

(*) Quizás también a $\frac{1}{2}$.-

sión de la variedad de propiedades en el Universo está limitada; y podemos estar seguros de que las cosas, por ende, no son infinitamente complejas.

NICOD enunció este postulado con los siguientes términos:

Existe un número finito n tal, que, dado un objeto determinado, hay la probabilidad de que el número de cualidades que no pertenezcan al objeto sea inferior a n.

18.6.- Reconocido implícitamente el papel preponderante de la probabilidad en la inferencia estadística (donde basta que las propiedades F y f se presenten juntas muchas veces, aunque en algunos casos no se presenten juntas, para poder hablar de la probabilidad de g), creemos que las anteriores reflexiones en torno al valor de la noción de probabilidad frente al problema de la inducción científica tal como lo presenta KEYNES, son suficientes para justificar su estudio a la luz de la lógica probabilística que él desarrolló.

19.- Las críticas a la obra de KEYNES son de diverso contenido. Ciertos autores (cfr. CRAMER) descartan de entrada opinar sobre la misma, porque sólo consideran aplicable la noción de probabilidad a los problemas que sean pasibles de interpretación frecuentista. Preguntar sobre la probabilidad de que "Máscara de Hierro sea hermano de Luis XIV" o de que "Exista vida orgánica en Marte", no tiene sentido dentro de aquella interpretación por tanto no les interesa saber si tales probabilidades son calculables o, siéndolo, si tienen utilidad práctica.

MISES expresa que, justamente, ampliar el campo de la probabilidad a cuestiones que trascienden la significación frecuentista no conduce a ningún resultado de interés práctico, por lo cual no es comprensible el propósito de ir más allá de esa significación. Por otra parte, dice, el enunciado del principio de indiferencia de KEYNES permite conclusiones paradojales inadmisibles en la ciencia.

En verdad, KEYNES detalló varias de las contradicciones a que conducía el principio de indiferencia (cfr. paradojas sobre volumen específico y sobre cuerda de un círculo). Pero aclaró que el error aparece al tratar al Principio como condición suficiente cuando no es más que necesaria. Teniendo en cuenta esta circunstancia, puede hallarse una regla que permita emitir juicios de indiferencia sin caer en contradicciones.

Con todo, KEYNES aparece como el primer autor que construye un sistema de axiomas con respecto a la probabilidad lógica. Algunos puntos de su sistema, es cierto, carecen de claridad: por ejemplo, no existe, en muchos casos, una estricta distinción entre definiciones y axiomas, y, en lo que a su lógica inductiva se refiere, sigue un método principalmente descriptivo y comparativo más bien que sistemático y constructivo.

20.- Dentro de un orden de ideas muy semejantes al de KEYNES, el geofísico JEFFREYS se propone fundamentar la probabilidad sobre la base de las siguientes directivas: (a) descartar toda definición basada en procesos que den cabida al infinito; (b) descartar la opinión de que en la ciencia es posible la predicción exacta; (c) no admitir el principio de causalidad ni el determinismo estricto cuando sostienen que antecedentes similares conducen a consecuencias similares; (d) afirmar que la probabilidad es una relación (o función) de dos argumentos: la proposición y el dato; (e) afirmar que la probabilidad es ordenable, porque existe en nuestra razón la capacidad de percibir el grado de creencia racional; (f) convenir en la conveniencia de introducir la probabilidad numérica.

Dichas directivas tienden: a explicar los procesos inductivos sin nada decirnos del ser de la inducción; a metodizar en general las ciencias naturales; a actuar en condiciones de "certeza práctica"; y a proveer a la ciencia de una lógica inductiva que, ante la humana necesidad de aprender por la experiencia, elimine la insuficiencia de la lógica deductiva.

Veamos los grandes trazos de esta fundamentación.

Axioma 1. Dado p, entonces q es menormente, igualmente o mayormente probable que r. Dos alternativas no pueden darse simultáneamente.

Este axioma establece la comparabilidad, sólo definida por un dato p.

Axioma 2. Dado p, si q es más probable que r y r es más probable que s, entonces (dado p) q es más probable que s.

Transitividad.

Axioma 3. Dado p, todas las proposiciones deducibles de p tienen la misma probabilidad; y, dado p, todas las proposiciones incompatibles con p tienen la misma probabilidad.

Este axioma, al dar la certeza y la imposibilidad como casos extremos, permitirá la cabida de la lógica deductiva.

Tengamos presente la siguiente nomenclatura:

Cuando la proposición q es deducible de p, diremos "p entraña q" (p entails q), entendiendo que cuando p es idéntico a q también diremos "p entraña q".

Pero, adviértase que cuando p es una norma general teórica y q es una proposición empírica, nunca podremos afirmar que "p entraña q", porque así podría llegarse a negar a priori alguna proposición cuya validez se pueda comprobar empíricamente.

Axioma 4. Si q y q' son excluyentes y r y r' son excluyentes (sobre p), y si q y r son igualmente probables y q y q' son igualmente probables, entonces (dado p):

$q \cup q'$ y $r \cup r'$ son igualmente probables.

Axioma de la suma lógica o disyunción. Se puede extender (teorema 1) al caso de n proposiciones q y n proposiciones r.-

Convención 1. Asignamos números iguales a probabilidades iguales y números mayores a probabilidades mayores que otras.

Convención 2. Si, dado p, q y q' son excluyentes, entonces el número asignado a $q \cup q'$ es la suma de los números asignados a q y a q'.

Axioma 5. La relación ordenable "más probable que" está en correspondencia biunívoca con un conjunto de números reales crecientes.

Teorema 2. Si p entraña $\bar{q}$, $P(q/p) = 0$

Convención 3. Si p entraña q, $P(q/p) = 1$.

Axioma 6. Todas las proposiciones equivalentes tienen la misma probabilidad sobre los datos. Es decir, si pq entraña r entonces $P(q\ r/p) = P(q/p)$.

El séptimo teorema de JEFFREYS coincide con la definición laplaciana, la que establece que la probabilidad es una relación propia (número racional). Después (teorema 8) se extiende al número real.

La regla del producto de probabilidades constituye en JEFFREYS el

Axioma 7. $P(q\ r/p) = P(q/p) \cdot P(r/q\ p) \ / \ P(q/q\ p)$

Para el caso en que q entraña q p, es decir, $P(q/q\ p) = 1$, tenemos la regla del producto (de JOHNSON). Si, además, $P(r/q\ p) = P(r/p)$ tenemos el caso especial en que:

$P(qr/p) = P(q/p)\ P(r/p)$, definitorio, para JEFFREYS, de la impertinencia de p con respecto a q, dado r.

Regla de BAYES. En la teoría de JEFFREYS, la regla de BAYES, o principio de probabilidades inversas, constituye el décimo teorema, cuyo enunciado resume así:

Probabilidad posterior $\propto$ Probabilidad anterior X Verosimilitud (*).-

Antes de intentar poner en claro este enunciado, adelantemos que hemos entrado en contacto con uno de los puntos cruciales de la probabilidad. Los adherentes a la escuela axiomá-

---

(*) $\propto$ se lee "es proporcional a".-

tica aceptan, postulan o deducen la regla de BAYES sin mayores dificultades, como en el caso de JEFFREYS. Los frecuentistas, como MISES, se esfuerzan por rechazarla o la rechazan explícitamente.

El problema que BAYES intenta resolver es de suprema importancia en la inferencia científica. En verdad: supongamos que un evento pueda ser explicado con diversas hipótesis excluyentes q_i formuladas teniendo en cuenta un conjunto H de datos; ahora supongamos que el evento acaece. Entonces la regla de BAYES dice que la probabilidad de la hipótesis q_r después de que el evento haya acaecido (probabilidad posterior) varía proporcionalmente a la probabilidad atribuída antes de acaecido (probabilidad anterior) multiplicada por la probabilidad de que, sobre los datos H, sea q_r la hipótesis exacta (verosimilitud - o "likelihood" de FISHER). En símbolos:

$$P(q_r/pH) \propto P(q_r/H) \cdot P(p/q_rH)$$

(p es una información adicional...)

["La lucha por la existencia - en frase de THIELE - nos compele a consultar los oráculos". Con estas palabras concluye KENDALL al exponer el teorema de BAYES, dando a entender que cuando el "cálculo" no basta nos inclinamos por algo así como la "adivinación"].

20.1.- Una última novedad. Hemos visto que las probabilidades de las proposiciones dependen de los datos. Pero pueden formularse casos (cuya existencia debe ser considerada) en los cuales las probabilidades se mantienen las mismas en un amplio intervalo de datos adicionales. Así que, en dichos casos, es dable concebir a la información no común a todos los datos, como impertinente a la probabilidad de la proposición.

Entonces, si las proposiciones $q_1, \ldots, q_n$ son impertinentes con respecto a p, dado r, es:

$$P(p\ q_i/r) = P(q_i/r)\ P(p/q_i r) = P(q_i/r)\ P(p/r)$$

Esas probabilidades en que por la impertinencia de q_i, $P(p/q_i\ r) = P(p/r)$, se denominan suertes (chances).-

21.- La obra de JEFFREYS tiene con la de KEYNES muchos puntos de contacto, como que ambos fueron discípulos de JOHNSON. Pero su valor radica principalmente en la preocupación manifiesta de hacer extensiva aplicación de la probabilidad lógica a los problemas matemáticos de la estadística; cosa que, por cierto, no preocupó a KEYNES.

Pero, por lo menos una objeción importante hay que hacer al sistema de JEFFREYS. Se refiere a la convención 1, que asigna números iguales a probabilidades iguales.

Nada dice la convención sobre cuándo podemos hablar de probabilidades iguales en el sentido de la comparación (Ax.1); ni en ninguna otra parte de su obra se dilucida el problema. Afirma empero que "decir que las probabilidades son iguales es una manera precisa de decir que no tenemos fundamento para elegir entre alternativas", o sea "es meramente la manera formal de expresar la ignorancia". "A veces se la cita como Principio de Razón Insuficiente".

O sea que la convención 1 contiene el Principio de Razón insuficiente, el que, por lo menos , salvo enunciados más estrictos - que JEFFREYS no expresa - conduce a paradojas y contradicciones conocidas (Cfr. LEVY - ROTH, p. 24).

Esta objeción invalida varias proposiciones de JEFFREYS, a saber, todos los teoremas que implican la convención 1.

Hubiera sido preferible introducir, pues, la equivalencia como axioma, sin más.-

CAPITULO V

LOGICA FRECUENTISTA Y LOGICA MODAL

La lógica plurivalente de Reichenbach. La p-implicación. Los axiomas. El problema de la inducción. El límite "físico" y la verdad "física". La lógica de lo posible.-

22.- HANS REICHENBACH comienza asegurando que la probabilidad aparece siempre como relación entre proposiciones. Es necesario dar, entonces, las propiedades de esa relación para poder caracterizarla.

La relación probabilística no es una relación entre entes aislados, sino, al contrario, sólo se concibe como relación entre proposiciones con respecto a su pertenencia a clases determinadas.

¿Quiere esto decir que tampoco REICHENBACH va a concebir la probabilidad del caso único?.

No. Pero el caso único se concibe como límite de una sucesión de clases contenidas unas en otras, de mayor a menor.

Admite que las clases se presentan en forma de sucesión numérica; aunque esto se supone solamente para simplificar el problema y no para restringir su generalidad.

Ahora bien, en la lógica clásica cada proposición podía tener uno de dos valores: verdadero o falso. Modernamente se han hecho ensayos de erigir lógicas plurivalentes, que admitan varios (o infinitos) valores entre V y F.

La lógica de REICHENBACH es infinitovalente, siendo su concepto fundamental nuevo el de "implicación probabilística" (') .-

22.1.- La implicación probabilística es una relación entre tres miembros: una clase O, otra clase P y un par de elementos x_i, y_i.

Se denota así:

$$(i)\quad (x_i \in O \underset{p}{\Rrightarrow} y_i \in P),$$

que se lee: para todo i, la pertenencia de x_i a la clase O p--implica la pertenencia de y_i a la clase P. O sea, para todo i, $x_i \in O$ p-implica con probabilidad p que $y_i \in P$.

La expresión simbólica admite dos abreviaturas:

$O \underset{p}{\Rrightarrow} P$, o bien $W(O,P) = p$. Esta última se lee "la probabilidad de O a P es p"

En la nueva lógica hay dos <u>negaciones</u>:

(a) Negación débil:

$(\bar{O}) = D_f\ (i)\ \overline{(x_i \in O)}$ que niega que "para todo i, $x_i \in O$";

(b) Negación fuerte:

$(\bar{O}) = D_f\ (i)\ \overline{(x_i \in O)}$ que afirma que para todo i no es $x_i \in O$.

Los axiomas de que se sirve REICHENBACH para el cálculo de su lógica probabilística son cuatro:

(') Este concepto es muy distinto al de "implicación lógica" ordinaria, donde <u>$a \supset b$</u> es falsa sólo cuando <u>b</u> es falsa y <u>a</u> verdadera.-

Axioma de univocidad. Para cada par de clases O y P,la implicación probabilística posee sólo un valor. O sea, si $p \neq q$ y si $W(O,P) = p$ y $W(O,P) = q$ ello implicará negar O.

Axioma de normalización. La probabilidad tiene por límite superior 1, por inferior 0, y puede tomar todos los valores entre 0 y 1. El valor 1 corresponde a la necesidad, el 0 a la imposibilidad, los demás a probabilidad mayor o menor.

Axioma de adición.

$$\text{Si: } W(O,P) = p, \quad W(O,Q) = q, \quad O.P \supset \overline{Q}$$

$$\text{entonces: } W(O,P \vee Q) = r \text{ con } r = p + q$$

$$\text{Y si: } W(O,P) = p, \; W(O,P \vee Q) = r, \; O\,P \supset \overline{Q},$$

$$\text{entonces } W(O,Q) = q, \text{ con } q = r - p$$

Axioma de la multiplicación generalizada.

$$\text{Si: } W(O,P) = p, \quad W(O\,P,Q) = u,$$

$$\text{entonces } W(O,P\,Q) = w \text{ con } w = p.u$$

$$\text{Si: } W(O,P) = p, \quad W(O,P\,Q) = w,$$

$$\text{entonces } W(O\,P,Q) = \text{al producto de las otras dos.}$$

$$\text{Si: } W(O\,\dot{P},Q) = u, \quad W(O,P\,Q) = w$$

$$\text{entonces } W(O,P) = \text{al producto de las otras dos.}$$

A partir de este axioma podemos definir la independencia de "P y Q con relación a O" cuando:

$$W(O,P) = p, \; W(O,Q) = q \;\; y \;\; W(O,PQ) = w = p\,q = W(O,P).W(O,Q).$$

Con estos axiomas y a través de unos pocos teoremas,se llega hasta el teorema de BAYES sin dificultades.

22.2.- La lógica probabilística de REICHENBACH admite, pues, una gradación continua de valores de verdad entre 0 y 1. Es una lógica cuantitativa construída mediante el cálculo de probabilidades y - en su concepción - se completa con la interpretación frecuentista de su sistema de axiomas.

Para dar esa interpretación, echa mano de un concepto auxiliar: la <u>α -ordenación dirigida</u> que ahora vamos a caracterizar.

Sean x_i los elementos de una clase O e y_i los de una clase P.

Sea $\overset{n}{\underset{1}{N_i}}(x_i \in O).(y_i \in P)$ el número de elementos en que se da la conjunción de pertenecer x_i a O e y_i a P simultáneamente.

Decimos:

$$H_n\ (O,P) = \frac{\overset{n}{\underset{1}{N_i}}(x_i \in O).(y_i \in P)}{\overset{n}{\underset{1}{N_i}}(x_i \in O)}$$

La α -ordenación dirigida permite entender:

$$W(O,P) = \lim_{n=\infty} H_n(O,P)$$

con lo que se introduce la frecuencia en la probabilidad formal como caso muy particular, y referido solamente a aquellas sucesiones especiales en que, sin hacer uso del principio de irregularidad del colectivo miseano, es posible introducir la noción de límite sin incurrir en contradicciones.

Dichas sucesiones se caracterizan porque se pueden extraer de ellas sucesiones parciales que tengan el mismo límite de frecuencia. Dice REICHENBACH de tales sucesiones que se hallan <u>libres de efecto posterior</u>.

Cuando una sucesión <u>puede</u> descomponerse en sucesiones parciales independientes, libres de efecto posterior, se denominará <u>sucesión normal</u>.

Para las sucesiones normales, REICHENBACH concede la in terpretación frecuentista de la probabilidad formal; aunque no se preocupó de hallar la fórmula matemática que pudiera expresar tales sucesiones, porque el grado de probabilidad - y el límite de frecuencias - deben, a su entender, ser determinados empíricamente en esas sucesiones.

[BOREL, en cambio, demostró que los "nombres entièrement normaux", por él definidos, son sucesiones numéricas expresables por fórmulas matemáticas].

Advierte REICHENBACH que sus sucesiones normales,en su gran mayoría - aquellas de verdadera utilidad práctica - se confunden con las sucesiones de BERNOULLI, que satisfacen el teorema del mismo nombre, a saber:

Con una probabilidad que se aproximará a la certeza tanto como deseemos, podemos esperar que la frecuencia relativa de un evento en una sucesión de pruebas independientes con probabilidad p, difiera de esa probabilidad en un valor menor que cualquier $\varepsilon > 0$, siempre que el número de pruebas sea suficientemente grande.

22.3.- Como habrá sido apreciado, el intento de REICHENBACH consiste en dar a la implicación probabilística una interpretación doble. Por una parte, es el concepto expresable por un conjunto de axiomas. Por otra, tiene el carácter de un límite de sucesiones.

Pero ¿Cómo hablar de límite en las sucesiones empíricas, donde el proceso infinito no es practicable?.

En realidad esta cuestión no puede resolverse dentro del ámbito de la lógica bivalente. REICHENBACH pretende que la solución ha de encontrarse en la lógica infinitovalente o lógica probabilística.

En esta lógica el valor no es lo verdadero o lo falso, sino lo probable, con toda una continua gama de gradaciones,extremos incluídos. Entonces, la noción de límite de frecuencias halla justificación en la lógica probabilística y trasciende, por ende, el concepto de límite matemático.-

Según REICHENBACH el límite probabilístico se funda en el axioma de inducción, cuyo enunciado es:

"Si la observación de una magnitud física determina una sucesión de medidas de frecuencia h; de las cuales h_1, h_2..., h_n ya han sido halladas; si la sucesión puede ampliarse discrecionalmente; y si existen s_1 y s_2 tales que, a partir de h_m (con $1 \leq m \leq n$) todos los h_i ($m \leq i \leq n$) están entre s_1 y s_2; entonces existe una probabilidad w de que la sucesión tiende a encerrarse entre s_1 y s_2 (límites). La w crece hacia 1 si n-m crece hacia infinito".

En este concepto "físico" se funda, repetimos, el de límite probabilístico, advirtiendo que la palabra "probabilidad" que aparece en el enunciado del axioma debe entenderse como α-ordenación dirigida.

Es que para REICHENBACH toda la teoría del conocimiento se basa en el axioma de inducción que es el que permite inferir y aprender por la experiencia, y el que permite resolver los problemas de aplicación. Preguntar, entonces, por el valor de la probabilidad es preguntar por el valor del axioma de inducción.

Ahora bien, por este axioma se ve aparecer una probabilidad p a través de otra w (') que se halla en su enunciado y que es desconocida. Pero no: w ha surgido de una anterior enumeración; y ésta de otra, indefinidamente.

¿Con lo que la cuestión se vuelve irresoluble?. En términos lógicos, sí.

Pero en la vida práctica hay un momento en que identificamos la probabilidad y la predicción. Y una predicción es el hecho de afirmar una probabilidad sin indicación del grado de

---

(') La letra w sugiere la palabra peso (weight).-

probabilidad (').- De facto, el retroceso que amenazaba llegar al infinito, está detenido. Pero se ha introducido un nuevo concepto (w) ya no frecuentista y cuyo solo justificativo está en la necesidad de la acción....-

Todo este raciocinio se aclara más, si atendemos a la noción de verdad que es válida para REICHENBACH, ex miembro del Círculo de Viena.

En Experience and Prediction sostiene que la verdad es una propiedad "física" de cosas físicas llamadas símbolos, a través de la cual aprendemos que en una proposición hay tanto sentido como el que puede ser utilizado en la acción.

Con respecto a las proposiciones de probabilidad, además, la necesidad de la acción nos impulsa a emitir juicios que conciernen al futuro, por medio de la predicción y de la probabilidad.

22.4.- En síntesis, la obra de REICHENBACH permite arribar a las siguientes conclusiones:

(a) Hay una interpretación dualista de la probabilidad. Por una parte la probabilidad nace como extensión hacia las lógicas plurivalentes. Por otra, es la interpretación frecuentista, tipo VON MISES.

(b) La introducción de las sucesiones normales en lugar de los colectivos, restringe el campo de aplicación de la probabilidad frecuentista; pero la libra de las contradicciones miseanas.

(c) El concepto de límite - que permite, a veces, introducir la probabilidad del caso único - no es un concepto matemático en REICHENBACH. Es un concepto físico.

(d) Lo verdadero es una propiedad "física" que permite la acción.

(e) La predicción y (por ende) la probabilidad son in-

(') Para CARNAP esto equivale al reconocimiento de que la noción de frecuencia lógica sola no basta para la cotidiana tarea de aprender de la experiencia.

cursiones al futuro, necesarias para posibilitar la acción.

23.- En otro orden de ideas, se concede que la suposición básica de la alternativa estricta entre falso y verdadero, propia de la lógica clásica, no deja lugar a la mayor parte de las proposiciones que surgen de la vida diaria, particularmente las referidas al futuro, que involucran el "quizás" o el "posiblemente".

Los logistas, como LEWIS, han introducido los operadores P (posible) y N (necesario) en un mismo nivel que el $\vdash$ (cierto), de la lógica clásica.

El cálculo con estos nuevos operadores tiene ciertas dificultades cuando se iteran P y N. Pero algunas de ellas se vencen al transformar el campo de lo verosímil (aquel en que caben P y N) en el campo de la probabilidad medible, en donde a la probabilidad "a" de un evento, le asignamos un número $0 \leq a \leq 1$.

No es indispensable que los valores de la probabilidad sean todos los números del intervalo $[0,1]$. Por ejemplo, puede servir el conjunto finito:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1 \text{ (con } \underline{n} \text{ entero positivo no nulo).}$$

Esta es la lógica de LUKASIEWICZ, de la cual, si $n = 1$, se retorna a la lógica bivalente ordinaria, asignando a 0 la certeza del no, y a 1 la del sí. Si $n = 2$, aparece la lógica trivalente: cierto (1), posible ($\frac{1}{2}$), imposible (0).

Si pasamos al continuo, tenemos la lógica de REICHENBACH.

En la lógica de LEWIS las operaciones $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow$ se definen por esquemas. Así tenemos:

Proposición A, B	$\sim A$	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \rightarrow B$
Valor a, b	$1-a$	mín(a,b)	máx(a,b)	1-a+mín(a,b)=mín (1,1-a + b)

por convención.

C A P I T U L O   VI

PLURALISMO. LA MATEMATICA Y EL AZAR

El pensamiento dualista de Weyl. Las tres probabilidades de Kemble. El caso Servien Ideas de Schrödinger. Contra el monismo.-

Opiniones "legas".

Reunimos en este capítulo las opiniones de cuatro destaados autores contemporáneos no estrictamente especialistas en probabilidades. El primero de ellos es:

24.- HERMANN WEYL. Para WEYL resulta significativo que el cálculo de probabilidades haya nacido para satisfacer requerimientos de jugadores. Ello explica por qué se ha desarrollado primero un cálculo que no un análisis descriptivo de la probabilidad.

El *Ars Conjectandi* de SANTIAGO BERNOULLI se mueve en torno de algunos conceptos de origen y naturaleza subjetivos, como "esperanza", "expectación", "conjetura". LAPLACE subraya, en su definición clásica, el aspecto objetivo; pero presupone bases subjetivas *a priori* que posibilitan la comparación: los casos igualmente posibles y el principio de indiferencia anexo.

También SANTIAGO BERNOULLI tiende un puente entre los aspectos objetivo y subjetivo de la probabilidad, mediante la ley de los grandes números; pero en su enunciado queda siempre un residuo de incerteza acerca de la determinación de la probabilidad *a priori*.-

Sin embargo, en muchos casos de la vida diaria no es po sible la determinación de una probabilidad a priori, sino só- lo a posteriori sobre la base de frecuencias observadas.(Por ejemplo, la probabilidad de nacimientos). Pero aún en estos ca sos, la pretensión de fundar la probabilidad en la frecuencia introduce la ficción imposible de un límite calculado a través de un número infinito de pruebas...

Con el objeto de que las reglas matemáticas tengan vali dez en cuanto al límite, se obliga a que las sucesiones cum- plan ciertos requerimientos especiales que implican algo así como "orden en lo grande, desorden en lo pequeño"; pero que,en el fondo, encierran simplemente oculta la probabilidad a prio ri detrás de la fórmula dogmática ficticia de la tendencia al límite.

Sin embargo, si en los eventos atómicos individuales existiese (como parece decirlo la física moderna) una especie de probabilidad primaria irreducible a leyes causales, estaría mos constreñidos a introducir en las leyes de la naturaleza un factor original: la "probabilidad en sí" o algo vinculado a ella. Y la definición clásica quedaría reducida a los casos de simetría en los cuales el principio de razón insuficiente es guía adecuada de acción.

Lo cierto es que, en el estado actual de la física, la estadística desempeña un papel por lo menos tan importante co mo el de las leyes estrictas; y es natural esperar que sea la física la encargada de esclarecer, en el futuro, el real signi ficado del cálculo de probabilidades.

25.- El físico teórico EDWIN KEMBLE propone distinguir tres tipos diferentes de probabilidad: probabilidad a priori, probabilidad inductiva y probabilidad teórica; y trata de ca racterizarlos, principalmente desde el punto de vista opera- cional.

Ante todo, la probabilidad es la resultante de dos in- gredientes. Por un lado, el ingrediente numérico que extrae-mos de ciertos datos (nuestra información) mediante reglas tí picas. Por otro lado, el ingrediente psicológico, que consiste en el testimonio acumulativo de la experiencia, dependiente de la madurez del individuo y del riesgo que pueda alcanzarle en caso de error, y que, en ciertos casos, crea una certeza práctica útil a la vida y a la acción.

El primer tipo de probabilidad, la probabilidad a priori es el aplicable a problemas en que la definición clásica de LAPLACE (relación entre posibilidades favorables y posibilidades totales) permite el cálculo. Es decir, cuando el principio de simetría admite su utilización, y el cálculo de probabilidades es sólo un análisis de posibilidades.

Los frecuentistas dicen peyorativamente que saber cuándo puede aplicarse el principio de simetría es cuestión de adivinación; pero desde el punto de vista operacional podemos afirmar que el uso del tipo de probabilidad a priori está justificado cuando faltan datos estadísticos. Por otra parte, la manera de tornar mínimo el elemento subjetivo de esa "adivinación", es comprobar, cuanto sea posible, la "realidad" de la simetría presupuesta(*).-

El segundo tipo es la probabilidad inductiva, utilizable cuando la intuición - dice KEMBLE - nos sugiere la identificación entre la probabilidad y la frecuencia relativa a la larga. La identificación no reza, a la corta.

Nuestro sentido de la expectancia, pues, nos enseña que la probabilidad inductiva se acerca a la frecuencia, en una serie larga de pruebas. ¿Pero cómo entendernos con las series necesariamente cortas?.

Respuesta absolutamente inobjetable no hay. Pero alguna solución práctica nos provee la teoría del muestreo, por la cual la probabilidad inductiva se acerca a la probabilidad a

(*) Cuando se trata de suertes (chances) la simetría puede determinarse en forma sumamente precisa y completa.-

priori: porque, del resultado obtenido en la serie (pequeña) de prueba, deberemos inferir y apreciar la probabilidad en la serie total.

La definición de probabilidad inductiva, afirma este autor, es la fórmula que permite calcularla.

El tercer tipo, es la probabilidad teórica. En la física atómica de MAX BORN todo el curso de los acontecimientos está determinado por leyes probabilísticas. Un proceso mecánico está acompañado por un proceso ondulatorio descripto por la ecuación de SCHRÖDINGER, cuyo significado es el de prever la probabilidad de cierto proceso mecánico. El concepto unificador entre onda y corpúsculo es el de probabilidad.

No hay reglas para elaborar teorías en la física. De modo que no está uniformada la relación entre los datos sobre los cuales se edifica una de esas teorías y las probabilidades que resultan de esos datos. Por esta razón, la concepción de la probabilidad como elemento unificador de ondas y corpúsculos, debe sus derechos a ser denominada tal, no a la manera por la cual se obtiene de los datos sino a la manera en que esperamos usarla.

Tales probabilidades, concebidas como presupuestos de presupuestos (como hipótesis para elaborar teorías), son probabilidades segundas y, KEMBLE las llama teóricas.

26.- Antes de iniciar este apartado, dedicado al caso SERVIEN, el autor de la presente monografía debe aclarar que la única razón - si puede llamarse tal - que tuvo para referirse aquí al desarrollo de las ideas de SERVIEN, es la de que también éste es un "lego" en probabilidad; aunque en sentido más particular que los demás publicistas referidos en este capítulo. Y para presentarlo, necesita de una breve referencia histórica, que hacemos en este lugar, sin mayores pretensiones aparte de las didácticas.

Para ARISTÓTELES (Cfr. Metafísica) los seres son producidos por el arte, por la naturaleza, por el azar o por la for tuna.

"El arte es un principio que reside en un ser diferente del objeto producido; pero la naturaleza reside en el objeto mismo, porque es un hombre el que engendra a un hombre. Respecto a las demás causas (el azar o la fortuna) no son más que privaciones de estas dos".

TOMAS DE AQUINO (Cfr. Comentario) nos aclara que la fortuna y el azar son "como los defectos y privaciones de la naturaleza y del arte; ambas son, respectivamente, el entendimiento y la naturaleza obrando fuera de intención. Luego,lo que se hace por la fortuna y el azar, no se asimila a sus agentes, porque la fortuna y el azar no son causas propias,sino tan sólo causas accidentales".

Si tenemos en cuenta que, en Ars Rethorica, ARISTOTELES afirma que"lo probable es lo que por lo común ocurre",advertimos un matiz diferencial entre lo que el estagirita concebía como "azar" y como "lo probable".

Después, en el decurso de la historia, azar y probabilidad aparecen estrechamente vinculados o confundidos; porque la práctica de ciertos juegos de azar ha originado la teoría de las probabilidades. Y ha acontecido que los problemas del azar fueron planteados a matemáticos - y casi siempre por matemáticos - sin preguntar previamente con qué elementos puede la matemática afrontar el azar.

PIUS SERVIEN comienza inquiriendo qué cosa es el azar que aparece en el lenguaje científico...

En una balanza de precisión, el equilibrio (igualdad de peso) no se presenta nunca. Por ello, cuando el hombre de ciencia dice que el peso de A es igual al de B, está haciendo una afirmación por decreto y no por lo que le enseñan los hechos.

En una serie de veinte pruebas habrá observado, por ejemplo, que en once casos peso de A fué mayor que peso de B,y que en nueve casos el de B superó al de A. En la observación vigésimo primera ¿Quién pesará más: A o B?.

Aquí, se dice, interviene el <u>azar</u> porque no hay ninguna razón que permita esperar una cualquiera de las dos alternativas.

Ahora bien, si <u>siempre</u> resultase peso de A mayor que peso de B, puede echarse mano de un modelo matemático que caracterice la relación "mayor que". Pero cuando <u>n</u> veces peso de A se presenta menor que peso de B y otras <u>n</u> ocurre lo contrario, ha de ser por propia decisión, por decreto, que nos sirvamos del modelo matemático de la igualdad y afirmemos que peso de A es <u>igual</u> a peso de B.

En este ejemplo, que para SERVIEN caracteriza el azar, ve un punto fundamental, a saber: que en el azar no cabe la identidad; al contrario de la matemática, que reposa sobre la identidad.

Por consiguiente, ha de reconocerse que la matemática no habla el mismo idioma que el azar; y será siempre inadecuada para traducirlo perfectamente. Sin llegar a la pretensión extrema de excluir el matemático antes de que se halle un idioma más adecuado al azar, no hay que olvidar empero que, en el cálculo de probabilidades se encuentran mezclados dos elementos inconciliables: por una parte el azar (el dado en el aire), por otra parte, el cálculo, la identidad (el dado sobre el tapete).

El azar reside en todo lo observable (está, por ende, en la física) y excluye, por ser contrario a su esencia, al ser matemático (ideal) basado en la igualdad. El azar envuelve todo nuestro conocimiento del Universo; está escondido en la "misteriosa" ley de GAUSS, y en el "misterioso" cuanto de PLANCK, grano minúsculo que ha escaldado la ciencia clásica...

El desarrollo de estas ideas generales (<u>Probabilités et Physique</u>, 1945; <u>Probabilités et Quanta</u>, 1948; <u>Hasard et Mathématiques</u>, 1948; <u>Hasard et Probabilités</u>, 1949) dan oportunidad a SERVIEN para rebatir las fundamentaciones de la probabilidad: tanto las de von MISES y su escuela, como la clásica y clásica modernizada, y aquellas que - erigiendo una lógica nueva sobre bases viejas - sólo han conseguido, a su juicio, adentrarse en el error de confundir el mundo del azar y el mundo de lo formal; es decir, el mundo de la ciencia y el mundo del lenguaje.

27.- La lectura de un trabajo de SERVIEN indujo a ERWIN SCHRODINGER a reunir sus propias ideas sobre la probabilidad, animado por el propósito de reducir a un mínimo las proposiciones axiomáticas y de alejarse de la concepción frecuentista.

En realidad, SCHRÖDINGER ha hecho una colaboración de muy escaso valor, poblada de ambigüedades y de contradicciones encubiertas tras la intención (formulada) de dar una apreciación pragmática de la probabilidad.

Sobre la base de una noción de evento insuficientemente delimitada, introduce la definición de probabilidad numérica como un número real que sirve como medida cuatitativa de nuestra conjetura acerca de la aparición del evento. Y pasa que, como nuestro conocimiento puede ser "simétrico" con respecto a la conjetura de una u otra alternativa, podemos introducir el concepto de "probabilidades iguales". Y cuanto mayor sea la fuerza de nuestra conjetura, mayor será la probabilidad.

Por una convención, la probabilidad se extiende al continuo $[0,1]$ y se la hace alcanzar inclusive los extremos del intervalo. Por otra convención la probabilidad se normaliza.-

Un primer axioma da la regla del producto y una proposición enuncia la regla de la suma. Por fín, la relación entre probabilidad y frecuencia debe buscarse en el teorema de BERNOULLI, que a la postre justificaría una tercera convención referente a la identificación entre probabilidad y frecuencia.

28.- Como resumen de este capítulo(1), señalamos que WEYL admite una interpretación dualista provisoria de la probabilidad (la clásica y la estadística); pero opina que la física podrá esclarecer el real significado de la probabilidad.-

---

(1) Una concepción pluralista es también la de GOOD, J.F., Probability and the Weighing of Evidence, Griffin, London, 1950.

KEMBLE da tres tipos diferentes, según el uso que se haga de la probabilidad: la relación laplaciana, la frecuencia relativa a la larga (con la observación acerca del muestreo), y la hipótesis probabilística de la física teórica.

SERVIEN manifiesta que la esencia del azar no ha sido comprendida por el cálculo de probabilidades, porque aquél - que reside en la vida real - no puede ser aprehendido por el lenguaje, instrumento puramente formal.

En cuanto a SCHRÖDINGER, sin ningún cuidado por fundamentar lo que afirma, enuncia ideas y opiniones sobre la probabilidad en dos de sus aspectos: el de la frecuencia y el de la conjetura, pero recalcando la prevalencia de esta última sobre la primera.

Su contribución no es rigurosa. A lo sumo puede considerarse de valor heurístico y sugestivo.-

CAPITULO VII

LA OBRA DE KOOPMAN

La tesis intuitiva de Koopman. La coherencia. El álgebra de Boole.- Los axiomas. La probabilidad numérica. La vinculación con la frecuencia. Crítica.-

La certeza no es posible.

29.- En 1940, B.O.KOOPMAN intenta proveer a la teoría de KEYNES de una formulación axiomática rigurosa. No se propone refutar ni defenderla, sólo pretende enunciarla en términos precisos, deducir la teoría clásica y, después, introducir la frecuencia relativa.

Parte del presupuesto de que la probabilidad proviene de la intuición y es anterior a la experiencia objetiva. En su forma más pura, la tesis intuitiva se enfrenta con el aforismo: "el conocimiento es posible, pero la certeza no".

No comienza asociando la probabilidad y el número, porque el número no está intuitivamente ligado al grado de credibilidad. Tampooo, por consiguiente, comienza por la noción de medida, que está separada de la probabilidad intuitiva por una laguna inexplicable.

Para KOOPMAN la probabilidad se nos presenta como una ordenación parcial de eventualidades, tal que la expresión:

"a, en el presupuesto de que h sea verdadero, es igual o menormente probable que lo es b, en el presupuesto de que k sea verdadero"

provee significado preciso a la intuición.

En símbolos, ponemos:

$$a/h \prec b/k \quad ó \quad b/k \succ a/h$$

con lo que indicamos el concepto de "comparación en probabilidad". Decimos que a/h, b/k son eventualidades; a, b, contingencias; h, k, presunciones. El signo $\prec$ [$\succ$] se lee infraprobable [supraprobable.]

29.1.- Cuando el individuo es coherente puede aceptar, rechazar o dudar acerca de si la eventualidad a/h es infra o supraprobable a la b/k. Ello depende de cada individuo y hasta de cada estado psíquico de un mismo individuo. Pero no puede dejar de afirmar de que, si acepta que $a/h \prec b/k$ y que $b/k \prec c/l$, debe aceptar también que $a/h \prec c/l$ y que $\sim a/h \succ \sim b/k$, $\sim b/k \succ \sim c/l$.

Estas leyes [subjetivas] son fijas en los individuos coherentes. Y la única función de la teoría intuitiva de la probabilidad es deducir las reglas que permitan derivar comparaciones en probabilidad de otras comparaciones ya dadas.

29.2.- Para echar las bases axiomáticas de la teoría, se requiere un álgebra de BOOLE, o sea, un sistema B que tiene las siguientes propiedades:

1) B cuenta con dos operaciones binarias (o,y) que satisfacen las leyes idempotencial, conmutativa, asociativa y distributiva;

2) B cuenta con una relación binaria ($\leq$) que es reflexiva, asimétrica, transitiva y que cumple la ley de consisten

cia; es decir, $a \leq b$, $a \cup b = b$, $a . b = a$ son equivalentes.

3) B posee dos elementos (0,I), cotas universales que satisfacen las leyes de "o" y de "y".

4) B posee una operación monaria ($\sim$) de complemento, que es completiva [$a \cup \sim a = I$, $a \sim a = 0$], dualitiva [$\sim (a \cup b) = \sim a . \sim b$, $\sim a.b = \sim a \cup \sim b$] e involutiva [$\sim(\sim a) = a$].

29.21.- Si tomamos un sistema de elementos de un álgebra de BOOLE tal que, con respecto a "o", forme un grupo abeliano; con respecto a "y" sea cerrado; y, además, la operación de "y" sea asociativa, y respecto de "o", distributiva; entonces tendremos un anillo en el álgebra de BOOLE.

29.22.- Un conjunto $\bar{u}$ no vacío de elementos de un anillo de BOOLE A, se llama ideal en A si

1) Cuando $a \in \bar{u}$, $b \in \bar{u}$, entonces $(a \cup b) \in \bar{u}$

2) Cuando $a \in \bar{u}$, $b \in A$, entonces $a.b \in \bar{u}$.

Dos observaciones previas. La primera: El símbolo a/o será excluído porque su significación es una proposición aseverada, siendo que la probabilidad intuitiva entiende sólo con proposiciones contempladas (provenientes de la física, de la economía, de la biología, etc.). La segunda: Queda prohibido hablar de probabilidad de probabilidad, es decir, no se admiten expresiones como $(a/h \prec b/k) \prec c/l$.

29.3.- Los axiomas que sirven de base a la tesis intuitiva de KOOPMAN son los nueve siguientes, cuyo enunciado se entiende referido a un anillo de BOOLE A (con unidades 0,1).

1) Axioma de la contingencia verificada

$$a/h \prec k/k$$

2) Axioma de implicación.

$$\text{Si } a/h \succ k/k \text{ entonces } h \subset a$$

3) Axioma de reflexividad.

$$a/h \prec a/h$$

4) <u>Axioma de transitividad</u>.

Si $a/h \prec b/k$ y $b/k \prec c/l$ entonces $a/h \prec c/l$

5) <u>Axioma de antisimetría</u>.

Si $a/h \prec b/k$ entonces $\sim a/h \succ \sim b/k$

6) <u>Axioma de composición</u>.

6.1) Si $a_1/h_1 \prec a_2/h_2$ y $b_1/a_1h_1 \prec b_2/a_2h_2$, entonces

$$a_1b_1/h_1 \prec a_2b_2/h_2$$

6.2) Si $a_1/h_1 \prec b_2/a_2h_2$ y $b_1/a_1h_1 \prec a_2/h_2$, entonces

$$a_1b_1/h_1 \prec a_2b_2/h_2$$

7) <u>Axioma de descomposición</u>. Sean $a_1\ b_1\ h_1 \neq 0$ y $a_2 .$ $. b_2h_2 \neq 0$. Entonces si alguna de las eventualidades

$$a_1/h_1,\ b_1/a_1h_1 \qquad (e_1)$$

guarda la relación supraprobable con alguna de las eventualidades

$$a_2/h_2,\ b_2/a_2h_2 \qquad (e_2)$$

entonces la restante eventualidad (e_1) guarda la relación infraprobable con la restante eventualidad (e_2).

8) <u>Axioma de la presunción alternativa</u>.

Si $a/bh \prec r/s$ y $a/\sim bh \prec r/s$, entonces $a/h \prec r/s$

9) <u>Axioma de subdivisión</u>. Para cualquier entero <u>n</u> las proposiciones $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sean tales que $a_ia_j = b_i .$ $b_j = 0\ (i \neq j)$, $i, j, = 1, \ldots, n$; $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n \neq 0$; $b =$

$= b_1 \cup \ldots \cup b_n \neq 0$; $a_1/a \prec \ldots \prec a_n/a$; $b_1/b \prec \ldots \prec b_n/b$; <u>entonces</u> $a_1/a \prec b_1/b$.-

29.4.- <u>Nota</u>. Cuando se cumplen simultáneamente las relaciones $a/h \prec b/k$ y $\sim(a/h \succ b/k)$, utilizamos el símbolo de <u>menorprobable</u> (<u>mayorprobable</u>) y escribimos:

$$a/h < b/k \qquad (b/k > a/h)$$

Si valen simultáneamente $a/h \prec b/k$ y $a/h \succ b/k$, usamos el símbolo de <u>equiprobable</u>:

$$a/h \approx b/k$$

29.41.- Cuando en una aserción todos los signos $\prec$ pueden reemplazarse por $\approx$, la nueva aserción surge de <u>aguzar</u> la original. Si por lo menos un $\prec$ se reemplaza por un $<$, la nueva aserción surge de <u>reforzar</u> la original.

Demuestra KOOPMAN que los axiomas 4, 5, 6, 7, 8 y 9 admiten aguzamiento y refuerzo; propiedades éstas que se detallan en un conjunto de 13 teoremas relativos a operaciones lógicas de implicación, conjunción, disyunción y negación, donde aparecen uno o ambos de los signos $<$ y $\approx$.

29.5.- Para introducir la noción de <u>probabilidad numérica</u>, de cuya significación KOOPMAN no se ocupa, es necesario formular algunas hipótesis adicionales.

<u>Definición 1</u>. Una <u>n-escala</u> es un conjunto de <u>n</u> proposiciones $(u_1, \ldots, u_n)$ tal que:

1) $u = u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n \neq 0$,

2) $u_i\, u_j = 0$ $(i \neq j)$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$

3) $u_i/u \approx u_j/u$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Hipótesis 1. Si n es un entero positivo, existe por lo menos una n-escala.

Sean ahora una n-escala $\{u_i\}$ y una m-escala $\{v_j\}$, y sean $0 \leq \sigma \leq n$ y $0 \leq \rho \leq m$; entonces:

$u_{i_1} \cup \ldots \cup u_{i\sigma}/u \; \langle, \approx, \rangle \; v_{j1} \cup \ldots \cup v_{j\rho}/v$ según sea

$$\sigma/n \; \langle = \rangle \; \rho/m$$

Dada una eventualidad a/h, la relación $u_1 \cup \ldots \cup u_t \prec$ a/h será verdadera para un valor t $(0 \leq t \leq n)$ por lo menos. Además el máximo t para el cual vale dicha relación es independiente de la n-escala elegida. Este máximo será denotado por t(n)

Análogamente hay un mínimo, T(n), para el cual a/h $\prec$ $u_1 \cup \ldots \cup u_T$

Se prueba la existencia de los siguientes límites:

$$p_*(a,h) = \lim_{n \to o} \frac{t(n)}{n}, \quad p^*(a,h) = \lim_{n \to \infty} \frac{T(n)}{n}$$

tales que $0 \leq p_*(a,h) \leq p^*(a,h) \leq 1$.

Definición 2. Una eventualidad es tasable cuando: $p_*(a,h) = p^*(a,h) = p(a,h)$, y el límite común, p(a,h) es la probabilidad numérica de a/h.

[Si nuestro anillo A fuese completamente ordenable, toda eventualidad sería tasable].

29.51.- La condición necesaria y suficiente para que a/h sea tasable es que, siendo a'/h' y a"/h" tasables, exista $\varepsilon > 0$ tal que si:

$$a'/h' \prec a/h \prec a''/h'', \text{ sea}$$

$$p(a'',h'') - p(a',h') < \varepsilon .$$

Salen de estas proposiciones: el principio de la probabilidad total, la ley del producto en caso de independencia, y por fin, la prueba de que la función p(a,h) es una función de conjunto, aditiva, que satisface los axiomas de KOLMOGOROV; con lo cual queda tendido el puente a esa teoría.

29.6.- Para KOOPMAN es innegable que la noción de frecuencia relativa presupone el concepto intuitivo de probabilidad, a través de un principio general que nos hace razonar así: La probabilidad intuitiva de un suceso E, perteneciente a un colectivo α, aumenta con la frecuencia w.

Veamos qué formulación recibe este principio, en la lógica del $\prec$.

Si (1) La secuencia α de pruebas de E es un colectivo de frecuencia w;

Si (2) La secuencia α^* de pruebas de un segundo evento E^* es un colectivo de frecuencia w^*;

Si (3) $w < w^*$;

entonces

[Que E aparezca en la $n^{\underline{a}}$ prueba] $\prec$ [Que E^* aparezca en la $n^{\underline{a}}$ prueba].

29.61.- La anterior conclusión puede afirmarse más si se hace uso de dos hipótesis adicionales, a saber:

Si (4) tenemos dos conjuntos cualesquiera que contienen t enteros positivos distintos, $(i_1,\ldots,i_t)$, $(j_1,\ldots,j_t)$, entonces la probabilidad intuitiva de que en las pruebas $i_1,\ldots,i_t$-ésimas salga E, es igual ($\approx$) a la probabilidad similar para las pruebas $j_1,\ldots, j_t$-ésimas. Esto vale para $t = 1,2,\ldots$;

Si (5), análogamente para E^*.

29.7.- Para formular la conclusión que dimos al final del párrafo preanterior, no es necesario hacer ninguna modificación más en la teoría de KOOPMAN. En efecto, la conclusión sale como "teorema" si consideramos que (4) y (5) son sus hipótesis y llamamos α , α^* a las secuencias de pruebas de E y E^*, cuyas frecuencias cumplen la hipótesis (3).

No es preciso decir, en el enunciado del teorema, que α y α^* son colectivos; porque es cuestión sólo de definición. Justamente, definición del colectivo miseano.

30.- La obra de KOOPMAN tiene, a nuestro juicio - aparte de los méritos que señalaremos en otro lugar - una dificultad: el sistema de axiomas. En efecto, por ser una teoría de la probabilidad intuitiva, no debería basarse en axiomas cuyo significado "no se advierte de inmediato, pero, una vez advertido, su veracidad queda confirmada", según sus mismas palabras.

Ocurre que enuncia nueve axiomas de distinto valor:unos son intuitivos, como 1,2,3,4,5 y 8; y otros son operativos,como 6, 7 y 9.

Los individuos <u>coherentes</u> son los que concuerdan con las leyes de la probabilidad intuitiva, dice el autor. Con esos nueve axiomas, no todos de aprehensión inmediata, ¿Puede darse la definición - implícita, por supuesto - de coherencia?.

Ahora bien, la coherencia se necesita para considerar las aserciones <u>contempladas</u>, esto es, proposiciones originadas en el mundo de la física, de la economía, de la biología,etc. Y la probabilidad intuitiva sólo se refiere a dichas aserciones contempladas, eliminando las <u>aseveradas</u>; porque, si no lo hacemos así, caeremos en paradojas o contradicciones.

De manera que la confirmación absoluta, o la certeza,no caben en la lógica de KOOPMAN; pese al carácter intuitivo y a su intuitiva vinculación con "grado de creencia racional".

Por otra parte, la concesión a la teoría frecuentista, que se ve obligado a hacer (§ 29.6), no concuerda con su posición primera (§ 29) de inspiración paralela a la de KEYNES.Pero su actitud posterior, hacia el dualismo, es de trascendencia y no parece posible superarse.

C A P I T U L O VIII

RELATO DE DIVERGENCIAS

El symposium de 1945 y la posición de Carnap. El congreso de 1949 y Bruno de Finetti. La posición de Nolfi y la de otros.-

31.- Hasta aquí hemos referido puntos de vista muy diversos sobre los fundamentos de la probabilidad, a través de los autores más representativos de cada una de las escuelas. Acuerdo total entre las teorías no hemos advertido; sólo hay concomitancias de origen o de intención.

En las conferencias y congresos se discute grandemente el problema, en debates que por lo común trascienden, por sus términos, el ámbito de lo científico, sin que se obtengan resultados satisfactorios más o menos importantes. En general, los sostenedores de las distintas teorías no ceden ni transigen, y, por ello, la ocasión de defender públicamente sus ideas concluye siendo aprovechada para reiterar su formulación primera, con los leves retoques que las circunstancias aconsejen oportunamente.

32.- Pasemos revista, pues, al <u>symposium</u> sobre probabilidades de 1945, recogido por "Philosophy and Phenomenological Re search", vol. 5 y 6. Allí opinan los siguientes congresales:

(a) DONALD WILLIAMS presenta objeciones a los colectivistas, del tipo que conocemos, particularmente subrayando el carácter no operacional de sus teorías, basadas en la idealización del colectivo infinito y del límite de frecuencias.

Manifiesta, en cambio, que el significado "clásico" de probabilidad es el que coincide con la noción intuitiva y popular de "grado de creencia racional". Y que siendo ésta una cuestión de estricta lógica, no puede discutirse fuera de la liza propiamente filosófica.

(b) ERNEST NAGEL después de defender a los colectivistas de los ataques de WILLIAMS, dice que no es posible acordar a la probabilidad una sola acepción. El se define como dualista, entendiendo que una probabilidad sirve en el campo de la frecuencia, y otra se necesita para comprender el problema de la inferencia no determinista.

(c) HANS REICHENBACH también replica a Williams, defendiendo al colectivismo.

Sólo las frecuencias en colectivos pueden proveer una directiva para la acción futura. Preferir el evento más probable (o sea, el de mayor frecuencia) significa nada menos que afirmar que se ha tenido éxito en el mayor número de casos.

(d) RUDOLF CARNAP interviene en la controversia con su concepción dualista. Por considerar que sus ideas son muy importantes, vamos a detenernos en la obra que publicó en 1950 (Cf. Bibliografía, donde se cita la reimpresión de 1951), que desarrolla la tesis sostenida en el symposium.

Hay dos conceptos fundamentalmente distintos que se nombran con la misma palabra:

(1) Uno es el grado de confirmación de una hipótesis con respecto a una evidencia, o dato observado. Es éste el concepto lógico, semántico. Una proposición sobre este concepto valdrá según su análisis lógico, y si fuese verdadera lo será en el sentido lógico.-

Daremos a esta acepción el nombre de probabilidad$_1$.

(2) Otro reside en la frecuencia relativa a la larga de una propiedad de eventos con respecto a otra. Las proposiciones que se funden en esta acepción son fácticas o empíricas.

La denominaremos probabilidad$_2$.

Tanto prob.$_1$ como prob.$_2$ son conceptos objetivos, y todo psicologismo debe desterrarse de ellos.

Ahora bien, para CARNAP, existen, por su parte, tres conceptos semánticos de confirmación, que son: (a) el concepto clasificatorio de confirmación (la hipótesis h se corrobora por el dato e); (b) el concepto comparativo de confirmación (la hipótesis h sobre e se confirma con más fuerza que la h' sobre e'); (c) el concepto métrico de confirmación (h sobre e se confirma en una cantidad q).

Prob.$_1$ es un juicio analítico, prob.$_2$ es un juicio empírico; pero se advierte que ambos son funciones de dos argumentos: sentencias en un caso, propiedades fácticas en el otro.

El problema de la lógica inductiva se concibe en CARNAP como el problema de explicar la prob.$_1$. Pero la lógica inductiva puede erigirse con prescindencia de la deductiva con la sola definición del grado de confirmación.

La lógica deductiva se basa esencialmente en la relación de implicación total; la inductiva, en la relación de implicación parcial.

CARNAP se impone la tarea de construir una lógica inductiva completa, que dé la caracterización de toda la técnica probabilística y la técnica de la estimación, de los estadísticos. Para ello intenta definir una función de confirmación, y otra de estimación basada en aquella, las que a su vez, se hallen unificadas en otra, la que será la explicación última de la inducción.

No se ocupa de prob.$_2$, pues es concepto empírico.

De los conceptos aplicables a prob.$_1$ prefiere y desarrolla los cuantitativos (o métricos) por ser más fecundos.

Sin embargo, su teoría hállase aún en elaboración.

(e) HENRY MARGENAU también es dualista, pero por motivos completamente distintos.

Existe una probabilidad definida "constructivamente": es de LAPLACE. Existe otra probabilidad definida "operacionalmente": es la frecuentista.

Pero debe desvincularse la cuestión de la probabilidad de todo problema lógico o filosófico.

(f) GUSTAV BERGMAN, por el contrario, arguye que cualquier teoría probabilística (en particular, la empírica) pertenece necesariamente a la filosofía de la ciencia, y es imposible no admitir vinculación con ella.

(g) RICHARD VON MISES participa en la discusión sólo en la medida de reiterar sus conocidas objeciones a las teorías no frecuentistas, de que nos hemos ocupado circunstanciadamente.

(h) FELIX KAUFMAN critica conceptos de lógica inductiva vertidos por CARNAP; porque, afirma, la inducción difiere esencialmente de la deducción.

En efecto; en la deducción, una implicancia se resuelve directamente del examen de los significados de los términos; en cambio, en la inducción hay que tener en cuenta, para resolver una implicancia, todo un cuerpo de conocimientos y reglas, además de la significación. Por eso las conclusiones inductivas son provisorias, y son relativas a tal cuerpo de conocimientos y reglas, pudiéndose descartar cuando este cuerpo se modifica en cierta manera peculiar.

(i) RUDOLF CARNAP, respondiendo a KAUFMAN, expresa que la inducción no difiere de la deducción tan radicalmente. Para comprender esto hay que tener clara idea de lo que es "grado de confirmación" (Cfr. lo expuesto en (d) .

Por otra parte, KAUFMAN - según CARNAP - no distingue entre "verdad" y "verificabilidad", que es lo que interesa al hombre de ciencia, ya que la verdad le es inalcanzable, porque constituye un pseudoproblema.

(j) FELIX KAUFMAN le contesta diciendo que no puede concebirse la lógica de la ciencia sólo como una descripción de lo que hace el hombre de ciencia. Es necesario referirse al nivel de claridad y certeza que él persigue, y también a las normas que permiten realizar la crítica científica.

La verdad, y no la verificabilidad, posibilita un estudio cabal de la lógica de la ciencia.

33.- En resumen, el symposium de 1945 se nos presenta como una prueba del gran desacuerdo de fondo y de forma que subsiste entre quienes pretenden fundamentar la probabilidad.

El propio KOOPMANN dice en otro lugar (Mathematical Review, 7, 8), que nadie ha sabido caracterizar la inducción en el congreso de 1945.-

Aparte de algunos puntos oscuros de CARNAP, concuerda con él en cuanto a la doble acepción de la probabilidad.- Dice que la crítica de KAUFMAN es metafísica (sic) en cuanto afirma una posición personal no demostrativa. Discrepa con REICHENBACH porque confunde frecuencia con numerosidad. Con MARGENAU, porque todas las definiciones y no únicamente la de probabilidad, son descriptivas y operacionales. Y con MISES, por las razones consabidas.

33.1.- Sin embargo, comparando los temas discutidos en el symposium de 1945 con los que se expusieron en el coloquio de probabilidades suscitado por la Universidad de Ginebra poco antes de la segunda gran conflagración, se nota un marcado acento filosófico en aquél frente a una apreciación más especializada en el segundo; en el cual, autores como FRECHET, MISES, WALD, CANTELLI, STEFFENSEN y FELLER explicaban todavía las grandes teorías con independencia de cuestiones del conocimiento.

34.- En la Sección VI del Congreso Internacional de Filosofía de las Ciencias (París, 1949), sección dedicada al Cálculo de Probabilidades, hay abundante material de controversia.

Las colaboraciones hacen frecuente referencia al punto de vista subjetivo extremo del profesor romano BRUNO DE FINETTI, que interviene en el congreso y cuyos trabajos y opiniones habían sido hechos públicos desde muchos años atrás.

Por ser de interés en el panorama histórico de la fundamentación de la probabilidad, dedicamos a DE FINETTI el párrafo siguiente, antes de analizar los demás temas discutidos en el Congreso de 1949.

34.1.- DE FINETTI es el representante extremo del subjetivismo, llegando a afirmar que la probabilidad objetiva no existe nunca, aunque sí se pueden describir las leyes de lo subjetivo y construir un cálculo riguroso sobre la base de ellas.

Cuando un individuo juzga igualmente probables dos eventos es porque, frente a ellos, se encuentra en idéntico estado de ánimo y puede intercambiar sus temores o esperanzas basados en la aparición de uno u otro de esos dos eventos.

Para <u>medir</u> la probabilidad subjetiva se echa mano de la esperanza matemática.

Cuando se hace una apuesta, el premio que se ofrece es tanto mayor cuanto mayor es la <u>confianza</u> que se tiene en vencer.

Un individuo es <u>coherente</u> cuando formula apuestas con otros individuos sabiendo que no estén en condiciones de <u>vencerlo con seguridad</u>. <u>El cálculo de probabilidades es la teoría matemática que enseña a ser coherente</u>.

No es necesario dar las particularidades del cálculo de DE FINETTI, pero es bueno que citemos el ejemplo dado en su obra de 1931 (Cfr. Bibliografía).

Sea nuestro propósito medir el grado de confianza que una persona H tiene con respecto a la realización del evento E. Supongamos que H está obligado a sostener una banca de apuestas a favor o en contra de cierto número de eventos, entre los cuales está E.

Admitamos que participan <u>n</u> concurrentes y que los eventos E_1, E_2,..., E_n (para los cuales H debe aceptar apuestas) signifiquen la victoria, respectivamente de los concurrentes 1, 2,

..., n.

Las reglas de apuestas son:

(1) H puede establecer el precio p de un bono que da derecho a rescatar un peso en el caso de que cierto E se verifique;

(2) H se obliga a vender y comprar al precio p tantos bonos como el público desee;

(3) Algún competidor se presenta a la banca de H y quiere apostar a E; es decir, puede comprar al precio pS un obligación que le da derecho - si vence - a exigir una suma S.

El número p - tanto mayor cuanto mayor confianza tenga H en la realización de S - es la probabilidad de E según el individuo H.

34.2.- Volvamos ahora al Congreso de 1949.

(a) NOLFI (de Zürich) sintetiza un trabajo aparecido en Dialéctica (1949). Nos hace notar que LEVY, no obstante declararse partidario de la probabilidad subjetiva a extremos de afirmar que es la única que nos permite dar un esquema de su naturaleza, y no obstante sostener que el buen sentido - reacio a ser encerrado en fórmulas matemáticas - desempeña un papel importante en tal esquema, concluye afirmando que la fundamentación de la probabilidad ya está resuelta todo lo bien que puede hacerse racionalmente. ¿No será posible, entonces - dice NOLFI - llegar por el camino de las cosas resueltas, a la probabilidad objetiva?.

Nos explica que carece de buen éxito la observación que GINI realiza para justificar la proposición de "casos igualmente posibles" en el sentido de que la condición de toda medida es admitir que hay casos iguales. Pero, en probabilidades, las dificultades de hallar la unidad de medida, son a veces invencibles. Por ejemplo ¿Cuál es la unidad de medida de la mortalidad?.

Ni LEVY ni GINI (tampoco FRECHET) salvan la distancia entre probabilidad subjetiva y objetiva; porque no es comprensible una metamorfosis tan radical. Es mejor, en todo caso, como DE FINETTI, quedarse en lo subjetivo sólo; aunque la fecundidad del cálculo probabilístico, fuerza es reconocerlo, radica en la construcción de reglas objetivas operacionales.

NOLFI proclama que únicamente el punto de vista dialéctico permite salvar las distancias en torno a la fundamentación de la probabilidad.

Dicho punto de vista - sostenido por la escuela de GONSETH - se encuentra radicado en el principio de idoneidad que reemplaza al de verdad, cuando ésta no puede conocerse.

"Si tu ne connais le vrai,
L'idoine il te faut chercher"

La dialéctica, en oposición al racionalismo, no pretende edificar un conocimiento definitivo y absoluto; sino solamente un sistema (provisorio) de conceptos, un juego de ideas, con la condición de que sea: adecuado, coherente y eficaz. Adecuado, es decir, acorde con la información que poseamos; coherente, esto es, obediente a las reglas internas de una lógica probabilística; eficaz, en relación a su valor pragmático, en continuada reverificación.

El principio de idoneidad (adecuación, coherencia, eficacia) no entraña el principio de autoridad, porque está sometido a continua revisión: es a lo sumo una autoridad provisional.

Con ese principio se nos esfuma el velo de la verdad absoluta; es decir, renace la condición necesaria para marchar hacia adelante en la investigación. La ciencia no ha de buscar la realidad sino la eficacia (momentánea) de sus conclusiones.

No existe un criterio previo de idoneidad. El idóneo se revela en la acción...

Sobre la base de esta concepción - que es una teoría del conocimiento - el cálculo de probabilidades puede ser comparado, según NOLFI, a una matemática de la conducta, o matemática de la libertad - raíz de la vida -; un cálculo no sometido, por ende, al principio de causalidad ni a su influencia espiritual.

(b) FORTET advierte - en su colaboración - que en la axiomática de KOLMOGOROV existen conceptos insuficientemente caracterizados. Por ejemplo ¿Cómo distinguir los "eventos" probabilísticos de los no probabilísticos?

Una segunda dificultad se presenta en aquellos casos en que, en problemas físicos (DESCHAMPS) aparece una probabilidad no representable por números reales.

Una tercera dificultad aparece en cuestiones anexas a la teoría de BAYES. En efecto, en el problema de estimar un parámetro numérico, se introduce una valuación de probabilidad a priori del parámetro sin asegurarse antes (y no hay manera de hacerlo) si el parámetro es aleatorio y que, siéndolo, admite esa valuación. ¿Habrá que suponer, acaso, que hay dos tipos de probabilidad: una vulgar y otra científica; o habrá que adoptar la postura de DE FINETTI?.

(c) Para VAN DANTZIG, el cálculo de probabilidades es directamente aplicable en los casos en que los "modelos" matemáticos disponibles, concuerden con el fenómeno que haya que interpretar.

Pero hay casos en que los modelos no nos serán de utilidad por las condiciones ambiguas del fenómeno en cuestión.

Es imposible que exista un único modelo, universal, al que puede referirse la noción de probabilidad. Por eso la adopción forzosa de un modelo matemático no debe interpretarse como nada más que una operación de sondeo; y nunca podrá probarse que ese modelo es "correcto" o "verdadero": a lo sumo podrá decirse que es "aceptable" o no, dentro de un nivel de confianza preestablecido por el experimentador.

El hilo de Ariadna en estas ideas de VAN DANTZIG parece ser: que los fenómenos empíricos son susceptibles de interpretación sólo mediante modelos probabilísticos diversos; y que la valoración de los resultados obtenidos según esos modelos, depende, no de la probabilidad, sino de la "aceptabilidad"("like lihood") de los mismos.

(d) A propósito, DE FINETTI aclara, desde su posición subjetivista, que probabilidad, verosimilitud y aceptabilidad, no significan, en el fondo, nada más que valuaciones de las opiniones individuales.

(e) FRECHET responde que, si la probabilidad ha de consistir en una ciencia comunicable, ha de hacer uso de aquello que todo hombre pueda aceptar; es decir, ha de hacer uso de nociones objetivas.

Por eso, cuando el mismo DE FINETTI afirma que atribuir una probabilidad pequeña a una eventualidad importa tanto como juzgar que es casi cierto que esa eventualidad no ocurrirá, está implícitamente aceptando el principio (objetivo) de COURNOT.

(f) Para PAUL LEVY, el cálculo de probabilidades, aunque sugerido por la experiencia, es ante todo (como la geometría) una creación de nuestro espíritu.

Podría decirse que los juegos de azar hayan sido inventados para hacer comprender el cálculo de probabilidades. Y en ningún otro modelo es de absoluta aplicación.

De modo que, cuando el cálculo probabilístico se usa fuera de los juegos de azar, surge la cuestión de verificar hasta qué punto el modelo es aplicable. Y la mayor o menor aplicabilidad se determina por la experiencia.

Aparte de esta disquisición, hay hechos que permiten advertir una cierta compenetración entre la aritmética y la probabilidad. Así, por ejemplo, en la aparición de las cifras decimales de π y en las reglas generadoras de números primos en general, se puede interpretar que el azar interviene con todas sus características.

35.- A nuestro juicio, la nota más alta y novedosa en el congreso de 1949, la da el suizo NOLFI con su apreciación dialéctica de la probabilidad. La discusión se plantea en un ámbito que es, sin retaceos, el de la teoría del conocimiento; y el acuerdo parece imposible.

Los demás concurrentes vierten opiniones sobre distintos aspectos especiales y sobre el problema de fondo de la fundamentación.

Pero ya se nota la ausencia - quizás definitiva - de los voceros de aquella escuela frecuentista que tan grande tono de polémica habían provocado con sus teorías, poco tiempo antes.-

CAPITULO IX

INTENTOS DE RECONCILIACION

La ley única del azar. La descripcion de Toranzos. La reconciliación según Kendall. La reconciliación según De Finetti.-

36.- En 1948, FORTET proclama que, por encima de las divergencias teóricas, el acuerdo entre objetivistas y subjetivistas existe de hecho porque todos ellos admiten, a la postre, la ley única del azar. Aunque la interpreten, después, de manera diversa.

Esa ley, en términos pragmáticos, enuncia que "debemos actuar, frente a un evento de probabilidad suficientemente pequeña, como si ese evento no se produciere jamás".

Entonces, aunque haya divergencias profundas en cuento a la significación de la probabilidad, ni el Cálculo de Probabilidades ni la validez de sus aplicaciones pueden ser cuestionados ni perjudicados por doctrinas antagónicas.

37.- Entre nosotros, en 1949, TORANZOS, pretende encarar simultáneamente dos aspectos, aparentemente distintos, del estudio de la probabilidad: el matemático y el de la aplicación.

Se esfuerza en describir, pues, los elementos fundamentales, (cuatro, para él) que deben intervenir en la definición de la probabilidad.

Primero, el sistema de pruebas: representable matemáticamente como una función - aditiva y no negativa - de conjunto. Esa función - habrá que admitirlo - puede ser determinada, como cualquier magnitud física, a menos de cierto ε ;

Segundo, el conjunto de contingencias, que puede considerarse como estando en correspondencia con un conjunto espacial boreliano;

Tercero, el sistema de conocimientos que se posean respecto del conjunto de contingencias. Los conocimientos pueden provenir del campo de la ciencia natural, del principio de razón suficiente o de la observación estadística de frecuencias. Rige en éstos la ley de los grandes números, lo cual implica que ha de esperarse un acercamiento asintótico entre lo que expresa la razón suficiente y lo que enseña la frecuencia; pero si el acercamiento no se presenta, sino, en cambio, aparecen discrepancias, habrá que preferir el resultado estadístico;

Cuarto, una variable vectorial en el espacio euclídeo n-dimensional, que servirá de utensilio matemático.

Ahora bien, estos cuatro elementos se interpretan en forma diferente en las diversas escuelas y surgen divergencias importantes. Pero éstas se deben principalmente a las posiciones epistemológicas de los autores; lo que no obsta a que las teorías lleguen a conclusiones no incompatibles sino complementarias.

38.- En 1949, KENDALL propugna una reconciliación entre las teorías sobre la probabilidad, que no se base únicamente en el valor pragmático de la misma sino que descienda al fondo de la cuestión, el cual linda con la teoría de la inferencia.

El matemático, que se preocupa por organizar el cálculo de probabilidades, no se interesa de elucidar el problema de la inferencia inductiva, base del método científico.

El estadístico tampoco se vincula con este método sino con una parcela, la de los eventos repetibles - que no son los únicos. Por eso no sabe responder a la pregunta sobre la probabilidad de que HOMERO fuera ciego.

El estadístico se ciñe a las probabilidades experimentalmente verificables, el lógico de la inferencia no: su ámbito es mayor.

Por otra parte, todas las corrientes probabilísticas que no toman a la probabilidad como idea primitiva, introducen de alguna manera una idea equivalente antes de ir a las aplicaciones ("Igualmente posibles", "colectivo", "azar", "fortuito", etcétera).

La base es la noción de probabilidad *a priori*, cuya génesis es psicológica: nace y se madura en una experiencia inconsciente y no recordada. Así que si bien la probabilidad *a priori* subyace en toda noción de probabilidad, esa probabilidad *a priori* se engendra en la experiencia.

38.1.- El punto de convergencia entre empiristas y no empiristas es éste: Los primeros buscan la objetividad definiendo la probabilidad en función de la frecuencia (pero deben usar nociones subjetivas de fortuitidad o equiprobabilidad)los segundos toman la probabilidad como idea primitiva, pero deben admitir que sus leyes reflejan de alguna manera la conducta de los eventos naturales, y, cuando han de establecer las probabilidades numéricas tienen que hacer cuanta hipótesis adicional convenga al propósito.

Los frecuentistas obtienen la regla del producto sin mayores dificultades, aunque involucrando la idea subjetiva de azarosidad o alguna similar. Los no frecuentistas tienen inconvenientes: Así JOHNSON la formula como axioma; KEYNES, como definición; JEFFREYS como axioma. Nunca como proposición deducible de la idea subjetiva de probabilidad.

En cambio, un no frecuentista halla natural establecer la ley de las probabilidades inversas, por la cual:

probabilidad a posteriori = probabilidad a priori x verosimilitud;

ley inaceptable desde el punto de vista frecuentista, en esta formulación. La dificultad radica en la determinación de la probabilidad inicial. FISHER pretende salvarla introduciendo la verosimilitud o aceptabilidad como idea primitiva, de cuya naturaleza la intuición no nos informa. NEYMAN interpreta el grado de aceptabilidad por medio de la distribución fiduciaria, que equivale a otro tipo de incerteza. PEARSON, con sus intervalos de confianza, tampoco elimina del todo el matiz subjetivo.

En consecuencia, da KENDALL varios casos en que deben coincidir frecuentistas y no frecuentistas. Unos y otros se intercambian ideas en determinados momentos del desarrollo de sus respectivas teorías: particularmente en el momento de la aplicación.-

39.- Tenemos noticias de que en 1950, L.J.SAVAGE publica en Econométrica, 18, un trabajo conciliatorio titulado "The role of personal probability in statistics", donde el calificativo de "personal" es equivalente a "subjetiva" o "psicológica" pues se refiere al "grado de convicción".

40.- En una contribución que apareció en 1951, BRUNO DE FINETTI contesta a las argumentaciones de KENDALL y SAVAGE, sosteniendo que la base más apropiada para una reconciliación es la teoría subjetivista (la construída por él, naturalmente), porque equidista de los objetivistas y los subjetivistas de la creencia racional.

La probabilidad no nace de la creencia racional; sino de la creencia, simplemente, de la creencia personal (real y actual) de cada individuo. Pero exige la elaboración de un criterio que caracterice a la coherencia, preparando el camino de una posición objetivista. De manera que hay un paso de lo unisubjetivo a lo multisubjetivo, donde se engendra la parte racional de nuestra creencia.

Para DE FINETTI la regla de BAYES, por ejemplo, no es una cosa misteriosa; es, en cambio, la expresión de una creencia personal, directamente aprehensible por el individuo, mediante su propia estimación de la probabilidad a priori.

El problema de la decisión se plantea, lógicamente, por intermedio de decisiones que dependen de un solo individuo (o de más de un individuo que tienen la misma creencia); pero se resuelve después de elaborada una teoría de la coherencia que constriñe a todos los individuos a efectuar una misma estimación, no importando la opinión personal de cada uno acerca de su estimación particular previa. Y sabido es que las discrepancias personales desaparecen por acción de la experiencia, que comprueba y confirma las leyes de la decisión multisubjetiva.-

Intentar la erección de una teoría de la probabilidad sin el concepto básico de probabilidad a priori es vano. Pero también es vano, y falaz, intentarlo con la creencia personal sóla, sin una teoría de la coherencia que multisubjetive lo individual.

Autores modernos como von NEUMANN y MORGENSTERN (Cfr. Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, 1947) al introducir la probabilidad en la economía hacen - al decir de FINETTI - consideraciones similares a las de la teoría subjetiva; pues emplean, en cierta medida, un concepto de probabilidad basado en las apuestas. Un criterio cualitativo de mera comparación está siendo sustentado por G.POLYA.(Cfr. "Preliminary remarks on a logic of plausible inference", Dialéctica, vol. 3, 1949). Difiere este autor de la escuela del subjetivismo extremo sólo en que aquél concibe dos acepciones distintas de la probabilidad: la estadística, vinculada a la frecuencia, y la otra cuyos lineamientos generales son semejantes a los de DE FINETTI.

C A P I T U L O X

C O N C L U S I O N E S

41.- Un rasgo característico de las teorías frecuentistas, en su más alto desarrollo, es el de considerar el estudio de la probabilidad como el de una ciencia natural. MISES, por ejemplo, se empeña en edificar una teoría matemática de la probabilidad, de la misma manera - dice - que se edifica la teoría matemática de la termodinámica o de la electricidad. Los frecuentistas en general, concuerdan en el origen empírico de la probabilidad, cuyas leyes (como las leyes naturales) se proponen descubrir, a través de la observación de eventos reiterativos y a la larga.

Si bien es cierto que LAPLACE <u>no asimila</u> la probabilidad a la ciencia natural, debe recordarse (Cfr. 3, i) que señala su aplicación a la ciencia natural justamente en aquellos casos en que los frecuentistas fundan toda su doctrina. En efecto, dice LAPLACE que la teoría de la probabilidad es <u>aplicable</u> a las ciencias naturales cuando se trata de observaciones numerosas.

También declara (Cfr. 3,b) que todo el sistema de los conocimientos humanos, con los principales medios para alcanzar la verdad - a saber, la inducción y la analogía - se funda en probabilidades. Aquí LAPLACE habla con palabras que supondríamos de un KEYNES o de algún otro partidario de las teorías basadas en la creencia racional. Más aún, cuando leemos (Cfr.3, g) que "la certeza y la probabilidad son comparables".

Se acerca, por otro lado, a los subjetivistas extremos, como DE FINETTI, cuando menciona los estados de espíritu (Cfr. 3,g); cuando anuncia (Cfr. 3,h) que, con los mismos datos,dos personas pueden llegar a resultados probabilísticos diferentes; cuando explica (Cfr. 3,k) que la teoría de la probabilidad hace apreciar con exactitud lo que los espíritus justos (¿ diremos "coherentes"?) sienten; y cuando menciona (Cfr. 3,j) el buen sentido, en frase después tantas veces citada.

Para LAPLACE, lo que los espíritus justos sienten lo es por una especie de instinto (Cfr. 3,k). KOOPMAN dice "intuición", esto es, conocimiento directo, no discursivo; FINETTI, cree en un aprendizaje empírico previo, no recordado y casi inconsciente, que constituye el origen psicológico de la probabilidad.

Si bien LAPLACE es determinista y el azar no le resulta ser otra cosa (Cfr. 3, c,d) que la expresión de nuestra ignorancia frente a las causas verdaderas; el reconocimiento de que padecemos de esa ignorancia es como un puente tendido hacia el JEFFREYS, que rechaza el determinismo estricto.

La lógica de REICHENBACH pretende fundar la inducción científica sobre la implicación probabilística, a semejanza de lo que procura CARNAP para su probabilidad sub uno. En LAPLACE (Cfr. 3,b) se enuncia idéntico propósito con relación a "todo el sistema de conocimientos humanos".

"La mayoría de los más importantes problemas de la vida no son más que problemas de probabilidades" se lee en el Essai (Cfr. 3,a). NOLFI habla de la probabilidad como de la matemática de la conducta o matemática de la libertad - raíz de la vida. SERVIEN ve, quizás, en esa misma raíz vital el porqué del fracaso del cálculo matemático del azar. En verdad, ni en NOLFI ni en SERVIEN se manifiesta una conexión directa con LAPLACE; pero no dejamos de percibir en ellos ciertas notas con reminiscencias laplacianas.

Cuando VAN DANTZIG nos trae la teoría de los modelos matemáticos, y cuando LEVY sostiene que el cálculo de probabilidades es creación de nuestro espíritu, recordamos palabras del Essai (Cfr. 3,e) que afirman que la teoría del azar consiste en reducir todos los eventos de la misma naturaleza a un determinado número de casos igualmente posibles; lo cual equivale, para nosotros, a la introducción de un modelo ideal. También la definición luego llamada "clásica" (Cfr. 3,f) relativa a la fracción numérica, comporta una nota de significación creativa.

Todos estos aspectos que hemos venido comentando, expresivos de elocuentes conexiones, nos conducen a confirmar nuestra opinión de que en LAPLACE están, en ciernes, la mayor parte de las ideas principales que condicionan las distintas teorías elaboradas hasta el presente, sobre los fundamentos del cálculo de probabilidades. La circunstancia de que sólo una de las aseveraciones adoptadas y formuladas por él (esto es, la definición clásica) se haya considerado unánimemente como la única representativa de su doctrina, se explica por su eminente valor operativo, comprobado a lo largo de toda la teoría laplaciana;pero no debe significarnos que el autor no presintiera distintos aspectos del problema, los que, ulteriormente,fueron revalorados por otros, desarrollándose en direcciones a veces divergentes.

42.- Las cuestiones promovidas en torno al objetivismo y al subjetivismo, con ser tantas (Cfr. MARIO BUNGE, op. cit. en Bibliografía), deben darse al presente por superadas.

La ciencia clásica ha radicado sobre la noción de objetos exteriores cuyas propiedades serían intangibles. Pero la reciente evolución de la física ha señalado los límites de una concepción tan radical. Los objetos no son ya sino objetos referidos a nuestra escala: así en la relatividad como en la mecánica ondulatoria, donde las posibilidades de la representación objetivante se han reducido mucho.

Por tanto, el fin de la ciencia actual no parece ser el de describir el mundo exterior; sino, partiendo de cierto conjunto de medidas y observaciones hechas en un instante dado, el de prever el resultado que darán ciertas mediciones ulteriores.

Las diferencias entre objetivo y subjetivo, pues, no son tantas ni las mismas que en épocas de la ciencia clásica. Lo objetivo se ha subjetivado y lo subjetivo ha teñido lo objetivo en cierta manera. No es posible, en consecuencia, referirse a la significación de ambos términos, antes tan distintos, sin advertir que esa significación no se ha mantenido inalterada.

El origen de la noción de probabilidad, su génesis y desarrollo ulterior y hasta su aplicación en la técnica estadística, pueden considerarse subjetivos: por experiencia acumulada atávicamente, por ser las "formas" de la facultad cognoscitiva, o por ser una especie de memoria inconsciente...

Pero la teoría de la probabilidad desposeída de ingredientes metodológicos se construye sobre bases objetivas; esto es, sobre bases que pueden ser aceptadas por todos y que valen como una lógica de la inducción. Así, la creencia racional, la coherencia de KOOPMAN y la coherencia de DE FINETTI, terminan siendo conceptos objetivos, universalizables en la misma medida que las doctrinas propiamente objetivistas (').-

En la probabilidad teórica de KEMBLE, cuya función es la de servir de presupuesto a una hipótesis sobre la naturaleza de

---

(') En 1954, la obra de L.F.SAVAGE, The Foundations of Statistics, Wiley, N.York, expone un conjunto de ideas concordantes con las de De Finetti, relativas a la metodología estadística. En ella se puntualizan los elementos subjetivos.- (Nota de la 2da. edición).-

lo físico, la objetividad está traducida a nuestra escala, y, por ende, posee matices peculiares, expresivos de la nueva acepción con que estos términos se entienden en la ciencia moderna.

Por cierto no nos detenemos en el análisis de los elementos subjetivos que algunos autores admiten en la técnica probabilística, sin distinguir lo lógico de lo metodológico.-

43.- Cuando el conocimiento proviene de la inferencia inductiva, la probabilidad provee de las condiciones para pensar y actuar. Funciona como una categoría objetal, esto es, referida a clase de objetos y a sus relaciones.

Por tanto, el dominio de una lógica probabilística debe abarcar la lógica de clases y la lógica de relaciones. Pero también debe otorgar cabida a los casos únicos, no referidos a clases; por lo cual se justifica una lógica formal proposicional probabilística.

Ahora bien, si no se trabaja con un metalenguaje como intenta CARNAP dentro de la lógica modal plurivalente que se requeriría en consecuencia, tiene que formalizarse una lógica probabilística con tres secciones: la proposicional, la de las clases y la relacional.

La fundamentación de KOOPMAN, salvo el carácter no intuitivo de algunos axiomas, es una lógica proposicional adecuada a los sistemas parcialmente ordenados. La de REICHENBACH, eminentemente objetal (clases y relaciones) no alcanza a caracterizar el caso único. La de CARNAP, no modal, aún en desarrollo, no puede ser juzgada cabalmente todavía, pese a su notable aliento (').-

44.- Por el momento, no es posible adoptar una concepción monista de la probabilidad.-

---

(') El autor ha analizado la obra de CARNAP en un trabajo posterior.-

Nos hemos enfrentado, por un lado (*), con un cálculo de probabilidades pasible de concebirse como pura creación de nuestro espíritu; por otro, con la frecuencia estadística y los fenómenos estocásticos, cuyo estudio y análisis permiten la predicción científica; por otro, con la lógica probabilística, emergente de una especie de categoría objetal; por otro, en fin, con la probabilidad utilizada como presupuesto de la hipótesis cuántica, para explicar la naturaleza de ciertos fenómenos físicos.

No todos esos y otros aspectos diferentes se mantienen sin conexiones. Así, desde hace unos quince años, viene desarrollándose el cálculo aleatorio, moderno instrumento matemático que intenta abarcar no solamente los problemas de ese cálculo de probabilidades originado en los juegos de azar (lo que ellos llaman "azar puro"), sino también los problemas estocásticos, que promueven las observaciones medibles. En nuestro país DEDEBANT, DI MAIO y MACHADO trabajan en esta dirección (1953), no sabemos con qué resultados finales.

Entre frecuencia y lógica no se ha logrado hasta ahora una unificación satisfactoria. El dualismo de CARNAP, compartido en los últimos años por el propio KOOPMAN ("), parece inevitable. Pero ese dualismo sería aún insuficiente si no lograse explicar la probabilidad teórica de KEMBLE, presentada no ya como una cuestión fenoménica o lógica, sino como de alcance numénico aunque provisorio.

Desde el punto de vista dialéctico de la teoría del conocimiento, se podría concluir que una triple interpretación de la probabilidad (la de medida, la de frecuencia, la teórica) resultaría, en el estado actual de la ciencia, adecuada, coheren

(*) Falta todavía realizar aquí un estudio sobre la técnica estadística, donde la probabilidad halla su más inmediata aplicación. Este tema está tratado en un trabajo posterior del autor.-

(") También POLYA es dualista (Cfr. ob. cit. p 40).-

te y eficaz; porque cada uno de los tres aspectos de la interpretación han probado ser idóneos en sus dominios. Pero sobre cuestiones filosóficas de este calibre no nos podemos decidir por falta de competencia y de argumentos que nos permitan anular los que KAUFMAN esgrime al referirse a la verdad (Cfr. 32, j).

Sin embargo, lo que sí resulta evidente es la necesidad de rechazar el monismo frecuentista.

45.- Resumiendo este capítulo, sentamos las siguientes conclusiones:

(1) La mayor parte de las ideas que se han discutido modernamente sobre los fundamentos de la probabilidad, tienen antecedentes en la obra de LAPLACE.

(2) Separada de los elementos metodológicos subjetivos que pueden intervenir en la técnica estadística, la teoría de la probabilidad es objetiva; pero debe darse al concepto de objetivo la acepción nueva que ha alcanzado en el estado actual de la ciencia.

(3) Una lógica probabilística completa debe abarcar el dominio de lo proposicional puro, de las clases y de las relaciones.

(4) No es posible aceptar, por ahora, una interpretación monista de la probabilidad. Pero la cuestión sigue abierta.

(5) El monismo frecuentista es inadmisible.-

---o---

A P E N D I C E

SIGNIFICADO DE LAPLACE EN LA HISTORIA DEL CALCULO DE PROBABILIDADES(*)

RESUMEN. En este breve ensayo pretendemos dar una interpretación, quizás nueva, de la posición que Laplace ocupa en la historia del cálculo de probabilidades, particularmente en la cuestión de sus fundamentos.

Para ello, nos proponemos dos objetivos. El primero, confirmar la opinión, en otra parte sustentada, de que Laplace es el punto de partida de las concepciones modernas por más que muchas sean muy distintas entre sí, porque dichas concepciones están enunciadas, o comentadas o desarrolladas a veces en las memorias laplacianas.

El segundo objetivo consiste en sostener que Laplace es también la síntesis de las ideas antiguamente sustentadas sobre fundamentación de la probabilidad, y en él es donde se ven o entrevén las actuales complejidades del asunto.

Como consecuencia, sugerimos que un tratamiento histórico del mismo puede echar alguna luz y permitir una sistematización de las controversias contemporáneas.

En nuestra exposición seguimos el siguiente programa: reseña biográfica, noticia de las principales monografías laplacianas, comentario del Traité y del Essai, influencias sufridas por Laplace, influencia de Laplace en los modernos.-

—o—

1.- Al dar comienzo a este trabajo, tomamos a Laplace como punto de partida de las modernas teorías de la probabilidad y como entronque común de las corrientes fundamentadoras anteriores a él. Trataremos de justificar una apreciación semejante.-

---

(*) Este tema ha sido desarrollado, sin mayores cambios, en el Instituto de Filosofía de las Ciencias (Madrid). Conferencia del 14 de enero de 1955. Se incluye en este libro porque aclara una de sus conclusiones.-

Buscando un símil, diríamos que Laplace es el robusto tallo de un árbol cuyas raíces se nutren en las aportaciones precedentes y cuyas ramas son el apoyo de las concepciones posteriores y actuales. Porque de ninguna manera es posible comprender y valorar su enorme significación en el campo de la teoría de las probabilidades, sin reconocer la herencia intelectual por él recibida; ni explicarse el cúmulo de orientaciones diversas de la hora presente, sin inmediata remisión a sus ideas, sea tomadas en conjunto, sea parcialmente; ni mucho menos, interpretarlo como pensador aislado, absolutamente original y único.

Nos parece oportuna y conveniente, en este caso, la opinión que sustentaba Du Pasquier en 1926, cuando explicaba que la mejor manera de llegar al concepto cabal de las probabilidades era estudiarlas en su evolución histórica. En efecto, no obstante los remotísimos orígenes del cálculo que Pascal denominara "geometría del azar", la mayor parte de sus aplicaciones, interpretaciones y aportaciones modernas proliferan, chocan y se interfieren, ahora con mayor frecuencia que nunca antes, pues son los nuestros los tiempos de la probabilidad y de los grandes números como fueron otros, pretéritos, los de la certeza y la determinación; pero los elementos matemáticos, filosóficos y experimentales de nuestra novísima estocástica vienen desarrollándose y conjugándose desde muy atrás, a partir de muy modesta cuna, como casi todas las grandes ideas de la historia de la ciencia.

Para contribuir a la comprensión de la actitud probabilística de nuestro siglo y no sólo para rendir merecido homenaje a hombres conspícuos, resulta necesario, entonces, tratar en lo posible de descubrir el germen que dió origen a las interpretaciones contemporáneas. Es Laplace, sin duda, el germen más evidente en todas ellas.-

2.- Algunos tratadistas franceses sostienen categóricamente que el cálculo de probabilidades nació en Francia y que en ese país alcanzó luego su mayor esplendor. Los autores italianos prefieren rastrear la idea de probabilidad y de juegos de azar, y encuentran vestigios de una y otros en la Divina Comedia de Dante Alighieri (1265-1321) o en el poema latino De Vetula. Los anglo-sajones justifican su primaria falta de contribución en estas materias, diciendo que el puritanismo de sus pueblos impidió en ellos el desarrollo de los juegos de azar, cosa que no ocurrió en los países católicos; pero que - eso sí - en las estadísticas y cuestiones vinculadas a las finanzas, el aporte de sus hombres ha sido decisivo.

Aunque a nosotros estas razones relativas a la nacionalidad de la ciencia y a la pretendida superioridad de los ciudadanos de determinadas naciones, nos parecen - en cuanto al alcance y peso que se les suele dar - perfectamente anodinas o irrelevantes, las hemos señalado aquí para indicar qué tipos de precauciones deben tomarse al estudiar cuestiones históricas de la probabilidad; precauciones análogas, se nos ocurre, a las que corresponde adoptar en otros campos, donde los hombres mezclan sus intenciones y deseos personales más de lo que con justicia debe esperarse.

3.- Pedro Simón, después marqués de Laplace, nació en Beaumont-en-Auge el 23 de marzo de 1749 y murió en París el 5 de marzo de 1827. Sus personalidades científica y moral son heterogéneas y a veces contradictorias entre sí.

De origen muy humilde - del cual se avergonzaba - llegó a posiciones encumbradas, mediante arbitrios demasiado corrientes. Dícese que era adulador, pronto a la genuflexión ante los poderosos, flexible y tornadizo de acuerdo con los cambios políticos (buen republicano, buen bonapartista, buen realista, sucesivamente). Fué menospreciado por los liberales y vituperado, especialmente, por Cuvier.

No sabemos, empero, si alguien ha valorado con amplio criterio estas condiciones personales negativas, colocando las cosas en su verdadero punto y comparándolas con aquellas circunstancias de tiempo, lugar, posición social, etc., que influyen fuertemente en la vida de los hombres.

Sin embargo, conocemos la parte positiva de su portento sa actividad científica, en virtud de la cual su nombre está colocado entre los grandes de la ciencia matemática.

Desde su juventud fué versado en teología y tuvo un talento geométrico destacado. En mérito a éste D'Alembert lo hizo designar profesor de matemáticas en la Escuela Militar, a los 20 años de edad. Su carrera fué rápida y ascendente: reemplazante de Bézout, académico, reorganizador de la Escuela Politécnica, etc. Junto con Lagrange - se ha afirmado - fué el más importante matemático de su época.

En la teoría de las ecuaciones diferenciales, en la astronomía, en la geodesia, en el electromagnetismo, en la acústica, en la teoría de los determinantes, ha realizado contribuciones de notar (¹). Arago expresó de su mecánica celeste que

---

(¹) Recuérdense, entre otros, los siguientes resultados obtenidos por Laplace en distintos dominios. En el electromagnetismo: La acción del elemento de corriente en la fórmula:

$$\frac{m.i\ ds\ \mathrm{sen}\,\alpha}{r^2}$$

En la acústica: Fórmula de la velocidad del sonido:

$$v = \sqrt{\frac{p\,g}{\rho}\,K}$$

En teoría de determinantes: (teorema) Todo determinante de grado n es la suma de los $\binom{n}{m}$ productos de los menores adjuntos que se obtienen suprimiendo sus líneas.
En ecuaciones diferenciales: La función armónica:

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

cuyas numerosas aplicaciones a las teorías del calor, electricidad, magnetismo, potencial, etc. son conocidas.-

era, sin lugar a dudas, la mejor de cuantas habían aparecido hasta entonces; y Fourier la calificó de "Almagesto del siglo XVIII.-

4.- Con respecto a la teoría de la probabilidad la obra de Laplace es singularmente extensa y profunda. Si nos limitamos a la labor escrita, ésta abarca desde 1774 hasta 1822; es decir, 48 años de producción.

La primera memoria sobre el vasto tema data de 1774 y está dedicada al enunciado y estudio de algunos problemas surgidos en los juegos de azar, donde se originaron los primeros cálculos aleatorios. Por ejemplo, acerca de la duración de una partida suponiéndose que los contrincantes tengan igual o distinta habilidad y cuenten con igual o distinto capital; o bien acerca del juego de la lotería (en una urna hay m bolas numeradas de 1 a m; se sacan n; ¿Cuál es la probabilidad de que haya k bolas predesignadas? [Resp. $\frac{(m-k)!\ n!}{m!\ (n-k)!}$]; o bien, acerca del juego de las fichas, semejante al anterior.

En la segunda memoria, también de 1774, dice que "la teoría de las probabilidades es una de las partes más curiosas y más delicadas del análisis, por la fineza de las combinaciones que exige y por la dificultad de someterlas a cálculo". No nos extrañemos, conociendo el sentido de estas palabras, que utilizara modelos para la interpretación de cuestiones probabilísticas; modelos de urnas y bolas - ideales tenían que ser (como sabemos ahora) - para explicar problemas concretos.

Uno de tales problemas es éste: (1°) Supuesto que cierta causa se pone en juego, ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca cierto efecto?, y (2°) Dado cierto efecto ¿Cuál es la probabilidad de que cierta causa haya sido puesta en juego para producirlo?.

Respuestas se habían ensayado desde antiguo; pero fué Bayes (en 1763) quien, en comunicación a la Royal Society, enunció su después famosa regla o teorema de las probabilidades inversas. Laplace en 1774 le dió un enunciado más preciso, en ter minos similares a los que siguen: "Si un evento puede ser producido por un número n de causas diferentes, las probabilidades de la existencia de estas causas inferidas de la aparición del evento, están entre sí como las probabilidades del evento deducidas de estas causas; y la probabilidad de la existencia de cada una de ellas es igual a la probabilidad del evento deducida de esta causa, dividida por la suma de todas las probabilidades del evento deducidas de cada una de estas causas".

Esto es: hay una probabilidad de que sea cierta una presunción o hipótesis, anterior aún a la presencia de determinado suceso; y hay una probabilidad calculable después que el suceso haya acaecido. Una probabilidad cuando los dados están en el aire y una probabilidad matemática medida cuando los dados están sobre el tapete, que es cuando puede contarse el número de casos posibles.

Casi no vale la pena poner en claro este enunciado, por lo menos en nuestro caso. Las controversias a que ha dado motivo nos indican fehacientemente que es uno de los puntos cruciales de la probabilidad.

El problema planteado con la regla de Bayes es de suprema importancia en el proceso de la inferencia científica. En efecto: supongamos que un evento pueda ser explicado mediante diversas causas o hipótesis excluyentes, formuladas teniendo en cuenta un mismo conjunto de observaciones. Ahora supongamos que el evento acaece. Entonces la regla nos dice que la probabilidad de una determinada de esas hipótesis ahora que el evento ha acaecido (probabilidad posterior) es proporcional a la probabilidad que se le atribuyó antes de que acaeciera (probabilidad anterior) multiplicada por cierto factor probabilístico de naturaleza singular que ha sido llamado verosimilitud de la hipótesis.

La historia de esta famosa regla y la historia de las no menos famosas polémicas a que ha dado lugar, creemos que es digna de ser escrita. Encontraremos en ella los nombres de Mc Coll, von Kries, Keynes, Jeffreys, Donkin, de Finetti, Mises, Fisher, Kendall, etc.; y, alrededor de ellos, veremos circunscriptas las discusiones sobre el subjetivismo y el objetivismo, tan importantes, aún hoy, en los fundamentos de la probabilidad.

También en esta segunda memoria de 1774, Laplace se detiene en la discusión y tratamiento de antiguos y nuevos problemas surgidos de los juegos de azar. Pero nos parece más interesante señalar que es aquí donde y cuando introduce conceptos e interpretaciones capitales en los fundamentos de la estadística.

Sabemos bien ahora que los parámetros estadísticos son elementos ideales utilizados para poder obtener, en forma rápida y sencilla, una visión sinóptica de todo un conjunto fortuito más o menos numeroso. También son utilizados con el propósito de afrontar el estudio del colectivo o población original, a través de la muestra parcial provista por la experimentación u observación. Se los debe, por ende, escoger de modo que cumplan estos requerimientos:

(1) Ser definibles de una manera que asegure que su valor numérico no dependerá del capricho del individuo que lo calcule;

(2) Ser función de todos los elementos del grupo, para que puedan ser representantes de todo él;

(3) Ser matemáticamente sencillos;

(4) Ser capaces de recibir tratamiento algebraico; es decir, admitir sobre ellos las operaciones de suma y producto en número finito de veces.

(5) Ser preferentemente estables; o sea que no den cabida a mucha variación de muestra a muestra, en un mismo colectivo o población.

Pues bien, Laplace escoge la definición del valor medio imponiéndole una de las dos siguientes interpretaciones: el valor medio es un número tal que el verdadero valor estará por encima o por debajo de él; o bien, es un número tal que la su ma de los errores multiplicados por sus respectivas probabilidades será un mínimo.

¿No es, acaso, sugestivo el hecho de que al lado de los problemas de juegos aleatorios y de la regla de Bayes, origen de controversias fundamentales, se enuncien y discutan temas estadísticos, fuentes en su turno, de otras corrientes interpretativas?.

Dos años más tarde, en 1776, Laplace publica un trabajo relacionado con las ecuaciones diferenciales y con las diferencias finitas que tienen aplicación en el tratamiento concreto de varios problemas de azar, en especial el problema de la duración de una partida, considerado ya en 1774.

En otra contribución (1776) utiliza modelos probabilísticos para estudiar la inclinación media de las órbitas de los cometas.

En 1778 en la Mémoire sur les probabilités toma en consideración aplicaciones a la estadística demográfica: nacimientos de varones en París y Londres. Se ocupa además de la teoría de los errores, como antes lo habían hecho en su turno y manera Lagrange, Daniel Bernoulli y Euler.

Esta memoria contiene muchas veces la muletilla "il est facile de voir". Bowditch, su traductor al inglés, declara que cada vez que se encuentra con afirmaciones que, al decir de Laplace, son "fáciles de ver", le sera necesario pasar horas y hasta días para darse cuenta, después, por qué eran "fáciles de ver".

En 1779 Laplace publica la teoría sobre las funciones generatrices que, con razón, fué entonces reputada como "fundamental" en relación a las tentativas de traducir al lenguaje analítico nociones básicas de la probabilidad. Fué el primer éxito entre los ensayos de resolver problemas diversos, con un mismo método orgánico.

La idea es sencilla. Al tratar eventos reiterativos, la fórmula del producto y el cálculo combinatorio proveen de los resultados correctos en cada caso planteado. Por ejemplo, si se pregunta cuál es la probabilidad de que aparezca m veces el "seis" arrojando n veces un dado, obtendremos, como respuesta, un número calculable por medio de la expresión $R_m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\cdot p^m \cdot q^{m-n}$, donde p es la probabilidad del "seis" en una jugada y q = 1-p es la probabilidad del "no seis" en una jugada.

Laplace descubrió que, variando n y m, los distintos valores de R_m corresponden a los coeficientes del desarrollo de $(p + q\,t)^n = R_0 + R_1 t + R_2\, t^2 + \dots + R_n\, t^n$. Como los R_i son probabilidades (productos de p y q elevados a distintos exponentes), es natural denominar a $(p + qt)^n$, función generatriz de las probabilidades R_m.

De aquí, el paso al continuo es inmediato. Basta considerar la función $\varphi(x)$ (densidad de probabilidad para los diversos valores de la variable aleatoria x) en lugar de p y de q = 1 - p. Luego viene la diferencial de probabilidad $\varphi(x)dx$, cuya integral entre 0 y ξ da la probabilidad de todos los valores $x \leq \xi$. Y, por fin, la función generatriz en el continuo, definida, análogamente, con la ayuda de una exponencial de base t.

En forma recíproca, partiendo del continuo, el caso discreto se obtiene mediante particularización: la integral deviene sumatoria extendida a todos los valores posibles de x.

Para nosotros, las funciones generatrices no son sino un método analítico útil para resolver diversas cuestiones con recursos matemáticos cómodos. La densidad y la diferencial de probabilidad son "modelos" adecuados a su aplicación.

En 1782 Laplace escribe una nueva contribución sobre las funciones de los grandes números y la manera de calcularlos en forma aproximada. El tema es continuado y estudiado en conjunto con la función binomial, en 1783.

El mismo año publica una memoria sobre cuestiones estadísticas: nacimientos, casamientos y defunciones en París.

Entre 1809 y 1811 se dedica a diversos asuntos: los gran des números, aplicaciones de la probabilidad a la astronomía, integrales definidas útiles en el cálculo del azar, etc.

En 1813 produce una memoria de título muy sugestivo: "Manera de elegir entre los resultados de un gran número de observaciones".

En 1815 explica, en Connaissance des Temps, cómo calcular probabilísticamente órbitas de cometas. En 1819 halla la longitud del péndulo como aplicación a la física o filosofía natural. Y, entre 1820 y 1822, expone novedosas aplicaciones a la geodesia.

5.- Pero el libro más importante de Laplace en el campo de la pascaliana geometría del azar es su monumental Théorie Analytique des Probabilités, editada por primera vez en 1812, con 464 páginas en cuarto; cuya segunda edición, ya de 506 páginas, data de 1814, y cuya tercera edición, definitiva, con una extensa introducción que abarca ella sola otras 152 páginas, apareció alrededor de 1820.-

La introducción, publicada después separadamente como Essai philosophique sur les probabilités ha sido vertida al español e impresa en Buenos Aires en 1947.

Expone Laplace en estas obras - síntesis y complemento de su continuada labor - los métodos analíticos del cálculo de probabilidades, a saber: sus teorías sobre las funciones generatrices, sobre integraciones, sobre ecuaciones diferenciales, cuadrados mínimos y errores; formula observaciones sobre problemas de azar, dando remate a algunos hasta entonces no resueltos; revisa temas concernientes a eventos reiterativos y sus correspondientes leyes de probabilidad; se las aplica a la astronomía y a la física como había hecho en anteriores monografías; y se detiene brevemente en la probabilidad de los testimonios.

En cuanto a este último punto señalado, examina un conocido argumento de Pascal, relacionándolo, como Craig, a la esperanza matemática: "Hay testimonios que aseguran poseer la misma Divinidad; que quien se adhiera a esta creencia gozará no de una sino de una infinidad de vidas dichosas. Aunque la probabilidad de ser ciertos los testimonios sea débil, siempre que no sea infinitamente pequeña será, en cambio, infinita la ventaja de quien se conforme con dicha creencia, puesto que la ventaja es el producto de aquella probabilidad por este bien infinito. Por ende, no debe nadie vacilar en procurárselo".

Otras partes interesantes giran alrededor de asuntos como los siguientes: cómo se adoptan las decisiones de los cuerpos colegiados (cortes, congresos, asambleas); de la probabilidad en pleitos y juicios de tribunales; de las tablas de mortalidad y de la duración media de la vida, de los matrimonios y de las sociedades; de las *ilusiones* que influyen en la estimación de la probabilidad; de que, precisamente, la probabilidad nos enseña a *desconfiar* de nuestras *impresiones* (como ésa de atribuir al azar una especie de memoria, o atribuir fatalidad o mala suerte a determinados jugadas o jugadores).

También sirve la probabilidad, dice Laplace, para comprender el *sensorium*, hipótesis básica de la psicología determinista de la época. Pero es muy principalmente el método o camino que conduce a las cercanías de la certeza. "La inducción, la analogía, las hipótesis fundadas en los hechos y rectificadas sin cesar por nuevas observaciones - tacto feliz (expresa) dado por la naturaleza y fortificado cada vez más por sus resultados experimentales - he aquí los principales medios para ir *hacia* la verdad".

Nos previene luego de los peligros de abusar del método de la analogía y de la inducción, y nos señala, a propósito, la "demostración" inductiva de Bacon sobre la inmovilidad de la Tierra.

Al concluir el *Essai* nos da una breve noticia sobre el desarrollo del cálculo de probabilidades a través del tiempo y añade, comentando su valor: "es de humilde origen, pero ha avanzado mucho; y es extraordinario que, comenzando en los jue gos de azar, haya podido encumbrarse al lugar que ocupan los más importantes objetos del conocimiento humano". "Siendo, como es, el buen sentido reducido a cálculo, no hay ciencia, pues, más digna de nuestras meditaciones"(')•

6.- Poisson ha escrito sobre Laplace; que ha sido un genio en la mecánica celeste; que ha descubierto las causas de la aceleración de la Luna y que ha contribuído decisivamente al conocimiento de la mecánica de Saturno y Júpiter; pero que es sobre todo en probabilidades donde puede decirse que su obra ha sido aún mayor.

Una de las maneras que tenemos para justipreciar esta obra es señalar las fuentes en donde se originó, o sea, la herencia intelectual recibida por Laplace; y señalar, a su vez la influencia suya en las corrientes y escuelas contemporáneas.-

7.- Con Du Pasquier, podemos agrupar en tres direcciones las doctrinas e ideas probabilísticas que existían antes de Laplace y que convergieron hacia él: a) la dirección matemática; b) la dirección social y c) la dirección filosófica.

a) A la corriente matemática pertenecen: Galileo (1564-1642) con sus Conciderazioni sopra il giucco dei dadi; Pascal con su geometría del azar; Fermat (1601-1665) con sus soluciones a problemas propuestos por el Caballero de Méré; Huygens y Cardano como los Bernoulli (Santiago y Daniel). En verdad, toda la aristocracia de los siglos XVI y XVII se divertía en Francia con juegos de azar: los matemáticos estudiaban sus alternativas, pero, por lo común, no jugaban; excepción hecha de Cardano que también era veterano en competencias aleatorias.

Parece haber sido una de las preocupaciones de Laplace el buscar un procedimiento matemático que organizara y sistematizara todo lo que se sabía acerca del azar. Con la creación de

(') Esta cita, como las demás que se dan entre comillas, no son textuales sino adaptaciones de las palabras e ideas de Laplace.-

las funciones generatrices algo de su intento quedó satisfecho. Pero fué aún más allá, pues no sólo se dedicó a la consideración de los hechos curiosos propuestos por los jugadores, al estilo de lo que habían hecho Montmort (1678-1719) y De Moivre, (1667-1754), sino que se preocupó de hallar las aplicaciones del cálculo elegante a problemas concretos de la vida diaria, como los de la estadística, útil a hombres y naciones, y los de errores de observación, entonces en teoría útil a la ciencia natural, según lo había entrevisto ya Daniel Bernoulli.

b) La corriente social es de antigua data. Dícese que el griego Antímenes (324 a C.) ideó el primer sistema de seguros. Y de cierto sábese que el inglés Graunt (1620-1674) inició la elaboración de tablas de mortalidad, y que el célebre astrónomo Halley (1656-1742) fué el primero en concluir efectivamente una de ellas. Los holandeses, De Witt (1625-1672) y de Waveren utilizaron la probabilidad en temas financieros y en problemas de seguros.

En la misma dirección e influyendo directamente sobre Laplace, hay que consignar el Ars Conjectandi de Santiago Bernoulli (1654-1705). Este autor es el creador de la estadística censal científica y es quien mayor número de aplicaciones hizo de este asunto al tratamiento estocástico de nacimientos, muertes, matrimonios, etc..

El origen de la palabra "estocástica" es sugestivo.-

En el Filebo de Platón hay un pasaje donde Sócrates, hablando con Protágoras, pronuncia estas palabras (casi textuales): "Si se separa de todas las demás, el arte de contar, medir y pesar, lo que resta, a decir verdad, es bien poca cosa. Para su estudio no nos queda sino recurrir al ejercicio de los sentidos por medio de la experiencia directa de las cosas, es decir, por medio de una especie de rutina; y valernos del talento en conjeturar o talento estocástico. Este talento en conjeturar, esta especie de don adivinatorio, llega a adquirir perfección mediante la reflexión y el trabajo continuados, a pun to de que algunos suelen darle el nombre de arte conjetural".

La palabra griega στόχος es "fin al cual se tiende", "mira" o "blanco"; y el στοχαστικής fué "el que daba en el blanco" o "el pronosticador".

En las partes 3a. y 4a. del Ars conjectandi se habla de "ars conjectandi sive stochastice", esto es: arte conjetural o estocástica.

Las conjeturas basadas en los grandes números son el cimiento de la estadística, a la cual se aplicó Laplace, preferentemente en su aspecto social o demográfico, según hemos visto antes.

c) La corriente filosófica, donde se hallan entremezclados lógica y teoría del conocimiento, influye también sobre Laplace a través de los Bernoulli.

Santiago, en el Ars Conjectandi considera que el mismo conocimiento es una cantidad: la certeza una cantidad entera, la probabilidad una fracción; y la imposibilidad, su límite al tender aquella a cero.

Santiago es el autor de la definición (clásica) adoptada por Laplace, de tan memorable trascendencia: Relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles siempre que sean igualmente probables. "La definición completa de la probabilidad - afirma Poincaré - es pués una especie de petición de principio: ¿Cómo reconocer que todos los casos son igualmente probables?. Una definición matemática aquí no es posible; deberemos en cada aplicación hacer convenciones: decir que consideramos el caso tal como igualmente probable que el caso cual. Estas convenciones no son en realidad arbitrarias, pero escapan al espíritu del matemático, el que no deberá examinarlas después que sean admitidas.

"Así, todo problema de probabilidad ofrece dos períodos de estudio: el primero metafísico por así llamarlo, que legitima la convención; el segundo, matemático, que aplica a esa convención las reglas del cálculo".

Daniel Bernoulli (1700-1782) enunció el principio de razón insuficiente, recogido por Laplace en la definición de casos igualmente posibles, o sea, en su decir, "casos de cuya existencia estamos igualmente indecisos". Su justa apreciación - agrega - es uno de los puntos más delicados de la teoría del azar.

Cuenta Du Pasquier que el clérigo Bayes (1764-1765) estuvo bajo la influencia de Locke, Berkeley y Hume. Bayes, a su vez, influyó sobre Laplace directamente, e indirectamente a través de Euler y Legendre.

De esta manera, no nos extrañe oír a Laplace expresarse en términos inesperados. "Las cuestiones más importantes de la vida - asegura - no son, en gran parte, sino problemas de probabilidad. Se puede decir, hablando rigurosamente, que casi todos nuestros conocimientos no son sino probables; y, en el pequeño número de cosas en que podemos saber con certeza, en las matemáticas mismas, los principales medios para llegar a la verdad - a saber, la inducción y la analogía - están fundados en probabilidades; de suerte que el sistema entero de los conocimientos humanos se vincula a esta teoría".

8.- Con lo que hemos visto hasta aquí, ha quedado comprobado que Laplace recogió prácticamente todas las ideas fundamentales sobre probabilidad disponibles en su época, reelaborando una teoría compleja y polimorfa, donde intervienen conceptos de contenido heterogéneo.

Vamos a ver ahora cómo, desde las posiciones contemporáneas podrán apreciarse las distintas nociones sustentadas por el autor del Essai y de la Théorie Analytique, y cómo, recíprocamente, podremos interpretar dichas posiciones a la luz de estas obras, donde se encuentran en latencia las ideas modernas.

1) Un rasgo característico de las teorías frecuentistas, en su más alto desarrollo, es el de considerar el estudio de la probabilidad como análogo al de las ciencias naturales. Mises, por ejemplo, se propuso edificar una teoría matemática de la pro-

babilidad, de la misma manera - dijo - que la termodinámica o la electricidad. Los frecuentistas aceptan el origen empírico de la probabilidad y tratan de descubrir sus leyes partiendo de la observación de eventos reiterativos y a la larga.

Si bien Laplace no asimila la probabilidad a las ciencias naturales recordemos que sostiene que la teoría se aplica a las mismas cuando se trata de observaciones numerosas, y que también se aplica a las ciencias sociales (léase, estadística). Y que para ser posibles ambas aplicaciones lo único que se requiere es la numerosidad aleatoria o sea, lo mismo que ha venido a constituir el principio frecuentista por excelencia...

1) En otro lugár afirma Laplace que los principales medios para alcanzar la verdad - a saber, la inducción y la analogía - se fundan en las probabilidades; y por ende todo el sistema de los conocimientos humanos. Aquí Laplace habla con palabras de un Polya o de un Keynes o de algún otro partidario de la creencia racional. Más aún, cuando leemos en el Essai que "la certeza y la probabilidad son comparables".

3) Se acerca, en algún sentido, a los subjetivistas tipo de Finetti cuando explica los siguientes extremos: las diferencias esenciales que diferentes estados de espíritu pueden producir en la estimación de la probabilidad; cómo es que ella se relaciona con cuestiones tan sutiles que no sorprende comprobar que, con los mismos datos, dos personas encuentren resultados distintos...; y cómo es que las probabilidades hacen apreciar lo que los espíritus justos sienten por una especie de instinto...; ese instinto que no es, en el fondo, más que el buen sentido reducible a cálculo...

4) Koopman llama "intuición" a eso que Laplace denomina "instinto"; de Finetti denomina "coherentes" a los "espíritus justos".

5) Laplace es determinista, por lo cual el azar no es para él sino la expresión de nuestra ignorancia respecto a las

causas verdaderas. Pero a la probabilidad la relaciona en parte con esa ignorancia y en parte con nuestros conocimientos ciertos. Por tanto el reconocimiento de nuestra ignorancia es como un puente tendido hacia el Jeffreys que, extremando, rechaza el determinismo estricto; y es asimismo puente hacia aquellos para quienes el conocimiento es posible pero la certeza no.

6) Los trabajos de Reichenbach y de Carnap son intentos de fundamentar la inducción científica a través de la probabilidad. En el Essai habrán leído que la "inducción (y la analogía) se basan en las probabilidades". Polya, en la actualidad, se encuentra en el mismo camino, aunque sus consecuencias van todavía más allá.

7) Cuando Servien enuncia el fracaso del cálculo matemático del azar, se nos aparece como haciendo exagerado hincapié en aquel escrito de Laplace, de 1774, donde pone: "La teoría de las probabilidades es una de las más delicadas... por la dificultad de someter a cálculo sus problemas".

8) "La mayoría de los más importantes problemas de la vida no son más que problemas de probabilidad" afirma Laplace. El "dialectista" Nolfi se refiere a la probabilidad como a "la matemática de la conducta o matemática de la libertad", raíz de la vida.

9) Si van Dantzig nos trae la teoría de los "modelos" matemáticos y si Lévy sostiene que el cálculo de probabilidades es una "pura creación de nuestro espíritu", a semejanza de la geometría, ¿No es, acaso, también un "modelo" y una "creación" el intento laplaciano de reducirnos a la consideración de los "casos igualmente posibles" y el de adoptar una definición carente de contenido empírico?...

9.- Todos estos aspectos que hemos venido comentando, expresivos de elocuentes conexiones, nos conducen a confirmar nuestra opinión de que en Laplace están, en ciernes, casi todas las ideas principales que condicionan las distintas teorías fun damentadoras elaboradas hasta el presente.

La circunstancia de que una sola de sus muchas afirmaciones sobre la esencia y contenido de la probabilidad (la definición después denominada "clásica") haya sido generalmente considerada como la única representativa de sus ideas, se puede explicar por su eminente valor operativo, presente en todo lo extenso de la Théorie Analytique; pero, sin duda alguna, es una apreciación estrecha, parcial e incompleta. Porque Laplace ha presentido muchos otros aspectos del problema de la probabilidad; aspectos a los cuales él se refiere en forma escueta a lo largo de toda su obra y que ulteriormente, redescubiertos o revalorados, han dado motivo a las diversas direcciones de estudio, a veces adversas entre sí, que en tan grande número existen al presente.

Con lo dicho, a nuestro juicio, queda explicado el símil del árbol que dimos al principio. Las raíces ideales de Laplace la constituyen sus antecesores inmediatos y mediatos, según tres tendencias principales: la matemática de los Galileo, Pascal, De Moivre, etc., inspirada en la teoría de los juegos de azar, esencialmente combinatoria; la estadística, de Halley, De Witt, Santiago Bernoulli y otros, preocupada por los números censales; la filosófica, de la conjetura, de la predicción, de la lógica inductiva, cultivada por los Bernoulli y Bayes.

Las ramas ideales de Laplace se proyectan en grado primario o secundario hasta nuestros días. Con los subjetivistas o con los frecuentistas o con los logicistas o con los partidarios de la creencia racional, etc.; pues éstos encuentran en aquél antecedentes doctrinales, como hemos podido ver. Hay, por ende, en esta proyección histórica una especie de convergencia o tendencia a la centralización unitaria, que trasciende los aspectos de la irreconciliable actitud asumida por los defensores de las corrientes actuales.

Interpretadas así, las vinculaciones expresadas dan pié a la suposición de que existe un método unificador de las dife rentes fundamentaciones de la probabilidad; disciplina ésta digna de nuestra atención aunque no sea sino por haberlo sido, en su hora, de tantos y tan notables ingenios.-

—o—

NOMBRES PROPIOS CITADOS EN EL TEXTO (')

(Los números indican párrafos o subpárrafos)

(') No incluye el Apéndice, por no figurar éste en la primera edición.-

B I B L I O G R A F I A

ARISTOTELES, Metafísica, Espasa-Calpe, Bs.As.,1945.-

BERGMAN, Gustav, "Frequencies, probabilities and positivism", Philosophy and Phenomenological Research, 5, (1945), 6 (1946).

BIRKHOFF, G., "Lattices and their applications", Bull.Am.Math. Soc., 1939.-

BOREL,Emile, Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications, Tome I: Les Principes de la Théorie dos Probabilités, Fascicule I: Principes et Formules Classiques du Calcul des Probabilités (rédigé par René Lagrange), Gauthier - Villars, París,1947.-

"Probabilité et certitude",Congrès International de Philosophie des Sciences (París,1949),VI, Calcul des Probabilités, Hermann, París, 1951.-

BUNGE, Mario, What is Probability? (inédito), Bs.As. 1952.-

CANSADO, Enrique, Integral de Stieltjes-Lebesgue y sus Aplicaciones a la Estadística, Memorias del Instituto "Jorge Juan", Madrid, 1946.-

CARNAP, Rudolf, "The two concepts of probability" (Igual referencia que Bergman Gustav).

"Remarks on induction and truth". (ibídem).

Logical Foundations of Probability, University of Chicago Press, Chicago, 1951.-

CASTELNUOVO, Guido, Calcolo delle Probabilità, Vol. I,Zanichelli, Bologna, 1933.-

CERNUSCHI, Félix, "Una formulación no contradictoria del colectivo de von Mises", Ciencia e Investigación, 5,Bs.As., 1949.-

COOLIDGE, Julián Lowell, An Introduction to Mathematical Probability, Oxford U.Press, Londres, 1942.-

CRAMER, Harald, Mathematical Methods of Statistics, Princeton U.Press, Princeton, 1946.-

Random Variables and Probability Distributions, Cambridge U.Press, Cambridge, 1937.-

van DANTZIG, D. "Sur l'analyse logique des relations antre le calcul des probabilités et ses applications". (Igual referencia que Borel, "Prob. et certitude"), 1951.-

DEDEBANT G., DI MAIO R., MACHADO A., "Los números aleatorios y su aplicación a la meteo rología", Meteoros, III, 1, Buenos Aires, 1953.-

DU PASQUIER, L.G. Le Calcul des Probabilités, son Evolution Mathématique et Philosophique, Hermann,París, 1926.-

FELLER, Willy, "Sûr les axiomatiques du calcul des probabilités et leurs relations avec les expériences", Colloque consacré a la Théorie del Probabilités, (IIp.),Hermann,París,1938.

de FINETTI Bruno "Recent Suggestions for the Reconciliation of Theories of Probability", Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probablity (1950); University of California Press, 1951.-

"Sul significato soggettivo della probabilitá" Fundamenta Mathematicae, 17, Varsovia, 1931.-

"Rôle et domaine d'application du theoreme de Bayes sélon les différents point de vue sur les probabilités". (Igual referencia que Borel, "Prob. et certitude"),1951.

FORTET, Roberto, "Opinions modernes sur les fondements du Calcul des Probabilités" Les Grands Courants de la Pensée Mathématique (por F.Le Lionnais), Cahiers du Sud, Fontenay aux-Roses, 1948.

"Faut-il élargir les axiomes du Calcul des Probabilités?" (Igual referencia que Borel, "Prob. et certitude"), 1951.-

FRECHET, Maurice "Exposé et discussion de quelques recherches récents sur les fondements du calcul des probabilités"(Igual referencia que Feller), 1938.-

"Rapport général sur les travaux du colloque de Calcul des Probabilités" (Igual referencia que Borel, "Prob. et certitude"), 1951.-

GONSETH,Ferdinand, La géométrie et le Probleme de l'Espace,tomo I, Griffon, Nevchatel (Suiza), 1945.-

GOOD, J.G. Probability and the Weighing of Evidence, Griffin, London, 1950.-

JEFFREYS, Harold, Theory of Probability, Oxford U.Press, Oxford, 1948.-

KAUFMAN, Félix "On the nature of inductive inference", (igual referencia que Bergman), 1946.-

"Scientific procedure and probability"(ibídem).

KAWADA, Y. "Über eine verbandstheoretische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Japanese Journal of Mathematics, 18, 1943.-

KEMBLE, E.C., "The probability concept", Philos. Sci.Vol. 8, 1941.-

KENDALL, M.G. "On the reconciliation of theorces of Probability", Biometrika, 36, 1949.-

KEYNES, John M. A Treatise on Probability, Mac Millan,Londres, 1929.-

KOLMOGOROV, Andrei N., Foundations of the Theory of Probability (trad. del alemán), Chelsea, N.York, 1950.-

KOOPMAN, B.O., "The Axioms and Algebra of Intuitive Probability", Annals of Mathematics,41,1949.

"Intuitive Probabilities and Sequences", Annals of Mathematics, 42, pág. 169.

(Comentarios al Symposium sobre probabilidades de 1945-1946), Mathematical Reviews, 7, p.186-192; 8, p.245-246.

LAPLACE, Pierre S. Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades (trad.), Espasa-Calpe, Bs.As., 1947.-

LEVY,H. y ROTH L. Elements of Probability, Oxford U.Press, Londres, 1936.-

LEVY, Paul, "Aritmétique et calcul des probabilités", (Igual referencia que Borel, "Prob. et certitude"), 1951.-

MARGENAU, Henry, "On the frequency theory of probability". Igual referencia que Bergman), 1946.

MARTINEZ SALAS,J. Generalización de las Integrales Singulares a la Integral de Stieltjes, Memorias del Instituto "Jorge Juan", Madrid, 1949.

von MISES, Richard "On the foundations of Probability and Statistics", The Annals of Mathematical Statistics, 12, 1941.
"Comments on Donald Williams'paper" (igual referencia que Bergman), 1946.-

Probabilidad, Estadística y Verdad (trad.) Bs.As., 1946.

"Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités"(Igual referencia que Feller), 1938.-

Wahrscheinlichkeitarechnung und ihre Anwendun in der Statistik un Theoretischen Physik, N.York, 1945.-

NAGEL, Ernest, "Probability and non-demonstrative inference" (Igual referencia que Bergman), 1946.-

NOLFI, P. "La Connaissance Probable" (Igual referencia que Borel, "Prob. et certitude"), 1951.

POINCARE, H. Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, París, 1912.-

REICHENBACH, Hans "Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung" Mathematische Zeitschrift, 1932.-

Experience and Prediction, University of Chicago Press, Chicago, 1949.-

"Philosophical Foundations of Probability" Proceedings of the Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, California, 1949.

"Reply to Donald C. Williams' criticism of ghe frequency theory of probability" (Igual referencia que Bergman), 1946.-

REY PASTOR J. y SANTALO SORS L.A, Geometría Integral, Espasa-Calpe, Bs.As., 1951.

RIOS, S. "Introducción a la Axiomática del cálculo de Probabilidades", Las Ciencias, año 12, N° 3, Madrid, 1947.-

SCHRÖDINGER, E., "The foundation of the theory of probability", Proceedings of the Royal Irish Academy, 51, 1947.-

SERVIEN, Pius, Hasard et Probabilités, Presses Universitaires de France, París, 1949.

Probabilités et Physique, Hermann, París, 1945.-

"Hasard et Mathématiques", Les Grans Courants de la Pensée Mathématique (por F. Le Lionnais), Cahiers du Sud, Fontenay-aux-Roses, 1948.

TODHUNTER, I., A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace, Chelsea, N.York, 1949.

TORANZOS, Fausto I. "Elementos para una definición de probabilidad", Rev. de la Facultad de Ciencias Eco nómicas de la Universidad de Cuyo,1,Mendo za, 1949.-

USPENSKY, J.V., Matemáticas de las Probabilidades (trad.) Bs.As., 1947.-

WEYL Hermann "The ghost of modality", Philosophical Essays in Memory of Edmund Husserl, Haward University Press, Cambridge, Mass., 1940.-

Philosophy of Mathematics and Natural Scien ce (trad.), Princeton University Press, Princeton, 1949

WILLIAMS, Donald "On the derivation of probabilities from frequences", Philosophy and Phenomenologi cal Research, 5,6, 1946.-

"The Challenging situation in the philoso phy of probability" (ibídem).-

---o---

Reconocimiento: Agradecemos a los doctores Pedro Pi Calleja, Agustín Durañona y Vedia, y Emilio A.Machado, las indicaciones bibliográficas que nos hicieron oportunamente; en especial,al primero de los nombrados, por habernos facilitado su Nota Bibliográfica sobre Fundamentación del cálculo de Probabilidades (marzo de 1951).-

BIBLIOGRAFIA DEL APENDICE

DU PASQUIER,Gustave "Le Calcul des Probabilités, son évolution mathématique et philosophique, Hermann, París, 1926.-

GOURAUD, Charles "Histoire du Calcul des Probabilités, depuis ses origines jusqu' a nos jours" París, 1848.-

TODHUNTER I. "A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace" (1864), Chelsea, N.York,1949.

POINCARE H. Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, París, 1912.-

LEVY H.Roth L. Elemente of Probability, Oxford, 1936.-

del Busto E. Los Fundamentos de la Probabilidad (De La place a nuestros días) Exposición crítica, 1953.-

I N D I C E

---o---

Esta publicación fué impresa en los Talleres de la Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de la Universidad Nacional de Eva Perón